新潟大学教育人間科学部数学教室,『数学教育研究』, 第 41 巻, 33-60, 2006.

数学科における多様な視点を培う指導法の研究
〜概念地図を用いた比較・検討を通して〜

新潟大学大学院教育学研究科
(新潟市立鳥屋野中学校)
荒木　良則

1　はじめに

「学力」を「教育内容を子供が学習して獲得した能力」すなわち測定可能な知識・技能の定着度ととらえる考え方と「獲得した知識・技能をもとに実際の場面に取り組む力」ととらえる考え方がある。社会の変化が激しい 21 世紀に求められているのは,後者であり,このことは,学習指導要領解説[1]においても「数学の学習は,単に問題を解いて答えを求めるということだけではない。(中略)『自ら課題を見つけ,自ら学び,自ら問題を解決していく』数学学習の実現を目指す(以下略)」と明記されている。

まず,「このような力は培われているのか」「足りない力があるとすればそれは何か」を明らかにするために,国立教育政策研究所が公表している平成 13 年度および平成 15 年度の「教育課程実施状況調査」の結果[2]を考察する。表 1-1 が平成 15 年度,表 1-2 が平成 13 年度の学年別の設定通過率との比較を示したものである。

区　分		全問題数	設定通過率との比較					
			上回ると考えられるもの		同程度と考えられるもの		下回ると考えられるもの	
			問題数	割合	問題数	割合	問題数	割合
数学	第 1 学年	69	18	26.1%	20	29.0%	31	44.9%
	第 2 学年	65	14	21.5%	23	35.4%	28	43.1%
	第 3 学年	62	16	25.8%	22	35.5%	24	38.7%

表1-1:平成15年度教育課程実施状況調査(学力検査)

区　分		全問題数	設定通過率との比較					
			上回ると考えられるもの		同程度と考えられるもの		下回ると考えられるもの	
			問題数	割合	問題数	割合	問題数	割合
数学	第 1 学年	69	16	23.2%	20	29.0%	33	47.8%
	第 2 学年	72	21	29.2%	29	40.3%	22	30.6%
	第 3 学年	62	13	21.0%	31	50.0%	18	29.0%

表1-2:平成13年度教育課程実施状況調査(学力検査)

表 1-1 と表 1-2 を比較すると,「設定通過率を下回ると考えられるもの」が第 1 学年で

はわずかに減少しているが, 第 2 学年と第 3 学年では大きく増加している。

次頁の表 1-3 は平成 15 年度, 表 1-4 は平成 13 年度の観点別設定通過率との比較である。これらからは, 各学年とも,「数学的な考え方」(「数学的な見方や考え方」)で, 設定通過率を下回ると考えられる問題が多いことがわかる。

区分			問題数	設定通過率との比較		
				上回ると考えられるもの	同程度と考えられるもの	下回ると考えられるもの
数学	第 1 学年	数学への関心・意欲・態度	14	2	3	9
		数学的な見方や考え方	20	3	7	10
		数学的な表現・処理	32	9	8	15
		数量, 図形などについての知識・理解	17	6	5	6
	第 2 学年	数学への関心・意欲・態度	12	1	4	7
		数学的な見方や考え方	25	3	9	13
		数学的な表現・処理	26	8	10	8
		数量, 図形などについての知識・理解	14	3	4	7
	第 3 学年	数学への関心・意欲・態度	14	1	6	7
		数学的な見方や考え方	26	4	11	11
		数学的な表現・処理	21	8	8	5
		数量, 図形などについての知識・理解	15	4	3	8

表1-3：平成15年度観点別設定通過率との比較

区分			問題数	設定通過率との比較		
				上回ると考えられるもの	同程度と考えられるもの	下回ると考えられるもの
数学	第 1 学年	数学への関心・意欲・態度	10	3	4	3
		数学的な考え方	18	3	3	12
		数学的な表現・処理	33	7	10	16
		数量, 図形などについての知識・理解	18	6	7	5
	第 2 学年	数学への関心・意欲・態度	11	5	4	2
		数学的な考え方	20	5	6	9
		数学的な表現・処理	37	10	19	8
		数量, 図形などについての知識・理解	15	6	4	5
	第 3 学年	数学への関心・意欲・態度	15	2	8	5
		数学的な考え方	25	4	10	11
		数学的な表現・処理	22	7	13	2
		数量, 図形などについての知識・理解	15	2	8	5

表1-4：平成13年度観点別設定通過率との比較

また, 資料では, 調査結果を分析した結果, 以下のような特色が述べられている。

○　同一問題において, 単純に計算する問題では, 前回を有意に上回っているものが多い。その一方で, 数量を文字を用いて表現したり, 式を読んだりするといった数や文字式の意味の理解の問題, 関係の理解の問題では前回を有意に下回っている問題が多い。

○ 「文字式による証明」,「方程式の利用」,「方程式の解の意味」の問題については,設定通過率を下回ると考えられる問題が多く,通過率が低い。
○ 図形では,第 1 学年の「角柱,円錐などの表面積と体積を求めること」の通過率は設定通過率を下回ると考えられるが,作図問題では設定通過率を上回ると考えられる。第 2,第 3 学年の証明に関わる問題では,設定通過率を下回ると考えられる。

○ 学習指導要領で重視している「論理的に考える力」については,事象の正誤を判断し,その理由を記述する問題において設定通過率を下回ると考えられる。さらに「実生活と数学との関連」について,数学の学習内容が数学や他の教科等の学習にとってどんなよさがあるのかなどを把握する「よさを答える問題」では設定通過率を下回ると考えられ,無解答の反応率も高い。
○ 記述式の問題で,第 1 学年の作図の問題,第 2 学年の平行線に補助線を引く問題などでは通過率が高かった。一方,記述式の問題のうち,自分の考えを書く問題の通過率は全般的に低い。また,記述式の問題では無解答の反応率が高い。
○ 国際調査において指摘された「基礎的・基本的な計算技能の定着」について,本調査では低下傾向は見られないが,「計算の意味理解などについての定着」,「数学的に解釈する力や表現する力」,「実生活と数学との関連」などの指導に課題がある。

以上のことから,次のことが十分ではないことがわかる。

① 論理的に考える力
② 自分の思考過程を明らかにし,それを表現する力
③ 数学のよさをとらえ,積極的に活用する力

すなわち,「学力」を「獲得した知識・技能をもとに実際の場面に取り組む力」ととらえた場合,その定着度は低いといわざるを得ない。

2 多様な視点を培う指導の必要性とその方策

2.1 これから求められる学力

激しく変化している今日の情報化社会では,情報量(知識量)が年々増大するとともに,情報の陳腐化が早くなっている。このような社会に出て活躍するためには,ある一定の枠の中の応用の利かない「知」だけを詰め込むような学習は無意味である。情報を収集し状況に応じて考えたり加工したりするなどの情報処理能力,その場に応じた判断力が求められる。また,身につけた「知」を積極的に更新していく力も要求される。したがって,これからの教育では,生徒が学習によって得た新しい情報を自分の知識構造に取り込んで意味のあるものにしたときに生まれる「知」を獲得できるように改善しなければならない。生徒が学習の方向性を認識しながら,自分の内面にある知の構造やその変容の様子を明らかにできるような工夫が必要である。

2.2 多様な視点を培う学習活動

本研究における「多様な視点を培う学習活動」とは，次の①～③であり，1 で明らかにした不十分だと考えられる力を育成していくために欠かせないものである。

① 多様な方法を考える
② 多様なきまりを見つける
③ 新しい問題を作る

また，このような学習活動において，生徒自らが追究を進める中で，「問題の意味を明確にしよう」「分類してみよう」「どのように分類したか簡潔明確に表す方法を工夫しよう」「式を読もう」「一般化しよう」などの力が要求される。このような知識や技能と異なる力，つまり数学的な考え方[3]を鍛えることができる学習活動でもある。

2.3 具体的な方策

2.3.1 課題の設定

「多様な視点を培う」ための課題は，次の条件を満たさなければならないと考える。

・ 多様な解決が可能なこと
・ 新しい課題が作れること
・ 一般化することができるなど本質的な数学の構造に迫れること

2.3.2 概念地図

福岡氏[4]によれば，コーネル大学のノヴァックらが，有意味学習で関連あるものが結びついている頭の中の概念構造を視覚化しようと「概念地図法(Concept Mapping)」を開発した。これは頭の中の概念同士を結びつけるもので，明確な階層構造をもっているものである。具体的には，図 2-1 のように概念を表す「概念ラベル」とそのつながりを表す「リンクワード」を用いて図式化する。

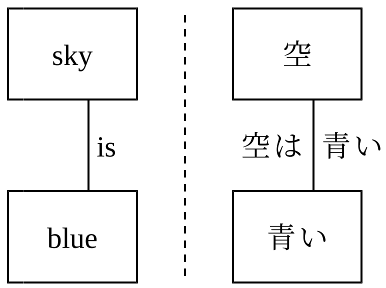


図2-1：簡単な概念地図

本研究における概念地図は，この手法をもう少し弾力的に利用したものであり，厳密な意味での概念を結ぶとは限らないし，リンクワードを記述しないこともある。

この概念地図を導入することによって，以下のような効果が期待できる。

① 生徒自身が考えるようになる[5]
② 知識を構造化することができる
③ 有効な自己評価ツールとなる
④ 指導と評価の一体化を図ることができる

2.3.3 探索マップ

探索マップとは，生徒の興味・関心を基にして，課題を次々と展開させていくウェビングの手法を利用したものであり，学習活動を網の目のようにつなげていく「学び」の関連づけの活動である。具体的には，あるテーマを中心に置き，そこから放射状に発散的に思考の過程を記述していくこと(四方八方に広げない場合もある)になる。すでにわかっている概念などを並べていくものとは異なることから，概念地図と区別している。

この探索マップを導入することによって，以下のような効果が期待できる。

① 自分の考えを整理することができる
② これまでとは違った視点から見たり, 考えたりすることができる
③ 既知の見方・考え方から新たな見方・考え方に気付くことで, 新たな学習内容を学ぶことができる
④ 自分の見つけた課題をつなげていくという「学び」の楽しさを実感できるとともに, 自分の興味・関心がどこにあるのかを把握することもできる
⑤ 学びの足跡を残すことができる

さらに, 中心から枝を伸ばしてみたり, ブランクのある探索マップを用いることで発散的思考をする際の「もうこれ以上は考えられない」といったメンタルブロックを打ち破ることもできる。なぜならば,「まだ考える余地がある」ことが目に見えるからであり, 何をどうするための方法を考えているのかが明確になるからである。

3 実践1:星形多角形の探究(中学校2年生)

