新潟大学教育人間科学部数学教室,『数学教育研究』, 第 41 巻，1-7，2006.

幾何学再入門 I

ユークリッド平面幾何学再考

新潟大学教育人間科学部
長谷川敬三

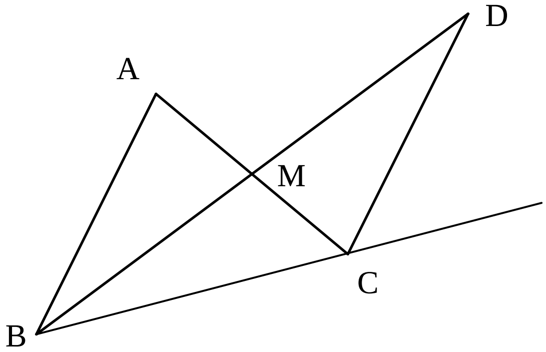
１．はじめに

幾何学の歴史は数学の歴史と同じだけ遡れると言えます。実際，ユークリッド原論は数学史上最初の理論体系をもった研究書です。ユークリッド幾何学はその後ヒルベルトらによって理論的（公理論的）に完成されたかたちに再構築され，またリーマンによるいわゆるリーマン幾何学というより大きな枠の中で捉えられる様になっています。しかしながら，近年ユークリッド原論の持つ純粋な魅力と初等・中等教育上の意義は失われるどころかますます増して来ている様に思われます。一方，ユークリッド幾何学をより深く的確に理解するには，やはりその後の発展の歴史やより大きな枠を踏まえて捉えなおすことがだいじであると考えます。ここではユークリッド幾何学の公理論的扱いには深入りしません。またリーマン幾何学についてもほとんど触れません。ユークリッド幾何学における基本概念である，長さ，角，面積，合同，相似および平行についての再考が中心テーマです。非ユークリッド幾何学である，ボリヤイ・ロバチェフスキー幾何学を念頭に置いて，ユークリッド幾何学の位置づけを出来るだけ分かりやすく解説することが目標です。したがって，特に算数・数学教育に携わっている教員の方々にこれらのテーマについての再考のきっかけを与えることが出来ればと願っています。

２．絶対幾何学と三角形の合同

ユークリッド幾何学の完全な公理系は，結合，順序，合同，連続および平行の５つの公理から成ります。最後の平行の公理を除いた公理系において，ユークリッド幾何学の線分，角などのほとんどの基本的な概念が定義され，また合同の概念による図形の比較が出来る様になります。この平行の公理を除いた公理系を「絶対幾何学」と呼びます。三角形の合同条件はこの絶対幾何学における定理です。これに対して，あとで見る様に，相似条件は平行の公理に依存したユークリッド幾何学の定理です。さてよく知られている様に，標準的な三角形の合同条件は，二辺夾角，二角夾辺，三辺相等がありますが，実は二角夾辺の一辺は夾辺である必要はありません。これらの定理の証明の詳細はここでは省略しますが，証明に「三角形の内角の和が二直角である」ことは必要でないことに注意してください。三角形の合同条件や内角に関する定理の証明に関して基本になるのは次の補題です。

［補題］　三角形の外角はその内対角より大きい。

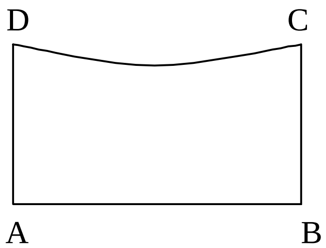


証明は上図の様に，辺 AC の中点 M を取り，BM の延長上に D を MD = BM となる様に取れば △ABM ≡ △CDM となることに依ります。この補題より「三角形の二つの内角の和は二直角より小さい」ことが導けます。また上図において，∠MBC または∠MDC は∠ABC の半分以下になりますから，同じ議論を繰り返すことで,「与えられた三角形に対して，同じ内角の和を持ち，かつひとつの角がいくらでも小さい三角形が存在する」ことが導けます。これら二つの命題より次の重要な定理が得られます。

［定理１］ 三角形の内角の和は二直角より大きくない。

証明は背理法に依ります。すなわち，もしある三角形で内角の和 σ が二直角 π より大きいものが存在すると仮定しますと，$\sigma-\pi$ より小さい角を持つ三角形に対して他の二つの内角の和が二直角より大きくなり，これは矛盾です。

