

## 比例と似て非なる関係の考察から関数の考えを伸ばす

### ～ 第 6 学年「比例」の発展的学習～

新潟市立中之口東小学校

越村 尚貴

#### 1. 問題の所在

第 6 学年「比例」の指導のねらいは、「伴って変わる二つの数量の中から特に比例関係にあるものを中心に考察し, 関数の考えを一層伸ばすこと」(文部省, 1999, p. 161)である。

小学校学習指導要領解説算数編では, 「関数の考え」を, 「数量や図形について取り扱う際に, それらの変化や対応の規則性に着目して問題を解決していく考え」と定義している(文部省, 1999, p. 57)。

小学校算数科では, 関数の考えを, 低学年から段階的に指導する。

第 1 学年「いくつといくつ」では, 和が 10 になる式の構成で,  $1 + 9$ ,  $2 + 8$ ,  $3 + 7$  など, 加数が 1 増えると被加数が 1 減るという変化の特徴をとらえさせる。また, 第 2 学年「かけ算九九のひょう」では, 例えば 2 の段なら,  $2 \times 1 = 2$ ,  $2 \times 2 = 4$ ,  $2 \times 3 = 6$  … というように, 乗数が 1 増えると積が 2 増えるという変化に着目させ, 一方が変わると他方が変わるという関数の考えを扱っている。

第 4 学年から第 5 学年では, 身の回りの様々な事象の中から伴って変わる二つの数量を見出し, それらの数量の間関係を表やグラフなどに表して考察する。

例えば, 第 4 学年「かわり方」では, 一方が増えるとそれに伴って他方がどのように変化するかを考察し, その規則性を見出させる。また, 第 5 学年「三角形の内角の和」では, 三角形の内角の和が 180 度, 四角形が 360 度になることから, 角が一つ増えると内角の和が 180 度増えるという規則性を見出し, それによって全ての多角形の内角の和の求め方を一般化できることを学習する。

第 6 学年では, このような伴って変わる二つの数量の関係として, 比例について学習し, 数量の関係について考察する能力を伸ばすことをねらっている(文部省, 1999, p. 57)。

しかし, 次のような理由から, 第 6 学年で, これまでの学習を生かして比例関係を考察しても, 関数の考えを深めることは難しいといえる。

前述した通り, 児童が今まで学習してきた関数関係は, 第 6 学年「比例」で扱う正比例の関数関係だけでなく, 反比例, 一次関数にまで及んでいる。しかし, 「比例」で扱う関数関係が正比例の関数関係だけに限定されているため, 対応や変化の規則性は常に一定である。そのため, 一方では児童の関数の考えが固定化され, 他方では教師の指導が形式的なものに止まってしまう。

ここに, 第 6 学年「比例」の指導の問題がある。

そこで, 本研究では, 第 6 学年「比例」の学習で, 児童の関数の考えを伸ばすために, 正比例以外の関数関係を取り入れる指導方法を提案する。

研究は授業実践を中心に次のような手順で行った。

まず, 第 6 学年「比例」で反比例を扱う手立てを検討し, その手立てに基づいた授業を構想する。次に, 授業実践の結果から手立てについて考察し, 本研究によって得られた成果と今後の課題を示す。

## 2. 研究の手立て

### (1) 研究の手立てに関わる問題点

前述の通り, 本研究では「比例」の学習で, 児童の関数の考えを伸ばすために, 正比例以外の関数関係を取り入れる。

しかし, 第 6 学年「比例」で反比例や一次関数を扱うことには, 次のような指導上の問題点がある。

反比例や一次関数を扱うことは現行指導要領の内容を超える。

学習内容の理解が児童にとって困難であることが予想される。

それぞれについて解決策を検討し, 次のような方針で研究の手立てを設定することにした。

- ・ 単元学習後の特設単元として設定し, 発展的な学習とする。
- ・ 反比例だけを扱う。
- ・ 正比例から条件を変えることによって, 児童が反比例を導けるようにする。
- ・ 式ではなく, 表に基づいて考えさせる。