3.1 授業の目標

○ 平面図形の基本的な性質などを概念地図に表して, 性質同士のつながりや全体像をとらえることができる。
○ 概念地図に記述されていることを前提条件として用いて, 新たな図形の性質を証明することができる。
○ 図形の性質を複数の方法で証明することにより, 推論の筋道が複数あることに気付くことができる。
○ 探索マップを活用して, 命題を一部変更したり, 変更した命題同士をあわせたりして, 新たな命題を作り, 図形の性質を拡げていくことができる。
○ 新たな図形の性質を概念地図に位置づけることを通して, 他の図形の性質との関わりに気付くことができる。
○ 図形の性質を拡げたり, それを体系化して図形の世界を拡げていく喜びを実感することができる。

3.2 既有の知識を俯瞰する(概念地図)

3.2.1 概念地図の作成

三角形の合同条件を学習する直前(6)まで学習した後で, ここまでに明らかにした図形の性質などを概念地図に整理する。

生徒は, 中学 2 年生のこの段階まで図形の性質を直観的経験的にとらえてきているので, 図形の定義と性質が区別されず, 混同していることが多い。したがって, この単元で演繹的な論証を進めていくためには, 用語の意味を明確にし, 定義と性質を区別して考えを進めていくように指導していく必要がある。また, 小学校で既習の内容も多いが, 図形の性質を生徒に発見させるようにし, その性質が一般的に成り立つことを説明する必要性を実感させる活動を組織することによって, 演繹的な推論の必要性を感じることができるようにしなければならない。そこで, 明らかにした事象同士を関連づけていく概念地図を作成

し, 学習内容の構造を俯瞰することで, 演繹的な推論がこれまでに明らかになっている事象を用いて新たな事象を明らかにしていく説明の仕方であることを意識させる(7)。

3.2.2 概念地図の評価

図 3-1, 3-2(次頁)が生徒が作成した概念地図である。

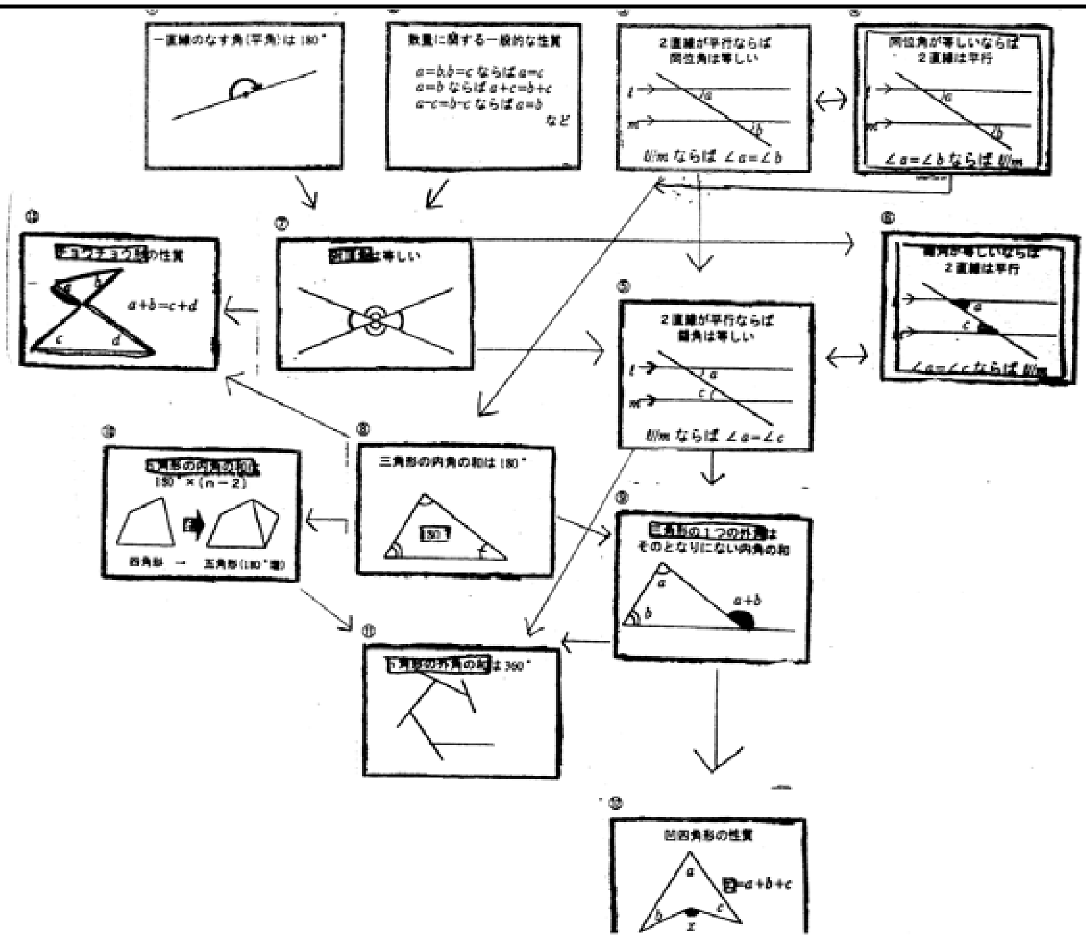


図3-1：生徒Aの概念地図

生徒 A, B ともに, この範囲のペーパーテストではよい結果を残している。しかし, 生徒 A の概念地図では,「対頂角は等しい」の根拠として「一直線のなす角は 180°」と「数量に関する一般的な性質」が結ばれているのに対して, 生徒 B では,「対頂角は等しい」の根拠となるものがないなど, 演繹的な論証のための準備が整っているとはいえない状況である。このように, 概念地図は生徒の内面にある知の構造を明らかにするために有効な手だてであるとともに, 生徒 B 自身も「一つ一つの定義や定理を覚えるだけではわからなくなってしまう」と記述しているように, 概念地図作成の段階で, 自分の理解が不十分であることに気付くことができた。したがって, 本実践における概念地図では, 教師の評価ツールとしての機能と生徒の学習(自己評価)ツールとしての機能が備わっているといえる。

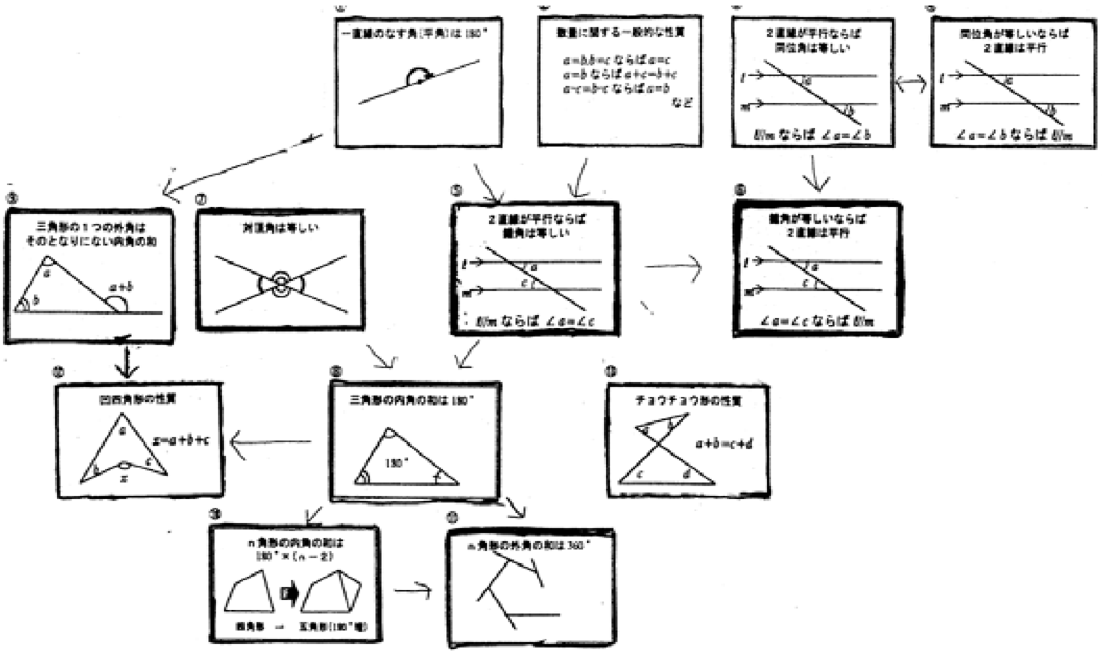
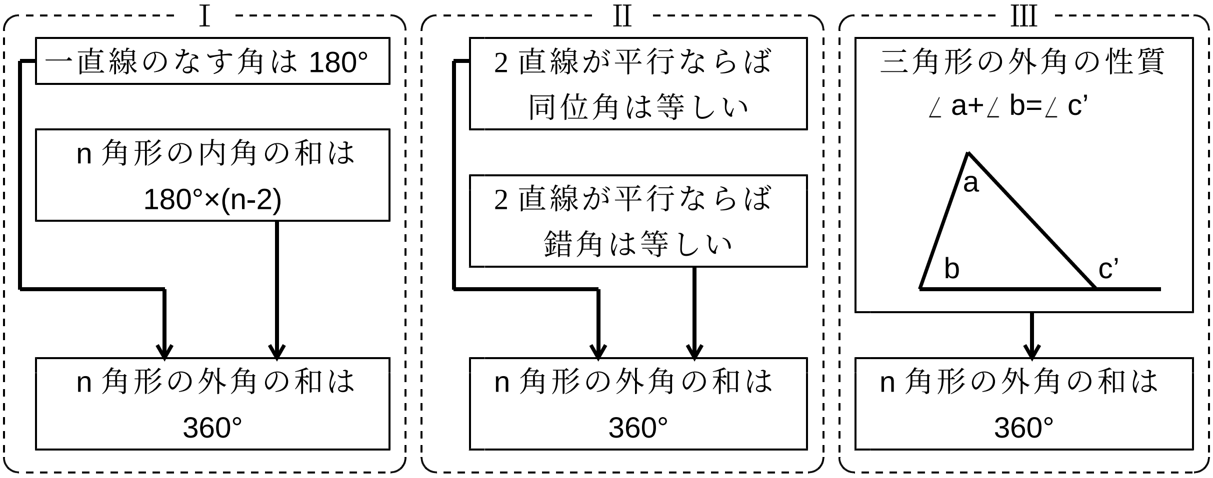


図3-2：生徒Bの概念地図

3.2.3　概念地図の交流・検討

仲間の考え方を知るための手段として，各自の概念地図を仲間と交流・検討する活動を組織する。このとき，ある命題を，仲間がどの図形の性質を根拠としているかを観点として検討するように「矢印がどこから引かれているかを見る」ことを指示する。

ここでは，複数の証明の方法がある命題として「多角形の外角の和は 360°」を取り上げ，仲間が何を根拠として証明しているのかを交流・検討させた。生徒は，次の 3 通りの線の引き方があることに気付いた。



