新潟大学教育人間科学部数学教室,『数学教育研究』, 第 43 巻, 第 1 号, 95-110, 2008.

立式における図的表現の効果に関する研究

−連立方程式の立式を中心に−

和田ゼミナール
高橋　将也　近藤　早苗
増子　恭信

はじめに

平成 18 年度「新潟県学力調査」報告書によれば，連立方程式の計算問題の正答率は加減法で 68.2%，代入法で 66.9%であることに対し，連立方程式の文章題の正答率は 49.0%であることから，生徒は手続き的に問題を解くことはできるが，問題から状況を把握し立式する能力が低いことが示唆される。さらに，報告書では指導のポイントとして，数量関係を図に表したりする活動を丁寧に行うことの重要性が示されている。これらのことから，図に表して問題状況や構造を把握する指導が求められている。

問題解決場面における図的表現の有効性に関する先行研究を見ると，土居下ら（1986）の研究により，正しい絵図・線分図をかけるようにすれば立式できることが明らかになっている。菊池（1996）の研究では，線分図よりも制約の少ない情景図と中間図が子どもの解決の進展を援助していることを明らかにしている。しかし，そもそも図的表現が有効に働いているかを量的に分析しているものは少ない。さらに，中学校を対象にした研究もほとんど見当たらない。

よって，本研究では，中学生を対象に立式における図的表現の効果について連立方程式を中心に統計的処理を用いて検討することを目的とする。そのため，本稿は，はじめに先行研究の検討を行い，そこで明確になった問題点より研究課題を設定する。次に，研究課題を受けて質問紙調査を統計的に分析，考察する。そして最後に，それらの分析・考察をふまえ，指導への示唆を導出する。

１．図的表現についての考察

図的表現は，教科書や授業において使われる絵・図の全般を表しており，問題解決や概念形成が行われる際に重要な役割を担っている。生徒が自由に要素や関係・記号などをかき表すことができることや，図を見ることによって直観的にイメージを持たせる事ができることなどが役割として挙げられる。ここでは，問題解決場面や概念形成場面で生徒が理解を深めるために重要となる。よって，本研究では図的表現について検討する。

1.1.先行研究の検討

1.1.1.中原の研究

中原(1995)の研究によると，数学教育における表現様式は次の 5 つに分類することができる（pp.201-202)。

新潟大学教育人間科学部数学教室,『数学教育研究』, 第 43 巻, 第 1 号, 95-110, 2008.

〈現実的表現：E1〉実世界の状況，実物による表現，具体物や実物による実験などはここに含める
〈操作的表現：E2〉具体的な操作的活動による表現。人為的加工，モデル化が行われている具体物，教具等に動的操作を施すことによる表現
〈図的表現：I〉絵，図，グラフ等による表現
〈言語的表現：S1〉日本では日本語，米国･英国等では英語など，各国の日常言語を用いた表現。また，その省略的表現
〈記号的表現：S2〉数字，文字，演算記号，関係記号など数学的記号を用いた表現

ここでいう E は Enactive Representation（行動的表象），I は Iconic Representation（映像的表象），S は Symbolic Representation（記号的表象）を表している。中原は，Bruner が定めた E，I，S をそれぞれ E1 を現実的表現，E２を操作的表現，I を図的表現，S1 言語的表現，S2 を記号的表現に分けている（p.201）。

これらの表現体系は，E→I→S の認知発達の順序性と相互変換性に着目すると図１のように表すことができる。図１において下から上への流れが表現様式の抽象性，記号性の順序を示している（pp.201-202）。それは，学年が上がるにつれて具体物から抽象物へと段階を踏んで対象が移ることで，生徒が思考しやすくなる順序である。

また，表現様式間および表現様式内の矢印は表現様式の変換を表すものである（pp.201-202）。

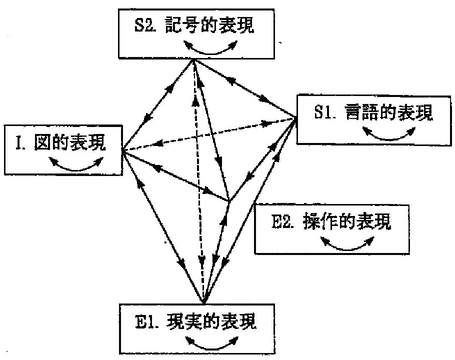


図１　数学教育における表現体系

（１）図的表現の分類

中原は，算数・数学を学ぶ上で図的表現は様々なものがあり，教科書等から収集して図の意味に着目すると表 1 のように分類できるとしている（p.232）。

中原は，図的表現の分類について以下のように述べている(pp.234-235)。

図的表現は大きく分けて２種類の表記があり，学習指導の方法上において用いられる表記であるメタ表記と，数学で規約されている部分が多く学習の対象となる表記である対象表記に分類されることを指摘している。対象表記とは，グラフ図と図形図のことである。メタ表記は，現実場面を示した代理的図的表現と，解決方法や内容を示した中核的図的表現とに分類できる。前者は，現実的状況を対象としており情景図や場面図がある。これらには，具体的な内容の図的表現のため，生徒が現実の場面状況を理解し学習内容の把握と

