

「式を読む」活動の教材開発に関する研究

新潟大学大学院 教育学研究科
院生 細井 俊明

はじめに

中学校の数学科で文字式を問題解決の手段として用いる際には, 事象を表現する活動, 文字式を変形する活動, 文字式から意味を読み取る活動(以下, それぞれを表現, 変形, 読みと記す)が行われる。これらの活動は, 段階的に行われるもので, 1つの活動が十分に行われない場合, 問題解決には至らないものである。このことに関し, 三輪(1996)は, 各活動における能力を高めることの重要性を指摘している。しかし, 平成19年度全国学力・学習状況調査, 「特定の課題」に関する調査, PISA2003(以下, まとめて調査問題と記す)などの結果を見ると, 読みに関する問題の正答率が低いことから, 生徒の式を読む能力の低さが危惧される。

また, 文字式の読みに関する先行研究に目を向けると, 三輪(1996, 2001), 両角(1993, 1997), 杉山(1990)の研究がある。しかし, それらの研究には, 式の読みの定義や類型に関するものはあるけれど, 生徒の式の読みの実態に関して分析を行っているものは少なく, さらに生徒の実態を調査したうえで教材開発を行っているものはない。

よって, 生徒の式の読みに関する実態を分析し, それを基に生徒の実態に即した教材を開発することは意義深いものと考え, これを本研究の目的とする。この目的を達成するために以下の方法で研究を進める。

まず, 先行研究を基に, 文献解釈的な方法で式を読む活動を定義する。また, 「式を読む方法」と「文脈」という観点から式を読む活動を捉える枠組みを構築する。

次に, その枠組みを通して, 調査問題における分析結果を考察することで, 生徒の式を読む能力の実態を明らかにする。また, 教科書分析を行い, 生徒の式の読みの学習の実態に対する考察をそこに加味することで, 教材開発への示唆を導出する。

さらに, その示唆を基に, 教材開発の観点を設定し, これに従った教材の開発を行う。

最後に, その教材を用いて授業実践を行うことで, 教材ならびに教材開発の観点に対する実証的な検討を行う。

・式を読む活動に関する基礎的考察

ここでは, 三輪(1996, 2001), 両角(1993, 1997), 杉山(1990)の先行研究を基に, 式を読むことの定義, 意義を考察する。また, 本研究における式を読む活動を定義する。

1 三輪の先行研究

三輪(1996)は, 数学的事象に対してアプローチを図る際には, 文字式の利用が主要な

思考方法となると述べている。そして, この文字式の利用を, 3つの活動から構成されるものと捉え, それらの活動のサイクルを「文字式の利用の図式」(図 1 - 1)として提示している。また, この図式を構成する3つの活動に関して, 表 1 - 1のように説明している。

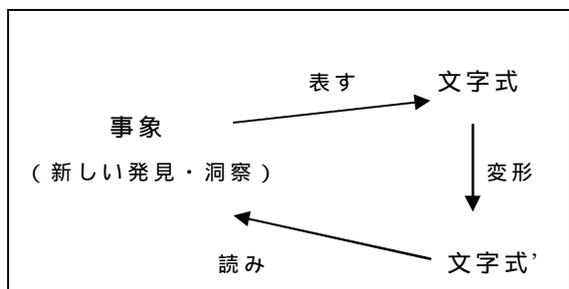


図 1 - 1 三輪の文字式利用の図式 (三輪, 1996)

表 1 - 1 文字式利用における3つの活動

- 「表す」: 事象から記号の方向へ向かうこと。(p. 4)
 「変形」: ある文字式を別の形に変えること。(p. 4)
 「読み」: 式の意味するものを考察すること。(p. 8)

三輪 (1996) は, 図 1 - 1 のように, 3つの活動が段階的に行われることで, 事象に対する理解・解釈が深まるとしている。そして, 「読み」が持つ役割に関しては, 「文字式から表された数量やその関係への移行」(p. 30)と記している。つまり, 文字式を数量や数量関係と結びつけることなどを通して, その場面における文字式の意味を明確化することと捉えている。さらに, 事象が持つ場面を超えて意味を獲得することも可能であるとしている。また, 三輪 (1996) は, 「読む」ことに関して, 「式を読む仕方」と「式を読むこと」という2つの観点から, その類型化を行っている。この2つの観点の関係に関して, 「式を読むこと」を行うために「式を読む仕方」が用いられるとしていることから, 「式を読む仕方」は, 式を読むための方法, 「式を読むこと」は, 式の読みの内容と考えられる。「式を読む仕方」に関しては, 表 1 - 2 のように, 「式を読むこと」に関しては, 表 1 - 3 のように類型化している。

表 1 - 2 三輪の「式を読む仕方」

- ア. 式を演算された数量と結びつける
 イ. 式を数値と結び付ける
 ウ. 式を図形と結び付ける
 エ. 式の形に着目して式を捉える

表 1 - 3 三輪の「式を読むこと」(三輪, 1996)

- ア. 数量や数量関係を構造的に捉える
 イ. 得られた数量関係について検討し, 吟味したり解釈したりする
 ウ. 内容をつかんで得られたことの一般化や特殊化を図る
 エ. 式の形に着目して, 一般化したり, 統合化したりする
 オ. 式に表した人の思考過程を探る

表 1 - 2 に関して, アは, 数量や数量関係を表す言葉と結び付けて捉える方法, イは, 式を数値と結び付けることで具体化を図る方法, ウは, 文字式を図形的に捉えることで, 視覚に訴える方法, エは, 式の形に着目することで, 一般化を図る方法としている。

また, 表 1 - 3 に関して, アは, 文字式に見られる数量や数量関係を構造として捉えることで, 新しい発見を得るもの, イは, 得られた数学的結果 (文字式) に対して, 事象

と結びつけることで, その是非などを検討するもの, ウは, 文字式の内容を把握することで, 文字式に対して一般化や特殊化を図るもの, エは, 式の形へ着目することで, 文字式に対して一般化や統合化を図るもの, オは, 文字式からそれを表した人の思考過程を探るものとしている。

2 両角の先行研究

両角 (1993) は, 「式を読む」ことに関して, 「文字式に対応する事象が何かということを探求し, それを明らかにしていくことを通して, 式の意味を構築すること」(pp.41 - 42) と記述している。この記述における「事象」とは, 文字式に対して, 生徒に意味を与える全般を指し, それは文字式の学習の進行とともに増加するとしている。さらに, 両角(1997) は, 認知科学者や心理学者の主張から, 「文脈」という語に着眼し, 式の読みにおいて, 文字式の背後にある文脈を意識させることの重要性に触れ, 表 1 - 4 のように「式を読む」ことを定義している。

表 1 - 4 両角の「式を読む」の定義 (両角, 1997)

「式を読む」とは, 学習者が式に対して何らかの「文脈」を設定し, その文脈のなかで既に学んできたことと対置させながら, 式の意味を見出していくことである。文字式を読む活動では, 記号的表現における式の読み; 例えば式の形(構造)に着目してその意味を捉えるなど; などが学習の進行につれて重視されていく。すなわち, 図的表現や言語的表現などから既知の式(文字式)などへ, 文字式に対応する文脈は移っていく。(p.254)

表 1 - 4 は, 文字式の学習を通して, 文字式自体が文脈の対象となりうること, つまり, 読むことが数学という世界の中で, 内的に行われることを示唆している。このように, 両角の「式を読む」ことに対する定義は, 文字式が背後に持つ文脈(事象)に, 強い影響を受けている。

表 1 - 5 両角の「式を読む」ことの類型 (両角, 1993)