### (2) 研究の手立て

**手立て 1 : 一つの式から, 正比例の関係と反比例の関係を見出させる。**

**手立て 2 : 表を使って正比例と反比例の関係を考察させる。**

手立て 1 は, 正比例から条件を変えることによって, 児童が反比例を導けるようにする手立てである。また, 児童の実態から, 反比例だけを扱うこととした。

基にする式として, 長方形の面積公式, 「縦  $\times$  横 = 面積」を提示する。この公式の三つの量のうち, 一つを一定にした時の, 残りの二つの量の変わり方を調べると, 「縦一定の場合の, 横と面積の関係」, 「横一定の場合の, 縦と面積の関係」はそれぞれ正比例になり, 「面積一定の場合の縦と横の関係」は反比例になる。長方形の面積公式を基に, 条件を変えることによって正比例の関係と反比例の関係を見出すことができる。

この活動で, 児童は, 反比例の関係を正比例と関係付けながら考察する。反比例の事象を単独で持ち込むのではなく, 正比例を基にして反比例を扱うことで, 正比例の性質の理解を確かにし, 正比例以外の関数関係にも目を向けることができると考えた。

手立て 2 は, 式ではなく, 表に基づいて考えさせる手立てである。ここでは, 二つの量の変わり方を児童が自分で表にまとめ, それを使って正比例と反比例の関係を考察していく。児童は, 比例の学習で, 表を使って二つの数量の関係を調べており, 既習の学習経験を想起して「比例の時のように表を調べれば, 比例と同じような規則性があるのではないかと, 解決方法の見通しをもつ。

児童は表の考察でも, 既習経験を生かし, 「表を横に見たら, 比例のときのように規則性があるのではないかと, 類推的な考えを働かせることができるであろう。そし

て, その変化や対応の規則性を比例の場合と比べ, 「比例のように規則性があったけれど, 比例とは別の規則性のようだ」と, 考察を進めることができると思う。

以上の二つの手立てによって, 「比例」の学習で児童の関数の考えを伸ばすことを目的に, 研究に取り組んだ。

### 3. 授業実践の構想

(1) 単元名 変わり方のきまりを見つけよう (「比例」の発展として特設した単元)

(2) 単元の目標

今まで学習したことの中から, 比例関係を見つけることができる。

比例でない関数関係を考察することで, 関数の考えを伸ばすことができる。

(3) 指導計画 (全 3 時間 本時 2 / 3 時間)

学 習 内 容	評 価	配 時
第 5, 6 学年の教科書の中から, 比例の関係が成り立つ場面を探し出す。	今まで学習してきた中から, 比例の関係が成り立つ場面を探す活動を通して, 様々な場面で比例の関係が出てきていたことに気付くことができる。	1
長方形の面積公式の縦・横・面積のうち一つを一定にしたときの残りの二つの量の変わり方を考察する。	長方形の面積公式の縦・横・面積のうち一つを一定にしたときの残りの二つの量の変わり方について表を作成, 考察し, 変化の規則性を見つけることができる。	1 (本時)
長方形の面積以外の公式について, 一定にする場所を変えるとどんな関係が成り立つか考察する。	今まで学習してきた公式の, ある量を一定にした時の, 残りの二量の関係について, 変化の規則性を見つけることができる。	1

### 4. 実践授業について

本稿では, 第 2 時について述べていく。

(1) 本時のねらい

長方形の面積公式の縦・横・面積のうち一つを一定にしたときの残りの二つの量の変わり方を, 表をもとにして考察し, その変化の規則性を見つけることができる。

(2) 本時の手立て

手立て 1: 一つの式から, 正比例の関係と反比例の関係を見出させる。

本時の課題は, 「長方形の面積公式の縦・横・面積のうち一つを一定にしたときの残

りの二つの量の変わり方を調べよう」である。長方形の面積公式という一つの式から、一定にする量を変えることで、比例の関係と反比例の関係を見出させる。この課題は、単に反比例の事象を扱うのではなく、一つの式から正比例の関係と反比例の関係を生み出すという点で、「比例に似ていて、何かきまりがありそうだ」と、児童の類推的な思考を引き出すことができる。扱う順序は、縦一定 横一定 面積一定とし、比例から反比例へ、二段構成の展開になるよう配慮した。

