

## VOF 法を用いた積雪変形有限要素解析法

A finite element snow deformation analysis using VOF method

阿部和久\*, 紅露一寛\*\*

Kazuhisa Abe, Kazuhiro Koro

\*工博, 新潟大学助教授, 工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

\*\*博(工), 新潟大学助手, 大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

A finite element analysis method for snow deformation problems is presented. Since the snow possesses the incompressibility under the positive pressure, then the penalized mixed form is used in the finite element discretization. Furthermore the large snow deformation dominated by viscous behavior may cause complex free-surface motion such as the fusion and fission. In order to capture these phenomena, the VOF method is employed. The motion of snow is thus reduced to the convection equation of VOF function which is defined by a volume fraction of snow in each mesh. The evolution process of VOF function is calculated by means of the CIP method. The essential boundary condition in which displacement is prescribed is incorporated in the solving equation using a penalty method. It allows us to locate the boundaries in the analysis domain irrespective of the finite element mesh. The developed method is applied to several examples and the validity of the method is proved.

**Key Words :** snow deformation analysis, VOF method, CIP method

キーワード : 積雪変形解析, VOF 法, CIP 法

## 1. はじめに

積雪から構造物に対して作用する荷重は、積雪の自重を大幅に上回る程の規模となる事がある。雪荷重の適切な評価には、その発生機構の把握と発生過程の予測とが不可欠であり、数値解法を用いた積雪の変形解析が当該目的に対する有効な一手段となり得る。Nakamura<sup>1)</sup>は、積雪の圧密沈下を対象に、その中に埋設されたはりに作用する沈降荷重の発生過程を有限要素法により解析した。なお、積雪変形の記述には Lagrange 記法が用いられており、有限要素節点は積雪の物質点に固定されている。積雪の長時間に亘る力学挙動は、一般に比較的大きな変形により支配されることとなるが、さらには雪塊どうしの接触・融合および分離などの複雑な自由境界変動をも伴う可能性を有している。文献 1) に示された圧密沈下解析においても、はり近傍に非常に大きな変形が発生しており、それに伴う有限要素形状の極端なゆがみが認められる。要素形状のゆがみについては、ALE(Arbitrary Lagrangian Eulerian)法を用いることによりある程度は対処可能であると思われるが、極端に大きな変形や、上述のような界面の融合・分離を伴う一連の変形過程の解析は容易でない。

そのため、著者は過去に個別要素法による積雪変形解析を試みた<sup>2),3),4)</sup>。当該手法によれば、積雪領域は個別要素集合体により表現されるため、自由表面の複雑な挙動も容易に解析可能となる。しかし、個別要素集合体の粒状体としての力学特性と積雪のそれとは異なり、積雪の物性値を個別要素解析で正確に表現することは本質的に不可能であった。

有限要素法や差分法などの連続体の離散化解法に基づき、物体領域内の大きな変形を伴う界面の複雑な挙

動の追跡を可能とし得る手法として、VOF(Volume of Fluid)法<sup>5)</sup>や、Level set 法<sup>6)</sup>が挙げられる。VOF 法は、物体領域を定義する関数 (VOF 関数) をメッシュ内における物体の体積占有率で定義し、それに関する移流方程式を解き進めることで界面を逐次捕捉して行く方法である。一方、Level set 法は、界面からの符号付き距離により与えられる Level set 関数のゼロ等高面を界面と定義し、VOF 法と同様に Level set 関数の移流方程式を解く方法である。いずれの手法によっても、物体領域とは無関係に解析メッシュを定義でき、界面を適切に捕捉することができる<sup>7),8)</sup>。

本研究では有限要素法をベースに、VOF 法に基づく二次元積雪変形解析手法を構成する。なお、VOF 法による自由表面の捕捉精度の確保には、VOF 関数に対する移流方程式の解析精度を維持することが重要となる。以下では当該目的で CIP(Cubic Interpolated Profile)法<sup>9)</sup>を併用する。また、VOF 法の利点は物体形状と無関係に要素分割が可能な点にある。しかし、例えば変位規定境界に対しては、その形状に合わせて要素分割する必要がある。そのため、境界形状が複雑な場合には、依然として要素生成の煩雑さを伴う。そこで、積雪領域を包含する解析平面に固定された有限要素メッシュと独立に、任意の境界形状(構造物)の設定を可能とするための手法を、ペナルティ法に基づき構成することも試みる。幾つかの解析例を通し、ここに構成した解析手法の適用性について検証する。

## 2. 積雪の力学特性

積雪は一般に粘弾性体としての力学的性質を有する。しかし、積雪の長時間に亘る変形過程においては、粘

性変形が支配的となるため、それを粘性体としてモデル化することができる。積雪の一軸粘性変形下でのポアソン比が、圧縮で0、引張で0.5(等体積変形)となることが知られている<sup>10)</sup>。この積雪特有の際立った力学特性は次式によって表現することができる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\eta_G D_{ij} + p\delta_{ij} \\ D_{mm} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (p > 0), \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = 2\eta_G D_{ij} \quad (p \leq 0)$$