式読 : 式という表現の表現様式を変えることにより、式に対応する事象を読む。

式読 - 1 : 式から具体的場面を想定する。

式読 - 2 : 式から他の数学的モデルを想定する。

式読 : 式という記号的表現を変えずに、式に対応する事象を読む。

式読 - 1 : 文字に数を代入することを通して, 特殊化を図る。

式読 - 2 : 式の中の演算に着目して, 一般化を図る。

式読 - 3 : 式に対して, 関数的な見方をする。

式読 : 式変形によって得られた式を, 式読, 式読 を通して読む。

式読 - 1 : 式変形が正しく行われたかどうか検証をする。

式読 - 2 : 式変形によって得られた式をそれが対応する事象と比較することを通して, 発展的に考察する。

式読 : 式の形に着目して, 式を読む。

式読 - 1 : 式の表面構造に着目して, いくつかの式を同じ形の式と見る。

式読 - 2 : 既知の式の形に着目して, 求めるべき式を想定する。

また, 両角 (1993) は, 中学校以降の代数の学習を考慮したとき, 式の形に着目することが重要になるとし, 表 1 - 5 のように「式を読む」ことを類型化している。式読 と式読 は, 表現間の変換を観点として区別されている。さらに, 式読 においては, 式変形の有無を, その観点に加えることで, 式読 , 式読 との区別が図られている。また, 式読 は, 両角の中学校以降を対象とする「式の読み」の捉えを強く表現したものと言える。

また, 両角 (1993) は, 表 1 - 5 における式読 - 1, 式読 - 2, 式読 を対象とした実践研究を行っている。式読 - 1 を対象とした実践研究の目的は, 式の読みに対する生徒の実態を考察することであり, そのために, 「他者の論理」を想定する活動を設定し, その活動から, 生徒の式の読みに対する様相を捉えている。

式読 - 2, 式読 を対象とした実践研究の目的は, 式を読むことを重視した指導に対する示唆を得ることにある。そのため, 文字式の持つ便宜性の感得をねらいとした授業実践を行い, その分析を基に示唆を導出している。

3 杉山の先行研究

杉山 (1990) は, 「式をよむ」ことに関して, 明確な定義はしていない。また, 表 1 - 6 のように「式をよむ」ことの類型化を行っているが, その類型がどのような観点から行われたかは, 記述がない。また, それを読み取ることも困難である。

杉山の類型における, 素朴な「よみ」, 問題のからくりをよむ, 能率的合理的な処理をするためのよみは, 前述した三輪 (1996), 両角 (1993) の類型には見られないものである。よって, 杉山は, 三輪や両角に較べ, 式の読みを多義的に捉えているということが出来る。また, 素朴な「よみ」は, 三輪の述べる「ア. 式を演算された数量と結び付ける」とは異なり, 文字式から記号的な意味を読み取るにとどまる。

表 1 - 6 杉山の「式をよむ」ことの類型 (杉山, 1990)

素朴な読み
具体的に引き戻す読み (一般の中に特殊をみる)
特殊の中に一般をみる
意図や法則をよみこむ
具体的に法則をよみこむ
問題のからくりをよむ
能率的合理的な処理をするためのよみ

4 式を読む活動の意義と定義

三輪 (1996, 2001), 両角 (1993, 1997), 杉山 (1990) の先行研究から, 式の読みに関して概観してきた。ここでは, 式を読むことの定義と意義に関して考察する。そして, 本研究における式を読む活動を定義する。

まず, 式を読むことの定義に関して考察する。式を読むことに関して, 杉山の研究からは読み取れないものの, 三輪や両角の記述からは, それが「文字式の持つ意味を獲得する活動」を意味することがわかる。

さらに詳細に見ていくと, 式を読む方法に関して, 三輪 (1996) が「式を読む仕方」と

して述べている。また, 調査問題からも, 方法により式を読む問題の正答率が左右されることが示唆されている。以上のことから, 式を読むことに関して, その方法は大きな意味を持つ。よって, 本研究においても, 三輪の「式を読む仕方」に基づき, 「式を読む方法」の観点を定義に加えることとする。本研究における「式を読む方法」の詳細については後述する。

また, 両角 (1997) は, 文字式が背後に持つ「文脈」に触れ, 文字式の読みにおいて, それが持つ重要性について記述している。さらに, 調査問題の結果からも, 文字式が持つ文脈の様態により, 正答率が左右されることが示唆されている。以上のことから, 式を読むことに関して, 文脈は大きな意味を持つ。よって, 本研究においても, 「文脈」という観点を定義に加えることとする。本研究における「文脈」の詳細については後述する。

以上のことと, 本研究が文字式を対象とした読みに焦点化していることに留意したうえで, 表 1 - 7 のように「式を読む」活動を定義する。また, 図 1 - 2 は, そのモデル図を表している。図 1 - 2 において, 学習者から数学的結果 (文字式) に対して向けられた矢印は, 数学的結果に対する学習者のアプローチ, つまり読むことを表現している。また, 数学的結果から学習者に向けられた矢印は, 読みによる意味の獲得を表現している。

表 1 - 7 本研究における「式を読む」活動の定義

「式を読む」活動とは, 現実的, 数学的な文脈の中で文字式により表された数学的結果に対して, 演算された数量との結びつけ, 数値との結びつけ, 図形との結びつけを行うことにより, 文脈の中で文字式に対する意味を獲得する活動である。

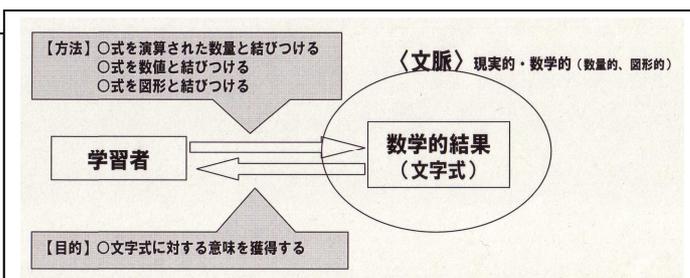


図 1 - 2 「式を読む」活動のモデル図

次は, 式を読むことの意義に関して考察する。両角 (1993) は, 式を読むことの意義に関して, 文字式の有用性を感じ得ること, また文字式理解の困難を克服するための一手段となることを挙げている。よって, 式を読むことは, 生徒に対し, 問題解決へ文字式を活用する意識を向上させる役割を担うと言える。また, 両角 (1997) は, 式を読むことは, 「意味」よりも「手続き」を拠りどころとする中学生の傾向に 1 つの示唆を与えるものとしている。つまり, 式を読むことは, 概念獲得を補助する役割をも持ち合わせていると言える。

5 先行研究における課題

ここまで, 三輪 (1996, 2001), 両角 (1993, 1997), 杉山 (1990) を基に, 式の読みに関する研究を整理してきた。そこから, 式の読みに関する研究の課題として以下の 2 点が挙げられる。

- 式の読みに関する生徒の実態について, 多面的な分析が行われていない。
- 式を読む活動を対象とした教材の開発が行われていない。

つまり, 上記した課題を総合的に考えると, 先行研究において「式の読みに関する生徒の実態を多面的に分析し, そこから得られた示唆を基に, 教材の開発を行っているものはない」と言え, 1 つの大きな課題となる。

・ 式を読む活動の枠組みと調査問題分析

これまでに, 先行研究を通して, 式を読む活動の類型に関して概観した。しかし, それらの類型は観点が大きく異なるものであった。ここでは, 三輪 (1996) の先行研究と調査問題の分析から導出した 2 つの観点を基に, 式を読む活動を捉える枠組みを構築する。また, その枠組みを用いて各調査問題を分析する。

1 式を読む活動を捉える枠組み

式の読みの類型に関しては, 三輪が, 「式を読む仕方」と「式を読むこと」という 2 つの観点から行っているのに対し, 両角は, 「表現間の変換」や「式変形の有無」を観点としている。よって, それらの類型を統合的に類型化することには, 困難がある。よって, 本研究においても, 類型化を行うための新たな観点が必要となる。

