新潟大学教育人間科学部数学教室，『数学教育研究』，第 42 巻，第 2 号，15-28，2007.

自然数論の新しい公理化試論

新潟大学教育人間科学部
高野　道夫

自然数を作っていくふつうのやり方は，1 から始めて，次の数，次の数，……というように，次々に次の数を作るものである（図 1 参照）．つまり，このやり方での数の生成原理は「次の数の生成」である．

1	■
2	■■
3	■■■
4	■■■■
5	■■■■■
6	■■■■■■
7	■■■■■■■
8	■■■■■■■■
9	■■■■■■■■■
10	■■■■■■■■■■

図 1：1 から 10 までの数の生成

この生成原理に基づく自然数論の公理系が，ペアノの公理系である．ここで，ペアノの公理系とは，「自然数」「1」「nの次の数n'」の三つの概念をもとにする，次の五つの公理からなる公理系のことである：

ペアノの公理 1． 1は自然数である．

ペアノの公理 2． xが自然数ならば，x'も自然数である．

ペアノの公理 3． xが自然数ならば，$x' \neq 1$.

ペアノの公理 4． x, yが自然数であって$x' = y'$であれば，$x = y$.

ペアノの公理 5． 集合Mが二つの条件 ①$1 \in M$，②xが自然数であって$x \in M$であれば$x' \in M$，を満たせば，すべての自然数がMの元である．

これに対し，西ドイツで使われた教科書[1]のやり方では，4 までは上と同じだが，それより大きい数となると，6 は「3 と 3」，5 は「3 と 2」，8 は「4 と 4」，7 は「4 と 3」，10 は「5 と 5」，9 は「5 と 4」，……というように，偶数$2n$は「nとn」，奇数$2n+1$は「$n+1$とn」として数を作っていく（図 2 参照）．nの 2 進法表現が$ab\cdots c$のとき，$2n$, $2n+1$の 2 進法表現はそれぞれ$ab\cdots c0$，$ab\cdots c1$であるから，生成原理は「桁の一つ大きい数の生成」であるといえる．

新潟大学教育人間科学部数学教室,『数学教育研究』, 第 42 巻, 第 2 号, 15-28, 2007.

6	■■■	■■■	5	■■■	■■
8	■■■■	■■■■	7	■■■■	■■■
10	■■■■■	■■■■■	9	■■■■ ■	■■■■

図 2：西ドイツの教科書[1]による 5 から 10 までの数の生成

この生成原理に基づく自然数論の公理系は，おのずとペアノのものとは違ったものになるはずである. 岡崎[6], [7]に公理化の試みがあるが, 小論もまた, その新たな試みである. 本稿では，例外をなくすために 2, 3, 4 についてもそれぞれ「1 と 1」,「2 と 1」,「2 と 2」として作られるものとし，この生成原理に基づく自然数論の公理系を挙げ，これが自然数論の公理化として十分に強いことの証しとして，ペアノの五つの公理を実際に導く.

熊本大学教育学部の岡崎宏光氏は，文献[1]および[3]～[7]を提供するとともに，公理化について筆者に問題を提起した．遠山[8]239 頁に

> ペアノの理論といっても，（中略），それはあくまで一つの理論であって，それ以外に自然数の理論化はあり得ないかというと，けっしてそうではない．がんらい，ペアノの理論は順序という構造に重点をおいている点に特徴があることはすでにのべておいたが，その他にも集合数的な構造に重きをおいた理論もつくることができるはずである.

と述べられているように，岡崎氏は（離散）量に基づいた自然数の理論の基礎づけを追求し，キズネール棒を使った教科書[1]に目をつけたもののようである（岡崎[5]）．小論で展開した公理系が岡崎氏の要求に十分答えているとは思えないが，一つの足がかりになれば幸いである．なお，岡崎氏は「キーズネル棒」という表現を使っているが，文献[9]，[10]では「キズネールの色棒」「キズネール棒，キズネール教具」という表現が使われており，「キズネール」のほうが一般的なようである.

資料の提供と問題の提起，ならびに，後述する定理 2.8 の証明の教示について，あらためて岡崎宏光氏に感謝する.

１．自然数を生成する公理

小論で扱う公理系は,「自然数」「1」「mはnより 1 だけ大きい mf n」「mがnと等しいかまたはnより 1 だけ大きいときの，mとnの合併 $m \oplus n$」の四つの概念をもとにする，17 個の公理からなる．それらを内容によって A 群，B 群，C 群に分け，この節では，自然数を生成する公理群である A 群の公理 1～7 を述べる.

[**A 群の公理 1～7**]

公理 1. 1は自然数である.（ペアノの公理 1）

公理 2. xが自然数ならば， $x \oplus x$も自然数である.

公理 3. x, yが xf yを満たす自然数ならば， $x \oplus y$も自然数である.

公理 4. $1 \oplus 1$f 1.

公理 5. x,y が x f y を満たす自然数ならば, $x\oplus y$ f $y\oplus y$.

公理 6. x,y が x f y を満たす自然数ならば, $x\oplus x$ f $x\oplus y$.

公理 7. 集合 M が三つの条件 ① $1\in M$, ② x が自然数であって $x\in M$ であれば $x\oplus x\in M$, ③ x,y が x f y を満たす自然数であって $x,y\in M$ であれば $x\oplus y\in M$, を満たせば, すべての自然数が M の元である.

公理 1～公理 6 を使って自然数をいくつか作ってみよう.

・公理 1 より 1 は自然数である.

・公理 2 より $1\oplus 1$ も自然数であり, 公理 4 より $1\oplus 1$ f 1 が成り立つ.

・公理 3 より $(1\oplus 1)\oplus 1$ も自然数であり, 公理 5 より $(1\oplus 1)\oplus 1$ f $1\oplus 1$ が成り立つ.