表１　図的表現の分類

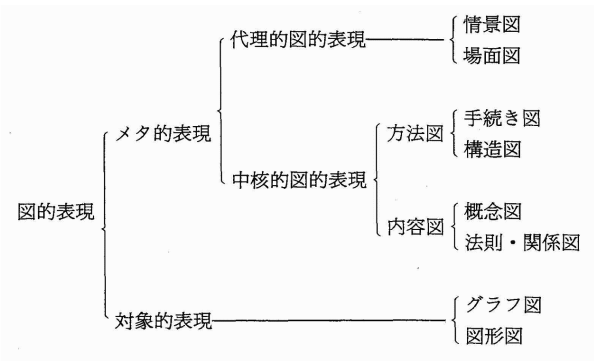
I 1. 情景図………現実的情景, 状況を表す図
I 2. 場面図………算数・数学的場面を表す図
I 3. 手続き図……操作や計算などの手続きを表す図
I 4. 構造図………場面や問題などの構造を表す図
I 5. 概念図………算数・数学の概念を表す図
I 6. 法則・関係図……算数・数学の法則, 関係を表す図
I 7. グラフ図……各種のグラフを表す図
I 8. 図形図………各種の図形を表す図

結び付けやすくする役割がある。後者は, 数学的内容を対象としており手続き図, 構造図, 概念図, 法則・関係図がある。手続き図や構造図は, 問題解決への手順や問題内容の構造を表現することで, 手がかりや方法を示す役割を果たしている。概念図や法則･関係図は, 抽象的な内容である概念や法則･関係を表現することによりそれらの意味内容を示す役割がある。

上記の分類から分かるように, 図的表現には様々な類型, 種類があり学習場面において様々な工夫をすることで, 図的表現各々の役割を果たす（pp.234-235）。

これらをまとめて関連を図示したものが以下の表である（p.235）。

表２　図的表現の類型



（２）図的表現の特性

中原による図的表現の基本的特性と呼ばれるものを以下で示す(pp.240-242)。

形相性…2 次元空間における形や位置, つながりを活用することができる
自由性…どんな記号を使うか, どう使うかに制約が無く多様性がある
類似性…図的表現はそれが表しているものとの間に自然的, 類似的関係がある
視覚性…視覚に訴えて表現内容を正確に伝達できる

上記で示した, 形相性は図的表現が作られる基本的対象に, また自由性と類似性は図的表現がつくられる基本的方法に, そして視覚性は図的表現の基本的伝達手段に関わる特性である。続いて, 基本的特性から得られる, 図的表現の認知的, 機能的側面に関わる導出的特性についてまとめる(pp.240-241)。

直観性…直接的に，感覚的に知覚がなされる
イメージ性…イメージを喚起させたり，イメージを形成したりするのに適している
全体性…全体から部分へという認知が一般になされる
構造性…数量関係を統合的，構造的に表すことができる
同時性…見る順序性が示されていない
個人性…個人的な思考を個人的な方法で表現することができる
非聴伝性…聴覚により伝えることを困難とする

中原は,これらの諸特性は,図的表現の活用原理を検討する際の基盤になるものであり,図的表現の活用の際に考慮されるべきものであるとしている(p.241-243)。

（3）図的表現の活用原理

図的表現の活用に際しては，上記で指摘した特性を十分に生かすことが基本となる。そこで，中原は以下のように，目的としての視点と方法としての視点とを活用原理として導いている(pp.246-249)。

効果性の原理･･･基本的特性や導出的特性を発揮し，学習内容を効果的に表現すること
道具性の原理･･･教師ではなく生徒が，図的表現を思考の道具として活用すること
適切性の原理･･･学習内容や生徒の実態に応じて,図的表現の特性を生かせるように適切に使い分けること
比喩性の原理･･･比喩と同様の性格があることを踏まえ活用すること
準備性の原理･･･図的表現の情報を理解するためには,素地的準備的な指導が必要であり,それをしながら使用することが重要であること

中原は，これら示した内容は，図的表現を用いる上で基礎となるものであるとし，それぞれに注目して表現することにより，効果的に学習や指導を進めることが出来るものであるとしている(pp.246-249)。

1.1.2.土居下らの研究

土居下ら（1986）は，小学校第 3 学年の児童を対象として研究を行い，文章題が解けない児童の多くは数量関係の構造を直観的に把握できないという観点から，絵や図をかくことで見通しを立てる力を身に付けさせることが適当であるとした。そこで,「正しい絵図・線分図がかければ立式できる」と仮定し調査を行った。調査の結果は以下の通りである(pp.76-77)。
問題 6 問中の正答数により，レベルを 3 段階に分類している。

・高レベル(5，6 問)の児童は直観的に見通しを立てることができ，しかも場面に応じた絵図・線分図がかける。
・中レベル(3, 4 問)の児童は直観的に見通しを立てる児童が多いが, 間違う率も多くなる。
・低レベル(0～2 問)の児童は絵図・線分図の内容も悪いと同時に，絵図・線分図がかけな

い児童も急激に増加する。

以上から「高レベルの児童は解けるから正しい絵図・線分図がかけるのであり，低レベルの児童は正しい絵図・線分図がかけないから解けないのである(p.77)」としている。ここから土居下らは「正しい絵図・線分図をかけるようにすれば立式できる(p.77)」ことを導いた。最後に，課題として，問題解決の一手段として線分図の研究をしてきたが，いつでも有効となるわけではないとした上で，線分図の優れた点を明確にすることと個人差に応じた指導を考えることを挙げている。

1.1.3.菊地の研究

菊地（1996）は, 研究対象を小学校第 5 学年の児童に設定し, 文章題解決場面において, 子どもが実際にかいている図に着目した。そこでわかったことは，子どもは問題文の情景を表す情景図や情景図の延長のような「中間図」をかいていて，それらの図は，子どもによる構造把握を援助しているということである。従って調査では，情景図と線分図とその両方の間に位置する「中間図」の解決への影響を次のような問題を用いて調べた。