次にサッケリの四角形について述べます。線分 AB 上に∠A = ∠B = ∠R, AD = BC となる様に線分 AD，BC を取り，頂点 C と D を線分 CD で結び，四角形 ABCD が作れます。これをサッケリの四角形と言います。△ADC ≡ △BCD より∠C = ∠D が導けます。



ここで∠C = ∠D = ∠R が成り立つとは限らないし，AB = DC が成り立つとも限りません。実は，一般に次の命題が成り立ちます。

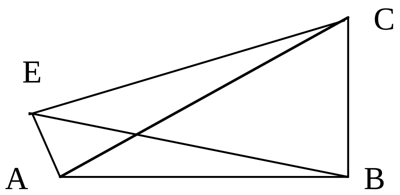
［命題１］ サッケリの四角形 ABCD において，常に∠C = ∠D ≦ ∠R であって，さらに

(i) ∠C = ∠D = ∠R ⇔ AB = DC

(ii) ∠C = ∠D < ∠R ⇔ AB < DC

が成り立つ。

まず，定理１より∠C = ∠D ≦ ∠R が導かれます。(ⅱ)を示します。△CDA を△ABC 上に重ねると下図の様な状況になります。



ここで△CDA を△EBC として重ねています。△CEA は二等辺三角形で二つの底角は等しいことから，∠BEA < ∠EAB が言えます。したがって，対応する辺の長さに関して AB < EB，すなわち AB < DC が示せました。(i)は容易に示せます。

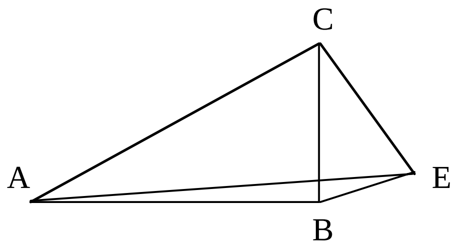
サッケリの四角形 ABCD についてさらに次のことが言えます。

［命題２］ サッケリの四角形 ABC において，次が成り立つ。

(i) AB = DC ⇔ △ABC の内角の和 = π

(ⅱ) AB < DC ⇔ △ABC の内角の和 < π

(ⅱ) の証明には，AB < DC ⇔ ∠ACB < ∠CAD を示せばよいことに注意します。



上図において，△CDA は△ABC 上に△AEC として重ねています。さて，△CBE は二等辺三角形ですから，AB < AE ⇔ ∠ACB < ∠ACE が成り立ちます。(i) は容易に示せます。

［注意］ 命題２は△CDA についても成り立ちます。

さて,「平行の公理」を除いた絶対幾何学において三角形の内角の和について議論してきましたが,「ある三角形の和が二直角 π で，別の三角形の和が π より小さい」ことがあり得るかと言う疑問が生じます。これに関して次の定理が成り立ちます。

［定理２］ 絶対幾何学において，次のいずれか一方のみが成り立つ。

(i) すべての三角形についてその内角の和は二直角に等しい

(ⅱ) すべての三角形についてその内角の和は二直角より小さい

証明には，ある三角形についてその内角の和が二直角に等しければ，すべての三角形についても同様であることを示せばよい。三角形 T に対して，T の内角の和 σ と二直角 π の差 π−σ を τ(T)と置きます。常に τ(T)≧0 であり，T を二つの三角形 T1 と T2 に分割したとき， τ(T)=τ(T1)+τ(T2)が成り立つことに注意してください。したがって，「τ(T)=0 であって，三角形 S が T に含まれるならば τ(S)=0」が成り立ちます。また「τ(Ti)=0 を満たす三角形 Ti を隙間なく並べて出来る三角形 T に関しても τ(T)= 0」が言えます。さて，仮にある三角形 T で τ(T)=0 を満たすものが存在するとします。T は直角三角形としてもよいことは明らかです。すると同じ三角形 T を隙間なく並べていくらでも大きい直角三角形[T]が作れます（まず二つの T で長方形が作れることに注意)。どんな三角形 S もある[T]にふくまれますから， τ(S)=0 が成り立ちます。