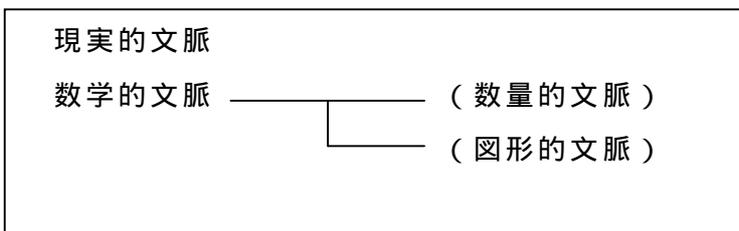
そこで, 調査問題の結果を分析し, 生徒の正答率を左右する観点として, 「式を読む方法」と「文脈」の 2 つを抽出した。よって, この 2 つの観点から生徒の実態を分析することは意義深いものと考え, 本研究における式を読む活動を捉える観点到に設定する。

「式を読む方法」に関しては, 三輪 (1996) の「式を読む仕方」が有効であり, その類別は先に述べた通りである。ただし, 「工. 式の形に着目して式を捉える」に関しては, 一般を読み取することを目的とする方法であり, 既に一般性を帯びる文字式を対象とした本研究の意図から外れるものである。よって, 工は除外し, 表 2 - 1 のように本研究における「式を読む方法」を設定する。表 2 - 1 の各方法の捉えに関しては, 基本的に, 前述した三輪のものを踏襲する。しかし, 本研究においては, 「ウ. 式を図形と結び付ける」の定義を補完し, 文字式を図形に変換することと捉える。

表 2 - 1 本研究における「式を読む方法」

ア. 式を演算された数量と結び付ける
イ. 式を数値と結び付ける
ウ. 式を図形と結び付ける

表 2 - 2 本研究における「文脈」



また, 「文脈」に関しては, 調査問題に対する分析を通して, 表 2 - 2 のように分類した。

まず, 文字式の持つ文脈を「現実的文脈」と「数学的文脈」に大別し, さらに数学的文脈を「数量的文脈」と「図形的文脈」に分類する。現実的文脈とは, 文字式に対し, 日常的事象などとの関連において意味を与えるもので, その例としては, 買い物や時間と距離に関する場面が挙げられる。数学的文脈とは, 数学という学問のなかで, 文字式に対して内的な意味を与えるもので, それが数量的な事象との関連において意味を与えるものであ

れば「数量的文脈」に, 図形的な事象との関連において意味を与えるものであれば「図形的文脈」に分類される。例えば, 「 $3n$ 」を数量的文脈と結びつけることで, 「3の倍数」, 図形的文脈と結びつけることで, 「縦が3, 横が n の長方形の面積」と読む場合などがある。

以上より, 式を読む活動を捉える際に重要な観点となる「式を読む方法」と「文脈」に関して, その詳細を述べた。この観点を基に, 表 2 - 3 のように式を読む活動を捉える枠組みを構築する。

表 2 - 3 「式を読む」活動を捉える枠組み

方法 \ 文脈	現実的文脈	数学的文脈	
		数量的文脈	図形的文脈
式を演算された数量と結び付ける			
式を数値と結び付ける			
式を図形と結び付ける			

表 2 - 3 から, 本研究における式を読む活動とは, ~ の 9 つに分類される。例えば, の活動は, 「数量的文脈を持った文字式を, 具体的な数値と結びつけることで読む活動」と同定することができる。

2 調査問題分析を通しての生徒の実態

ここでは, 調査問題を, 先に構築した式を読む活動の枠組みを通して分析することで, 生徒の式を読む能力に関して考察する。対象とする調査問題として, 平成 19 年度全国学力・学習状況調査, 「特定の課題」に関する調査(平成 17 年度実施), PISA 2003 (数学的リテラシー)を取り挙げる。また, 参考的なものとして, 国宗ら(1997)の調査問題も考慮する。

そこで, 本研究では, 枠組みにより分類された活動ごとに, 分析を進めることとする。ただし, 上記した調査問題から分析が可能であるのは, 表 2 - 3 における網掛け部分である。よって, その分析ならびに考察を ~ に限定する。

に関する分析

に該当する調査問題には, 「PISA 2003 (数学的リテラシー)」の為替レートの問題が挙げられる。

この問題は, 15 歳(第 3 学年)を対象に, 為替レートの仕組みが表現された文字式を基に, 正確に換金することが求められる。この問題の正答率は, 問 1 で 79.1%, 問 2 で 74.0% と高い数値である。日頃の学習において目にしない特殊な文字式ではあるが, 与えられた文脈のなかで, 正しく式の意味を読み取ることができたことを, 数値が示して

いる。

また, 国宗ら (1997) の調査問題にも目を向けると, が該当する。いずれも第 3 学年を対象とする問題で, それぞれの正答率は, 80%, 86% と高い数値である。ただし, 他の調査問題に比べ, 問題が易しいことには留意する必要がある。

以上のことから, に関して, 生徒はさほど困難を示していないものと判断する。

に関する分析

に該当する問題には, 「平成 19 年度全国学力・学習状況調査」の, 主として「活用」に関する問題 (以後, B 問題とする) の 2, 「特定の課題」に関する調査」の 10 の問題が挙げられる。

前者の問題は, 「連続する 3 数の和」を題材としたもので, $3(n+1)$ からの意味の獲得が求められる。ただし, この式に対する意味が, 問の文章のなかに 1 つ記されているため, この他の意味の獲得が必要となる。つまり, 式に対する多面的な読みがもとめられる。この問題の正答率は, 第 3 学年において 56.0% であり, 「3」という数字から奇数であることを連想した生徒が, 13.0% を占める。

後者の問題は, 「連続する 2 つの奇数の和」を題材としたもので, 記述されている式変形の中から, 「4 の倍数であること」を表現する式を抽出する問題である。この問題に対する正答率は, 第 2 学年で 52.2%, 第 3 学年で 65.3% である。ただし, 難易度としては標準的なものであることから, 示された数値が高いものとは判断できない。

以上のことから, に関する生徒の能力が, やや弱い傾向にあるものと判断する。

に関する分析

に該当する問題には, 「平成 19 年度全国学力・学習状況調査」の, 主として「知識」に関する問題 (以後, A 問題とする) の 2, 「特定の課題」に関する調査」の 12 が挙げられる。

前者の問題は, 縦の長さ a , 横の長さ b が与えられた長方形に対して, $2(a+b)$ の意味を読み取る問題である。この問題に対する正答率は, 第 3 学年で 63.9% であり, やはり問題の難易度を考慮すると, さほど高い数値ではない。また, 周の長さ と面積を混同したと思われる生徒が 24.3%, 式で表現されている「2」を基に, 「2 倍」を連想したと思われる生徒が 24.3% を占める。

後者の問題は, 円の直径と円周の長さの関係を題材とし, 式変形の過程で変数が消えることに対して意味を読み取るものである。この問題に対する正答率は, 第 1 学年で 20.7%, 第 2 学年で 23.0%, 第 3 学年で 38.6% と, 全学年を通して顕著に低い数値を示している。この結果は, 変数が消えたことに対して, 意味を獲得することの難しさが影響しているものと考えられる。さらに, このことは, 第 3 学年において, 無解答が 25.4% もの割合を占めることからわかる。

以上のことから, に関する生徒の能力が, やや弱い傾向にあるものと判断する。

に関する分析

に該当する問題には, 「平成 19 年度全国学力・学習状況調査」の B 問題 5, 「PISA 2003 (数学的リテラシー)」の歩行の問題が挙げられる。

前者の問題は, 水温の変化について, グラフを基に考察していくものである。ただし, この問題は, 直接的に式の読みを問う問題ではない。問題解決を図る過程のなかの 1 つの