### 手立て 2 : 表を使って正比例の関係と反比例の関係を考察させる。

縦・横・面積一定のそれぞれの場合について、各自が表に表し、それを横に見ていたり、縦に見ていたりして、その変化や対応の規則性に着目していくよう授業を展開していく。児童は、縦・横一定の場合は、既習の比例の表の特徴に当てはめ、見通しを持って考察していく。次に、面積一定の表についても、「比例の時と同じようなことは言えないか」と、類推的な思考を働かせて反比例の関係を考察していく。

### (3) 授業の実際

#### 課題を提示する

前時から、教科書の中にある比例の関係が成り立ちそうな関係として、長方形の面積公式を取り上げた。

縦 × 横 = 面積 (記号に置き換えて、 $x \times y = z$  とした。)

そして、「この公式の三つの量のどれかを一定にした時の、残りの二つの量の変わり方を調べていきましょう。」という課題を提示し、授業を進めていった。

#### 正比例の関係を考察する

縦一定の場合の、横と面積の関係の検討

縦の長さを 2 cm に決め、横の長さや面積を、各自が表に表した。

横	1	2	3	4	5	6
面積	2	4	6	8	10	12

児童は、比例の学習のときと同様に表を横に見て、変化の規則性を調べていった。横が 2 倍、3 倍になると、面積も 2 倍、3 倍となっていることから、「これは比例の関係である」と確かめた。

横一定の場合の、縦と面積の関係の検討

横の長さを 5 cm に決め、縦の長さや面積を、各自が表に表し、縦一定の場合と同様に表を考察し、「これも比例の関係になる」と確認した。

縦	1	2	3	4	5	6
面積	5	10	15	20	25	30

作成した表を横に見ていくと、縦一定の場合と横一定の場合は、どちらも正比例の関係になることが共通理解された。

反比例の場合を考察する

面積一定の場合の縦と横の関係の検討

面積を  $12 \text{ cm}^2$  に決め, 縦の長さや横の長さを各自が表に表した。児童は, 縦と横の関係を表に表す中で, 「比例ではないが, 変わり方にきまりがある」ということに気づき, 縦一定と横一定の時のように表を見ていけば, そのきまりが分かるのではないかと予想し, 調べていった。

(A子の表)

縦	1	2	3	4	5	6
横	12	6	4	3	2.4	2

表を横に見ていくと, 縦が2倍, 3倍になると, 横は $\div 2$ ,  $\div 3$ の関係になっている。

(B男の表)

縦	2	4	6	8	10	12
横	6	3	2	1.5	1.2	1

表を縦に見ていくと, 縦と横をかけた数がいつも12になっている。

(C男の表)

縦	1	2	3	4	6	12
横	12	6	4	3	2	1

表を斜めに見ていくと, 縦と横は鏡のような関係になっている。

これら, 児童が考えた表を全体で一つの表にまとめた。

縦	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
横	12	6	4	3	2.4	2	$\frac{12}{7}$	1.5	$\frac{12}{9}$	1.2	$\frac{12}{11}$	1

この表を基にして, 自分が見つけた変わり方のきまりがいつでも言えるかどうかを調べていった。

発表では,

- ・縦が2倍, 3倍になると, 横は $\div 2$ ,  $\div 3$ になっていく。
- ・縦と横の数が逆の関係になっている。
- ・縦が $\div 2$ になると横が $\times 2$ に, 縦が $\times 2$ になると横が $\div 2$ になっている。

といった, 表を横に見ていった考え, つまり変化の規則性に着目する考えが多く出された。児童のワークシートを見ても, ほとんどが, 変化の規則性に着目する考えであった。