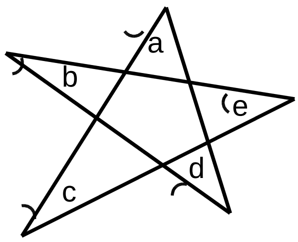
I の矢印しか結んでいなかった生徒は，II の結び方を見て，平行線を利用して証明する方法を思い出すことができた。また，矢印を結ぶことができなかった生徒も，仲間の概念地図を見て，仲間がどのように証明を考えているのかを知ることもできた。さらに，概念

地図作成前の授業では全体の前で取り上げていないⅢのように線を結んでいる仲間の考えについて，本当に証明できるのかを議論しあう姿が見られた。しかし，残念ながら，三角形と四角形の場合についての議論のみで成り立つと結論づけたので，全体の場で議論することにした。

3.3 多様な方法で解決する

3.3.1 課題設定

前時の課題「五角形の外角の和が 360° であることを三角形の外角の性質を使って証明できるか」から新たに出てきた課題を追究するために，ここまで学習してきた多角形を，いくつかの点を順番に結んでできた図形ととらえ直す。そして点を結ぶ順番を変えたときにできる図形として星形五角形(pentagram)を導入し，とがった部分の角(以下，頂角と呼ぶことにする)の和を求める課題(図 3-3)を提示する。この課題は，本実践では授業の流れの中から出てきたものであるが，前時の課題から出てこなくとも，形の美しさから生徒の興味関心を高めることができるだけでなく，多様な方法で解決することが可能な数学的な価値の高い素材である。



∠a+∠b+∠c+∠d+∠e
をいろいろな方法で求めよう。

図3-3：星形五角形の課題

3.3.2 課題追究

課題追究の際には，概念地図を見ながら，これまで明らかにしてきた様々な図形の性質のうち，どれが使えそうなのかを考えながら取り組ませた。以下に生徒(28 人中)の反応(表 3-1)を原則として生徒が考えた順に示す。

方法①：分度器で実測する　　方法②：切って並べる
方法③：鉛筆回し　　方法④：平行線の利用(ⅰ)
方法⑤：チョウチョウ形の性質を利用する
方法⑥：凹四角形の性質を利用する　　方法⑦：三角形の外角の性質を利用する
方法⑧：平行線を利用する(ⅱ)　　方法⑨：五角形で囲む
方法⑩：星形五角形を五角形と 5 つの三角形と見る
方法⑪：3 つの三角形から不要な部分を引く

方法	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪
人数	12	7	4	14	23	27	21	2	7	4	1

表3-1：星形五角形の課題における方法別解決人数(28人中，重複あり。)

課題追究のまとめとして，それぞれの方法を見いだすきっかけについて振り返ってワークシートにまとめるよう促した。生徒が記述したきっかけで最も多かったのは，「概念地図を見ながら使えそうな図形の性質はないかと考えた」であった。このことから，概念地図上に既有の知識をまとめておく方法は，新たな課題を多様な方法で解決する際に有効であったといえる。また，「仲間の補助線を見て気が付いた」「仲間と相談しながら図形をなぞっていたら気が付いた」という記述も多く見られたことから，課題解決中の仲間同士の交流の重要性も浮かび上がってくる。

また，多様な方法を考える授業では，思考が発散しすぎてしまい，時間が不足することが懸念される。実際，生徒集団は異なるが，概念地図をまとめそれを参照しながら課題に取り組んだ今回の実践では，課題追究・発表・検討・まとめで約 1.5 時間短縮でき，一人あたりの解決方法数も増えた(表 3-2)だけでなく，仲間の発表を聞いてそれぞれの方法で「なぜ 180° になるのか」「なぜそのような方法に気付いたのか」を説明できるようになったと自己評価した生徒も多い(表 3-3)。

方法数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	平均
人数	0	1	5	7	10	3	0	1	0	1	3.7 個

表3-2：生徒一人あたりの解決方法数(課題解決中)

方法数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	平均
人数	0	1	0	2	0	0	1	2	8	9	5	8.9 個

表3-3：仲間の発表後，それぞれの方法で説明できると自己評価した人数

ここまでの学習の後，星形五角形の頂角の和は 180° であることを概念地図に位置づける活動を組織し，再度，仲間との交流・検討を行わせた。完成した概念地図が，図 3-4，3-5 (次頁)である。

3.4　見方を変更して課題を作る（探索マップ）

3.4.1　課題設定

発展的な課題として，「星形五角形の課題」を作りかえる課題を提示し，解決が可能かどうか，数学的に価値があるかどうかにかかわらず，思いつくだけ記述させた。

3.4.2　課題追究

ここでは，探索マップを用いる。これは，用紙の中心に「星形五角形の課題」を記述し，そこから放射状に思いつく課題を記述していくものである。思考の制限がなく，無限な可能性が秘められている。また，ある見方と他の見方を結びつけてさらに新たな課題を作ることもできる。

はじめに，中心から伸ばした枝に，「星形五角形の課題」を変化させるときに思いつく新たな見方を記入させた。すると，容易に点の個数を変えてみることや結ぶ先の点を変えることが考え出された。次に，それぞれの枝をどんな場合があるかで枝分かれさせるように促した。つまり，点の個数を変える場合は「具体的な点の個数」で，結ぶ先の点を変え

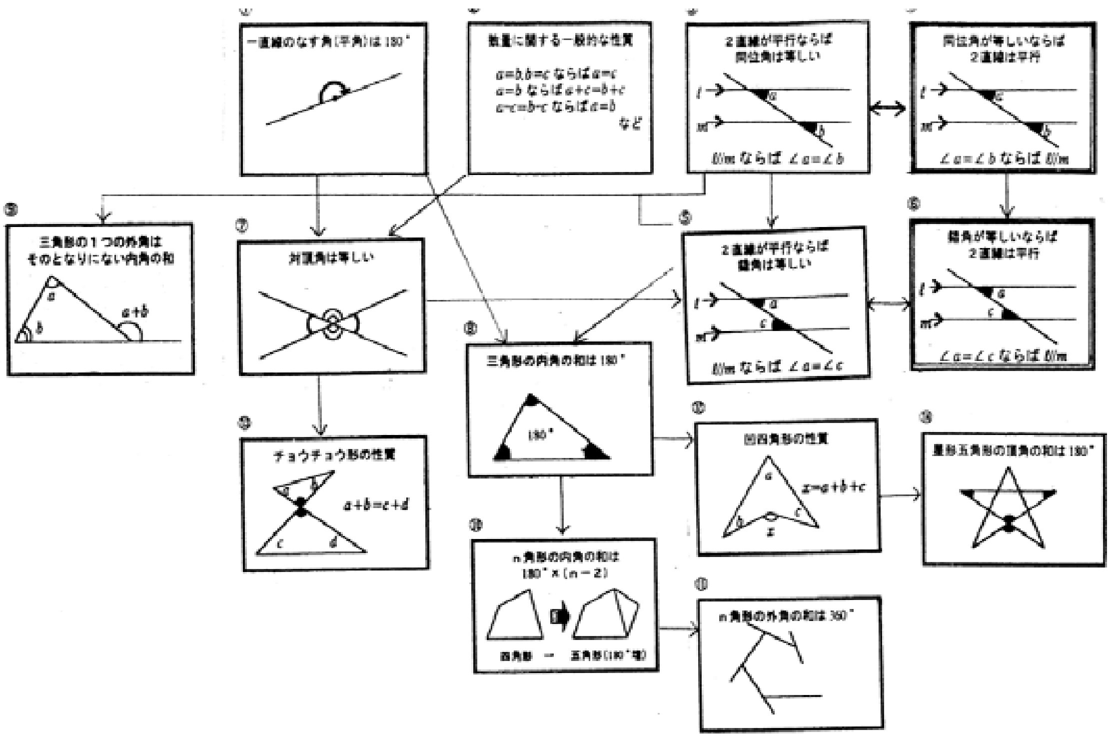


図3-4：生徒Cの概念地図(星形五角形を含む)

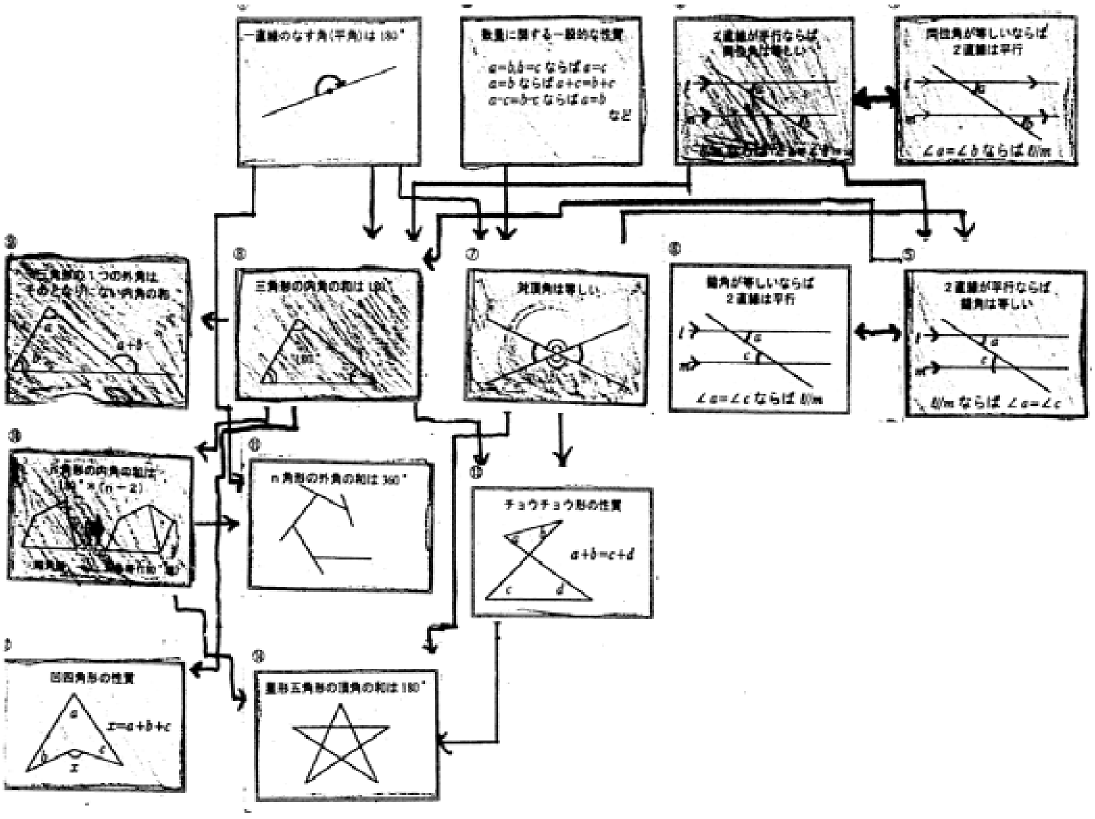


図3-5：生徒Dの概念地図(星形五角形を含む)