・公理 2 より $(1\oplus 1)\oplus(1\oplus 1)$ も自然数であり, 公理 6 より $(1\oplus 1)\oplus(1\oplus 1)$ f $(1\oplus 1)\oplus 1$ が成り立つ.

・公理 3 より $\{(1\oplus 1)\oplus 1\}\oplus(1\oplus 1)$ も自然数であり, 公理 5 より $\{(1\oplus 1)\oplus 1\}\oplus(1\oplus 1)$ f $(1\oplus 1)\oplus(1\oplus 1)$ が成り立つ.

………

………

ここで得られた 1, $1\oplus 1$, $(1\oplus 1)\oplus 1$, $(1\oplus 1)\oplus(1\oplus 1)$, $\{(1\oplus 1)\oplus 1\}\oplus(1\oplus 1)$, ……が, それぞれ自然数 1, 2, 3, 4, 5, ……である. ただし, A 群の公理だけからでは, これらが互いに異なることは保証されない.

以下では公理 1～公理 6 は特に断らずに用いる. また, 特に断らないかぎり $a,b,\cdots,x,y,z$ などアルファベットの小文字（添え字が付くこともある.）は自然数を表すものとする.

公理 7 は, 以上のように作られたもののみが自然数であることを主張する, この公理系における**数学的帰納法**の公理である. x に関する性質 $P(x)$ が与えられたとき, この公理において $M=\{x\,|\,P(x)\}$ とおくことにより, すべての x に対して $P(x)$ が成り立つことを示すには, 以下の(I-1)～(I-3)を示せばよい.

(I-1)　$x=1$ のときは成り立つ.

(I-2)　$x=x_1$ のとき成り立つと仮定すると, $x=x_1\oplus x_1$ のときにも成り立つ.

(I-3)　x_1 f x_2 とし, $x=x_1,x_2$ のとき成り立つと仮定すると, $x=x_1\oplus x_2$ のときにも成り立つ.

2．後　者

この節では, m f n の成立を限定する公理群である B 群の公理 8～14 を追加することにより, 任意の x に対し, y f x を満たす y ―― x の**後者**――がただ一つに決まること（定理 2.4）を示し, さらに, 後者に関する簡単な性質を導く.

[**B 群の公理 8～14**]

公理 8. $x\oplus x$ f 1 ならば $x=1$.

公理 9. x f y かつ $x\oplus y$ f 1, ということはない.

新潟大学教育人間科学部数学教室,『数学教育研究』, 第 42 巻, 第 2 号, 15-28, 2007.

公理 10. x f y かつ $x\oplus y$ f $z\oplus z$ ならば, $y=z$.

公理 11. y f z かつ $x\oplus x$ f $y\oplus z$ ならば, $x=y$.

公理 12. 1 f x ということはない.

公理 13. $x\oplus x$ f $y\oplus y$ ということはない.

公理 14. x f y かつ z f u かつ $x\oplus y$ f $z\oplus u$, ということはない.

補題 2.1. $1\oplus 1$ が y f 1 を満たすただ一つの y である. すなわち, 以下の⑴～⑶が成り立つ：

⑴ $1\oplus 1$ は自然数である.

⑵ $1\oplus 1$ f 1.

⑶ y f 1 ならば $y=1\oplus 1$.

証明. ⑴と⑵はすでに示した. ⑶は y に関する性質「y f 1 ならば $y=1\oplus 1$」に数学的帰納法を適用することにより, 証明する.

(I-1) $y=1$ のときは, 公理 12 により成り立つ.

(I-2) ($y=y_1$ に関する仮定は不要). $y=y_1\oplus y_1$ のときにも, 以下の推論により成り立つ：$y_1\oplus y_1$ f 1 とすると, 公理 8 より $y_1=1$, よって $y_1\oplus y_1=1\oplus 1$.

(I-3) y_1 f y_2 とする ($y=y_1, y_2$ に関する仮定は不要). $y=y_1\oplus y_2$ のときにも, 公理 9 より成り立つ. □

補題 2.2. c が y f a を満たすただ一つの y である――すなわち, c f a かつ任意の y に対して「y f a ならば $y=c$」である――と仮定する. このとき, $c\oplus a$ が y f $a\oplus a$ を満たすただ一つの y である. すなわち, 以下の⑴～⑶が成り立つ：

⑴ $c\oplus a$ は自然数である.

⑵ $c\oplus a$ f $a\oplus a$.

⑶ y f $a\oplus a$ ならば $y=c\oplus a$.

証明. ⑴は公理 3 により, (2)は公理 5 による. (3)は y に関する性質「y f $a\oplus a$ ならば $y=c\oplus a$」に数学的帰納法を適用することにより, 証明する.

(I-1) $y=1$ のときは, 公理 12 より成り立つ.

(I-2) ($y=y_1$ に関する仮定は不要). $y=y_1\oplus y_1$ のときにも, 公理 13 より成り立つ.

(I-3) y_1 f y_2 とする ($y=y_1, y_2$ に関する仮定は不要). $y=y_1\oplus y_2$ のときにも, 以下の推論により成り立つ：$y_1\oplus y_2$ f $a\oplus a$ とすると, 公理 10 より $y_2=a$, よって y_1 f a, 仮定より $y_1=c$, よって $y_1\oplus y_2=c\oplus a$. □

補題 2.3. a f b と仮定する. このとき, $a\oplus a$ が y f $a\oplus b$ を満たすただ一つの y である. すなわち, 以下の⑴～⑶が成り立つ：

⑴ $a\oplus a$ は自然数である.

⑵ $a\oplus a$ f $a\oplus b$.

⑶ y f $a\oplus b$ ならば $y=a\oplus a$.