ここで、 $\sigma_{ij}$  は応力、 $\eta_G$  は積雪のせん断粘性係数、 $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタ、 $p$  は圧力(引張を正)であり次式により定義される。

$$p = \frac{1}{3}\sigma_{mm} \quad (2)$$

また、 $D_{ij}$  はひずみ速度であり、次式で与えられる。

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \quad (3)$$

ここで、 $v_i$  は変位速度である。なお、繰り返し指標は総和規約に従うものとする。

$\eta_G$  は一般に雪質、積雪密度  $\rho$  および雪温に依存する。 $\eta_G$  の特性は地域によって異なるが、文献 10) によれば、新潟県塩沢のしまり雪に対しては、概ね次の関係が成り立つ。

$$\eta_G = \eta_0 e^{\beta p} \quad (4)$$

ここで、 $\eta_0, \beta$  は定数である。

### 3. 有限要素方程式

前述のとおり、積雪は  $p > 0$  において等体積変形を受ける。一方、 $p \leq 0$  においては圧縮性を有する。そこで、圧力  $p$  の符合によらない解析アルゴリズムの統一的な定式化を図る目的で、有限要素方程式の誘導に際し、式(1)を次式のように修正する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\eta_G D_{ij} + (p)_+ \delta_{ij}, \\ \eta_0 D_{mm} - \frac{1}{\gamma} p &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

なお、

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= G \quad (p > 0), \\ &= \frac{2\eta_G}{3\eta_0} \quad (p \leq 0) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで、 $(p)_+ = p$  ( $p > 0$  のとき)、 $(p)_+ = 0$  ( $p \leq 0$  のとき) である。また、 $p > 0$  における  $\gamma (= G)$  はペナルティ係数として機能し、十分に大きな値に設定しておくものとする。

式(5)第2式の関係を第1式に代入して圧力  $p$  を消去する定式方法と、 $p$  をそのまま未知量とし混合法により定式化を進める方法とが考えられる。後者の手法による場合、ペナルティ係数値によらず連立方程式の求解が安定に実行できる<sup>11)</sup>とのことから、以下ではペナ

ルティ混合法に基づく定式化を採る。なお、前者において、ペナルティ項の係数行列成分の計算に次数低減積分を用いれば、一樣分割に対して後者と等価な求解方程式が得られる場合がある。

有限要素方程式は次の重み付き残差式から誘導する。

$$\frac{1}{\eta_0} \int_{\Omega} w_j \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + X_j \right) d\Omega + \int_{\Omega} w_p \left( \eta_0 D_{mm} - \frac{1}{\gamma} p \right) d\Omega = 0 \quad (7)$$

ここで、 $\Omega$  は解析領域、 $X_j$  は物体力、 $w_j, w_p$  は重み関数であり、それぞれ変位速度  $\mathbf{v}$  および圧力  $p$  に対する補関数で与えるものとする。

式(7)を部分積分して次式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \bar{D}_{ij} \frac{2\eta_G}{\eta_0} D_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{(p)_+}{\eta_0} \bar{D}_{mm} d\Omega \\ &= \int_{\Gamma_t} \frac{1}{\eta_0} w_i \bar{t}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{1}{\eta_0} w_i X_i d\Omega, \quad (8) \\ & \int_{\Omega} w_p \left( \eta_0 D_{mm} - \frac{1}{\gamma} p \right) d\Omega = 0 \end{aligned}$$

ここで、 $\Gamma_t$  は表面力が規定されている境界、 $\bar{t}_i$  は表面力規定値、 $\bar{D}_{ij} = (\partial w_i / \partial x_j + \partial w_j / \partial x_i) / 2$  である。

式(8)を離散化して次の有限要素方程式を得る。

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}]\{\mathbf{v}\} + \{\bar{\mathbf{G}}\}\{\mathbf{p}\} &= \frac{1}{\eta_0}\{\mathbf{f}\}, \quad (9) \\ [\mathbf{G}]\{\mathbf{v}\} - [\mathbf{I}_p]\{\mathbf{p}\} &= \{\mathbf{0}\} \end{aligned}$$

ここで、 $\{\mathbf{v}\}, \{\mathbf{p}\}$  は節点変位速度ベクトルと節点圧力ベクトル、 $[\mathbf{K}], [\bar{\mathbf{G}}], [\mathbf{G}], [\mathbf{I}_p]$  は係数行列である。なお、本解析では変位速度  $\mathbf{v}$  の補間に2次元4節点一次要素を用い、圧力  $p$  には要素内で一定値をとる一定要素近似を用いる<sup>12)</sup>。このとき、 $[\mathbf{I}_p]$  は対角行列で与えられる。

式(9)の第2式を  $\{\mathbf{p}\}$  について解き、その結果を第1式に代入することにより  $\{\mathbf{v}\}$  を未知量とした次の求解方程式を得る。

$$[\mathbf{K} + \bar{\mathbf{G}}\mathbf{I}_p^{-1}\mathbf{G}]\{\mathbf{v}\} = \frac{1}{\eta_0}\{\mathbf{f}\} \quad (10)$$