る場合は「いくつ先の点と結ぶか」で枝分かれしていくことになる。また, 枝分かれさせた場合に簡単な図も描いてみるよう促した(図 3-6)。

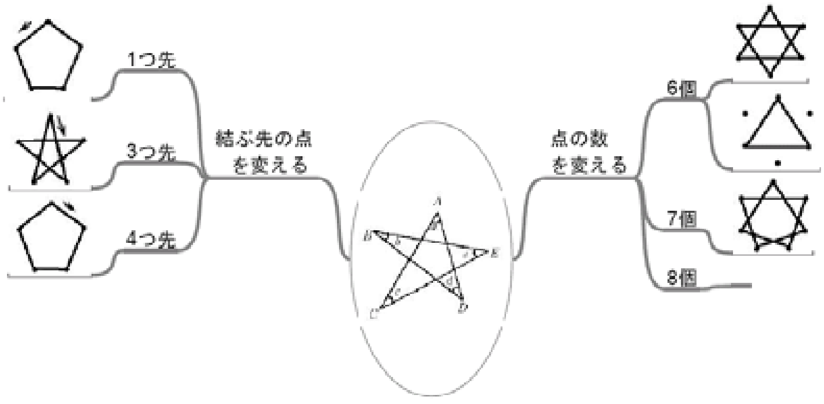


図3-6：第1段階の探索マップ

実際に探索マップ上に図を描くことで, 結ぶ先の点を変えたとき, 1つ先を結ぶものと 4 つ先を結ぶものは同じ図形ができ, 点を結ぶ順番が逆回りになっていることに容易に気付くことができた。そこで, これらを両方向の矢印で結ぶよう指示した。

さらに, 他の見方を考えるよう促すと, 2つの見方をあわせて,「点の数を変え, かつ, 結ぶ先の点を変える」ことがすぐに考え出された(図 3-7)。

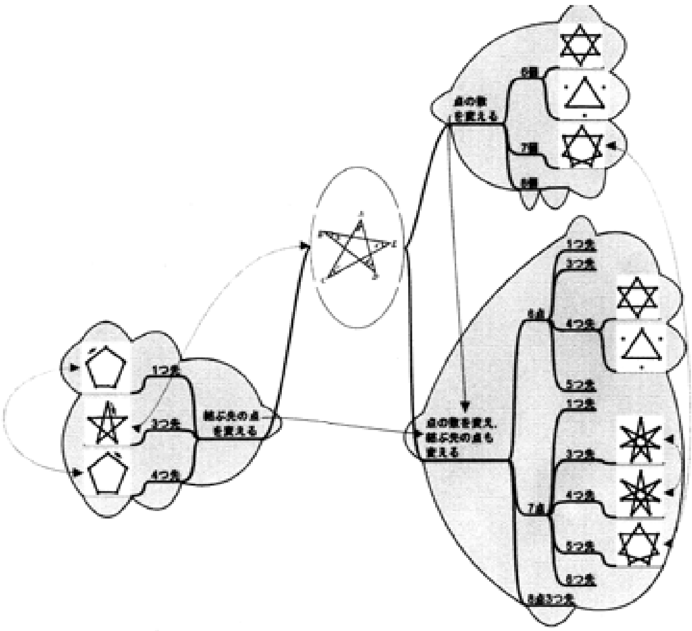


図3-7：第2段階の探索マップ

ここで, 課題追究を始める生徒がいたが, 発散的思考の場面では発散的思考のみを続けさせるために, 追究は後にしてどんどん他の見方を考えるよう指示した。

しかし, なかなか他の見方が出てこなくなったので, 探索マップに1つの枝を追加(図 3 -8)するよう促すとともに, 発散的思考の場合には質よりも量が大切であることを確認し,「星形五角形の課題」を文章で表現した。

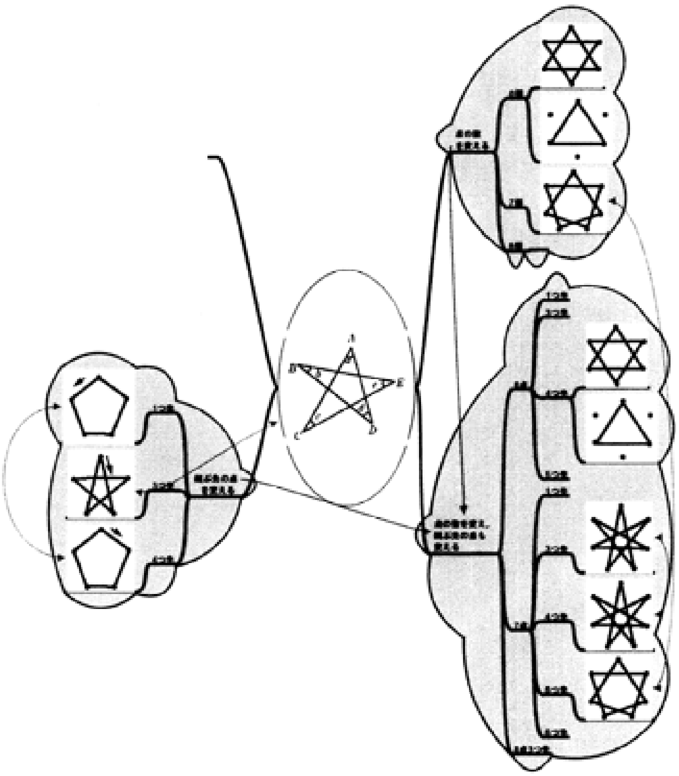


図3-8：第3段階の(メンタルブロックを打ち破るための)探索マップ

すると，「求める角の場所を変える」や「いくつの面に分けられるか」などの見方が出てきた。これらの新しい枝を，例えば，角の場所を変える場合，「頂角の和」から「外角の和」や「内部のすべての角の和」などに枝分かれさせ，さらに広がった探索マップが図 3-9 である。

以上の活動で，次の新たな課題を作ることができた。

［課題 A］点の数や点の結び方を変えた場合，頂角の和は何度になるか。
［課題 B］星形五角形の外角の和は何度か。いろいろな方法で求めてみよう。
［課題 B'］点の数や点の結び方を変えた場合，外角の和は何度になるか。
［課題 C］星形五角形の内側のすべての角の和は何度になるか。
［課題 C'］点の数や点の結び方を変えた場合，すべての角の和は何度になるか。
［課題 D］点の数や点の結び方を変えた場合，どんなときに一筆書きができるか。
［課題 E］ 点の数や点の結び方を変えた場合，辺の数はどのように変わるか。
［課題 F］点の数や点の結び方を変えた場合，面の数はどのように変わるか。

課題 A はよくある発展教材として取り上げられることの多いものであるが，課題 B(B')や C(C')といった一般化が可能で，数学の本質的な構造を考えるきっかけとなるものも出てきている。課題 A を追究するためにすぐに 2 次元表を持ち出して生徒に追究させていたならば，見いだすことはできなかった課題である。そして，何より，これ以上は不可能だと感じたところから，メンタルブロックを打ち破って，このような興味深い課題を見いだした経験は大きい。それは，与えられた課題に応じたタクティク(tactic)[(8)]を適用して課題解決をするのではなく，自ら課題を見つけていくことだからである。

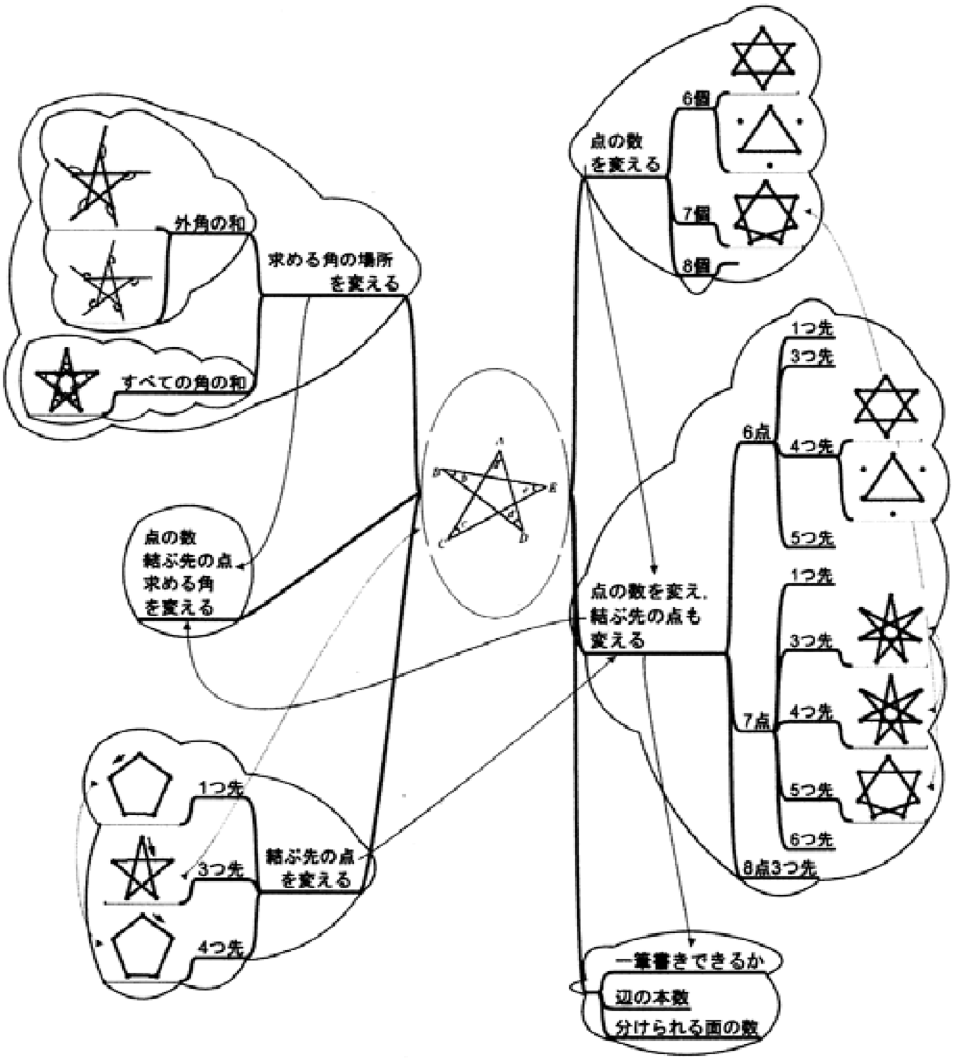


図3-9：完成した探索マップ

3.5　多様なきまりを見つける

3.5.1　課題A

点の数や点の結び方を変えた場合，頂角の和は何度になるか。

探索マップは，見やすく整理して，それらに潜むきまりを見いだしていくことには向いていない。そこで，きまりがあるのかないのかがわかるような工夫を考えさせたところ，生徒はすぐに 2 次元表にまとめればよいことに気付いた。このような力は１つの数学的な考え方であり，生徒が課題解決をしていく際に重要な働きをするものである。また，1 つの方法だけにとらわれている生徒に，概念地図(図 3-4,5)を参照させたところ，星形五角形の解決法を参考に多様な方法で求められるようになった。