証明. ⑴は公理 2 により, ⑵は公理 6 による. ⑶は y に関する性質「y f $a\oplus b$ ならば $y=a\oplus a$」に数学的帰納法を適用することにより, 証明する.

(I-1) $y=1$ のときは, 公理 12 より成り立つ.

(I-2)　（ $y=y_1$ に関する仮定は不要）． $y=y_1\oplus y_1$ のときにも，以下の推論により成り立つ： $y_1\oplus y_1 \text{ f } a\oplus b$ とすると，公理 11 より $y_1=a$，よって $y_1\oplus y_1=a\oplus a$．

(I-3)　$y_1 \text{ f } y_2$ とする（ $y=y_1, y_2$ に関する仮定は不要）． $y=y_1\oplus y_2$ のときにも，公理 14 より成り立つ．□

定理 2.4. 任意の x に対し， $y \text{ f } x$ を満たす y が一意的に存在する．
証明． x に関する性質「 $y \text{ f } x$ を満たす y が一意的に存在する」に数学的帰納法を適用することにより，証明する．

(I-1)　補題 2.1 より $y \text{ f } 1$ を満たす y は $1\oplus 1$ 一つだから， $x=1$ のときは成り立つ．

(I-2)　$x=a$ のとき成り立つと仮定し， $y \text{ f } a$ を満たす y は c 一つであるとする．補題 2.2 より $y \text{ f } a\oplus a$ を満たす y は $c\oplus a$ 一つだから， $x=a\oplus a$ のときにも成り立つ．

(I-3)　$a \text{ f } b$ とする（ $x=a,b$ に関する仮定は不要）．補題 2.3 より $y \text{ f } a\oplus b$ を満たす y は $a\oplus a$ 一つだから， $x=a\oplus b$ のときにも成り立つ．□

以後， x に対して $y \text{ f } x$ を満たすただ一つの y を x' と表し， x の**後者**という．
定義より，以下の性質は明らかである．

定理 2.5. ⑴　x' は自然数である．（ペアノの公理 2）
⑵　$x' \text{ f } x$．
⑶　$y \text{ f } x$ ならば $y=x'$．□

上の定理の⑵，⑶より， $y \text{ f } x$ と $y=x'$ は同値である．
また，補題 2.1～補題 2.3 より，以下の性質も明らかである．

定理 2.6. ⑴　$1'=1\oplus 1$．
⑵　$(x\oplus x)'=x'\oplus x$．
⑶　$(x'\oplus x)'=x'\oplus x'$．□

下記の定理も公理 12 より明らかである．

定理 2.7. $x'\neq 1$．（ペアノの公理 3）□

以後，「 $x \text{ f } y$ または $x=y$ 」を，簡単のため $x>y$ と表す． $x>y$ は「 $x=y'$ または $x=y$ 」とも同値である．

次の定理を筆者は始めは公理にしていたが，岡崎宏光氏より他の公理から証明できることを教示された．

定理 2.8. $x>y$ かつ $x\oplus y=1$，ということはない．
証明． $x>y$ かつ $x\oplus y=1$ だったと仮定する．

$x=y'$のとき．$y'\oplus y=1$だから公理 4 より$1\oplus 1$ f $y'\oplus y$，公理 11 より$1=y'$，これは定理 2.7 に矛盾．

$x=y$のとき．$y\oplus y=1$だから公理 4 より$1\oplus 1$ f $y\oplus y$，これは公理 13 に矛盾．□

３．加　法

加法とは, ここでは下記の性質(S1)～(S2)を満たす自然数上の 2 項演算$+$のことである：

(S1)　$x+1=x'$.

(S2)　$y>z$ならば$x+(y\oplus z)=(x+y)+z$.

加法がただ一つ存在することは，A 群の公理を用いて生成された自然数のうち，異なる生成法により生成されたものは互いに異なることを主張する，下記の C 群の公理 15～17 を付け加えることにより，集合論的に証明することができるが，煩雑なので証明は最後の節に述べ，ここでは加法の基本的な性質――結合法則（定理 3.3)，交換法則（定理 3.8)，および，加法$m+n$が$m>n$のときにのみ定義された合併$m\oplus n$の自然数上の 2 項演算への拡張であること（定理 3.6）――を証明する．以下では，定理 2.5～定理 2.7，および加法の性質(S1)～(S2)を断りなしに用いる．

[C 群の公理 15～17]

公理 15.　$x\oplus x=y\oplus y$ならば$x=y$.

公理 16.　x f yかつ$x\oplus y=z\oplus z$，ということはない．

公理 17.　x f yかつz f uかつ$x\oplus y=z\oplus u$ならば，$y=u$.

公理 17 に対して「x f yかつz f uかつ$x\oplus y=z\oplus u$ならば，$x=z$」は他の公理から導かれる（定理 5.8)．

補題 3.1． $x'+y=(x+y)'$.

証明． yに関する性質「任意のxに対し，$x'+y=(x+y)'$」に数学的帰納法を適用することにより，証明する．

(I-1)　$y=1$のときは，$x'+1=x''=(x+1)'$により成り立つ．

(I-2,3)　$y_1>y_2$とし, $y=y_1, y_2$のときは成り立つと仮定する. $y=y_1\oplus y_2$のときにも, 以下の式変形により成り立つ：$x'+(y_1\oplus y_2)=(x'+y_1)+y_2$，$y_1$に関する仮定より$=(x+y_1)'+y_2$，$y_2$に関する仮定より$=\{(x+y_1)+y_2\}'=\{x+(y_1\oplus y_2)\}'$．□

補題 3.2． $x+y'=(x+y)'$.