活動として, 式の読みが行われるものである。具体的には, グラフから $y = 4x + 20$ という式を導出した後, $y = 80$ を代入する活動が行なわれる。この問題に対する正答率は, 第 3 学年で 40.2% と低い数値である。事象を表現する段階, 式を変形する段階での誤りが推測されるが, それよりも, 無解答が 37.3% を占めていることから, 問題解決の方針を決定する段階において課題があると言える。

後者の問題は, 歩数と歩幅の関係が表現された式を基に, 特定の場合の歩幅(問 1), または速度(問 2)を求めるものである。この問題も, 問題解決を図る過程のなかの 1 つの活動として, 式の読みが行われるものである。この問題に対する正答率は, 第 3 学年で, 問 1 が 40.9% , 問 2 が 18.2% と低い数値である。問 1, 問 2 において, 数値を代入するところだけを見ると, その通過率がそれぞれ 68.8% , 45.3% であるが, 決して高い数値ではない。

に関しては, 上述した問題が式の読みを単独で問うものではないことから, 生徒の能力を判断することは難しい。

に関する分析

に関する問題には, 「特定の課題」に関する調査」の 3 と 1 が挙げられる。本問題は, 第 1 学年を対象としている。

これらの問題は, 「 $5 + a$ 」「 $5 - a$ 」の式を対象に, 正の数となる場合, 0 となる場合などを考えるものである。この問題に対する正答率は, 各設問とも 70% 程度であり, 高い数値である。第 1 学年における数値であることから, さほど困難を示していないものと判断できる。ただし, この問題に対しては, 「式を演算された数量と結び付ける」方法を用いることも可能であることから, の活動の調査問題として考察を行うには, 妥当性が低い。

以上のことから, に関して, 生徒の能力を判断することは難しい。

3 総合的な考察と教科書調査への示唆

これまでに, 式を読む活動の枠組みを通して, 調査問題の分析を行い, 生徒の式を読む能力について考察した。ここでは, それを踏まえ, 総合的な考察を行う。

まず, ~ (「式を演算された数量と結び付ける」方法を用いる読み) において, に関する生徒の能力に比べ, と における生徒の能力が低い傾向にあると言える。このことは, 上述した ~ の分析結果から判断できる。

また, , に関しては, 調査問題から, 生徒の式の読みに関する能力を判断することが難しいため, 本研究では扱わないこととする。

さらに, 「平成 19 年度全国学力・学習状況調査」の B 問題 5, 「PISA 2003 (数学的リテラシー)」の歩行の問題の分析から, 表現, 変形との関連のなかで読む能力が弱い傾向にある。つまり, 式を読む活動を単独で行う場合に比べ, 「文字式を利用する過程のなかでの読み」に課題がある。

さて, これまでに生徒の式を読む能力の実態を分析, 考察してきたが, 生徒の日頃の学習の実際を考慮しないことには問題がある。というのも, 日頃の学習において, どの程度読む活動が保障されているかにより, 教材を開発する観点は影響を受けるからである。そこで, 生徒の式の読みに関する学習の実態に関して, 教科書分析から明確化を図ることと

する。

よって, 上記した総合的な考察を基に, 表 2 - 4 のように教科書分析への示唆を導出する。

表 2 - 4 教科書分析への示唆

【教科書分析への示唆 1】

生徒にとって, 「式を演算された数量と結び付ける」方法において, 現実的文脈に較べ, 数学的文脈の方が, 文字式に対する意味を獲得することに困難である。よって, 日頃の学習において, 十分にその読みが保障されていないことが推測される。よって, その点に関して, 教科書を分析する必要がある。

【教科書分析への示唆 2】

式を読む活動だけを対象とした問題に較べ, 表現, 変形との関連のなかで読む問題に対し, 困難がある。よって, 日頃の学習において読む活動が単独で学習されているものと推測される。よって, その点に関して, 教科書を分析する必要がある。

・式を読む活動に関する教科書分析

先に述べたとおり, 生徒の式を読む学習に関する実態を考察することは, 意義深いものである。ここでは, 教科書分析を行うことで, 学習の実態の明確化を図る。さらに, 明らかになったその実態に対し, 調査問題分析における考察を加味することで, 教材開発のための示唆を導出する。

1 教科書分析の観点とその方法

まず, 調査問題分析から得た示唆を基に, 教科書分析の観点を設定する。

【教科書分析への示唆 1】では, 数学的文脈において式を演算された数量と結びつけて読む()能力が弱いことから, また【教科書分析への示唆 2】では, 表現, 変形との関連のなかで読む能力が弱いことから, それらの点に関して学習面から分析する必要性を述べた。

以上のことを踏まえ, 表 3 - 1 のように教科書分析の観点を設定し, その観点に対し, 以下の方法を用いて分析する。

表 3 - 1 教科書分析の観点

【教科書分析の観点 1】

教科書において, 数学的文脈(数量的文脈, 図形的文脈)を持つ文字式に対し, 演算された数量と結びつける方法を用いて読む活動がどの程度保障されているか。

【教科書分析の観点 2】

教科書において, 表現, 変形との関連のなかで式を読む活動がどの程度保障されているか。

【教科書分析の観点 1】では, まず本研究の定義に合う問題の数を, 枠組みに示される活動ごとに抽出する。次いで, そのデータを基に学年ごとに考察を行う。最後に, 調査問

題分析からの考察をそこに加味し, 教材開発への示唆を導出する。

【教科書分析の観点 2】では, まず本研究の定義に合う問題を, 「表現, 変形と関連する読み」と「表現, 変形と関連しない読み」という観点で類別し, 枠組みに示される活動ごとに問題の数を抽出する。次いで, そのデータを基に学年ごとに考察を行う。そして, 調査問題分析の考察をそこに加味し, 教材開発への示唆を導出する。なお, 本教科書分析は, 啓林館「楽しさ広がる数学」, 大日本図書「新版中学校数学」, 学校図書「中学校数学」を対象とする。

2 教科書分析の概要

観点 1 に関して

まず, 【教科書分析の観点 1】に対する分析の概要を述べる。

「式を演算された数量と結び付ける」方法における各文脈の問題数を, 各単元別に抽出したものが, 表 3 - 2 (第 1 学年), 表 3 - 3 (第 2 学年), 表 3 - 4 (第 3 学年) である。これらの表で, 「現」は, 現実的文脈, 「数」は, 数量的文脈, 「図」は, 図形的文脈を表している。また, 括弧内の数値は, 各単元の読みを問う全問題数に対する割合を示している。

表 3 - 2 第 1 学年の「観点 1」に関する分析データ (%)

		文字の式	一次方程式	比例・反比例	平面図形	空間図形	全体
啓林館	現	4 (13.3)	12 (52.2)	5 (8.1)	0 (0)	0 (0)	21 (15.6)
	数	0 (0)	0 (0)	4 (6.5)	0 (0)	0 (0)	4 (3.0)
	図	4 (13.3)	0 (0)	0 (0)	6 (37.5)	4 (100)	14 (10.4)
大日本 図書	現	8 (29.6)	13 (52.0)	4 (7.1)	0 (0)	0 (0)	25 (20.3)
	数	1 (3.7)	2 (8.0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	3 (2.4)
	図	2 (7.4)	0 (0)	0 (0)	4 (36.4)	3 (75.0)	9 (7.3)
学校図 書	現	3 (12.5)	18 (60.0)	12 (22.6)	0 (0)	0 (0)	33 (30.0)
	数	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	図	2 (8.3)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	3 (100)	5 (4.5)

表 3 - 3 第 2 学年の「観点 1」に関する分析データ (%)