問題：親のライオンと子どものライオンがいます。2 頭の体重の合計は 252kg で，親のライオンの体重は，子どもの体重の 3 倍です。親のライオンと子どものライオンの体重は，それぞれ何 kg ですか。

図 2-1 問題 2 の情景図

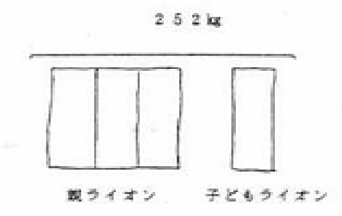


図 2-2 問題 2 の中間図

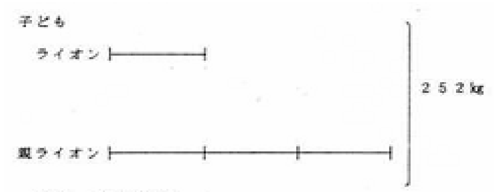


図 2-3 問題 2 の線分図

問題 2 において，線分図に比べて中間図が正答率に大きな影響を与えているという結果が出ている。ある子どもは中間図を見てすぐに筆算を行い，式をかいていたようである。一方で，ある子どもは線分図を見ても気づきが無く，なおも間違った計算（252÷3＝84）を繰り返し行っていた。よって，この子どもにとって線分図は考えにくく問題解決に役立たなかったことがわかるとしている。菊地は，調査で得られた，子どものかき込みやつぶやきから等から,「情景図の延長のような中間図は, 線分図に比べて子どもの解決の進展を援助している」ことを明らかにした。そして，問題解決において，式や抽象的で数学的構造が多く入っている線分図が良いように思われていたが，制約を受けずにかかれた情景図や中間図に着目してもいいのではないかと提唱している。

１.２.研究課題

１.１の先行研究の検討から，以下の研究課題を得た。

①問題解決場面において，中学校を対象に図的表現を与えることの有効性を統計的処理によって検証すること。

菊地の研究(1996)は，情景図と中間図の子どもの理解に対する有効性についての調査であるが，子どもが問題解決を図る上でそもそも図的表現が有効に働いているか統計的処理を用いて量的に分析しているものは少ない。さらに，対象を中学校に限定するとそのような研究は見当たらないようだ。よって，本研究では，文章題に図的表現(構造図または情景図)を付加したもの，図的表現を付加しないものを無作為に子どもに与え，立式に対する図的表現の有効性を検証する。また，統計的処理による検証を本研究で用いることにより，正答率などからの分析では困難であった観点から図的表現の有効性について明らかにしていく。

②計算問題によりレベル分けを行い，レベル別に図的表現を与えることの有効性を検証すること。

土居下らの研究(1886)は，計算問題の正答数別に高レベル，中レベル，低レベルに分け検証している点で他の研究と異なる。しかし，彼らの研究は「正しい絵図・線分図がかければ立式できる」という仮定の下，子ども自身に図をかかせ問題解決を行わせる調査である。図的表現を与えることの有効性をレベル別に検証しているものは少ない。

そのため，本研究では図的表現を与えることの有効性をレベル別に検証する。そして，全体から考察するだけでなく，レベルごとの考察を行うことで，各レベルにおいて有効に働く図的表現の特定を図り，その活用を考える。

２．調査の概要

２．１．調査の目的及び方法

前節の課題を受け，本研究では図的表現が立式に与える影響に焦点を当て調査を行う。調査の対象は新潟市内の公立中学校 3 校の第 2 学年で，計 474 名（A 校 214 名，B 校 164 名，C 校 96 名）である。調査内容は連立方程式で，問題は大問 2 つからなっており，大問 1 では計算問題を，大問 2 では文章題を出題した。解答時間を 15 分に設定し，開始から 8 分経過した時点で全生徒に大問 2 に取り組むように促した。

また，大問 1 は全員共通であるのに対し，大問 2 は文章題に線分図を与えたもの，情景図を与えたもの，図を与えないものの 3 種類を用意し，無作為に配布した。これは，上で述べたように図的表現が立式に与える影響を見るための調査ではあるが，同時に立式能力と計算能力との関連を測るために行うものでもあるからである。

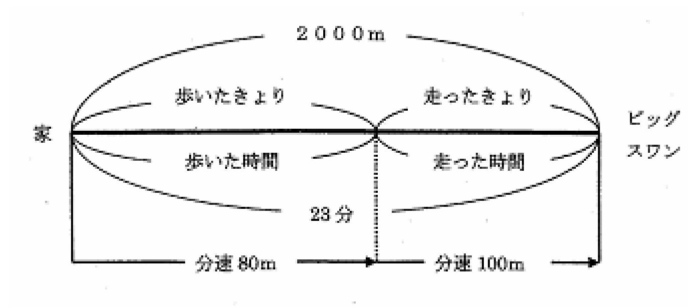
また，文章題では速さ・時間・距離の問題を選択した。これには次のような理由がある。この問題は，情報が複雑であり，生徒にとって問題構造の把握が困難であるとの予想から，図的表現が生徒の思考や立式に有効に働くと考えたからである。

＜調査問題＞

大問１　計算問題　連立方程式の計算

（1）$\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=-2 \end{cases}$　（2）$\begin{cases} 2x+3y=10 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$　（3）$\begin{cases} 3x-2y=-2 \\ y=3x-11 \end{cases}$　（4）$\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=6 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