３．平行の公理と三角形の相似

二直線は共通点を持たないとき平行であると言います。平行の公理は「与えられた直線とその上にない点に対して,その点を通り与えられた直線に平行な直線が唯一つ存在する」と言うものですが,絶対幾何学において,そのような直線は必ずひとつは存在しますから，

（i）　条件を満たす平行な直線が「唯一つ」存在する

(ⅱ）　条件を満たす平行な直線が「二つ以上」存在する

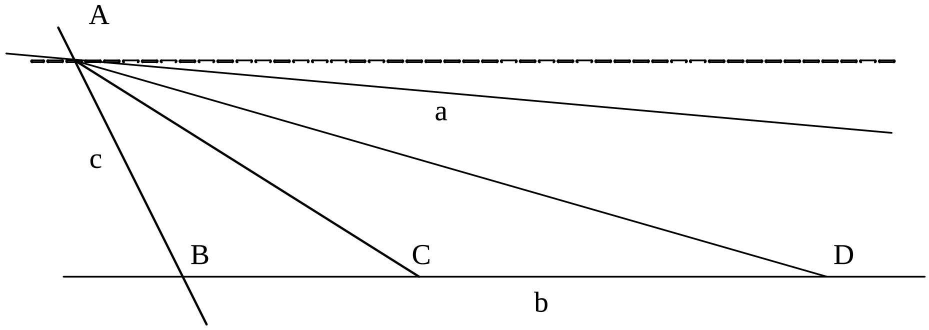
の二つの場合に分けられ，平行の公理は前者を公理としたものと考えられます。平行の公理は次の様に言い換えられます。

[平行の公理]　二直線とそれらに交わる直線から出来る同じ側の二つの内角の和が二直角より小さいとき最初の二直線は同じ側で交わる。

ここで二つの内角の和が二直角であれば定理１より二直線は平行になることに注意してください。さて，平行の公理をこのように言い換えると，三角形の内角の和との関連が見えてきます。

[定理３]　絶対幾何学において,「すべての三角形の内角の和は二直角 π に等しい」が成り立てば「平行の公理」が成り立つ。したがって，上に述べた (i)，(ⅱ)はそれぞれ定理２の (i)，(ⅱ)に同値な「公理」である。

下図の様に，二直線 a，b に直線 c が点 A と B で交わり，また∠A+∠B ＜π と仮定します。



直線 b 上に点 C を AB = BC となる様に取り，点 D を AC = CD となる様に取り，以下同様に点 E，F,... を取って行きます。△ABC は二等辺三角形ですから∠BAC = ∠BCA，△ACD も二等辺三角形ですから∠CAD = ∠CDA = 1/2∠BCA，以下同様に，∠BEA = 1/4∠BCA，∠BFA = 1/8∠BCA,... となり，対応して∠BAC，∠BAD = (1+1/2)∠BAC，∠BAE = (1+1/2+1/4)∠BAC,... となり，これを続けると 2∠BAC = π-∠B (>∠A)に近づき，したがって直線 a は直線 b と交わることが言えました。

次に「多角形の面積」について述べます。「面積」とは，任意の多角形 F に対して非負の実数 τ(F)を対応させるもので，

(i) F1 ≡ F2 (合同) ⇒ τ(F1) = τ(F2)

(ⅱ) F = F1 ∪F2 ⇒ τ(F) = τ(F1)+τ(F2),

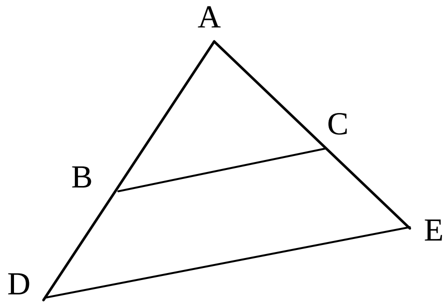
ただし F1 と F2 は内部を共有しないものとする

を満たすものと定義されます。例えば，三角形 T に対して τ(T)=π－σ (ここで σ は T の内角の和)と定めると，定理２において見た様に，絶対幾何学における「面積」を定義します。ただし「平行の公理」のもとではすべての三角形 T に対して τ(T)=0 となり無意味になります。「平行の公理」を加えたユークリッド平面幾何学においては，サッケリの四角形は長方形になり，同じ長方形を隙間なく敷き詰めることが出来るので，一辺の長さ１の正方形の面積を１として多角形の面積が一意的に定まります。実際，縦と横の長さがそれぞれ有理数 a, b の長方形の面積は ab で無くてはならないし a, b が実数の場合もそれぞれいくらでも近い有理数が取れることから,面積はやはり ab として一意的に定まります。特に，三角形の面積が 1/2(底辺×高さ)で与えられることは明らかでしょう。