		式の計算	連立方程式	一次関数	平行と合同	三角形・四角形・円	確率	全体
啓林館	現	3 (21.4)	12 (10.9)	10 (15.6)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	25 (12.7)
	数	5 (35.7)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	1 (2.8)	0 (0)	6 (3.0)
	図	1 (7.1)	0 (0)	6 (9.4)	17 (85.0)	33 (91.7)	0 (0)	57 (28.9)
大日本 図書	現	0 (0)	11 (11.0)	12 (17.1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	23 (8.9)

	数	8 (26.7)	0 (0)	2 (2.9)	0 (0)	1 (2.9)	0 (0)	11 (4.3)
	図	2 (6.7)	0 (0)	2 (2.9)	21 (87.5)	32 (94.1)	0 (0)	57 (22.0)
学校図書	現	0 (0)	18 (22.5)	4 (5.8)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	22 (9.3)
	数	4 (16.7)	2 (2.5)	0 (0)	1 (5.6)	1 (2.2)	0 (0)	8 (2.5)
	図	9 (37.5)	1 (1.3)	0 (0)	17 (94.4)	42 (93.3)	0 (0)	69 (29.2)

表 3 - 4 第 3 学年の「観点 1」に関する分析データ (%)

		式の展開	平方根	二次方程式	関数 $y = ax^2$	相似	三平方の定理	全体
啓林館	現	2 (12.5)	0 (0)	2 (15.4)	2 (4.7)	1 (3.7)	1 (4.8)	8 (6.4)
	数	8 (50.0)	4 (80.0)	3 (23.1)	1 (2.3)	0 (0)	0 (0)	16 (12.8)
	図	0 (0)	0 (0)	4 (30.8)	6 (14.0)	23 (85.2)	2 (95.2)	53 (42.4)
大日本図書	現	3 (7.1)	0 (0)	3 (10.7)	0 (0)	5 (8.5)	3 (5.2)	14 (5.6)
	数	33 (78.6)	0 (0)	6 (21.4)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	39 (15.5)
	図	0 (0)	1 (12.5)	2 (7.1)	10 (17.5)	50 (84.7)	54 (93.1)	117 (46.4)
学校図書	現	2 (8.3)	0 (0)	4 (16.0)	0 (0)	3 (6.8)	1 (2.5)	10 (5.0)
	数	16 (66.7)	2 (28.6)	10 (40.0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	28 (14.0)
	図	0 (0)	0 (0)	4 (16.0)	9 (15.0)	39 (88.6)	39 (97.5)	91 (45.5)

第 1 学年においては, 数学的文脈に較べ, 現実的文脈における問題数が多く, 特に「一次方程式」や「比例・反比例」の単元でこのことが顕著である。この結果は, 本学年が, 文字式の学習を行ううえで, 数学という学問に対して外的に意味づけを行う, 初期の段階であることを示唆している。また, 数量的文脈における問題数は, 三社とも顕著に低い数値であることから, 第 1 学年において, は, ほとんど行われていないことがわかる。

第 2 学年においては, 第 1 学年に較べ現実的文脈の割合が減少していることがわかる。この結果は, 文字式に対し, 数学という学問において内的に意味づけを行う傾向が強まったことに起因するものと考えられる。一方で, 図形的文脈での問題数, 割合の増加傾向が顕著である。第 2 学年の図形領域は, 「平行と合同」, 「三角形・四角形・円」の単元から構成され, 主に論証がその内容を占めている。よって, 図形領域において, 図形に対し論理的に思考する場面が増加したことが, 数値に表れたものと考えられる。また, 数量的文脈における問題数は少なく, ほぼ行われていない。

第3学年においては, 第2学年に較べ, 現実的文脈の割合が, さらに減少していることがわかる。その一方で, 図形的文脈の問題数, 割合が大きく増加している。「相似」の単元で論証を扱うことに加え, 「三平方の定理」の単元が図形を対象としていることに起因するものと考えられる。また, 数量的文脈の問題数, 割合は, 第2学年に較べ, 多少の増加傾向を示している。これは, 「式の展開」の単元において, 代数的な論証に関する問題が多く設定されていることに起因するものであるが, 他の文脈に較べると決して高い数値と言えない。

観点2に関して

「表現, 変形との関連のなかで読む」問題数を, 式を読む方法, 文脈の観点から抽出したものが, 表3-5(第1学年), 表3-6(第2学年), 表3-7(第3学年)である。これらの表で, 「現」は, 現実的文脈, 「数」は, 数量的文脈, 「図」は, 図形的文脈を表している。また, 括弧内の数値は, 読みを問う全問題数に対する割合を示している。

表3-5 第1学年の「観点2」に関する分析データ(%)

		演算された数量と結び付ける	数値と結び付ける	式を図形と結び付ける	全体
啓林館	現	17 (12.6)	10 (7.4)	0 (0)	27 (20.0)
	数	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	図	8 (5.9)	4 (2.9)	0 (0)	12 (8.9)
大日本図書	現	17 (13.8)	17 (13.8)	0 (0)	34 (27.6)
	数	2 (1.6)	7 (5.7)	0 (0)	9 (7.3)
	図	2 (1.6)	0 (0)	0 (0)	2 (1.6)
学校図書	現	26 (23.6)	15 (13.6)	1 (1.0)	42 (38.2)
	数	0 (0)	9 (8.1)	2 (1.8)	11 (10.0)
	図	3 (2.7)	2 (1.8)	0 (0)	5 (4.5)

表3-6 第2学年の「観点2」に関する分析データ(%)

		演算された数量と結び付ける	数値と結び付ける	式を図形と結び付ける	全体
啓林館	現	19 (9.6)	21 (10.7)	2 (1.0)	42 (21.3)
	数	5 (2.6)	47 (23.9)	5 (2.6)	57 (29.0)
	図	31 (15.7)	3 (1.5)	1 (0.5)	35 (17.8)
大日本図書	現	23 (8.9)	34 (13.2)	1 (0.4)	58 (22.5)
	数	8 (3.1)	92 (35.7)	8 (3.1)	108 (41.9)
	図	38 (14.7)	7 (2.7)	1 (0.4)	46 (17.8)
学校図書	現	22 (9.3)	23 (9.7)	1 (0.4)	46 (19.5)
	数	4 (1.7)	67 (28.4)	8 (3.4)	79 (33.5)

	図	3 (2.7)	2 (0.8)	2 (0.8)	4 3 (18.2)
--	---	-----------	-----------	-----------	--------------

表 3 - 7 第 3 学年の「観点 2」に関する分析データ (%)

		演算された数量と結び付ける	数値と結び付ける	式を図形と結び付ける	全体
啓林館	現	6 (4.8)	1 (0.8)	0 (0)	7 (5.6)
	数	5 (4.0)	8 (6.4)	1 (0.8)	1 4 (11.2)
	図	3 9 (31.2)	0 (0)	1 (0.8)	4 0 (32.0)
大日本図書	現	1 4 (5.6)	1 (0.4)	0 (0)	1 5 (6.0)
	数	1 9 (7.5)	6 (2.4)	2 (0.8)	2 7 (10.7)
	図	1 0 6 (42.1)	8 (3.2)	3 (1.1)	1 1 7 (46.4)
学校図書	現	1 0 (5.0)	9 (4.5)	1 (0.5)	2 0 (10.0)
	数	1 7 (8.5)	8 (4.0)	2 (1.0)	2 7 (13.5)
	図	8 3 (41.5)	1 (0.5)	0 (0)	8 4 (42.0)

第 1 学年においては, 現実的文脈に較べ, 数学的文脈で, 表現, 変形との関連のなかでの読みに関する問題の数が, 顕著に少ないことがわかる。また, 読み全体に対する割合に関しては, 学校図書以外で 5 割を下回っている。つまり, 式の読みに関する問題の半数以上が, 表現, 変形と関連することのない問題であり, 第 1 学年においては, 読みを他の活動と結びつけることなく, 単独で学習している傾向が強いものと判断できる。