これに対し, 一人の児童(B男)だけが, 正比例の場合と比較しながら次のように発表した。

B男: 縦の長さや横の長さが一定の時は,  $\div$  が決まった数になって, こっち( )も  $\div$  が決まった数になる。それで, そっち( )は  $\times$  が決まった数になる。

B 男は, 表を縦に見て, 対応の規則性を式で表し比較した。この考えを取り上げ,

- ・面積 ( )  $\div$  横 ( ) = 決まった数 ( 比例 )
- ・面積 ( )  $\div$  縦 ( ) = 決まった数 ( 比例 )
- ・縦 ( )  $\times$  横 ( ) = 決まった数 ( 比例と似ていいるが異なる変わり方 )

と並べてまとめ, 全体でまとめた表を基にして確認していった。ここで, 児童は, 正比例と反比例を比較し, 改めてその違いを確かめることができた。

#### 授業の振り返りをする

授業の感想では, 「比例していない場合でも,  $\div 2$  や  $\div 3$  になるきまりがあることが分かった。」「比例の時は  $\times$  をしたら  $\times$  だったけど, 今日のは  $\times$  をしたら  $\div$  になった。」「比例に似ているけど, 違うきまりがあることに驚いた。」といった, 既習の正比例と比較しながら, 反比例の変化の規則性をまとめた記述が多く見られた。

### 5. 考察

#### 手立て 1: 一つの式から, 正比例の関係と反比例の関係を見出させるについて

長方形の面積公式という一つの式から, 一定にする量を変えた時の残りの二つの量の変わり方を調べる, という課題によって, 児童は正比例の関係と反比例の関係を見出すことができた。特に, 縦一定, 横一定の正比例の関係になる場合を授業前半で取り扱ったことで, 児童は面積一定の反比例の場合について, 「これも比例が成り立つか。」という視点で変化と対応の規則性を調べようとしていた。そして, 正比例の関係が成り立たないと判断し, 「比例ではないが, 変わり方に何かきまりがありそうだ。」という問いを自然に生み出すことができた。このような児童の思考の流れは, 単に反比例の事象だけ取り上げただけでは成立せず, 正比例の関係を扱った後だからこそ成立したのだと考える。同じ式からスタートしているのに, 一定にする量を変えることで, 関数関係が変わってくる, という所に, この課題の意義があった。

また, 正比例の関係を扱ったことで, 授業終末では, 反比例の関係を正比例の関係と比較しながら考察する考えが多く出された。例えば, 「比例の時は 2 倍になると他方も 2 倍になったけど, 面積一定の場合は 2 倍になると他方は  $\div 2$  になる。」や「比例の時は, 面積  $\div$  横 ( 縦 ) = 決まった数だったが, 面積一定の時は, 縦  $\times$  横 = 決まった数になった。」といった意見は, 正比例の関係と比較したものだと考えられる。

#### 手立て 2: 表を使って正比例の関係と反比例の関係を考察させるについて

正比例の関係については, 児童は表から容易にその関係を考察することができた。反比例の関係については, 正比例の関係にはならないものの, その変わり方を表に表していけば, 何かきまりがあるのではないかと類推的に考えていく姿が見られた。つまり, 表を使うことで, 児童の類推的な思考を引き出すことができたと言える。

そして, 面積一定の場合について, まずその変わり方を表に表し, 変化と対応の規則性を調べていった。しかし, ほとんどの児童が表を横に見ることだけに留まってしまい, 表を縦に見る B 男のような児童はほとんどいなかった。これは, 既習経験が大きく影響している。第 6 学年「比例」の学習では, 正比例の関係を, いつも表を横に

見て考察していた。これは変化の規則性に着目する見方である。表を縦に見て考察する, 対応の規則性に着目する見方が児童の中に十分育っていなかったため, 表を縦に見ようとする児童が少なかったと考えられる。