表 3-4 からは，「結ぶ先が 1 のとき 180°×(n-2)　になっている」ことしか発見できなかった。そこで，仲間と交流・検討してさらに他のきまりを見つけるよう促したところ，表 3-4 の A と B の残っている点を結ぶと，180°,360°,540°,720°,900° のように 180° ずつ増えていることなどに気付き，表 3-5(次頁)を完成させることができた。さらに，探索マップで

点の数 / 結ぶ先	3	4	5	6	7	8	9
1	180°	360°	540°	720°	900°	1080°	1260°
2	180°	0°	180°	A 180°	540°	B 360°	900°
3		360°	180°	0°	180°	360°	180°
4			540°	180°	180°	0°	180°
5				720°	540°	360°	180°
6					900°	360°	180°
7						1080°	900°

表3-4：星形多角形の頂角の和(1)

両方向の矢印で結んだ逆回転の考えを適用して，負の角度を考えれば，n の変域にかかわらず一般式が成り立つということに気付いた生徒もいた。このような追究を通して，生徒は図形の角に関する本質的な数学の構造を学ぶことができたと考える。

点の数 / 結ぶ先	3	4	5	6	7	8	9	10	*n*
1	180°	360°	540°	720°	900°	1080°	1260°	1440°	180(n-2)
2	180°	0°	180°	360°	540°	720°	900°	1080°	180(n-4)
3		360°	180°	0°	180°	360°	540°	720°	180(n-6)
4			540°	360°	180°	0°	180°	360°	180(n-8)
5				720°	540°	360°	180°	0°	180(n-10)
6					900°	720°	540°	360°	180(n-12)
7						1080°	900°	720°	180(n-14)

表3-5：星形多角形の頂角の和(2)

3.5.2　課題B

星形五角形の外角の和は何度か。いろいろな方法で求めてみよう。

3.5.1 と同様な追究活動を組織し，図 3-10 のような場合は 720° になっていることを明らかにした。また,「多角形の外角の和は 360° である」ことと逆回転の考え方を適用(図 3-11)し，180° になっていることを明らかにすることもできた。

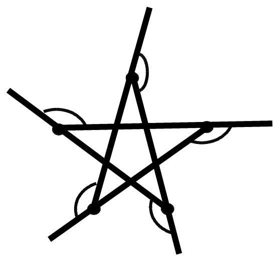


図3-10：星形五角形の外角の和

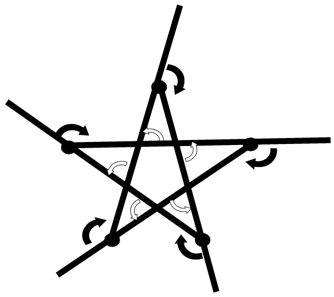


図3-11：星形五角形の外角の和(逆回転考慮)

この追究がうまく進んだので，他の図形についても表 3-5 のようにして，自然と追究(課題 B')していった。そして，逆回転の考えを使わない場合の外角の和は 360 の倍数になること，逆回転の考え方を使えばどんな形であっても 360° になることを見いだした。

3.5.3　課題C

星形五角形の内側のすべての角の和は何度になるか。

すなわち，図 3-12 で表されている角すべての和を求めるということである。

この課題を追究した生徒は，はじめはなかなか角の総和を求めることができずにいた。そこで，正五角形までの概念地図を振り返ってみるよう促した。すると，方法⑩が使えそうなことに気付き，すぐに求めることができた。

同様にして，課題 C'に取り組んでいき，星形 n 角形のときには，360°×(n-1)となることを見いだすことができた。

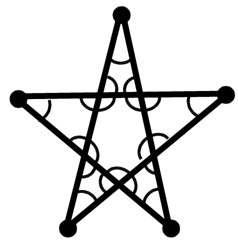


図3-12：星形五角形の
すべての角の和

3.6　仲間との交流

3.5 で，各課題追究の様子を示してきたが，どの課題であっても仲間との交流が有効になされていた。特筆すべきは，課題 B および B'に取り組んでいた生徒たちである。それは，ある生徒が,「１つの外角が 36° である正多角形は何か」という問題から星形五角形の１つの外角を求めたところが出発点であった。

すなわち, 720° ÷ 5 ＝ 144°

↓

これを使って, 仲間に「１つの外角が 144° である正多角形は何か」と出題した。

↓

出題された仲間は, 何の疑問も抱かずに 360° ÷ 144° の計算をした。

↓

計算結果が $\frac{5}{2}$ になったが, 仲間が意地悪な問題を出したと思ってそのまま答えた。

↓

出題者は, 計算していたわけではないので驚いたが, 表 3-5 を見て,
分子が点の個数, 分母が結ぶ先の点になっているのではないかと予想した。

↓

表 3-5 の他の図形の場合も確かめ, 分数多角形を見いだした。

以上の学習を終え, 概念地図を整理し直す活動を組織した。

3.7 考察

以下に学習後の生徒の記述を示す。

① 学習した内容で大切だと思ったことは, どんなことですか。
- 定義と定理を正しく理解すること。
- 今まで学習したことを生かして, 筋道を立てて証明していくこと。
- 勉強した定義や定理の一つ一つが大切だと思う。
- 多角形の角を求めるときに三角形の角の性質が大切なこと。

② 概念地図や探索マップを使った学習の感想
- 星形七角形などを考えるときが難しくて面白かった。
- 星形の内角を調べていくのが楽しかった。
- マップを使って考えていくのが楽しい。
- 星形多角形の性質を発見するのが大変だった。
- ただ問題を解くだけでなく, 自分で考えてマップを作るのが楽しかった。
- マップや概念地図を作って, 楽しみながら理解することができた。
- 概念地図にまとめるのは難しかったけど, 整理できてよかった。

［成果］

質問項目①の反応から, 生徒が演繹的な推論の仕組みを把握するとともに, 論理的な思考の大切さを実感したことがわかる。

②の反応からは, 探索マップで課題が明確になると難しい問題でも意欲的に取り組めたこと, 一般性を見いだしていくといった数学を学ぶ楽しみを実感できる課題であったこと, 概念地図にまとめることは難しい課題であったが完成に到達できれば頭の中が整理できるということがいえる。

さらに, 概念地図を作成することで, 多様な証明方法があることや新たな課題解決を行うときに多様な解決方法を見いだすことができた。また, 探索マップによって, 課題が無

限に広がってしまうおそれがあったが, 実際には 3 種類ほどの課題となり, そのすべてが一般性を発見できるものであった。

［課題］

上述のように, 授業の目標を達成するために適した課題であったが, 追究に時間がかかりすぎるという問題もある。しかし, 教師の側で課題 A だけにとどめてしまうには惜しい教材である。年間を通してこのような学習活動を組織することは時間的に不可能であるし, 生徒の興味関心の継続から考えても, 年に何回も実施すればよいというものではない。単元ごとの軽重や生徒につけたい力とその方策を吟味した上で取り入れていかなければならない。

4　実践2：折り紙を用いた方程式の解法(中学校3年生) (9)(10)

折り紙を用いて方程式を解く方法は, すでにインターネット上で発表されているだけでなく(11), 四次方程式までの解法を詳しく論じている書籍(12)も出版されている。本研究では, これらに述べられていることをベースとして, この魅力的な素材を中学校数学に導入するために教材化し, これらに述べられていないことを発展的に生徒が自ら発見していく授業を行った。この実践では, 未知の部分の問題を生徒が自ら発見し解決するための手だてとして探索マップを利用した。

4.1　授業の目標

○　折り紙に潜む数理を探究することを通して, 中学校 3 年間の学習内容を想起し, それぞれの学習内容のつながりをとらえることができる。

○　思考過程の全体像や前後関係などを視覚的にとらえ, 筋道を立てて考えることができる。

○　課題の中に隠れている問題点や新たな解決策に気付き, 多様な視点を生成することができる。

4.2　折り紙のよさ

折り紙を用いた学習では, 実際に折るという具体物の操作を行い, それを観察して, そこからいえそうなことや問題となることなどを見いだし, 必要に応じて図形をかいたり計算処理をしたりして, それらの解決の方法を類推し, たどり着いた結果や過程を振り返って考えるという流れを生み出すことができる。

このようなよさをもった「折り紙」を, 一見しただけでは何の関係もない「方程式」と結びつけることによって, 生徒に驚きや感動を与え, 課題解決への興味・関心・意欲を高めることができるのはもちろん, 代数と幾何の間にある関係を考察させることによって, 数学の広さを体感させることもできると考える。

4.3　具体的な方策

生徒が思考の過程の全体像や前後関係などを視覚的にとらえ, 筋道を立てて考えられるように, 探索マップを用いる。これを活用することによって仲間と考え方を交流すること

もできるので, 自分はどのような考え方に気付かなかったのか, どのような考え方が有効だったのかなどを知ることもできる。さらに, 課題の中に隠れている問題点や新たな解決策に気付き, 多様な視点を生成することができるように, ブランクのある探索マップを活用する。学習後には, 完成した探索マップを見直すことで, 数学を体系的にとらえ直すことができる。

4.4 本実践の位置づけ

数学の再体系化を目指すという視点も考慮して, すべての単元の内容を学習したのち, 中学校数学のまとめとして位置づけた。

4.5 多様な方法で解決する（ブランクのある探索マップ）

4.5.1 一次方程式 2x=4

ア　授業のねらい

・　「紙を折ると方程式が解ける」という驚きや感動を与えること
・　探索マップを利用して多様な方法を発見させること

イ　課題設定

まず, 方程式 2x=4 を折り紙で解く方法（図 4-1）を示す。この際, 生徒には折り紙(片面に色のついている創作作品などを作る目的で使われる一般的なもの)を実際に折らせて確かめさせる。その後で課題を提示し, 生徒が手元の折り紙を見ながら課題に取り組むことができるようにする。

2x=4 の折り方

・辺上に点 O をとり, その辺に垂直な直線 OP を折る。
・OE ＝ 1 とし, OE に垂直な直線 EE ’ を折る。
・OA ＝ 2 とし, OA に垂直な直線 AA ’ を折る。
・AA ’ 上に, AB ＝ 4 となる点 B をとる。
・O と B を通る直線を折る。