### 4. 積雪自由境界の追跡法

#### 4.1 VOF 関数<sup>5)</sup>

積雪領域を包含する全解析領域内の有限要素において、積雪により占められている要素で1、積雪を全く含まない要素で0、それ以外では積雪の占有率に従い0~1の間の値をとるようなVOF関数 $\psi$ を定義する。式(9)の係数計算において、 $\psi > 0$ の要素に対し係数計算を実行し、その値に $\psi$ を乗じたものを最終的な係数値として係数行列に加える。なお、実際の解析においては数値安定性確保のため、 $\psi \leq 0.02$ の要素については積雪領域が含まれていないものと見なし、係数計算は実行しないこととした。

自由境界の移動はVOF関数の変動により表現される。VOF関数は次の移流方程式をみます。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \psi = 0 \quad (11)$$

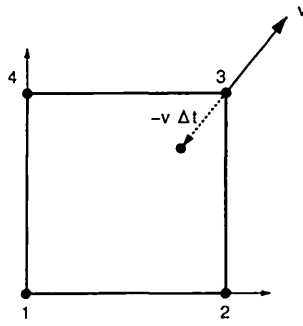


図-1 CIP 法による移流計算 (節点 3 における値を更新する場合)。

式(11)の離散化に際し、1次の風上差分などの簡易な上流化法を適用すると、変形過程の進行に伴いVOF関数が拡散し界面捕捉の精度低下を招く。そのため、式(11)の移流計算には以下に述べるCIP法を用いる。

#### 4.2 CIP 法<sup>9)</sup>の概要

図-1の有限要素の節点3における $\psi$ の移流計算について考える。節点3における変位速度 $\mathbf{v}$ が図のような方向を向いているとき、時刻が $\Delta t$ 経過した時点で $\psi$ は次式で与えられる。

$$\psi(\mathbf{x}_3, t + \Delta t) = \psi(\mathbf{x}_3 - \mathbf{v}\Delta t, t) \quad (12)$$

ここで、 $\mathbf{x}_3$ は節点3の座標値である。

式(12)より、節点における $\psi$ の更新は、現時刻 $t$ における $\psi$ の分布が与えられていれば実行可能であることがわかる。要素内における $\psi$ の分布を3次 Hermite 補間で与える方法がCIP法である。本研究では解析領域が矩形要素で分割されている場合を対象に、以下の手順で解析する。

まず、節点1～4における $\psi, \psi_x = \partial\psi/\partial x, \psi_y = \partial\psi/\partial y, \psi_{xy} = \partial^2\psi/\partial x\partial y$ が時刻 $t$ において与えられているものとする。このとき、要素内の任意点 $\mathbf{x}$ における $\psi$ を次の補間により近似する。

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{N}_i(\mathbf{x})\psi_i(t) \quad (13)$$

ここで、 $\psi_i(t)$ は時刻 $t$ での $i$ 番節点における $(\psi, \psi_x, \psi_y, \psi_{xy})$ より成るベクトル、 $\mathbf{N}_i$ は Hermite の3次多項式からつくられる次の補間関数である。

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 &= [H_{01}(x)H_{01}(y), H_{11}(x)H_{01}(y), \\ &\quad H_{01}(x)H_{11}(y), H_{11}(x)H_{11}(y)], \\ \mathbf{N}_2 &= [H_{02}(x)H_{01}(y), H_{12}(x)H_{01}(y), \\ &\quad H_{02}(x)H_{11}(y), H_{12}(x)H_{11}(y)], \\ \mathbf{N}_3 &= [H_{02}(x)H_{02}(y), H_{12}(x)H_{02}(y), \\ &\quad H_{02}(x)H_{12}(y), H_{12}(x)H_{12}(y)], \\ \mathbf{N}_4 &= [H_{01}(x)H_{02}(y), H_{11}(x)H_{02}(y), \\ &\quad H_{01}(x)H_{12}(y), H_{11}(x)H_{12}(y)] \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 $H_{01}, \dots$ は以下に定義される3次の Hermite 多項式である。

$$\begin{aligned} H_{01}(x) &= 1 - \frac{3}{h^2}x^2 + \frac{2}{h^3}x^3, \\ H_{11}(x) &= 1 - \frac{2}{h}x^2 + \frac{1}{h^2}x^3, \\ H_{02}(x) &= \frac{3}{h^2}x^2 - \frac{2}{h^3}x^3, \\ H_{12}(x) &= -\frac{1}{h}x^2 + \frac{1}{h^2}x^3 \end{aligned} \quad (15)$$

なお、式(15)において $h$ は矩形有限要素の辺の長さであり、 $y$ 座標方向の多項式においては $y$ 方向の辺の長さで与えるものとする。

以上の計算では、 $\psi$ と同様に $\psi_x, \psi_y, \psi_{xy}$ の更新も必要となる。これらの節点値は、要素内において流速 $\mathbf{v}$ が概ね一定であるものとして得られる次の移流方程式に基づき更新する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi_x}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \psi_x &= 0, \\ \frac{\partial\psi_y}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \psi_y &= 0, \\ \frac{\partial\psi_{xy}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \psi_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