第 2 学年においては, 第 1 学年に較べ, 数量的文脈における読みに関して, 他活動との関連の増加が見られる。このことは, 「連立方程式」や「一次関数」の単元において, 式を数値と結び付ける方法での読みが増加したことに起因するものと考えられる。また, 読み全体に対する割合に関しては, 三社ともに 5 割を超えている。

第 3 学年においては, 図形的文脈において式を演算された数量と結びつけて読む問題の割合が, 顕著に大きいことがわかる。これは, 「相似」の単元で学習する論証が影響しているものと考えられる。

また, 読み全体に対する割合に関しても, 啓林館を除き, 二社で 5 割を超えていることがわかる。

2 総合的な考察と教材開発への示唆

これまでに, 枠組みを通して, 観点に従った問題の数を抽出することで, 教科書から生徒の式の読みの学習の実態に関して, 分析を行ってきた。この分析に対して, 調査問題分析の考察を加味し, 総合的な考察を以下に述べる。

【教科書調査の観点 1】に関しては, 学年の進行に伴い, 現実的文脈の割合は減少していく傾向にあることが判明した。これは, 数学という学問に対して, 外的な理解から内的な理解へと変容していく様相が, 数値として表出したものと考えられる。また, 図形的文脈においては, その割合が学年の進行とともに増加していく傾向にあることが判明した。これ

は, 図形に対し文字式を用いることで, 論理的に思考する場面が増加したことに起因するものと考えられる。しかし, 調査問題から, 第 2 学年, 第 3 学年においても, この文脈における正答率は, さほど高くない水準にあることに留意したい。このように, 前述した 2 つの文脈が顕著な変化を見せるのに対し, 数量的文脈における問題数, 割合は, さほど顕著な変化を示さず, 第 3 学年において多少の増加傾向を示すにとどまる。また, 全学年を通して数量的文脈における問題数が少ないことは, 調査問題分析において, その読みに関する問題の正答率が低かったことと合致する。

【教科書調査の観点 2】に関しては, 全体の読みの問題に対して, 表現, 変形との関連のなかで読む問題は, 第 1 学年で 5 割弱, 第 2 学年では 6 割強, 第 3 学年では 5 割強程度で設定されていることが判明した。もちろん, 三社によりその数値が異なることには十分留意したい。特に, 第 1 学年においては, その割合が 5 割を下回ることから, 表現, 変形, 読みの活動が単独で学習される傾向が強いことを表している。このような側面は, 第 1 学年の文字式指導の特徴であるとともに, 懸念される点でもある。また, 第 2 学年, 第 3 学年においても, それらの数値が高いものであると断言することはできない。逆に捉えれば, 第 2 学年において約 3 割, 第 3 学年において約 4 割の問題は, 読みが単独で設定されたものである。このことに関して, 「平成 19 年度全国学力・学習状況調査」の B 問題⁵, 「PISA 2003 (数学的リテラシー)」の歩行の問題において, それらの正答率が低かったことと合致する。

さて, この教科書分析は, 生徒の式の読みに関する実態の調査を, 「学習」という側面から補完するものである。しかし, 主たる目的は, 教材開発へそれを活用することにある。よって, 上記した総合的な考察を基に, 表 3 - 8 のように教材開発への示唆を導出する。

表 3 - 8 教材開発への示唆

【教材開発への示唆 1】

全学年を通して, 数量的文脈において式を演算された数量と結びつけて読む()問題数(割合)が少ない(小さい)ことと, 調査問題分析の結果が合致することから, に関する能力がよりよく育成される教材の開発が要請される。

図形的文脈において式を演算された数量と結びつけて読む()問題の数(割合)が第 1 学年において顕著に少ない(小さい)。また, それらの数値は学年の進行に伴い増加傾向を示しているが, 調査問題における正答率がさほど高くないことから, 第 1 学年より に関する能力がよりよく育成される教材の開発が要請される。

【教材開発への示唆 2】

第 1 学年では, 読む活動が単独で行なわれる傾向が強いこと, また第 2 学年, 第 3 学年においても他活動と関連する読みの割合が十分ではないことは, 調査問題分析の結果と合致する。よって, 他活動との関連のなかにおいて, 式を読む活動が設定され, そのような読みに関する能力がよりよく育成される教材の開発が要請される。

・式を読む活動に関する教材開発

ここでは, まず調査問題の分析, 教科書分析から得た示唆を基に, 教材開発の観点を学年ごとに設定する。さらに, その観点に従った教材を学年ごとに開発する。

1 教材開発の観点

まず, 調査問題分析ならびに教科書分析から得た教材開発への示唆を基に, 教材開発の観点を設定する必要がある。ここでは, 教材開発の観点を学年ごとに設定する。

第 1 学年に関しては, 教科書において, 式に関する問題が少ないことが明らかになっている。また, 表現, 変形との関連のなかで読む問題は, 教科書における読みに関する全問題数に対して, 5 割を下回ることが明らかになっている。以上のことから, 表 4 - 1 のように教材開発の観点を設定する。

表 4 - 1 第 1 学年における教材開発の観点

- | | |
|-------------|--------------------------|
| 【教材開発の観点 1】 | 式 または 式が行われること。 |
| 【教材開発の観点 2】 | 表現, 変形との関連のなかで読みが行われること。 |

第 2 学年に関しては, 教科書において, 式に関する問題数が第 1 学年に比べ増加しているものの, 式に関してはさほど増加せず, その割合が低いことが明らかになっている。ただし, 調査問題においては 式に限らず, 式においてもその正答率が低いことに留意したい。また, 表現, 変形との関連のなかで読む問題は, 教科書における読みに関する全問題数に対して, 約 7 割であることが明らかになっている。以上のことから, 表 4 - 2 のように教材開発の観点を設定する。

表 4 - 2 第 2 学年における教材開発の観点

- | | |
|-------------|--------------------------|
| 【教材開発の観点 1】 | 式 または 式が行われること。 |
| 【教材開発の観点 2】 | 表現, 変形との関連のなかで読みが行われること。 |

第 3 学年に関しては, 教科書において, 式に関する問題数の少なさが明らかになっている。また, 表現, 変形との関連のなかで読む問題は, 教科書における読みに関する全問題数に対して, 約 6 割であることが明らかになっている。以上のことから, 表 4 - 3 のように教材開発の観点を設定する。

表 4 - 3 第 3 学年における教材開発の観点

- | | |
|-------------|--------------------------|
| 【教材開発の観点 1】 | 式 または 式が行われること。 |
| 【教材開発の観点 2】 | 表現, 変形との関連のなかで読みが行われること。 |

2 教材の開発

ここでは, 先に設定した教材開発の観点を基に, 全学年において式を読む活動に関する教材の開発を行う。しかし, 教科書分析において, に関する問題数, 他の活動と関連する読みに関する問題数が, 他学年に較べ, 第 1 学年で顕著に少なかったことから, 本稿では, 第 1 学年を対象に開発した教材に関して述べることとする。また, 以下に記す教材は, 細水ら (2007) による教材を参考にしている。

教材名 : 取り出した玉と残った玉の秘密

本教材は, 赤玉, 青玉, 黄玉がそれぞれいくつか入った袋のなかから, ある数だけ玉を取り出す際の, 「取り出したある色の玉の個数」と「袋に残った他の 2 色の玉の個数」の関係に着目したものである。よって, 取り出す玉の個数や注目する玉の色を変えることで, その関係の変化が期待される。ここでは, 本研究の授業実践の際に設定した条件 (表 4 - 4) を用いて説明を進めることとする。