さて，ユークリッド平面幾何学において面積が定義されたので，応用として有名なピタゴラスの定理が証明できます。そして三角形の相似条件に関係する次の平行線と比の命題が証明されます。

［命題３］ 下図において，AB = b，AC = c，AD = d，AE = e と置きます。このとき次が成り立つ。

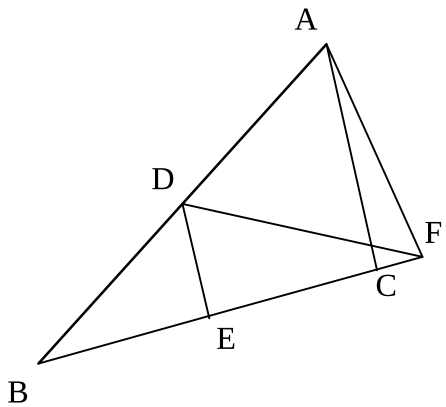
BC ∥ DE ⇔ b : d = c : e



△ABC と△ADC の面積比は b ： d であり，△ABC と△ABE の比は c ： e であることに注意すると,「BC ∥ DE ⇔ △BDC と△CEB の面積が等しい」であることから示されます。

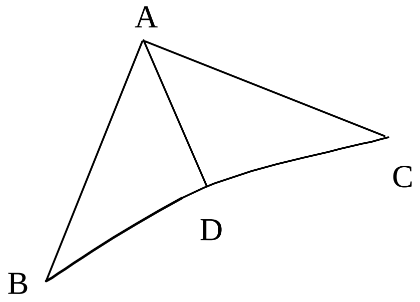
三角形の相似条件，二辺の比と挟角，二角，三辺の比相等は命題３より導けます。よくある間違えは命題３の証明に三角形の相似条件を使うことです。それでは堂々巡りになってしまいます。

次に，命題３を平行の公理が成り立たない，すなわち三角形の内角の和が二直角より小さい場合に考えてみます。直角三角形 ABC の斜辺 AB の二等点 D から底辺 BC に垂線を下ろしその交点を E とします。このとき，E は BC の中点にはなりません。実際，EC < BE となります。なぜなら，直線 BC 上に BE = EF となる様に点 F を取ると，△DBF および△DFA は二等辺三角形になり,「EC < EF ⇔ △ABC の内角の和 <π」が言えます。



つまり，いわゆる「中点連結定理」はユークリッド幾何学のみで成り立つ定理です。ところで，上図において，明らかに DE ∥ AC ですが，点 D から辺 AF に垂線を下ろしその交点を G とすると DG は DE とも直交していますから，DE ∥ AF でもあります。

同様に「ピタゴラスの定理」もユークリッド幾何学における定理です。「平行の公理」が成り立たないとして,「ピタゴラスの定理」が成り立たない例を挙げましょう。



上図の様に, △ABC は∠A が直角の二等辺三角形とします。頂点 A から底辺 BC に垂線を下ろしその交点を D とします。ここで BD = DC, および∠BDA =∠CAD = 1/2∠A が成り立ちます。BD = DC = a, AD = b と置くと,

a ＞ b ⇔ 1/2∠A ＞ ∠B ⇔△ABC の内角の和 ＜π

であることから, ピタゴラスの定理が成り立たないことが導けます。したがって, 次の定理が得られました。

［**定理４**］ 絶対幾何学において,

「平行の公理」⇔「三角形の内角の和 =π」⇔「ピタゴラスの定理」

が成り立つ。

面積に関して, 定理２で見た様に, 三角形 T に対して τ(T)=π－σ (ここで σ は T の内角の和)は面積を定義します。実際, ボリヤイ・ロバチェフスキー幾何学において「面積」は定数倍を除いてこのかたちで与えられることが示されます。特に, 三角形の面積はその内角のみで決まってしまうことになります。