このとき、 $t + \Delta t$ における $\psi$ の導関数は式(12)と同様にして求めることができる。なお、要素内における $\psi$ の導関数は、式(13)の空間微分により次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} \psi_x(\mathbf{x}, t) &= \sum_i^4 \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{N}_i(\mathbf{x})\psi_i(t), \\ \psi_y(\mathbf{x}, t) &= \sum_i^4 \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{N}_i(\mathbf{x})\psi_i(t), \\ \psi_{xy}(\mathbf{x}, t) &= \sum_i^4 \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \mathbf{N}_i(\mathbf{x})\psi_i(t) \end{aligned} \quad (17)$$

#### 4.3 密度 $\rho$ の更新

積雪は $p \leq 0$ において圧縮性を示すため、密度 $\rho$ の更新が必要となる。密度 $\rho$ は次の連続式をみたとす。

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \rho = -\rho \text{div } \mathbf{v} \quad (18)$$

$\rho$ の更新は式(18)に基づいてなされる。なお、式(18)の左辺は移流項に相当するが、右辺に発散項があるため $\psi$ の場合のようにCIP法のみでの更新はできない。そこで、 $\rho$ については以下の2段階の計算手順により更新する。

$$\begin{aligned} \rho'(\mathbf{x}_3, t + \Delta t) &= \rho(\mathbf{x}_3 - \mathbf{v}\Delta t, t), \\ \rho(\mathbf{x}_3, t + \Delta t) &= \rho'(\mathbf{x}_3, t + \Delta t) - \rho(\mathbf{x}_3, t) \text{div } \mathbf{v}\Delta t \end{aligned} \quad (19)$$

式(19)の第1式の計算にCIP法を適用する。また、第2式における $\text{div } \mathbf{v}$ の項については、式(10)より得られる有限要素解に基づき事前に求めておく。

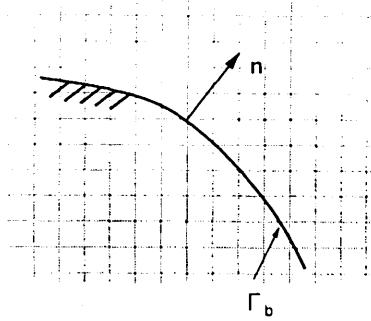


図-2 解析領域内に設定された変位規定境界.

さらに, CIP法に基づく $\rho$ の移流項の更新に際しては, $\psi$ の場合と同様にその空間微分についても更新する.

なお,本研究では積雪のせん断粘性係数 $\eta_G$ を式(4)で与えているので,その値は密度 $\rho$ にのみ依存したものととなる.したがって,本解析過程で更新を要するのは,VOF関数 $\psi$ と密度 $\rho$ およびそれらの導関数のみとなる.

## 5. 変位規定境界の処理

VOF法が有する利点の本質は,要素分割が物体形状に依存しないという点にあり,このことが界面の複雑な挙動の追跡を可能にしている.なお,構造物などの障害物の存在により,積雪変位速度の自由度に拘束条件が課せられる場合,通常それに沿うように要素分割域(解析領域)が設定される.この変位規定境界が複雑な形状で与えられている場合,解析領域の要素分割は煩雑なものとなることが懸念される.要素分割域を,変位規定境界や積雪領域とは無関係に,それらを含む単純な形状で与えることができれば,VOF法が本来有している利点を最大限に活かすことが可能となる.

変位規定境界がメッシュで与えられる線分の部分集合で構成されている場合,当該の境界線上に位置する有限要素節点に対し,変位速度の規定条件を課し,VOF関数で定義されている積雪領域がその境界線を越えて貫入しないように拘束すればよい.

一方,変位規定境界が有限要素メッシュとは整合しない形状で与えられている場合,以下に述べる方法により境界条件処理を施す.

図-2に示すように,変位規定境界 $\Gamma_b$ が解析領域内に設定されているものとする.ここでは具体例として, $\Gamma_b$ と積雪との間に摩擦を生じない場合について考える.このとき, $\Gamma_b$ 上での境界条件は次式で与えられる.

$$v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{on } \Gamma_b) \quad (20)$$

ここで, $\mathbf{n}$ は $\Gamma_b$ 上の単位法線ベクトルである.

式(20)の拘束条件をペナルティ法により求解方程式に組み込む<sup>13)</sup>.具体的には式(7)に次の積分項を加える.

$$\alpha \int_{\Gamma_b} w_n v_n d\Gamma \quad (21)$$

ここで, $\alpha$ はペナルティ係数, $w_n = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$ である.