証明． yに関する性質「任意のxに対し，$x+y'=(x+y)'$」に数学的帰納法を適用することにより，証明する．

(I-1)　$y=1$のときは，$x+1'=x+(1\oplus 1)=(x+1)+1=(x+1)'$により成り立つ．

(I-2)　$y=y_1$のときは成り立つと仮定する．$y=y_1\oplus y_1$のときにも，以下の式変形により成り立つ：$x+(y_1\oplus y_1)'=x+(y'_1\oplus y_1)=(x+y'_1)+y_1$，仮定より$=(x+y_1)'+y_1$，補題 3.1 より$=\{(x+y_1)+y_1\}'=\{x+(y_1\oplus y_1)\}'$．

(I-3)　$y=y_1$のときは成り立つと仮定する（$y=y'_1$に関する仮定は不要)．$y=y'_1\oplus y_1$

のときにも, 以下の式変形により成り立つ：$x+(y'_1\oplus y_1)'=x+(y'_1\oplus y'_1)=(x+y'_1)+y'_1$, 仮定より $=\{(x+y'_1)+y_1\}'=\{x+(y'_1\oplus y_1)\}'$. □

定理 3.3（結合法則）. $(x+y)+z=x+(y+z)$.

証明. xを任意に固定し, zに関する性質「任意のyに対し, $(x+y)+z=x+(y+z)$」に数学的帰納法を適用することにより, 証明する.

(I-1)　$z=1$のときは, 以下の式変形により成り立つ：$(x+y)+1=(x+y)'$, 補題 3.2 より $=x+y'=x+(y+1)$.

(I-2,3)　$z_1>z_2$とし, $z=z_1, z_2$のときは成り立つと仮定する. $z=z_1\oplus z_2$のときにも, 以下の式変形により成り立つ：$(x+y)+(z_1\oplus z_2)=\{(x+y)+z_1\}+z_2$, z_1に関する仮定より $=\{x+(y+z_1)\}+z_2$, z_2に関する仮定より $=x+\{(y+z_1)+z_2\}=x+\{y+(z_1\oplus z_2)\}$. □

この定理により, 以後, 3 個以上の数の和について $a+b+c$, $a+b+c+d$ のように, かっこを省く.

補題 3.4. $(x\oplus x)+(y\oplus y)=(x+y)\oplus(x+y)$.

証明. yに関する性質「任意のxに対し, $(x\oplus x)+(y\oplus y)=(x+y)\oplus(x+y)$」に数学的帰納法を適用することにより, 証明する.

(I-1)　$y=1$のときは, 以下の式変形により成り立つ：$(x\oplus x)+(1\oplus 1)=(x\oplus x)+1+1$ $=(x\oplus x)'+1=(x\oplus x)''=(x'\oplus x)'=x'\oplus x'=(x+1)\oplus(x+1)$.

(I-2)　$y=y_1$のときは成り立つと仮定する. $y=y_1\oplus y_1$のときにも, 以下の式変形により成り立つ：$(x\oplus x)+\{(y_1\oplus y_1)\oplus(y_1\oplus y_1)\}=(x\oplus x)+(y_1\oplus y_1)+(y_1\oplus y_1)$, 仮定より $=\{(x+y_1)\oplus(x+y_1)\}+(y_1\oplus y_1)$, 再び仮定より $=(x+y_1+y_1)\oplus(x+y_1+y_1)$ $=\{x+(y_1\oplus y_1)\}\oplus\{x+(y_1\oplus y_1)\}$.

(I-3)　$y=y'_1, y_1$のときは成り立つと仮定する. $y=y'_1\oplus y_1$のときにも, 以下の式変形により成り立つ：$(x\oplus x)+\{(y'_1\oplus y_1)\oplus(y'_1\oplus y_1)\}=(x\oplus x)+(y'_1\oplus y_1)+(y'_1\oplus y_1)$ $=(x\oplus x)+(y'_1\oplus y_1)+(y_1\oplus y_1)'$, 補題 3.2 より $=(x\oplus x)+\{(y'_1\oplus y_1)+(y_1\oplus y_1)\}'$, 補題 3.1 より $=(x\oplus x)+(y'_1\oplus y_1)'+(y_1\oplus y_1)=(x\oplus x)+(y'_1\oplus y'_1)+(y_1\oplus y_1)$, y'_1に関する仮定より $=\{(x+y'_1)\oplus(x+y'_1)\}+(y_1\oplus y_1)$, y_1に関する仮定より $=(x+y'_1+y_1)\oplus(x+y'_1+y_1)=\{x+(y'_1\oplus y_1)\}\oplus\{x+(y'_1\oplus y_1)\}$. □

補題 3.5. $x+x=x\oplus x$.

証明. xに関する性質「$x+x=x\oplus x$」に数学的帰納法を適用することにより, 証明する.

(I-1)　$x=1$のときは, $1+1=1'=1\oplus 1$により成り立つ.

(I-2)　$x=x_1$のときは成り立つと仮定する. $x=x_1\oplus x_1$のときにも, 以下の式変形により成り立つ：補題 3.4 より $(x_1\oplus x_1)+(x_1\oplus x_1)=(x_1+x_1)\oplus(x_1+x_1)$, 仮定より $=(x_1\oplus x_1)\oplus(x_1\oplus x_1)$.

(I-3)　$x=x_1$のときは成り立つと仮定する（$x=x'_1$に関する仮定は不要）. $x=x'_1\oplus x_1$のときにも, 以下の式変形により成り立つ：$(x'_1\oplus x_1)+(x'_1\oplus x_1)=(x_1\oplus x_1)'+(x_1\oplus x_1)'$, 補題 3.1, 補題 3.2 より $=\{(x_1\oplus x_1)+(x_1\oplus x_1)\}''$, 補題 3.4 より $=\{(x_1+x_1)\oplus(x_1+x_1)\}''$,

仮定より $=\{(x_1\oplus x_1)\oplus(x_1\oplus x_1)\}''=(x_1\oplus x_1)'\oplus(x_1\oplus x_1)'=(x'_1\oplus x_1)\oplus(x'_1\oplus x_1)$. □

定理 3.6. $x>y$ ならば $x+y=x\oplus y$.