大問２　文章題　　連立方程式の利用

<table>
<tr><td>問題</td><td colspan="2">さなえさんは，家から 2000m はなれたところにあるビッグスワンまで行きました。はじめは分速 80m で歩いていましたが，試合におくれそうになったので，とちゅうから分速 100m で走り，全体で 23 分かかりました。このときの歩いた時間と走った時間を式を立てて求めなさい。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">与えた図</td><td>線　分　図</td><td>情　景　図</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
</table>

２．２．調査結果の概要

２．２．１．各問題の正答率

調査問題の正答率を図的表現別に表にした。表 2-1 は計算問題(大問 1)の正答率，表 2-2 は文章題(大問 2)の正答率，表 2-3 は計算問題の正答数ごとにおける文章題の正答率を表している。ただし，本研究における文章題の正答は，正しく立式できたことを意味している。

表 2-1　大問 1 の正答率(単位は%)

	構造図	情景図	図なし	全体
(1)	74.1 (117/158)	75.2 (118/157)	74.2 (118/159	74.5 (353/474)
(2)	72.8 (115/158)	70.0 (111/157)	74.2 (118/159)	72.6 (344/474)
(3)	58.2 (92/158))	59.2 (93/157)	62.9 (100/159)	60.1 (285/474)
(4)	50.6 (80/158)	47.8 (75/157)	47.8 (76/159)	48.7 (231/474)

表 2-2　大問 2 の正答率（単位は%）

	構造図	情景図	図なし	全体
文章問題	43.7 (69/158)	36.9 (58/157)	38.4 (61/159)	39.7 (188/474)

表 2-3　大問 1 の正答数別の大問 2 の正答率(単位は%)

	構造図	情景図	図なし	全体
4 問正解	67.9 (38/56)	60.8 (31/51)	77.0 (47/61)	69.0 (116/168)
3 問正解	51.2 (21/41)	47.7 (21/44)	21.9 (7/32)	41.9 (49/117)
2 問正解	25.0 (6/24)	25.0 (6/27)	6.9 (2/29)	17.5 (14/80)
1 問正解	7.7 (1/13)	0.0 (0/9)	7.1 (1/14)	5.6 2/36
0 問正解	12.5 (3/24)	0.0 (0/26)	17.4 (4/23)	9.6 (7/73)
全体	43.7 (69/158)	36.9 (58/157)	38.4 (61/159)	39.7 (188/474)

2.2.2.レベル分けから見る正答率

次節の調査結果の分析で詳しく述べるが，計算問題の正答数と文章問題の正誤の間に関係があることが統計的検証によって言える。そのため，本研究では生徒を計算問題の正答数別に，高レベル（4 問正解），中レベル（3，2 問正解），低レベル（1，0 問正解）に分ける。表 2-4 は，このレベル別の文章題の正答率である。図 2-1 は，表 2-4 をグラフに表したものである。

表 2-4　レベル別の大問 2 の正答率(単位は%)

	構造図	情景図	図なし	全体
高レベル	67.9 (38/56)	60.8 (31/51)	77.0 (47/61)	69.0 (116/168)
中レベル	41.5 (27/65)	38.0 (27/71)	14.8 (9/61)	32.0 (63/197)
低レベル	10.8 (4/37)	0.0 (0/35)	13.5 (5/37)	8.6 (9/109)
全体	43.7 (69/158)	36.9 (58/157)	38.4 (61/159)	39.7 (188/474)

3．調査結果の分析

3.1.統計的分析

表 2-1 から，全体の各計算問題の正答率が(1)から順に，74.5%，72.6%，60.1%，48.7%と下がっていることが分かる。これは，生徒にとっての難易度がその順に上がっていることを示している。また，正答率は高いもので 70%以上あり，低いものでも 45%以上ある。図的表現別に各問題の正答率を見ても，差は 5% 以内で大差はない。

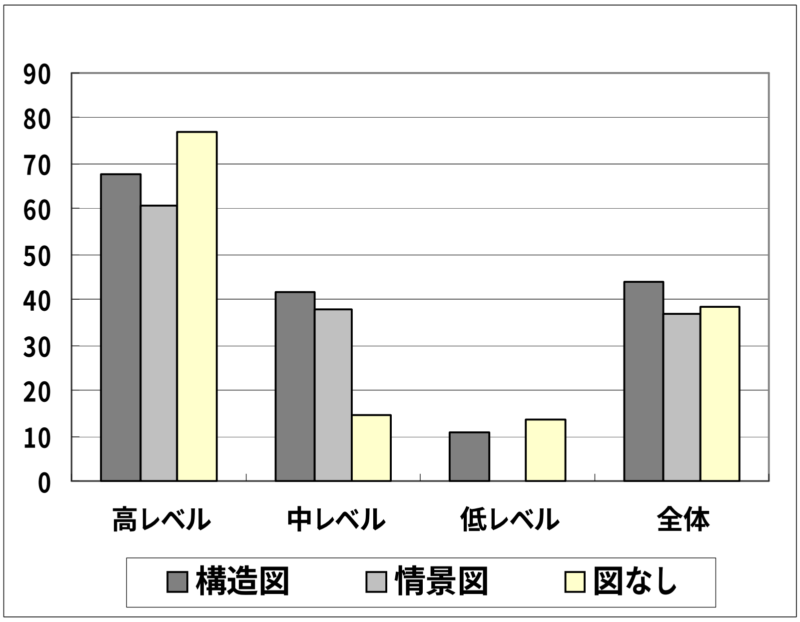


図 2-1　レベル別大問 2 の正答率(単位は%)