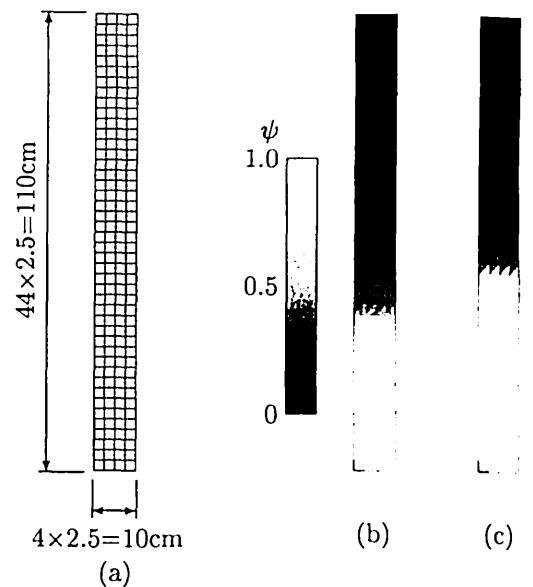


図-3 積雪柱の自重圧密解析. (a) 要素分割, (b) 移流計算に1次の風上差分を適用した場合, (c) 移流計算にCIP法を適用した場合(いずれも $t = 3.2 \times 10^5 \text{sec}$ における結果).

## 6. 解析結果

### 6.1 積雪柱の自重圧密解析

構成した解法の精度を確認する目的で,積雪柱の自重による一様な圧密沈下解析を行った.初期の積雪深は90cm,初期密度は $0.1 \text{g/cm}^3$ とした.また文献10)を参考に,式(4)における積雪のせん断粘性係数を $2.085 \times 10^7 \text{dyn}\cdot\text{sec/cm}^2$ , $\beta$ を25.3と設定した.

解析領域は図-3(a)に示すように,10×110(cm)とし,一辺2.5cmの正方形要素により一様分割を与えた.時間増分は100secとし, $3.2 \times 10^5 \text{sec}$ (約89時間)まで解析した.

最終時刻におけるVOF関数の分布の様子を図-3(b),(c)に示す.なお,比較のためVOF関数の移流計算に1次の風上差分を適用した場合の結果を(b)に示してある.図の解析領域において,白い部分はVOF関数の値が1に近い領域を示しており,積雪領域に相当する.1次の風上差分を用いた場合,VOF関数値が0から1に遷移している領域が比較的広く分布しており,さらに積雪の沈下が早く進行する傾向にある.一方,CIP法を用いた場合は,VOF関数が0から1にまで変化している領域が狭い範囲に分布しており,VOF関数が拡散することなく積雪の自由表面が適切に捉えられている様子が確認できる.

次に,積雪深(自由表面位置)の時刻歴を図-4に示す.図には比較のため,半解析解<sup>4)</sup>および上述の1次風上差分による結果を合わせて示した.なお,積雪の自由表面位置はVOF関数の値が0.5をとる位置として定義した.図より,CIP法を用いた計算結果と半解析解との一致は良好であり,本手法の妥当性が確認できる.

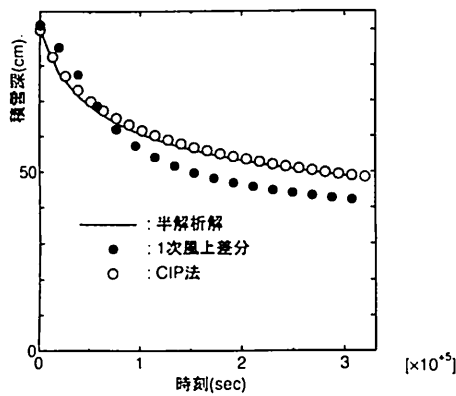


図-4 積雪柱の自重圧密における積雪深時刻歴の比較.

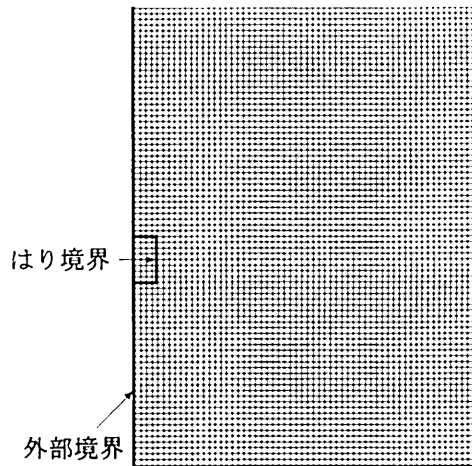


図-6 はりが埋設された積雪の要素分割と変位規定境界.

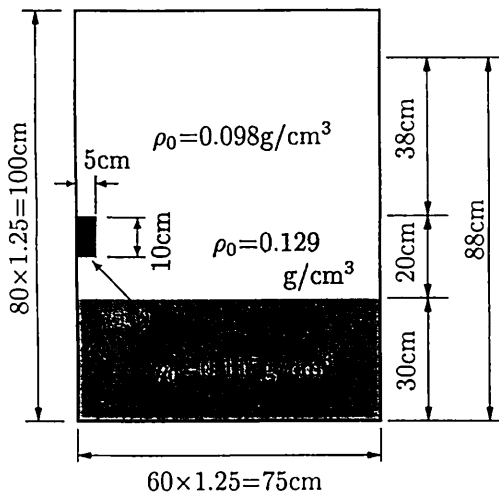


図-5 はりが埋設された積雪の解析条件.