証明. $x>y$ とする.

$x=y$ のとき. 補題 3.5 で証明済み.

$x=y'$ のとき. 以下の式変形により成り立つ：補題 3.1 より $y'+y=(y+y)'$, 補題 3.5 より $=(y\oplus y)'=y'\oplus y$. □

補題 3.7. $1+x=x+1$.

証明. x に関する性質「$1+x=x+1$」に数学的帰納法を適用することにより, 証明する.

(I-1)　$x=1$ のときは, 明らかに成り立つ.

(I-2,3)　$x_1>x_2$ とし, $x=x_1, x_2$ のときは成り立つと仮定する. $x=x_1\oplus x_2$ のときにも, 以下の式変形により成り立つ：$1+(x_1\oplus x_2)=1+x_1+x_2$, x_1 に関する仮定より $=x_1+1+x_2$, x_2 に関する仮定より $=x_1+x_2+1$, 定理 3.6 より $=(x_1\oplus x_2)+1$. □

定理 3.8（交換法則）. $x+y=y+x$.

証明. x を任意に固定し, y に関する性質「$x+y=y+x$」に数学的帰納法を適用することにより, 証明する.

(I-1)　$y=1$ のときは補題 3.7 で証明済み.

(I-2,3)　$y_1>y_2$ とし, $y=y_1, y_2$ のときは成り立つと仮定する. $y=y_1\oplus y_2$ のときにも, 以下の式変形により成り立つ：$x+(y_1\oplus y_2)=x+y_1+y_2$, y_1 に関する仮定より $=y_1+x+y_2$, y_2 に関する仮定より $=y_1+y_2+x$, 定理 3.6 より $=(y_1\oplus y_2)+x$. □

4. 加法の新しい特徴付け

前節では加法について下記の二つの定理を証明した（定理 3.6, 定理 3.3）:

(T1)　$x>y$ ならば $x+y=x\oplus y$.

(T2)　$(x+y)+z=x+(y+z)$.

この節では, 本論と直接の関係はないが, 自然数上の 2 項演算でこれら二つの性質を満たすものは加法にかぎることを示す(定理 4.3). これまでは加法を第 3 節に述べた性質(S1)～(S2)で特徴付けてきたが, この定理により, 性質(T1)～(T2)によっても加法が特徴付けられることが分かる.

以下において自然数上の 2 項演算 $*$ も性質(T1)～(T2)を満たす――すなわち, 下記の性質(T1$*$), (T2$*$)が成り立つ――と仮定する：

(T1$*$)　$x>y$ ならば $x*y=x\oplus y$.

(T2$*$)　$(x*y)*z=x*(y*z)$.

補題 4.1. $x*1=1*x$.

証明. x に関する性質「$x*1=1*x$」に数学的帰納法を適用することにより, 証明する.

(I-1)　$x=1$ のときは, 明らかに成り立つ.

(I-2,3)　$x_1>x_2$ とし, $x=x_1, x_2$ のときは成り立つと仮定する. $x=x_1\oplus x_2$ のときにも,

以下の式変形により成り立つ:(T1$*$)より $(x_1 \oplus x_2)*1=(x_1 * x_2)*1$, (T2$*$)より $=x_1*(x_2*1)$, x_2 に関する仮定より $=x_1*(1*x_2)$, (T2$*$)より $=(x_1*1)*x_2$, x_1 に関する仮定より $=(1*x_1)*x_2$, (T2$*$)より $=1*(x_1*x_2)$, (T1$*$)より $=1*(x_1 \oplus x_2)$. □

補題 4.2. $x*1=x'$.

証明. x に関する性質「$x*1=x'$」に数学的帰納法を適用することにより, 証明する.

(I-1) $x=1$のときは, (T1$*$)より $1*1=1\oplus 1=1'$であるから, 確かに成り立つ.

(I-2) $x=x_1$ のときは成り立つと仮定する. $x=x_1 \oplus x_1$ のときにも, 以下の式変形により成り立つ:(T1$*$)より $(x_1 \oplus x_1)*1=(x_1*x_1)*1$, (T2$*$)より $=x_1*(x_1*1)$, 補題 4.1 より $=x_1*(1*x_1)$, (T2$*$)より $=(x_1*1)*x_1$, 仮定より $=x'_1*x_1$, (T1$*$)より $=x'_1 \oplus x_1=(x_1 \oplus x_1)'$.

(I-3) $x=x_1$ のときは成り立つと仮定する($x=x'_1$ に関する仮定は不要). $x=x'_1 \oplus x_1$ のときにも, 以下の式変形により成り立つ:(T1$*$)より $(x'_1 \oplus x_1)*1=(x'_1*x_1)*1$, (T2$*$)より $=x'_1*(x_1*1)$, 仮定より $=x'_1*x'_1$, (T1$*$)より $=x'_1 \oplus x'_1=(x'_1 \oplus x_1)'$. □

定理 4.3. $x*y=x+y$.

証明. y に関する性質「任意の x に対し, $x*y=x+y$」に数学的帰納法を適用することにより, 証明する.

(I-1) $y=1$のときは, 補題 4.2 より $x*1=x'=x+1$であるから, 確かに成り立つ.