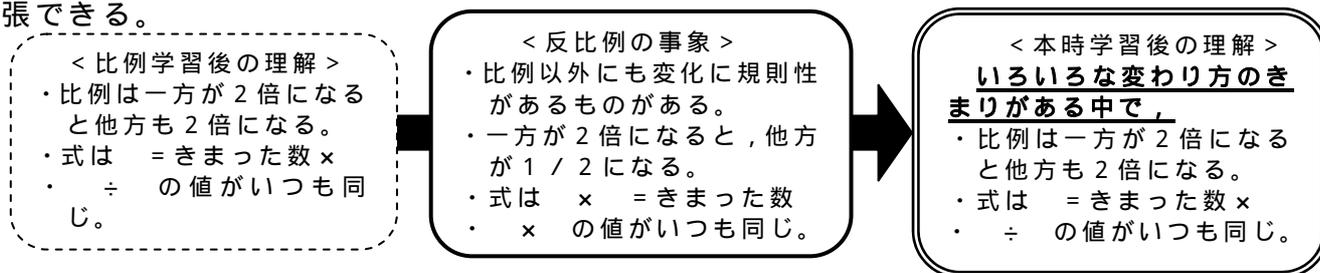
## 6. 研究の成果と課題

### (1) 成果

正比例以外の関数関係を扱うことで, 関数の考えがより深まった。

第 6 学年「比例」の学習では, 正比例の関数関係だけに限定されているため, 児童の関数の考えが固定化されていた。児童の関数に対する見方は, 「一方が 2 倍になると他方も 2 倍になる」といった見方に留まっていた。

しかし, 比例と似て非なる関係として反比例の関係を, 正比例の関係とともに扱ったことで, 「比例ではないが, 変わり方に何かきまりがありそうだ。」という問いを引き出すことができた。そして, 表の考察から, 正比例の関係との違いを明らかにし, その変化の規則性を見つけることができた。この学習を通して, 児童は比例以外にも変化の規則性があることを理解した。これは, 正比例以外の関数関係についても, その変化の規則性に着目しようとする見方につながり, 関数の考えがより深まったと主張できる。



表を使えば, 正比例以外の関数関係でも変化の規則性を見つけることができる。

第 6 学年「比例」の学習では, 変化の規則性に着目する場合, いつも表を横に見て調べていった。本時では, 正比例でない関数関係についても, 同じように表を横に見ていけば, その変化の規則性を明らかにすることができることが理解された。本時の後, 第 3 時では長方形の面積以外の公式についても同様に, 一定にする量を変えてその変化の規則性を調べていったが, その際いつも関係を表に表し, それを横に見ていくことで変化の規則性を明らかにしていった。この姿からも, 児童は本時の学習を通して, 正比例以外の関数関係についても, 表に表しそれを横に見ていけば変化の規則性を見つけられるということを学んだと主張できる。

### (2) 課題

表を縦に見る意識が弱く, 対応の規則性に着目できなかった。

変化の規則性に着目していく本時の展開では, 表を縦に見る意識が弱かった。関数の考えは, 変化や対応の規則性に着目することが大切で, 今回の研究では, 変化の規則性が強調されるものであった。対応の規則性を考えた場合, 表を縦に見て, その関係を式に表すことが必要であった。

しかし, 一つの表を横に見たり, 縦に見たりと二次元的に見て考察していくことは

児童にとって難しいことであると考えられる。よって, 現段階では表を横に見ていく見方が強調されていても仕方ないを考える。ただ, 中学数学で反比例, 一次関数, 二次関数を扱うことを念頭に置くと, 式に表すこととそれをグラフに表すことも重要になってくるので, その素地指導として対応の規則性に重点を置いた指導のあり方も今後検討していく必要がある。

本研究は, ASG (新潟算数研究会) の研究授業として実践し, 第 55 回北陸四県数学教育研究大会で発表したものを加筆・修正したものである。

### 引用及び参考文献

文部省 ( 1999 ), 『小学校学習指導要領解説算数編』, 東洋館 .