## 6.2 積雪中のはりに作用する沈降荷重の解析

Nakamura<sup>1)</sup>は、幅200cm、高さ90cm、奥行き100cmの箱の中にはりを設置し、雪を充填して沈降荷重の実験を行った。また、それに対応する有限要素解析もなされている。ここでは、それらの実験・解析結果を対象に、本手法を用いた比較解析を実施する。解析領域と解析諸条件を図-5に示す。対称条件を考慮し、右半分を解析領域としている。初期の積雪深は88cmであり、各積雪層における初期密度は図示のとおりである。また、一辺10cmの正方形断面のはりが底面から50cmの位置に埋設されている。解析領域は積雪およびはりを含むような、幅75cm、高さ100cmの矩形領域に設定した。なお、有限要素メッシュは一辺1.25cmの正方形要素により一様分割で与えている。実験における積雪とはりの摩擦係数等は不明であるため、解析でははりや周辺境界と積雪との間に摩擦は一切生じないものとした。積雪のせん断粘性係数は文献1)に示されてい

るものを用い、次式のように設定した。

$$\begin{aligned} \eta_G &= 1.06 \times 10^6 e^{52.4\rho} \text{ (dyn} \cdot \text{sec/cm}^2\text{)} \\ &\quad (\rho \leq 0.11 \text{g/cm}^3) \\ &= 2.09 \times 10^7 e^{25.3\rho} \text{ (dyn} \cdot \text{sec/cm}^2\text{)} \\ &\quad (\rho > 0.11 \text{g/cm}^3) \end{aligned} \quad (22)$$

解析領域の要素分割と変位規定境界を図-6に示す。解析領域の左右および底辺の境界(外部境界)においては、それぞれ水平、鉛直方向変位速度を拘束する。また、はり境界は解析領域内に位置しているが、有限要素メッシュの部分集合により構成されているので、前節で述べたようにはりの上面および側面の各部分境界上において、それぞれ鉛直・水平方向の変位速度を拘束すればよい。また、先に示した積雪柱の一樣圧密とは異なり、本問題においては積雪内に正の圧力域が発生する。以降の計算において、式(6)の圧力項に関するペナルティ係数 $G$ の値は $\eta_G/\eta_0 \times 10^8$ と設定した<sup>12)</sup>。

以上の設定の下、時間増分を60secとして $3.24 \times 10^5 \text{sec}$ (約3.7日)までの解析を行った。3.7日目における計算結果を図-7に示す。なお、図には比較のため文献1)の実験において測定された積雪自由表面形状を合わせて示した。自由表面の沈下量とその実験値との対応は概ね良好であり、その形状においても良い一致が認められ、本解析結果の妥当性が確認できる。また、図-7はVOF関数の分布(黒: $\psi=0$ , 白: $\psi=1$ )を表示したものであるが、積雪領域とその外部領域との境界が明瞭に捉えられている。

移流計算にCIP法を用いる場合、界面近傍においてVOF関数値が振動する傾向を示す。本解析ではアンダーシュートは認められなかったが、 $\psi$ が最大で1.05という値を有する結果となった。本来VOF関数が1より大きな値をとることは望ましくなく、この点に対する改善策も提案されている。しかし、積雪の変形解析の場合、実務的に要求される精度は他の構造解析と比べて必ずしも高くなく、ここに構成した手法により十

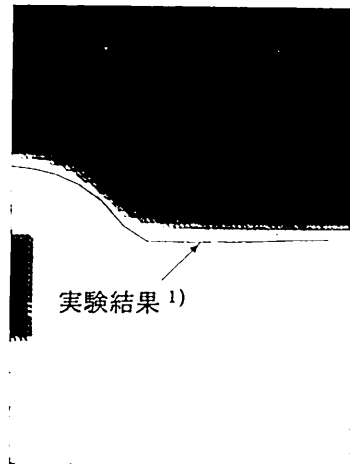


図-7 はりが埋設された積雪の変形形状 (3.7 日目).

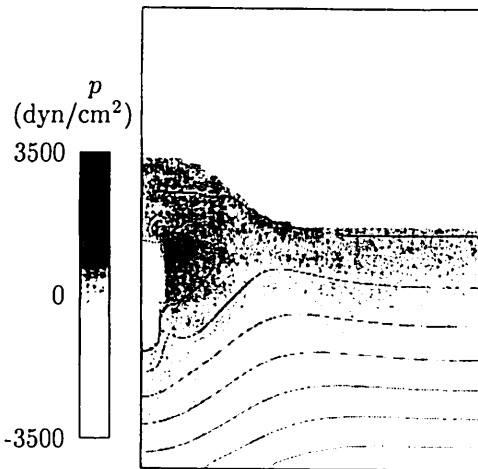


図-8 はりが埋設された積雪内の圧力分布 (3.7 日目).