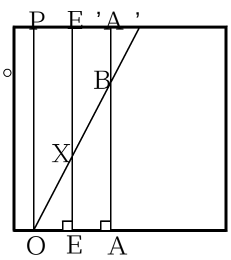


図4-1：方程式 2x=4 の折り方

〈課題 1〉
方程式の解はどこに現れているだろうか。

この課題は解である 2 の長さを見つけることで, すべての生徒が正しい予想をすることができる。生徒一人一人が自分の予想を立てることが課題 2 への意欲づけとなる。

また, ここで, 解が現れている場所を言葉で表現することは難しいという体験をさせた後で, 全員で確認しながら必要なところに共通の記号を付けていく。

〈課題 2〉
予想したところが一次方程式 2x=4 の解になっている理由を説明しよう。

この課題を提示すると，「長さが 2 になっているから解に決まっている。（だから，証明する必要はない。)」と考える生徒が出てくる。このような意味の発言やつぶやきに注意して，測定では説明したことにならないこと，すでに明らかになっていること(既有の知識)を使って説明する必要があることを確認する。

また，多くの生徒がすぐに三角形の相似を利用する方法に気付くことが予想される。そこで，多様な方法を見いだすことができるように，探索マップを黒板上で示して，相似の証明をしなくても説明できる方法についても考えるよう促す。

<u>ウ　実際の授業</u>

〈課題 1〉は，すべての生徒が「EX の長さが 2 になっているので，解になっているのではないか」と考えた。

また，予想していた通り，〈課題 2〉では，すぐに，「相似を利用すればいい」と発言した生徒がいた。そこで，この段階で，図 4-2 のような探索マップで考え方を確認した後，ブランクを書き加えて図 4-3 の探索マップを示し，相似を利用した説明ができたら，相似の証明をしなくてもよい方法も考えてみるように促した。

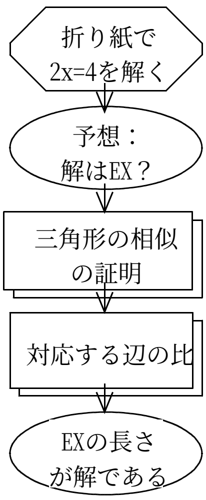


**図4-2：〈課題2〉で相似を
利用することを確認するマップ**

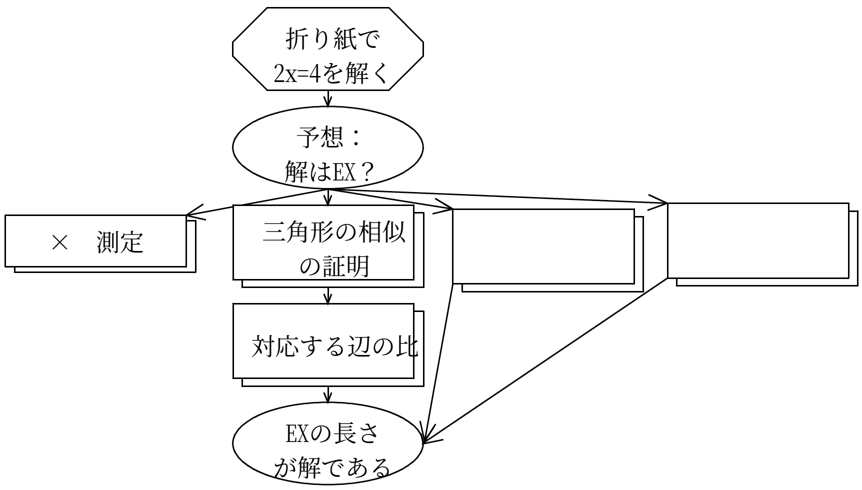


**図4-3：相似を利用する説明以外
の方法を考えることを促すマップ**

個人の追究活動ののち，どんな考え方を用いて解決したのかを明らかにして，解決の方法を発表するように促した。生徒の追究活動は次の 4 種類に分けられた。

① ２組の角がそれぞれ等しいから，△ OEX ∽△ OAB を導き，辺の比を用いる。
② △ OAB で中点連結定理を用いる。
③ 同位角が等しいことから EE'//AA' を導き，平行線と線分の比の関係を用いる。
④ 直線 OB の傾きを用いる。

図 4-3 の探索マップのブランクの部分にあてはまる方法として②以下のものが発表され，多くの生徒が三角形の相似を利用する方法や自分で考えた方法と違う方法でも説明できることに気付いた。例えば，①の方法でしか説明できなかった生徒は，方法③に対して「この方が簡単」，④に対して「一次関数を使うとは思わなかった」と記述している。こ

のような全体での検討を終えた後，ある生徒のマップは図 4-4 のようになった。図内の＊は，生徒が新たに発見した解決の方法である。

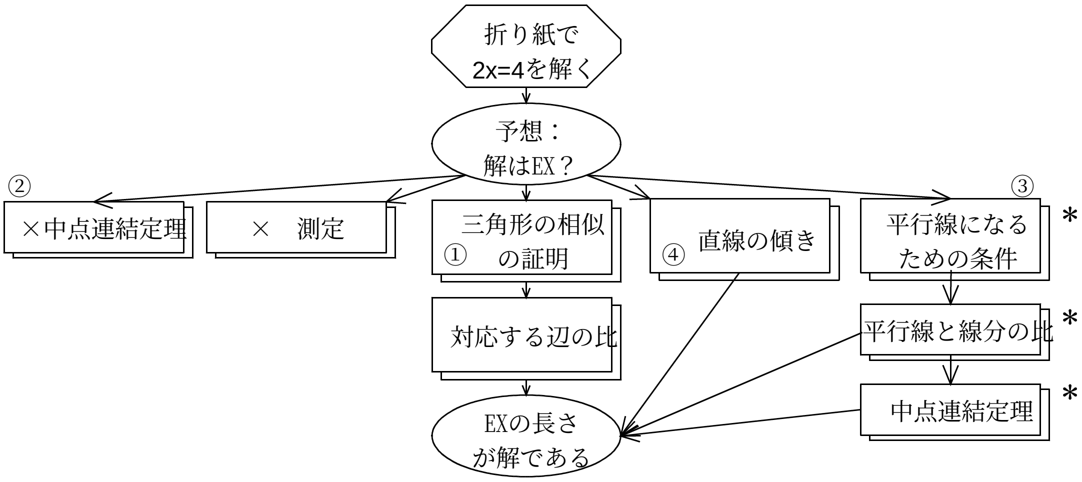


図4-4：意見交流後の探索マップ

4.5.2　一次方程式 ax=b

ア　授業のねらい

・　一般の一次方程式について考察させる（2x=4 から ax=b を類推させる）

イ　課題設定

〈課題 3〉
　どんな一次方程式でも折り紙で解けるだろうか。自分で一次方程式を作り，折り紙を折って解いてみよう。

ウ　実際の授業

　はじめは自分で作った方程式が折り紙で解けて喜ぶ姿が見られたが，少しすると「できない」という声が聞こえ始めたので，全員の作業を止めさせ，問題点を整理した。

①　2(x-3)=4 のような方程式の場合，どのように折ればよいかわからない。
②　a や b が極端に大きい数になると，紙の上にとることができない。
③　小数や分数も紙の上にとることができない。
④　負の数は長さが 0 よりも短いということだから紙の上にはとれない。

④については，ほとんどの生徒が「負の数は長さがないから折り紙では無理」という考えをもっていた。そこで，「 a や b の値を少しずつ小さくしていくと，点 A や点 B はどうなるか」について考えるよう促した。すると生徒は，はじめに折る直線 OP の位置を変えることで，a の値が負の数でもできることに気付いた。同様に，b の値を小さくしてみることによって，「折り紙が下方向に広がっていればよい」という考えが提案され，a の値が負の場合に解が現れないという問題点も解決し，折り紙を座標平面とみなす考えにまとまった。

　ここまでの折り紙と一次方程式の学習を終えて，探索マップは図 4-5 のようになった。

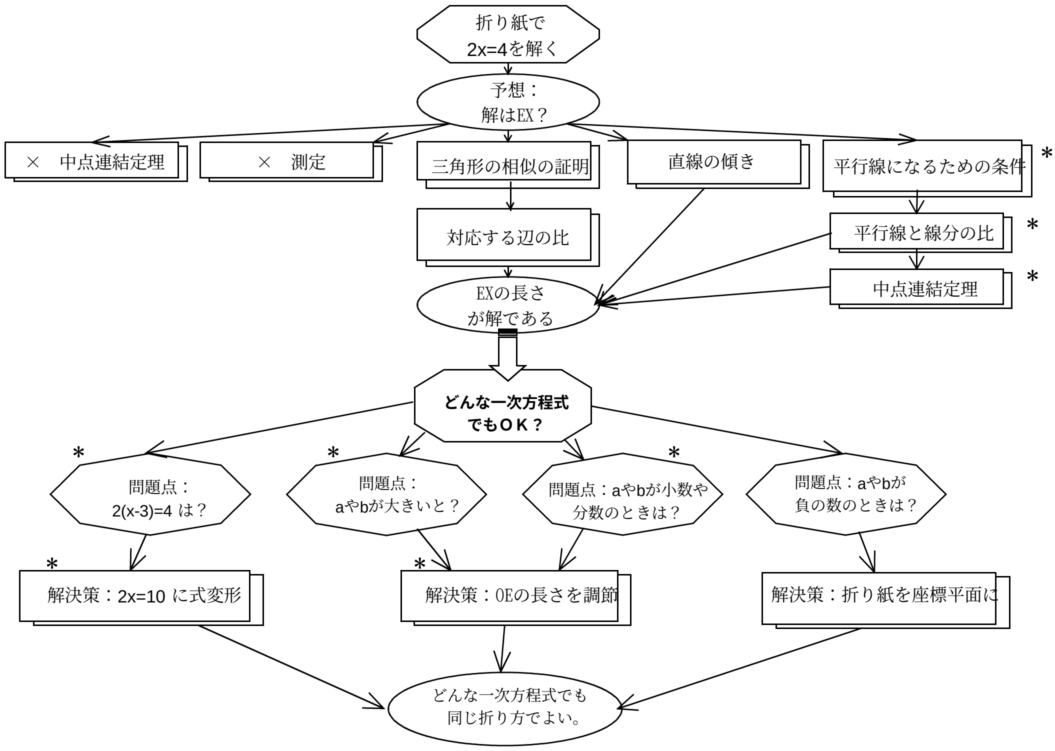


図4-5：「折り紙を用いた一次方程式の解法」の探索マップ

4.5.3　二次方程式 $x^2=4$

<u>ア　授業のねらい</u>

・　探索マップを利用して，さらに新しい解決策を発見させる

<u>イ　課題設定</u>

方程式 $x^2=4$ を折り紙で解く方法（図 4-6）を示す。ここからは，折り紙として方眼紙を用いることにする。

<u>$x^2=4$ の折り方</u>

座標平面上で，

・点 F (0,1)をとる。
・直線 ℓ ：y=-1 を折る。
・点 A(0,-4)をとる。
・点 A を通る折り目で，点Fが
　直線 ℓ 上に乗るように折る。

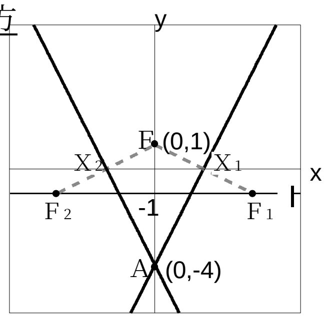


図4-6：方程式 $x^2=4$ の折り方

〈課題 1 '〉
　方程式の解はどこに現れているだろうか。

〈課題 2 '〉
予想したところが二次方程式 $x^2=4$ の解になっている理由を説明しよう。

この課題は，一次方程式のときとは異なり，折り目ではない線分（F と F が移った先の点 F_1 ，F_2 とを結ぶ図 4-6 の点線）を引かないと解決することは難しい。一次方程式での学習を振り返って，相似な三角形を見つけようとすることがヒントとなるので，課題解決がうまく進められない生徒には図 4-5 の探索マップを見直すように促す。