(I-2,3) $y_1 > y_2$とし, $y=y_1, y_2$のときは成り立つと仮定する. $y=y_1 \oplus y_2$のときにも, 以下の式変形により成り立つ:(T1$*$)より $x*(y_1 \oplus y_2)=x*(y_1*y_2)$, (T2$*$)より $=(x*y_1)*y_2$, y_1 に関する仮定より $=(x+y_1)*y_2$, y_2 に関する仮定より $=x+y_1+y_2$ $=x+(y_1 \oplus y_2)$. □

5. ペアノの公理

この節では, 冒頭に述べたペアノの五つの公理がすべて証明可能であることを示す. このうち第 1 の公理は公理 1 そのものであり, 第 2, 第 3 の公理はそれぞれ定理 2.5 ⑴, 定理 2.7 である. 残りの第 4, 第 5 の公理をそれぞれ定理 5.4, 定理 5.7 として証明する.

補題 5.1. $x'=1'$ ならば $x=1$.

証明. x に関する性質「$x'=1'$ ならば $x=1$」に数学的帰納法を適用することにより, 証明する.

(I-1) $x=1$のときは, 明らかに成り立つ.

(I-2) ($x=x_1$ に関する仮定は不要). $(x_1 \oplus x_1)'=1'$ だったと仮定すると, $x'_1 \oplus x_1=1\oplus 1$ となり, 公理 16 に反す. したがって $x=x_1 \oplus x_1$ のときにも, 成り立つ.

(I-3) ($x=x'_1, x_1$ に関する仮定は不要). $(x'_1 \oplus x_1)'=1'$ だったと仮定すると, $x'_1 \oplus x'_1=1\oplus 1$となり, 公理 15 より $x'_1=1$となるが, これは定理 2.7 に反す. したがって $x=x'_1 \oplus x_1$ のときにも, 成り立つ. □

補題 5.2. $x'=(a \oplus a)'$ ならば $x=a \oplus a$.

証明. x に関する性質「$x'=(a \oplus a)'$ ならば $x=a \oplus a$」に数学的帰納法を適用することによ

り，証明する．

(I-1)　$1'=(a\oplus a)'$だったと仮定すると，$1\oplus 1=a'\oplus a$となり，公理 16 に反す．したがって $x=1$のときは成り立つ．

(I-2)　（$x=x_1$に関する仮定は不要）．$x=x_1\oplus x_1$のときにも，以下の推論により成り立つ：$(x_1\oplus x_1)'=(a\oplus a)'$と仮定すると，$x'_1\oplus x_1=a'\oplus a$，公理 17 より $x_1=a$，したがって $x_1\oplus x_1=a\oplus a$．

(I-3)　（$x=x'_1, x_1$に関する仮定は不要）．$(x'_1\oplus x_1)'=(a\oplus a)'$だったと仮定すると，$x'_1\oplus x'_1=a'\oplus a$となり，公理 16 に反す．したがって $x=x'_1\oplus x_1$のときにも，成り立つ．
□

補題 5.3. 任意の xに対して「$x'=a'$ならば $x=a$」であると仮定する．このとき，$x'=(a'\oplus a)'$ならば $x=a'\oplus a$．

証明． xに関する性質「$x'=(a'\oplus a)'$ならば $x=a'\oplus a$」に数学的帰納法を適用することにより，証明する．

(I-1)　$1'=(a'\oplus a)'$だったと仮定すると，$1\oplus 1=a'\oplus a'$となり，公理 15 より$1=a'$となるが，これは定理 2.7 に反す．したがって $x=1$のときは成り立つ．

(I-2)　（$x=x_1$に関する仮定は不要）．$(x_1\oplus x_1)'=(a'\oplus a)'$だったと仮定すると，$x'_1\oplus x_1=a'\oplus a'$となり，公理 16 に反す．したがって $x=x_1\oplus x_1$のときにも，成り立つ．

(I-3)　（$x=x'_1, x_1$に関する仮定は不要）．$x=x'_1\oplus x_1$のときにも，以下の推論により成り立つ：$(x'_1\oplus x_1)'=(a'\oplus a)'$と仮定すると，$x'_1\oplus x'_1=a'\oplus a'$，公理 15 より $x'_1=a'$，仮定より $x_1=a$，したがって $x'_1\oplus x_1=a'\oplus a$．□

定理 5.4． $x'=y'$ならば $x=y$．（ペアノの公理 4）

証明． yに関する性質「任意の xに対して『$x'=y'$ならば $x=y$』」に数学的帰納法を適用することにより，証明する．

(I-1)　$y=1$のときは，補題 5.1 そのものである．

(I-2)　（$y=a$に関する仮定は不要）．$y=a\oplus a$のときは，補題 5.2 そのものである．

(I-3)　$y=a$のときは成り立つと仮定する（$y=a'$に関する仮定は不要）．$y=a'\oplus a$のときは補題 5.3 そのものである．□

補題 5.5． $x\neq 1$ならば，$x=y'$となる yが存在する．

証明． xに関する性質「$x\neq 1$ならば，$x=y'$となる yが存在する」に数学的帰納法を適用することにより，証明する．

(I-1)　$x=1$のときは，明らかに成り立つ．

(I-2)　$x=x_1$のときは成り立つと仮定する．

$x_1=1$のとき．$x_1\oplus x_1=1\oplus 1=1'$．

$x_1\neq 1$のとき．仮定より $x_1=y'_1$となる y_1が存在し，$x_1\oplus x_1=y'_1\oplus y'_1=(y'_1\oplus y_1)'$．したがって，いずれにしても，$x=x_1\oplus x_1$のときにも成り立つ．

(I-3)　（$x=x'_1, x_1$に関する仮定は不要）．$x'_1\oplus x_1=(x_1\oplus x_1)'$．したがって，$x=x'_1\oplus x_1$のときにも成り立つ．□

補題 5.6. 集合 M について，任意の x に対して「$x \in M$ ならば $x' \in M$」であると仮定する．このとき，$x \in M$ ならば $x+y \in M$．