分妥当な結果が得られるものと期待できる。なお、本解析ではオーバーシュート・アンダーシュートに対する特別な処理は行っていない。

次に 3.7 日目における積雪内の圧力分布 (引張を正) を図-8 に示す。図より、はり上部の角近傍において正の高い圧力が分布しており、この領域に大きな引張力が発生している様子が窺える。圧力分布に及ぼすはりの影響は、はり中心から水平方向に 30cm 程度の範囲に渡っている。また、これは積雪表面形状がはりの影響を受けている範囲と概ね一致している。

なお、図-8 は要素圧力の平均で与えた圧力節点値を示したものである。平滑化されていることもあり、図の圧力分布に振動は認められない。しかし、前述のとおり本解析では変位速度に 4 節点一次要素、圧力近似に一定要素を用いており、この場合要素圧力の分布に振動を生ずる恐れがある。要素選択によらずに圧力振動を抑制する手段として、安定化項の付加による方法

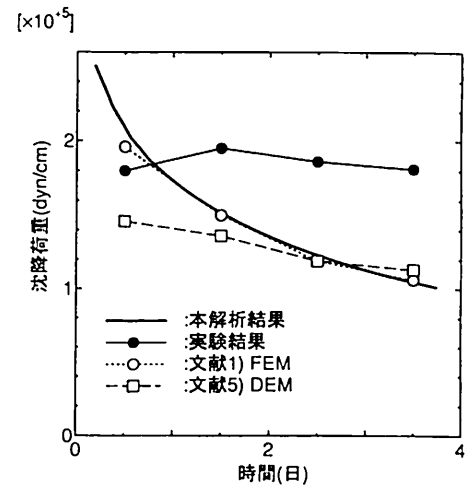


図-9 はりに作用する沈降荷重時刻歴の比較。

<sup>14)</sup>が挙げられるが、このような手法の採用について今後適宜検討して行く必要があるものとする。

続いて、はりに作用する積雪沈降荷重の時刻歴変化の様子を図-9 に示す。図には、文献 1) の実験結果と FEM による計算結果、さらに以前著者が個別要素解析により得た結果<sup>5)</sup>を合わせて示した。なお、図の沈降荷重は単位奥行き当り (1cm) のはりに作用するものである。本解析結果をはじめ、文献 1) の FEM や個別要素解析で得た結果は概ね等しい値を示している。特に、前者の 2 つはほぼ一致した沈降荷重を与えており、具体的な解法は異なるものの、両者の有限要素解析において概ね同じ結果が得られていることが確認できる。実験結果のみ、時間が経過しても比較的大きな沈降荷重を維持している。何れの解法による計算結果もほぼ同程度の値を与えていることから、実験値とのずれは解析精度以外の原因によるものと思われる。現時点においてこの原因は明らかでないが、積雪の粘性係数を与えている式(4)に考慮されていない何らかの因子の存在による可能性が考えられる。

### 6.3 傾斜面上におかれた積雪の変形解析

最後に傾斜面上におかれた積雪の変形解析結果について述べる。解析条件は図-10 に示すとおりである。図で黒塗りの領域は剛体を表している。

解析領域の左右と底面の境界辺は変位規定境界とした。解析領域の要素分割には図-6 と同じものを用いた。剛体上辺の傾斜境界は有限要素メッシュと整合していないため、この境界边上における変位速度の拘束条件は前節に述べたペナルティ法により処理する。ペナルティ係数の値は  $\alpha = 10^6$  とした。なお、 $\alpha$  の値を  $10^6$  以上に設定する限りいずれにおいても良好な結果を得ることができた。積雪と変位規定境界との間には摩擦は作用しないものとした。解析に当り積雪の初期密度は  $0.1\text{g/cm}^3$  とし、せん断粘性係数の密度依存性には式(22)を用いた。

時間増分 60sec の下、 $1.2 \times 10^5 \text{sec}$  (約 33.3 時間) までの解析を行った。最終時刻における積雪変形の様子を

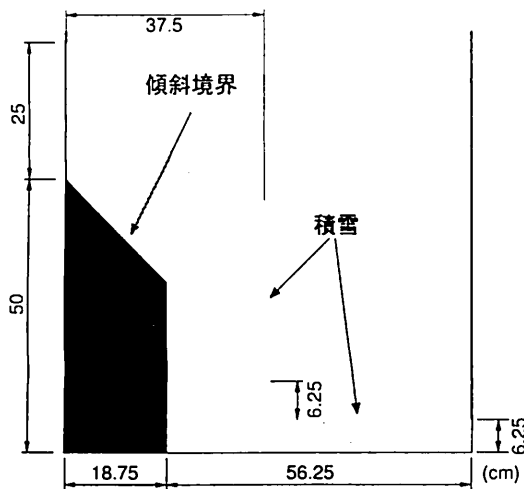


図-10 傾斜面上におかれた積雪の解析条件.