表 4 - 4 授業実践で設定した条件

袋のなかの玉の個数 : 赤玉 4 個, 青玉 3 個, 黄玉 2 個
取り出す玉の個数 : 5 個 (4 個が袋に残る)
着目する玉 : 取り出した赤玉と袋に残った青玉と黄玉

表 4 - 5 取り出した玉の個数と袋に残った玉の個数の関係

取り出した玉 (5 個)			残った玉 (4 個)		
赤	青	黄	赤	青	黄
0	3	2	4	0	0
1	3	1	3	0	1
1	2	2	3	1	0
2	3	0	2	0	2
2	2	1	2	1	1
2	1	2	2	2	0
3	2	0	1	1	2
3	1	1	1	2	1
3	0	2	1	3	0
4	1	0	0	2	2
4	0	1	0	3	1

表 4 - 4 の条件に従い, 5 個の玉を取り出す場合を考える。すると, 取り出す玉と袋に残った玉の個数の関係は, 表 4 - 5 のように表されることになる。よって, 表 4 - 5 より, 5 個の玉を取り出す場合の個数の関係は, 1 1 通りであることがわかる。

また, 表 4 - 5 において, 網掛け部分に着目すると, 「取り出した赤玉の個数」と「袋に残った青玉と黄玉の合計の個数」は, 等しい関係になっていることがわかる。ここで, 文字式を利用し, この関係に対する探究を進めていく。そこで, 例えば, 表 4 - 6 のように, それぞれの玉の個数を文字式で置き換えることとする。

表 4 - 6 文字式で表現される玉の個数

	赤玉	青玉	黄玉
取り出した玉の個数	x 個	y 個	z 個
袋に残った玉の個数	4 - x 個	3 - y 個	2 - z 個

さて, ここで上述した関係に文字式を用いると,

$$x = (3 - y) + (2 - z) \quad \left. \vphantom{x = (3 - y) + (2 - z)} \right\} \quad \text{【表現】}$$

と表現することが可能である。これにより, 玉の個数の関係の事象は, 文字式に変換されたことから, 表す活動が行なわれたことになる。

次いで, 上記した関係式に対し, 等式の性質などに従い, 様々にその様態を変化させると, 以下の様になる。

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 - y + 2 - z \\ x = 5 - y - z \\ \underline{x + y + z = 5} \end{array} \right\} \quad \text{【変形】}$$

これにより, 他の様態の関係式を獲得することになる。つまり, 変形する活動が行われたのである。上に示された 3 つの関係式は, そのどれもが数学的結果となりうるものであり, その決定は学習者に委ねられる。つまり, その選択には目的が大きな関わりを持つ。では, 一番下に表現された関係式に目を向けることにする。ここで, 「 $x + y + z = 5$ 」の式を, 文脈と結びつけることで, この式が持つ意味の獲得が可能となる。つまり, 読む活動が行なわれるのである。

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 5 \text{ は、} \\ \text{「取り出した玉の個数」の関係を表している。} \end{array} \right\} \quad \text{【読み】}$$

つまり, ここにおける「文脈」とは, 実際に玉を取り出す活動により, 築かれるものであるから, 最初の活動は, 式を読むうえでの素地となり, 重要な意味を持つ。

また, 本教材は, 条件を少し変化させることで, 学習の発展が期待される。本授業実践においても, 同様に学習を進展させている。その詳細に関しては後述する。

さて, これまでに, 開発した教材に関して説明を行ってきた。この教材を, 先に設定した教材開発の観点に照らし合わせることで, もう少し説明を加えることとする。

まず, 【教材開発の観点 1】に関し, 留意しなければならない点がある。それは, 本教材が「玉」や「袋」などを教具として用いることを想定しているため, 現実的な側面を持つ点である。しかし, これらは, 数量的な事象を生み出すための道具として用いられるものである。また, そうすることで, 学年(第 1 学年)の性格に教材を合わせている。よって,

本教材における式を読む活動は， と判断できる。

また，【教材開発の観点2】に関しては，読む活動が表現，変形の活動を経たうえで設定されていることから，本教材が，この観点に従うものであると判断できる。

．式を読む活動に関する教材の実証的検討

ここでは，先に設定した「教材開発の観点」ならびにそれを基に開発した教材が持つ，生徒の式を読む能力，姿勢を高める有効性を実証的に検討する。そのために，先に開発した教材を用いて授業実践を行う。

1 授業実践の概要

本授業実践は，新潟県内の中学校（第1学年の1クラス，40名）で行った。

また，本授業は，導入，展開，展開，振り返りの4つの活動から構成される。以下に，これらの概要を記す。

導入においては，図5-1に示される教具を用いて，実際に玉を取り出す活動が，生徒により行われる。



図5-1 授業で用いた教具

活動は4人が1組のグループで行われ，生徒が「取り出した赤玉」と「袋に残った青玉と黄玉の合計の個数」の等しい関係に気付くために設定されている。また，先に述べたとおり，この活動は式を読むうえで，文脈の素地を築く重要な場面となる。

展開においては，導入で発見した関係に対し，文字式を用いて探究する活動が行なわれる。文字式を用いて，玉の個数の関係を式化することで探究は始まり，続いて，変形，読みが順次行われる。展開では，教師が，ある程度先導して授業を進めていく。また，展開は，生徒が展開において主体的に問題解決を図るために，文字式利用の意識，式の読みに関する意識を高める役割を担っている。

展開においては，展開を受け，他の条件において，等しい関係を成り立たせる方法を考える場面を設定する。この場面で生徒は，発展的な読みを行うことになる。具体的には「取り出した青玉の個数と，袋に残った赤玉と黄玉の合計の個数を等しくするためには，何をどのように変化させればよいか」という問題を設定する。ここでは，教師の介入は個別的なものにとどめ，生徒が文字式を利用して問題解決を図るために，活動の時間を十分

に保障する。

最後に, 文字式を利用した過程を振り返り, 授業の中で「ここが大切だ」と感じたことを, 学習シートに記述させる。

2 授業実践の分析

ここでは, 授業実践を分析する。本授業実践を分析する目的は, 本研究で設定した教材ならびに教材開発の観点の有効性を検討するものであるから, 分析の観点も教材開発の観点に関し, 設定されることが望ましい。よって, 表 5 - 1 のように授業実践における分析の観点を設定する。

表 5 - 1 授業実践における分析の観点

<p>【分析の観点 1】 第 1 学年の【教材開発の観点 1】が, 教材開発を行ううえで有効であったか。</p> <p>【分析の観点 2】 第 1 学年の【教材開発の観点 2】が, 教材開発を行ううえで有効であったか。</p>

【分析の観点 1】は, 【教材開発の観点 1】に対するものであり, 具体的には「数量的文脈において式を演算された数量と結び付けて読む活動()」が設定される教材として, 生徒に有効であったか, また有効であればどのように有効であったかを分析する。これを基に, 【教材開発の観点 1】に対する考察を行う。

【分析の観点 2】は, 【教材開発の観点 2】に対するものであり, 具体的には「表現, 変形との関連のなかで読む活動」が設定される教材として, 生徒に有効であったか, また有効であればどのように有効

であったかを分析する。これを基に, 【教材開発の観点 2】に対する考察を行う。

また, 以下の方法を用いることで, 上記した観点に対する質的な分析を行う。

【分析の観点 1】, 【分析の観点 2】に対するクラス全体からの分析, または対象生徒からの分析を, 授業プロトコル, 展開 の学習シート, 展開 の学習シート, 感想の記述を基に行なう(そのため, 授業の際に, クラス全体を写すビデオを 1 台, 対象生徒を写すビデオを 1 台設定している)。以下に示される分析の枠組み(表 5 - 2)に従い, その概要を述べていくこととする。