証明． y に関する性質「任意の x に対して『$x \in M$ ならば $x+y \in M$』」に数学的帰納法を適用することにより，証明する．

(I-1)　$y=1$ のときは,以下の推論により成り立つ: $x \in M$ と仮定すると,仮定より $x' \in M$，したがって $x+1 \in M$．

(I-2,3)　$y_1 > y_2$ とし，$y = y_1, y_2$ のときは成り立つと仮定する．$y = y_1 \oplus y_2$ のときにも，以下の推論により成り立つ：$x \in M$ と仮定すると，y_1 に関する仮定より $x+y_1 \in M$，y_2 に関する仮定より $x+y_1+y_2 \in M$，したがって $x+(y_1 \oplus y_2) \in M$．□

定理 5.7. 集合 M について，$1 \in M$ かつ任意の x に対して「$x \in M$ ならば $x' \in M$」であると仮定する．このとき，すべての自然数が M の元である．（ペアノの公理 5）

証明． x を任意の自然数として $x \in M$ を示す．

$x=1$ のとき．仮定より $x \in M$．

$x \neq 1$ のとき．補題 5.5 より $x = y'$ となる y が存在し，補題 3.7 より $x = y' = y+1 = 1+y$，仮定と補題 5.6 より $1+y \in M$ であるから $x \in M$．

したがって，いずれにしても $x \in M$．□

以上でペアノの公理の証明はすべて終わったが，さらに二つの定理を証明しておく．最初の定理は公理 17 の補完物である．

定理 5.8. x f y かつ z f u かつ $x \oplus y = z \oplus u$ ならば，$x = z$．

証明． x f y，z f u，$x \oplus y = z \oplus u$ と仮定する．公理 17 より $y = u$．したがって定理 2.5 ⑶ より $x = y' = u' = z$．□

定理 5.9. $x > y$ かつ $z > u$ かつ $x \oplus y = z \oplus u$ ならば，$x = z$ かつ $y = u$．

証明． $x > y$，$z > u$，$x \oplus y = z \oplus u$ と仮定する．

x f y のとき．公理 16 より z f u，定理 5.8，公理 17 よりそれぞれ $x = z$，$y = u$．

$x = y$ のとき．公理 16 より $z = u$，公理 15 より $x = y = z = u$．□

６．加法の一意的存在

第３節でも述べたが，加法とは下記の性質(S1)〜(S2)を満たす自然数上の 2 項演算 + のことである：

(S1)　$x+1 = x'$．

(S2)　$y > z$ ならば $x+(y \oplus z) = (x+y)+z$．

この節では，加法がただ一つ存在することを証明する（定理 6.1，定理 6.6）．存在の証明は，彌永[2]199 頁にある，N 系から任意の N' 系への準同型写像の（ペアノの公理系における）存在証明にならったものである．

定理 6.1. 自然数上の 2 項演算 + と $\cup$ がともに性質(S1)〜(S2)を満たすとすると，

$x+y=x\cup y$. すなわち, 性質(S1)〜(S2)を満たす自然数上の 2 項演算は高々一つしかない.

証明. $+$と$\cup$がともに性質(S1), (S2)を満たすと仮定する. yに関する性質「任意のxに対し, $x+y=x\cup y$」に数学的帰納法を適用することにより, 証明する.

(I-1) $y=1$のときは, 以下の式変形により成り立つ: (S1)より$x+1=x'$, $\cup$に関する(S1)より$=x\cup 1$.

(I-2,3) $y=y_1, y_2$のときは成り立つと仮定する. $y=y_1\oplus y_2$のときにも, 以下の式変形により成り立つ: (S2)より$x+(y_1\oplus y_2)=(x+y_1)+y_2$, 仮定より$=(x\cup y_1)\cup y_2$, $\cup$に関する(S2)より$=x\cup(y_1\oplus y_2)$. □

以下, この節の残りを, 性質(S1)〜(S2)を満たす 2 項演算の存在証明にあてる.

自然数の三つ組の集合Xで下記の条件(s1)〜(s2)を満たすものを**加法的**ということにする:

(s1) $(p,1,p')\in X$.

(s2) $q>r$かつ$(p,q,s),(s,r,t)\in X$ならば, $(p,q\oplus r,t)\in X$.

自然数の三つ組全体からなる集合は加法的なので, 加法的集合は確かに存在する. そこでX_0をすべての加法的集合の共通部分とする. したがって, Xが加法的集合ならば$X_0\subseteq X$である.

次の補題は定義より明らかである.

補題 6.2. X_0は加法的である. すなわち, 下記の性質$(s1)_0$〜$(s2)_0$が成り立つ:

$(s1)_0$ $(p,1,p')\in X_0$.

$(s2)_0$ $q>r$かつ$(p,q,s),(s,r,t)\in X_0$ならば, $(p,q\oplus r,t)\in X_0$. □

補題 6.3. a'が$(a,1,w)\in X_0$を満たすただ一つのwである. すなわち, 以下の⑴〜⑵が成り立つ:

⑴ $(a,1,a')\in X_0$.

⑵ $(a,1,w)\in X_0$ならば$w=a'$.

証明. ⑴は$(s1)_0$による. ⑵を示すため, $(a,1,w)\in X_0$であるにかかわらず$w\neq a'$だったと仮定する. このとき$X_1=X_0-\{(a,1,w)\}$とおくと, X_1は加法的である. このことを示すため, X_1に関して(s1), (s2)を証明しよう.

(s1)の証明. $(s1)_0$より$(p,1,p')\in X_0$. $(p,1,p')=(a,1,w)$だったと仮定すると, $p=a$かつ$p'=w$, よって$w=a'$となり矛盾. したがって$(p,1,p')\in X_1$.