ウ　実際の授業

〈課題 1 '〉では，方程式 $x^2=4$ を解き，解である 2 と -2 を探し出すことができた。

〈課題 2 '〉では，多くの生徒が相似な三角形を探す方法をするだろうという予想と異なり，一次方程式の探索マップ（図 4-5）を見て，簡単に解決できそうな座標で考える生徒が多かった。しかし，この解決を図るには，中学校では学習しない内容を利用しなければならない。2 名が解決したが，他の生徒は相似な三角形を利用することに方針を変更した。個人の追究活動ののち，一次方程式のときと同様に発表の場面を設定し，図 4-7 のような探索マップが完成した。

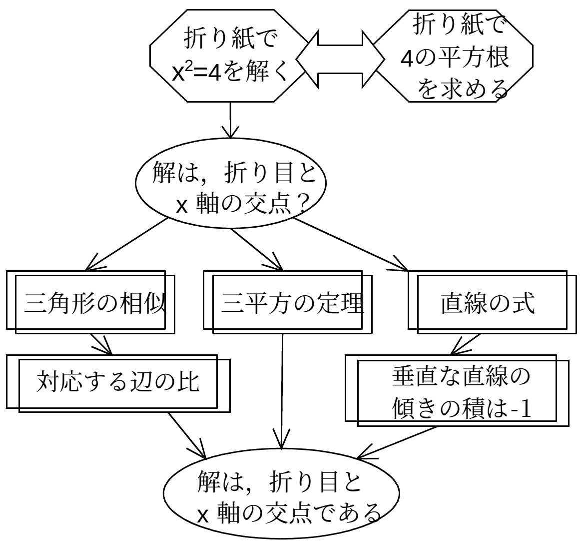


図4-7：〈課題2 '〉追究後，意見交流を終えたときのマップ

4.5.4　二次方程式 $x^2+ax+b=0$

ア　授業のねらい

・　一般の二次方程式について考察すること

最大のポイントは，$x^2=4$ の場合の折り方から類推して，「点 A の座標を決める」ことである。そこで，探索マップには利用した数学の知識だけではなく，どのような見方で考えたのかも記述させることにする。どんな見方や考え方がうまくいって，どんな見方がうまくいかなかったのかを，後で振り返って学習するためである。

ここでの課題は，本教材の中で仮説検証の活動がもっともなされる場面であるので，生徒の学習活動の時間を十分保障する必要がある。

イ　課題設定

〈課題 3 ’〉
　どんな二次方程式でも折り紙で解けるだろうか。自分で二次方程式を作り，折り紙を折って解いてみよう。

　ここでは課題解決がうまく進められない生徒にブランクのある探索マップ（図 4-8）を提示して，何が問題なのかを明らかにしてから，追究活動に取り組むことができるようにした。また，整数解をもつ二次方程式をうまく作ることができない生徒には，
自分で整数の解を決めてから作るように促した。

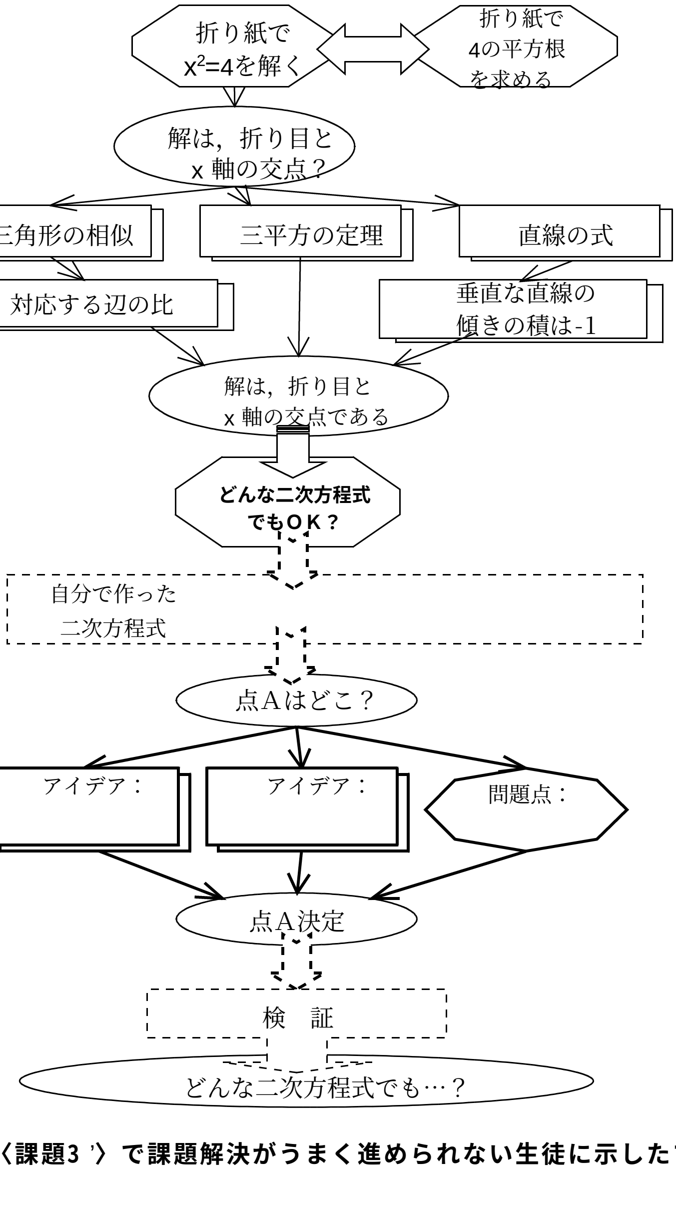


図4-8：〈課題3 ’〉で課題解決がうまく進められない生徒に示したマップ

ウ　実際の授業

　生徒各自が方程式を作ったが，ここでは，例として，$x^2-3x-10=0$ を取り上げる。

アイデア 1：逆思考法

二次方程式の解が 5 と-2 であることから逆に紙を折って考えていく方法。すでにわかっている二次方程式の解から考えることは生徒にとって自然な流れであった。

アイデア 2：係数比較法

方程式を同じ形に変形して予想する方法。

- $x^2=4$ を $x^2-3x-10=0$ にあわせ $x^2+0x-4=0$ と変形する。
- $x^2+0x-4=0$ は点 A (0,-4)であるから，今回は(-3,-10)であると予想。

ところが，実際に折ってみるとうまくいかず(3,-10)ではないかと考えた生徒もいた。

アイデア 3：比例式法［相似三角形利用］

これまでうまく解決できた相似な三角形を利用する方法。

- $x^2=4$ の場合は，図 4-9 左の三角形を利用して，$FO：X_1O ＝ OX_1：OA$ から，$1：x=x：4$ という比例式をつくって，$x\times x=1\times 4$ を導いた。
- $x^2-3x-10=0$ は $x(x-3)=10$ と変形できるので，$1：x=(x-3)：10$ となる。
- 図 4-9 右のような三角形を考えて，点 A の座標が予想。

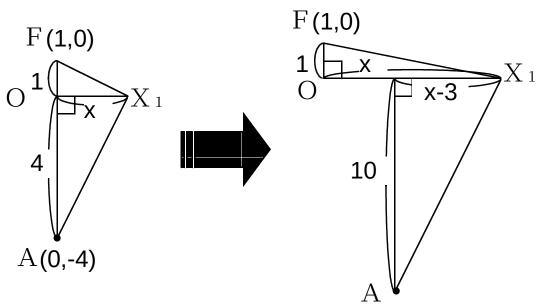


図4-9：アイデア3の点A予想方法

アイデア 4：平行移動法

式と点やグラフの位置の関係を考える平行移動の考え方である。

- $x^2=4$ すなわち $x\times x=4$ のとき A (0,-4)
- $x^2-3x=10$ すなわち $x(x-3)=10$ のときは，A(3,-10)ではないか。

しかしながら，グラフの平行移動と方程式の関係は学んでいないため，点 A を(-3,-10)と予想するなどの誤りも多く，予想した点で実際に紙を折ってみて，うまくいったとかうまくいかなかったという程度であり，その根拠まで追究できた生徒はいなかった。

アイデア 5：平方完成法

二次方程式を解く際に利用した平方完成が利用できないかと考えた方法である。

- $x^2-3x-10=0$ を $(x-\frac{3}{2})^2=\frac{49}{4}$ と平方完成する。
- $x^2=\frac{49}{4}$ の場合の A$(0,-\frac{49}{4})$と比較する。
- 点 A の座標を A$(\frac{3}{2},-\frac{49}{4})$と予想。

しかし，この方法で紙を折ってもうまくいかず，断念した。

一方，平方完成した式から，同じように A の座標を予想し，さらに，F の座標を

$\left(\frac{3}{2},1\right)$として，紙を折ってみたらうまくいったという生徒もいた。ただし，これについても，アイデア４と同様にその根拠まで追究できた生徒はいなかった。