表 2-2 から，全体の文章題の正答率が 39.9% であり，難易度の高い問題であったと見ることができる。図的表現別に見ると，正答率が情景図，図なし，構造図の順に高くなっていることがわかる。そこで，この正答率の間に有意差があるか否か統計的に検証するために x^2 検定を行った。有意水準 5%で $T=1.7<6.0(=x^2(2,\ 0.05))$ となり帰無仮説を棄却できない。よって，図的表現別の文章題の正答率に有意差があるとは言えない。

表 2-3 から，文章題の正答率が全体，図的表現別どちらから見ても，1 問正解，0 問正解，2 問正解，3 問正解，4 問正解の順に高くなっていることがわかる。そこで，計算問題の正答数と文章題の正誤に関係があるか否か統計的に検証するためにウイルコクソン順位和検定を行った。有意水準 5%で $Z=-4.2<-1.96(=\mathrm{t}\ (\infty,0.025))$ となり帰無仮説を棄却できる。よって，計算問題の正答数と文章題の正誤に関係があると言える。さらに上述から，文章題を正解している生徒の方が，不正解の生徒に比べ計算問題を多く正解していると言える。

従って，本研究では，前節の調査の概要２.２調査結果の概要でも述べたように，計算問題の正答数別に，高レベル（4 問正解），中レベル（3，2 問正解），低レベル（1，0 問正解）に分ける。以下ではレベル分けに基づき，さらに分析を行っていく。

図 2-1 から，全体の文章問題の正答率が上述したように情景図，図なし，構造図の順に高くなっているのに対し，高レベルでは，情景図，構造図，図なし，中レベルでは，図なし，情景図，構造図，低レベルでは，情景図，構造図，図なしの順に高くなっていることがわかる。また，レベル別に見た図的表現別の正答率の差は，最大で中レベルの図なしと構造図間の 26.7%であり，全体で見たときよりも極めて大きい。そこで，上述で全体における図的表現別の文章題正答率について統計的検証を行い，有意差があるとは言えない結果となったが，再度レベル別に x^2 検定を用いて統計検証を行う。

高レベル 有意水準 5%で $T=3.5<6.0(=x^2(2,\ 0.05))$ となり帰無仮説を棄却できないため，図的表現別の文章題正答率に有意差があるとは言えない。

中レベル 有意水準 5%で T =12.2>6.0(= x^2(2, 0.05))となり帰無仮説を棄却できるため, 図的表現別の文章題正答率に有意差があると言える。

次に, 構造図, 情景図, 図なしのどの間に有意差があるのかを調べるために x^2 検定を用いて多重比較を行う。

構造図と情景図の間の相関係数は 0.19 であり,これらをひとまとまりとして考えても問題ない。以下では, まとめて図ありとする。

図ありと図なしの間においては, 有意水準 5%で T =12.1>3.8(= x^2(1, 0.05))となり, 帰無仮説を棄却できる。図あり, つまり, 構造図・情景図と図なしの文章題の正答率に有意差があると言える。また, 全体の T 値 12.2 に占める割合が 99.2%であり, 中レベルにおける図的表現別の正答率の有意差は図的表現の有無による影響がかなり大きいと言える。さらに, 表 2-4 にある正答率の比較から, 本調査では情景図より構造図を与えたほうが, 正答率が高くなると言えるだろう。

低レベル 正答率 0%のところがあるため検定を行えない。

３.２.生徒がかいた図の分析

調査問題の大問２(文章題)において, 線分図を与えられなかった生徒, つまり, 情景図を与えられた生徒と図的表現を与えられなかった生徒の答案の中に, 生徒自らが線分図または表をかいて考えたものがみられた。そこで, 生徒のかいた図は多様であるものの, いくつかの視点からそれらをレベル別に分類し, 表 3-1 に示した。また, 生徒のかいた図の例（図 3-1～3-8）を以下にあげた。

表 3-1 図のレベル分け

	各レベルの説明
A^+	問題文中から要素を抜き出し, 正しく数量関係をとらえている。なおかつ, 未知数を文字で表記している。
A^-	問題文中から要素を抜き出してはいるが, 文字の表記に誤りがある。
B	速さ・時間・距離の関係のすべてを数やことばで表記している。
C	速さ・時間・距離の関係の 1 要素または 2 要素を数やことばで表記している。
D	速さ・時間・距離の関係を正しく表記できないか, または不明な点がある。
表	対応表を用いて関係性をとらえている。

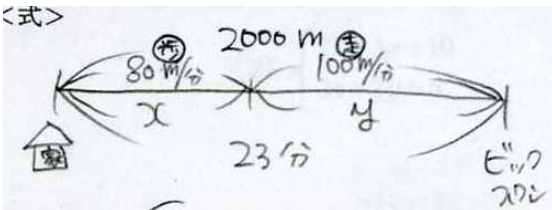


図 3-1 A^+ の線分図

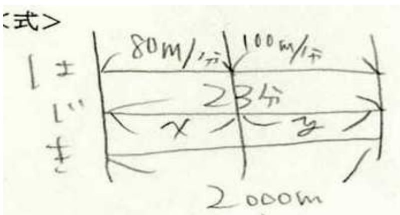


図 3-2 A^+ の線分図

新潟大学教育人間科学部数学教室，『数学教育研究』，第 43 巻，第 1 号，95-110，2008.