(s2)の証明. $q>r$かつ$(p,q,s),(s,r,t)\in X_1$と仮定する. $(p,q,s),(s,r,t)\in X_0$だから$(s2)_0$より$(p,q\oplus r,t)\in X_0$. $(p,q\oplus r,t)=(a,1,w)$だったと仮定すると$q\oplus r=1$となり, 定理 2.8 に反す. したがって$(p,q\oplus r,t)\in X_1$.

よってX_1は加法的であるから$X_0\subseteq X_1$となるが, これは$(a,1,w)\in X_0$, $(a,1,w)\notin X_1$に矛盾. したがって⑵も成り立つ. □

補題 6.4. $b>c$とする. さらに, dが$(a,b,w)\in X_0$を満たすただ一つのwであり, かつ, eが$(d,c,w)\in X_0$を満たすただ一つのwである——すなわち, $(a,b,d),(d,c,e)\in X_0$, かつ,

任意の w に対して「『$(a,b,w)\in X_0$ ならば $w=d$』かつ『$(d,c,w)\in X_0$ ならば $w=e$』」である――と仮定する．このとき，e が $(a,b\oplus c,w)\in X_0$ を満たすただ一つの w である．すなわち，以下の⑴～⑵が成り立つ：

⑴ $(a,b\oplus c,e)\in X_0$.

⑵ $(a,b\oplus c,w)\in X_0$ ならば $w=e$.

証明．⑴は$(s2)_0$による．⑵を示すため，$(a,b\oplus c,w)\in X_0$ であるにかかわらず $w\neq e$ だったと仮定する．このとき $X_2=X_0-\{(a,b\oplus c,w)\}$ とおくと，X_2 は加法的である．このことを示すため，X_2 に関して(s1)～(s2)を証明しよう．

(s1)の証明．$(s1)_0$ より $(p,1,p')\in X_0$．$(p,1,p')=(a,b\oplus c,w)$ だったと仮定すると，$b\oplus c=1$ となり定理 2.8 に反す．したがって $(p,1,p')\in X_2$.

(s2)の証明．$q>r$ かつ $(p,q,s),(s,r,t)\in X_2$ と仮定する．$(p,q,s),(s,r,t)\in X_0$ だから$(s2)_0$ より $(p,q\oplus r,t)\in X_0$．ここで $(p,q\oplus r,t)=(a,b\oplus c,w)$ だったと仮定する．このとき $p=a$，$q\oplus r=b\oplus c$，かつ $t=w$．よって定理 5.9 より $q=b$ かつ $r=c$ であるから $(a,b,s)=(p,q,s)\in X_2\subseteq X_0$ となり，仮定より $s=d$．すると $(d,c,w)=(s,r,t)\in X_2\subseteq X_0$ となり，仮定より $w=e$ となって矛盾．したがって $(p,q\oplus r,t)\neq(a,b\oplus c,w)$ であり，$(p,q\oplus r,t)\in X_2$.

よって X_2 は加法的であるから $X_0\subseteq X_2$ となるが，これは $(a,b\oplus c,w)\in X_0$, $(a,b\oplus c,w)\notin X_2$ に矛盾．したがって⑵も成り立つ．□

補題 6.5．任意の x,y に対し，$(x,y,z)\in X_0$ となる z がただ一つ存在する．

証明．y に関する性質「任意の x に対し，$(x,y,z)\in X_0$ となる z がただ一つ存在する」に数学的帰納法を適用することにより，証明する．

(I-1) 補題 6.3 より x' が $(x,1,w)\in X_0$ を満たすただ一つの w であるから，$y=1$ のときは成り立つ．

(I-2,3) $b>c$ とする．$y=b,c$ のとき成り立つと仮定し，d が $(x,b,w)\in X_0$ を満たすただ一つの w であり，かつ，e が $(d,c,w)\in X_0$ を満たすただ一つの w であるとする．補題 6.4 より e が $(x,b\oplus c,w)\in X_0$ を満たすただ一つの w であるから，$y=b\oplus c$ のときにも成り立つ．

□

上の補題によりただ一つ存在する，$(x,y,z)\in X_0$ となる z を，$x+y$ と表すことにする．これで自然数上の 2 項演算 $+$ が定まった．この演算 $+$ に関し，補題 6.3 より $a+1=a'$，また，補題 6.4 より $b>c$ のとき，$a+b=d$ かつ $d+c=e$ ならば $a+(b\oplus c)=e$ であるから，次の定理は明らかである．

定理 6.6．演算 $+$ に関して性質(S1)～(S2)が成り立つ．したがって，性質(S1)～(S2)を満たす自然数上の 2 項演算が存在する．□

参 考 文 献

[1] A. Fricke, H. Besuden, H. Baars und G. Boyn, Mathematik in der Grundschule 1, Ernst Klett Verlag Stuttgart.

[2] 彌永昌吉, 数の体系（上）, 岩波新書 青版 815.
[3] 岡崎宏光, 無題 1――[1]の和訳――.
[4] 岡崎宏光, キーズネル棒を使った西ドイツの教科書（1 年生用）.
[5] 岡崎宏光, Cuisenaire Arithmetic Number Theory.
[6] 岡崎宏光, Cuisenaire Arithmetic の公理候補（ ⊇＝の場合）.
[7] 岡崎宏光, 無題 2――Cuisenaire Arithmetic の公理化の試み――.
[8] 遠山啓, 数学の展望台－I 中学・高校数学入門（遠山啓著作集 数学論シリーズ－1), 太郎次郎社.
[9] 中原忠男（編集). 算数・数学科重要用語 300 の基礎知識（重要用語 300 の基礎知識 5 巻), 明治図書.
[10] 日本数学教育学会（編集), 和英／英和 算数・数学用語活用辞典, 東洋館.