以上のような学習を終え，図 4-10 のような探索マップが完成した。

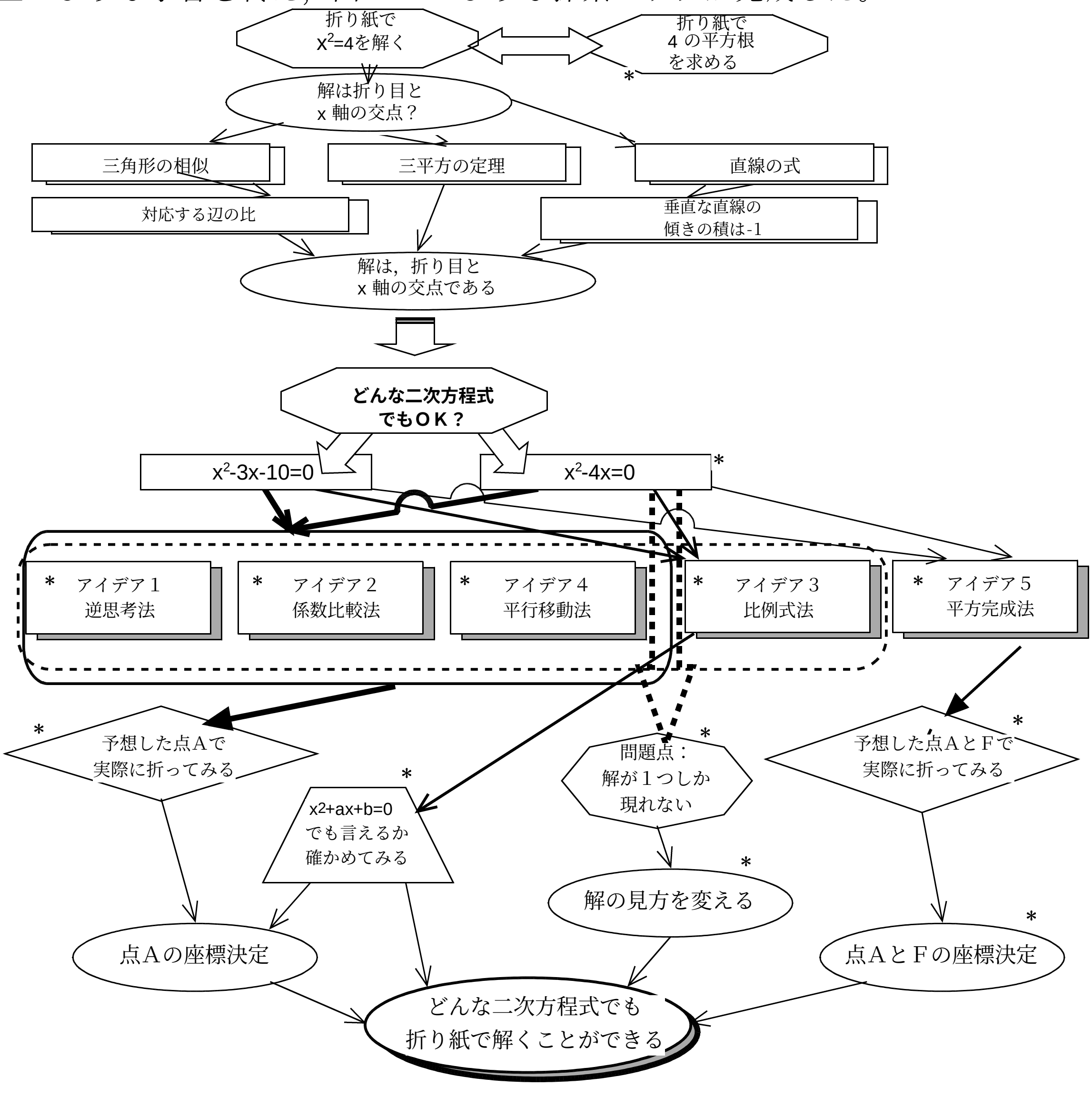


図4-10：「折り紙を用いた二次方程式の解法」学習後のマップ

4.6　探索マップの振り返り

> 〈課題 4〉
> 　マップを見直して学習を振り返り，自己診断シートに記述しなさい。

［探索マップに関するもの］

・　マップをかくと何をしているのかよくわかってよかった。

・　マップをかき始めたときは，ほとんど一直線で終わると思っていて，こんなに広がるなんて想像できなかった。

・　問題を考えているときに，仲間のマップを見て，そういう考えもあるのかと気付く

ことができた。
・　マップは，人の考え方との違いがわかりやすい。
・　自分のマップと仲間のマップが違っていてあせった。
・　違う考え方をしても同じ結果になる。
・　自分で作ったマップを見ると，普段の授業のノートを見るより何をやったのかを思い出しやすいような気がする。
・　折り紙を考えて，こんなに前に勉強したことが出てくるとは思わなかった。
・　バラバラだと思っていたものがつながった。

［折り紙と方程式に関するもの］
・　折り紙が配られたときは数学じゃないのかと思った。
・　折り紙で方程式が解けるなんてビックリした。
・　紙の上でもマイナスの数をとることができる。
・　紙の折り方を聞いたときにはどんな秘密があるのかと思ったけど，やっぱり数学が隠れていた。

［その他］
・　いろいろな方法で解くことができて驚いた。
・　式を変形して係数を比べるアイデアがスゴイ。
・　難しそうだと思ったけど，前に勉強したことを思い出せば説明できた。
・　相似が苦手なことがわかった。
・　何回失敗してもあきらめないことが大切。

4.7　考察

生徒の様子や記述から，次のことがいえる。

［成果］

○　探索マップが有効に機能した。
・　様々な学習内容を俯瞰することで数学を体系的に見ることができた。
・　生徒が既習内容の各領域同士に関係があることに気付くことができた。
・　課題解決に様々な既有の知識や技能が役立つことを実感できた。
・　思考過程の全体像や前後関係などを明らかにすることができた。
・　ブランクのあるマップを用いたことによって，問題解決に行き詰まったときのメンタルブロックを打ち破り，多様な視点を生成することができた。
・　仲間と交流する際に，自分の考え方との相違点を明らかにすることができた。

○　「折り紙」という教材は有効であった。
・　「折り紙」を一見しただけでは何の関係もない「方程式」と結びつけたため，生徒に驚きや感動を与え，生徒の課題解決への興味関心を大いに高めることができ，生徒の生き生きとした学習活動が展開された。
・　1 枚の紙に数学の世界があることを実感させることができた。
・　予想したことを実際に紙を折ることで確かめることができるので，仮説検証の活動が自然になされた。

［課題］

○　探索マップについて

・　マップを見ても課題解決であまり役に立たなかった考え方と役に立った考え方をうまくまとめることができなかった。

・　学力差が大きい場合には，マップを見ながら交流しても，検討はうまく進められなかった。特に，仲間のマップを「読み取る」ことに関しては，相当の力が必要であるが，そのための支援については明らかにすることができなかった。

○　「折り紙」について

・　折り紙を与えて，いきなり「方程式を解くための折り方を見つけなさい」と課題を提示しては，解決は不可能である。そのため，教師側から折り方を指示した後で数学的活動を行わせざるを得なかった。本実践では問題とならなかったが，この部分で生徒の興味・関心を削いでしまう可能性がないとはいえない。しかしながら，本研究ではそのための具体的な方策を明らかにすることができなかった。

・　$x^2=-1$ を考えることで虚軸の必要性や意味をとらえることができること，放物線の接線についての理解を深めること，三次方程式の解法を考えること，作図では不可能なことが折り紙では可能となることなど，高校数学でも活用することができると思われるが，高校生向けの教材化はできなかった。

5　おわりに

現代の社会で本当に必要とされているのは，与えられた課題を解決する「課題解決力」ではなく，事象を観察して何が問題なのかを考える「課題設定力」である。畑村氏も述べている[13]ように，いつも「この問題にはこの解をあてはめてみる」という解法パターンを教えるだけでは，課題解決の力は身についても，課題設定の力が身につかないのは当然である。

このような学習から,「自ら学び自ら考える力」を育てる学習への転換を図るために，概念地図を活用して学習内容を俯瞰し，それによって体系的にとらえ直した学習内容を基に, 探索マップを活用して多様な視点から追究を行う学習を目指した実践を行った。また，追究の結果，本質的な数学の構造に迫ることができるような課題を設定した。数少ない実践ではあるが，期待以上の成果が得られたと考えている。

今後は，さらなる教材の開発をし，数多くの実践を積み重ねていきたい。その際，もう少し時間がかからない課題はもちろん，大単元や領域を通して学習ができる課題を開発したいと考えている。また，学力差の大きい仲間同士の交流のあり方についても探っていきたい。

謝辞

まず，大学院で学ぶ機会を与えてくださいました新潟県教育委員会に深く感謝いたします。また，所属校である新潟市立鳥屋野中学校の樺沢勝治校長をはじめ，教職員の皆様に多大なるご理解とご協力をいただきました。

そして，新潟大学教育人間科学部数学教室の先生方からも多くのご指導・ご助言をいただき

ました。特に，指導教官である山田和美教授からは，あたたかくもきびしいご指導をいただき，実践をまとめ上げることができました。

本研究を支えていただいた関係者の方々にこの場をかりて厚く御礼申し上げます。ありがとうございました。

---

(1)　文部省,『中学校学習指導要領(平成 10 年 12 月)解説－数学編－』，大阪書籍，p.5.

(2)　国立教育政策研究所教育課程研究センター,「平成 13 年度小中学校教育課程実施状況調査の結果概要について」，http://www.nier.go.jp/homepage/kyoutsuu/02_result/02_summary.pdf

国立教育政策研究所教育課程研究センター,「平成 15 年度小・中学校教育課程実施状況調査結果の概要」，http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h15/H15/03001000000007001.pdf

(3)　片桐重男，2004,「数学的な考え方の具体化と指導－算数・数学科の真の学力向上を目指して－」，明治図書，p.29.

(4)　福岡敏行 編著，2002,「コンセプトマップ活用ガイド」，東洋館出版社，p.22-31.

(5)　久恒啓一，2003,「図解　人生がうまくいく人は図で考える」，三笠書房，p.62.

(6)　教科書「数学 2 年」，新興出版社啓林館，平成 17 年度用，pp.78-89.

(7)　伏見史朗，荒木良則，2005,「追究マップを用いた創造的思考力を培う指導」，新潟大学教育人間科学部数学教室,『数学教育研究』，第 40 号

(8)　佐伯胖，2004,「『わかり方』の探求　－思索と行動の原点－」，小学館，pp.35-46.

(9)　山田和美，荒木良則，伏見史朗，2005,「折り紙を用いた方程式の解法」,『新潟大学教育人間科学部紀要 第 7 巻 第 2 号 自然科学編』，新潟大学教育人間科学部

(10)　荒木良則，伏見史朗，2005,「折り紙を用いた方程式の解法」,『第 87 回全国算数・数学教育研究(長野)大会　第60回関東都県算数・数学教育研究(長野)大会 総会特集号』，日本数学教育学会，p.201

(11)　加藤渾一，1999，折り紙と方程式，http://www.nikonet.or.jp/spring/ori_h/ori_h.htm

羽鳥公士郎，K's Origami，http://www.jade.dti.ne.jp/~hatori/library/constj.html

(12)　Robert Geretschläger，2002，折り紙の数学，森北出版社，pp.22-61.

(13)　畑村洋太郎，2005,「畑村式『わかる』技術」，講談社現代新書，pp.84-92.