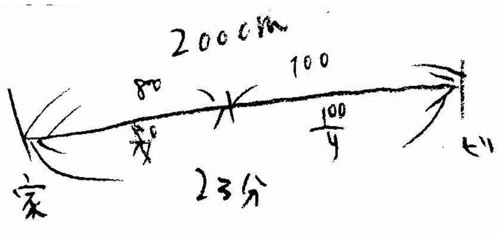


図 3-3　A^- の線分図

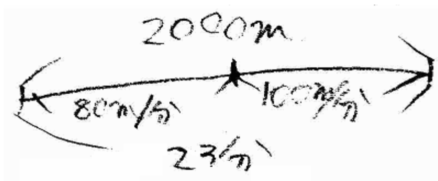


図 3-4　B の線分図

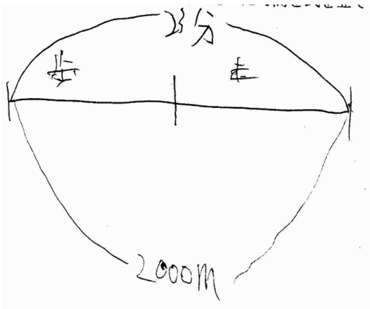


図 3-5　C の線分図

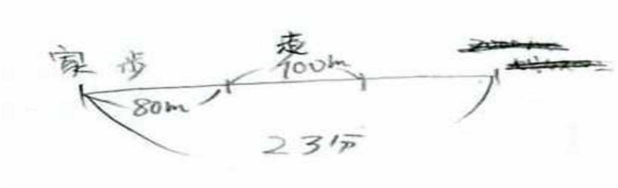


図 3-6　D の線分図

図 3-7　情景図へのかきこみ

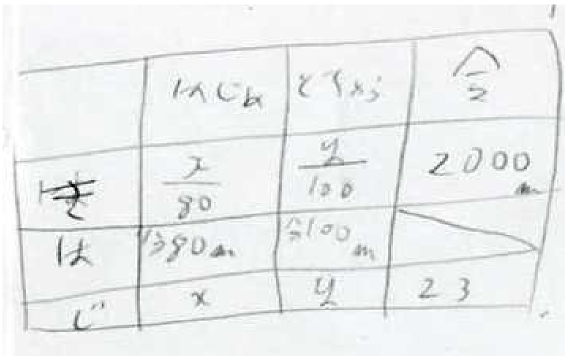


図 3-8　生徒のかいた表

次に，第 2 章 2 節で分類した計算問題正答数別のレベル（高・中・低）と生徒のかいた図のレベル（ A^+ A^- B C D ）との文章題の正誤関係を表 3-2，3-3 に表す。

表 3-2　情景図を与えられた生徒がかいた図のレベル

	高レベル		中レベル		低レベル		全体
文章題	正	誤	正	誤	正	誤	
A^+	9	5	9	2	0	0	25
A^-	0	0	0	0	0	0	0
B	3	1	3	4	0	0	11
C	0	1	0	1	0	2	4
D	0	0	0	0	0	0	0
表	0	0	1	1	0	0	2
全体	12	7	13	8	0	2	42

表 3-3 図的表現を与えなかった生徒がかいた図のレベル

	高レベル		中レベル		低レベル		全体
文章題	正	誤	正	誤	正	誤	
A^+	10	5	4	4	1	2	26
A^-	0	0	0	1	1	1	3
B	5	4	1	8	0	4	22
C	0	0	0	1	1	3	5
D	0	0	0	1	0	0	1
表	0	0	0	0	0	0	0
全体	15	9	5	15	3	10	57

全体で見ると情景図を与えられた生徒のうち 42 人(26%), 図を与えられない生徒のうち 57 人(36%)が線分図または表をかいて考えている。解答に図をかいた生徒とかかない生徒では, 文章題の正誤に違いが見られる。図をかいた生徒の正答率が 48.5%, 図をかかない生徒の正答率が 32.7%であり, 図をかいた生徒のほうが正答となる可能性が高い。

・A^+の生徒

高レベルの生徒にとっては, 情景図を与えた問題でも図なしの問題でも正答数にほぼ違いがないといえる。しかし, 中レベルの生徒になると差異が見られ, 情景図では 81.8% (9/11), 図なしでは 50%(4/8)の正答率である。情景図を与えたときに, 図がかけただけでなく誤答が少ないという特徴がある。低レベルの生徒は情景図を与えられても線分図をかかず, 図を与えられていない生徒のほうが線分図をかいて正答している点で異なる。

・B の生徒

全体で見ると, 情景図を与えられて新たに図をかいている生徒は 11 人, 図なし答案で図をかいている生徒は 22 人である。また, 情景図を与えられた集団と図なしの集団において正答者数は同数であるが, 誤答者数は図なしが若干多い。特に, 図なしの中レベルにおいては 11.1%の正答率である。低レベルでは図をかくものの, 正答する生徒は見られない。

・C の生徒

C の生徒は, 情景図, 図なしでの違いとして図なしの低レベルで比較的多く見られた。問題内容から, 1つまたは2つの要素を読み取ることはできている。全体数である時間や距離のかき出しが多く見られる。式をかけていたのは4人であり, そのうち正しい式であるのは1人である。