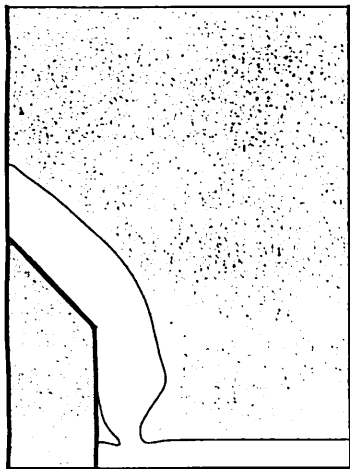


図-11 傾斜面上におかれた積雪の変形形状 (約 33.3 時間後).

図-11 に示す. 図中に表示されている積雪領域の境界線は  $\psi = 0.5$  の等高線を描画したものである. 積雪は傾斜面に沿うように変形しており, 剛体領域内への貫入は生じておらず, 変位速度の拘束条件がペナルティ法により適切に処理されていることが確認できる. また, 傾斜面から張り出した雪庇状の積雪先端部が自重により下方に大きく変形し, その側面が剛体の鉛直壁と接触しているが, ここにおいても積雪の剛体領域内への貫入は認められない. さらに, 積雪先端位置は底部の積雪面にまで達しており, 積雪どうしが融合する過程も本手法によって容易に解析可能であることが確認できる.

## 7. おわりに

領域境界の接触・融合・分離などの複雑な挙動を伴う積雪変形のための有限要素解析手法を構成した. 自

由境界の捕捉法として VOF 関数を用い, さらに自由境界の捕捉精度を維持する目的で当該関数の移流計算に CIP 法を援用した. また, 有限要素メッシュと独立な変位規定境界の設定手法をペナルティ法に基づき構築した. 幾つかの解析例を通し, 本手法の妥当性を検証した.

その結果, CIP 法を用いることで積雪の変形過程を精度良く解析できることがわかった. また, ペナルティ法に基づく変位規定境界の設定法が有効に機能することが確認できた. さらに, 自由境界の接触・融合過程も容易に計算可能であり, 積雪の複雑な変形挙動の解析に対する本手法の有効性が確かめられた.

なお, 積雪中のほりに作用する沈降荷重の問題においては, 本解析と既往の解析のいずれによっても実験値を再現できていない. この点については粘性係数の評価式等の修正が必要に思われる. また, 積雪の融合・分離過程のより定量的な解析には, 雪の結晶間の焼結や破壊などを適切に反映したモデルの構築が必要である. これらについては今後の検討課題としたい.

## 参考文献

- 1) Nakamura, H. : Studies on the settlement force of snow as a generation mechanism, *Rep. of NRCDP*, No.41, 361-385, 1988.
- 2) 阿部和久, 宮野裕一 : 積雪変形解析のための個別要素解析手法, 構造工学論文集, Vol.38A, 339-350, 1992.
- 3) 阿部和久, 青木 究 : 積雪の比較的大きな変形を対象とした個別要素解析法, 構造工学論文集, Vol.40A, 385-394, 1994.
- 4) 阿部和久, 金子正浩 : 個別要素積雪変形解析における接触点密度関数の評価, 構造工学論文集, Vol.41A, 377-384, 1995.
- 5) Hirt, C.W. and Nichols, B.D. : Volume of fluid (VOF) method for the dynamic of free boundaries, *J. Comp. Phys.*, **39**, 201-225, 1981.
- 6) Sussman, M. Smereca, P. and Osher, S. : A level set approach for computing solutions for incompressible two-phase flow, *J. Comp. Phys.*, **114**, 146-159, 1994.
- 7) 岡澤重信, Benson, D.J. : Eulerian ハイドロコードによる破壊解析, 応用力学論文集, **6**, 209-214, 2003.
- 8) 桜庭雅明, 弘崎 聡, 榎山和男 : 自由表面流れ解析のための CIVA/VOF 法に基づく高精度界面捕捉法の構築, 応用力学論文集, **6**, 215-222, 2003.
- 9) Yabe, T. : A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation I. One-dimensional solver, II. Two- and three- dimensional solvers, *Comp. Phys. Commun.*, **66**, 219-242, 1991.
- 10) 篠島健二 : 雪の粘弾性的取扱, 鉄建報告, No.328, 1962.
- 11) 渡辺浩志, 久田俊明 : 超弾性体の混合型有限要素解析に関する基礎的検討, 日本機械学会論文集 (A 編), **62**, 745-752, 1996.
- 12) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. : The finite element method, Vol.3, Chap.4, Butterworth-Heinemann, 2000.

- 13) 鈴木克幸, 中西克嘉, 大坪英臣 : ボクセル被覆を用いた 3 次元ソリッド大変形成析, 応用力学論文集, 2, 279-286, 1999.
- 14) Hughes, T.J.R., Franca, L.P. and Balestra, M. : A new finite element formulation for computational

fluid dynamics: V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition : A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 59, 85-99, 1985.

(2004 年 9 月 17 日 受付)