・D の生徒

1 人のみ線分図が問題内容とは異なる表記をした。

４．考察

４.１.分析に対する考察

４.１.１.統計的分析に対する考察

ここでは，前節の分析結果について考察を行う。

本調査では表 2-4 からわかるように，線分図(構造図)を与えたほうが情景図を与えるよりも文章題の正答率が高い。これは，菊地(1996, pp.338-339)が，問題解決の構造把握に線分図よりも情景図が有効となる場合があるとしている考察に当てはまらない結果である。この結果は，菊地の調査対象が小学校 5 年生であるのに対し，本調査対象が中学校 2 年生であるという年齢の差による影響が考えられる。また，本調査問題は速さ問題であるため立式に関数のアイデアを必要とし，さらに，未知数を文字で表現しなくてはいけない，複が雑なものである。そのため，菊地の調査問題に比べ情景図から構造を読み取りにくいことが影響したものと考えられる。そして，最も大きな影響を与えたと考えられることは，小学校算数科と中学校数学科の違いである。具体的で量的な式を用いる算数科においては，現実場面と関連づけることが重要であり，そのため菊地の調査では情景図がより生徒に有効に働いたと示唆される。文字を用いることで式が抽象的となる数学科では，問題構造の中に数字と文字が混在し，その構造が複雑化している。そのため，生徒は問題構造を捉えにくい。よって，本研究では，問題構造が整理された図である線分図が生徒に有効に働いたと考えられる。

以下では，計算問題の正答数別に分けたレベル別に考察を述べる。

高レベル(4 問正解)においては，統計的検証によって図的表現別に見た正答率に有意差があるとは言えないことがわかった。これは，土居下ら(1986, p.76)によれば「高レベルの児童は，直観的に見通しを立てることができ，しかも，それに応じた絵図・線分図が書ける」ため，図的表現を与えても文章問題の正答率が高くならなかったと考えられる。図を自らの必要性に合わせてかくことができる生徒にとっては，図的表現を与えることが有効とならないときがある。

中レベル(3, 2 問正解)においては，統計的検証によって図的表現を与えたほうが，与えないよりも正答率が高い。これは中原(1994, pp.240-243)の言う，図的表現の持つ直観性・イメージ性・全体性・構造性などの機能が発揮された結果だと考えられる。なぜならば，その機能により線分図は，問題構造の理解を助け，さらにイメージ形成に寄与したと推測されるし，情景図は問題場面と現実的情況とを関連付け，問題場面の把握を助けたと推測されるからである。そのため,図的表現を与えたほうが正答率が高くなったと考えられる。

低レベル(1, 0 問正解)では，図的表現を与えないときが最も正答率が高い。これは廣井(2001, p.4)が「子どもが図の使用に困難を感じている状態には与えられた図が子どもにとって同型性を感じられないものである可能性が考えられる」と述べているように，本調査で用いた図的表現が，生徒の思考に合ったものではなかった可能性が示唆される。また，本調査で構造図として用いた線分図を使い慣れていない生徒が，図的表現自体の理解に困難や抵抗を感じたと考えられる。

以上の点から，立式場面において線分図や情景図を与えることは，全レベルの生徒に有効であるとは限らないことがわかった。しかし，中レベルの生徒にとっては線分図，情景

図ともに有効に働くことが明らかになった。

今後は，各レベルにあった立式場面における図的表現の活用方法を探究していきたい。

４．１．２.生徒のかいた図の分析に対する考察

A^+の生徒については，分析から，情景図が問題場面のイメージ形成に影響を与えていると考えられる。図 3-2 では，速さ・時間・距離の 3 要素に分けて図に置き換えている。図 3-7 では，情景図にかきこんで要素の整理を行っている。一般的に見られる線分図とは異なるが，生徒自身が構造をとらえている様子が見ることができる。つまり，情景図が自由に思考するための道具という点で生徒独自のものとして機能している。

A^-の生徒については，文章中にある要素は全てかき出しているので，問題内容の把握はできている。しかし，文字式を加えるとき，速さ・時間・距離の関係を用いる点で誤った計算をしている。そのため，立式の段階でも間違った文字式のまま考えている。このような間違いは，他の回答でも多く見られるものである。問題の構造を把握するとともに速さ・時間・距離の関係についての基本的知識や理解も必要である。

B の生徒については，分析から，B の図をかく生徒は A^+の図をかく生徒ほど内容を把握できておらず，単に数値をかくだけの状態かもしれない。特に，情景図と図なしの中レベルの生徒にとっては情景的場面のイメージの有無が正誤に大きな差を与えたといえる。

C に当てはまる生徒の多くは問題内容から要素を少なくかき出したためか，正答は少ない。図を用いて正答した生徒の多くは A^+や B の図をかいていることを鑑みれば，自ら線分図に表現する要素が少ないため，C では誤答が多くなったといえる。また，かき出す要素の種類を見ても時間や距離を正しくかくことに比べ，速さを正しくかくことは少ない。これは，速さ時間当たりの単位量というものを示しており，距離や時間に比べて感覚的にわかりにくいものであることより，中学生となった現在でも苦手意識を持っている生徒が多いためだと思われる。

D の生徒は図 3-6 をかいた生徒だけである。この生徒は，C の生徒と同様に時間の要素は線分図全体に関係していると読み取ることができたが，速さの要素は文章の内容を把握できなかったのか，図 3-6 を見ると速さの要素が途切れていて全体との関連がつかめていない。しかし，黒く塗りつぶされた部分には「2000m，ビッグスワン」とかかれており，速さ以外の部分では正確に把握できているようである。よって，この生徒は速さの要素を理解していないか，問題文を誤って読み取ってしまった可能性がある。

以下では，計算問題の正答数別に分けたレベル別に考察を述べる。

高レベル（4 問正解）においては，図をかいた生徒のうち 4 割の生徒が正しい立式にたどり着いていないことから，速さ問題のような複雑な問題になると高レベルの生徒でも図をかき，数量関係を正確に把握することが困難になると考えられる。

中レベル（3，2 問正解）においては，情景図を与えると図を与えないときに比べ，A^+の図をかき立式できる生徒が増える。このことから，情景図を与えることが問題場面の把握を助け，図をかくこと，そして立式することに影響を及ぼしたと考えられる。

低レベル（1，0 問正解）において，生徒に情景図を与えると，自分で線分図をかいて考えなくなる。その理由として，情景図が与えられたことで図をかく必要性が感じられなくなったと考えられる。低レベルの生徒は，問題構造の把握のためではなく，問題場面と現

実場面とを関連付けるために図をかいている可能性がある。

４．２．指導への示唆

以上の考察から，次のような示唆が得られる。

本研究において，計算問題の正答数別に分けたレベルの中で，中レベルの生徒に対する図的表現の有効性が立式場面において明らかになった。しかしながら，線分図と情景図を与えられた生徒のうち 6 割の生徒が立式できなかったことが表 2-4 から見られるように，これらの生徒への手立てが必要となる。それにあたり注目すべきは次の点である。表 3-2, 3-3 から，生徒は情景的なイメージを得ることで，問題の構造をより捉えた線分図をかくようになり，さらに正答にたどり着いていることがわかる。よって中レベルの生徒への指導については，線分図をかく前段階として，生徒が立式場面の情景をイメージできるような指導を行う必要がある。

これに対して，高レベルと低レベルの生徒に対しては図的表現が有効に働かなかった。先に高レベルの生徒について言及すると，図をかいた生徒のうち 6 割の生徒は正しい立式ができ，4 割の生徒はその図が正しい立式につながらなかった。このことから高レベルの生徒であっても，速さの問題のように複雑な内容になると数量関係を正確に把握することが困難であるといえる。ゆえに，授業では生徒が問題文から直観的に得た情報を自分で線分図にかき表すような指導を提案する。

低レベルの生徒については，図的表現の有効性を感じさせるために，普段の授業でその使用に慣れさせるような指導を心がけたい。これは，中原(1994,p.249)の示す準備性の原理からも言えることである。

さらに，図的表現を生徒に与える際には，与える図的表現が生徒の思考に適しているかを吟味する必要がある。生徒の理解の仕方に沿った図的表現の使用により問題把握の助けとなるよう，教師は生徒の思考を理解する努力をしなくてはならない。

本研究の内容とは少しずれるけれども，生徒の解答から次のような示唆が得られる。

立式のために未知数を文字に置き換えているにもかかわらず，それが何を表しているかが明確ではない生徒もいる。特に，求めるものではない要素を文字に表したとき，例えば時間を求めるのに距離の答えを導いてしまい混乱を生じ，途中で問題解決を諦めている様子が見られた。そのため，何を文字として表したのかを生徒がよくわかるように工夫させなくてはいけない。

おわりに

本研究では，立式における図的表現の効果について，連立方程式の立式を中心に検証することを目的としていた。本研究の成果として，計算問題（全 4 問）の正答数別に分けた，中レベル（3，2 問正解）の生徒には線分図，情景図がともに立式に有効に働くことが明らかになった。

しかし，高レベル（4 問正解）と低レベル（1，0 問正解）の生徒に対しては図的表現の効果を明確にできなかった。よって，今後は各レベルにあった図的表現の活用方法を探究していく必要がある。

最後になりましたが，私たちの調査のためにご多用の中ご協力いただいた各校の諸先生方，並びに生徒の皆さんには心より感謝申し上げます。また，統計的処理に関して適切なご意見をいただいた宮崎大学の藤井良宜先生にも感謝申し上げます。そして，最後まで厳しくも温かいご指導をいただいた指導教員の和田信哉先生に，この場をかりて厚く御礼申し上げます

【引用・参考文献】

一松　信，伊里　正夫，竹内　啓(1982),『シリーズ 新しい応用の数学 22 離散データ解析』，教育出版，pp.60-76

川又　由香(2006),「図的表現を活用した算数授業に関する研究」，新潟大学修士論文

菊地　光司(1996),「算数の問題解決における図的表現の働きに関する研究」，日本数学教育学会誌，78(12)，pp.334-339.

中原　忠男(1995),『算数･数学教育における構成的アプローチの研究』,聖文社, pp.193-210, pp.232-250.

土居下　晃宏，志水　廣，植岡　利之，一崎　満夫(1986),「問題解決における方略の指導－絵や図についての児童の実態調査と実践－」,日本数学教育学会誌『算数教育』, 68(4), pp.18-22.

新潟県教育委員会(2005),「平成 16 年度「全県学力調査」報告書」，pp.153-162.

新潟県教育委員会(2007),「平成 18 年度「全県学力調査」報告書」, http://www.pref.niigata.jp/kyoiku/gimukyoiku/gimukyo/gaku-chosaH18/houkokusho/houkokusho18-top.html

廣井　弘敏(2001),「算数の問題解決における図による問題把握の研究－子どもが図をかく過程への着目－」

P.スプレント 著,加納　悟 訳(1985)『ノンパラメトリック統計入門』,啓明社, pp.141-150.

山口　耕(2005),「算数学習における絵図的表現の役割－文章題解決に及ぼす絵図的表現の影響に関する調査－」，全国数学教育学会第 22 回研究発表会