表 5 - 2 実践授業の分析の枠組み

	クラス全 体	対象生 徒
分析の観点 1	C 1	S 1
分析の観点 2	C 2	S 2

C 1 に関する分析の概要

本授業において, 式を読む活動が設定されるのは, 展開 と展開 の場面である。展開の場面において, 「この式 ($x + y + z = 5$) になると, こんなことがわかったってことありますか」という教師の式の読みに関する発問に対し,

「 x が取り出した赤, y が取り出した青, z が取り出した黄色の玉で, $x + y + z$ は取り出した玉の数を表していて, それが 5 ってことだから, 5 個取り出したこととつじつまが合う。」

という生徒の発言があった。この発言から, 関係式を文脈 (玉を取り出す事象) と結びつけることで, 意味の獲得が行われたことがわかる。また, 問題の条件と一致することにも触れていることから, 文脈と強く結びつけて考えた姿勢が見られる。さらに, この発問に対する他の生徒の記述には,

「取り出した各色の玉をたすということは, 5 個取り出したときと個数は等しい。」

「取り出した赤玉, 青玉, 黄玉の合計は 5 個。」

「取り出した色の個数が違って, 取り出した合計の個数は必ず 5 個になる。だから, $x + y + z = 5$ は等しい。」

「5 個とらないとできない。」

などがあり, 式から読み取った内容を, 生徒一人一人の言葉で表現している。また, 「5 個とらないとできない」という記述は, 「5 個の玉を取り出さなければ, 個数の関係は等しくならない」ことを意味し, 展開 の段階で文字式に対する深い読みが行われていたことを示唆している。

また, 展開 の場面では, 多くの生徒が式の読みに関する課題を達成している。このことに関しては, 表 5 - 3 (展開 の課題に対する分析結果) において, 「式の読みができた」生徒の割合が高いことから判断できる。

表 5 - 3 展開 の課題に対する分析データ (%)

$x + y + z = 6$ まで到達して いない	式を読みができていな い	式の読みができた
5 人 (12.5)	5 人 (12.5)	30 人 (75.0)

さらに, 振り返りの場面で記述した生徒の感想には,

「文章題で文字を使うときには, 文字が何を意味するか大切にするとよい。そうすれば新しいことが見えてくる。」

「文字式を使うとき, その文字が何を意味しているのか読み取ることが大切だと思う。」

など, 式の読みの重要性に関する記述が見られた。

S 1 に関する分析の概要

対象生徒に設定した S 子は, 日頃から積極的に発言する生徒である。本授業においても多くの発言を行っているが, 教師の発問に対するもの以外は, 抽出できなかった。よって, 授業の進行とともに, S 子の式の読みに対する能力, 姿勢の変容を捉えることが困難であるため, S 子の展開 の学習シートの記述, 感想の記述を基に, 分析を行う。

発展 の課題に対し, S 子は図 5 - 2 のように記述している。

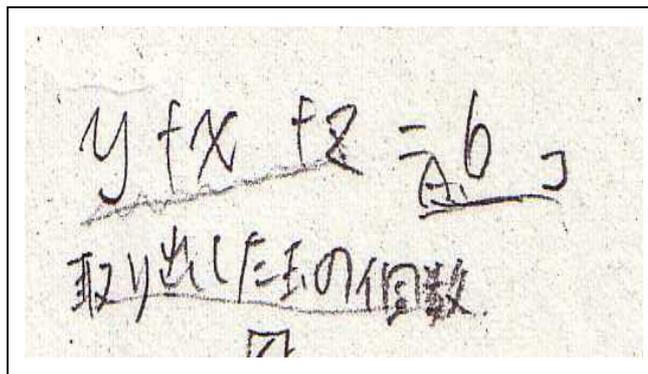


図5-2 S子の展開の課題に対する記述

図5-2において，文字式の下に「取り出した玉の個数」とかかかれていることから，S子は文脈と結びつけて意味を獲得できたものと判断できる。また，そのことに関しては，「6」に「コ」という単位を付加していることからわかる。このように，S子は，展開の課題において，文字式を文脈と強く関連させることで，その意味を獲得している。

また，S子の感想に「...問題の場面をイメージして(ここが大切!)...」という記述があることから，文字式を用いる際に文脈を意識することの重要性を感得している。

C2に関する分析の概要

他の活動との関連のなかで読みが行なわれる場面には，展開と展開があるが，その場面における生徒の様子を，授業プロトコルと学習シートから分析する。

展開において，教師が「もっとこうすれば分かることが出てくるんじゃないかなってことはありますか」と式の変形を促す発問をしている。この発問に対し，以下のような発言があった。

「括弧をはずしたり，移項したりすれば何か分かることが出てくるんじゃないかと思います。」

この発言は，文字式の読みに対する，式の変形の有効性を意味している。つまり，活動間の関連が意識された発言である。

また，展開の課題においては，多くの生徒が表現，変形の活動を経たうえで，式の読みが行なっていた。このことは，表5-3から判断できる。

さらに，感想の記述を，どの活動に関連するものかで分類すると，表5-4のようになる。

表5-4 感想の記述に関する分析データ(%)

表現	変形	読み	複数	その他
18 (45.0)	4 (10.0)	5 (12.5)	5 (12.5)	8 (20.0)

活動間の関連に関して記述した生徒は，5名で，全体に対する12.5%である。このことから，本授業において活動間の関連の重要性を感得した生徒は少なく，ある1つの活動の重要性に対する意識が強かったことがわかる。

S 2 に関する分析の概要

前述したと同様に, 授業の進行とともに, S 子の式の読みに対する能力, 姿勢の変容を捉えることには困難があったため, S 子の展開の学習シートの記述より分析を行うこととする。

展開の学習シートから, S 子は, 個数が等しくなる関係を $y = (4 - x) + (2 - z)$ と表現した後, 式変形を施して図 5 - 2 に示される式を得ている。学習シートに対し, 訂正を加える様子は見られず, 目的を持って表現, 変形, 読みが順次行われたものと判断できる。このことから, S 子は展開における学習内容を展開の課題に対して活用し, 文字式を用いる時点で, 問題解決のための手段をある程度決定していたことがわかる。

3 総合的な考察

これまでに, 表 5 - 2 の枠組みに従い, 分析の概要を述べてきた。その分析結果を基に, 分析の観点に対する総合的な考察を以下を行う。

まず, 【分析の観点 1】に関して, C 1, S 1 の分析結果を基に考察する。C 1 の分析結果からは, クラス全体において, 展開の課題に対する達成率が高かったこと, また感想の記述から, 読みの重要性を意識している生徒がいたことが明らかになった。また, S 1 の分析結果からは, S 子が文脈を強く意識しながら読みを行う様子が見られた。以上のことから, 本教材は, 生徒の を行う能力を高めるうえで, 有効なものであると判断する。具体的には, 文字式を文脈と結びつけることを意識化させるのに, 本教材は適したものと判断する。この点に関しては, 調査問題の分析において, における生徒の能力の低さが明らかになったことから意義深いことである。よって, 本教材を開発するうえで設定した【教材開発の観点 1】は, 生徒が の能力を向上させる教材を開発する可能性を持つことから, 有効なものと判断する。しかし, における生徒の能力の高まりに関して, 十分なデータが揃っているとは言い難い面もある。なぜならば, 生徒の授業前の能力を測定していないからである。

【分析の観点 2】に関しては, C 2, S 2 の分析結果を基に考察する。C 2 の分析結果からは, ほとんどの生徒が表現, 変形との関連のなかで式を読むことができたことが明らかになった。しかし, 感想の記述からは, ある 1 つの活動の重要性に関するものが多く, 活動間の関連の重要性に触れたものは少なかった。このことから, 本授業が生徒に対して, 各活動の関連の重要性を十分に感得させるものでなかったと判断できる。また, S 2 の分析結果からは, S 子が最終的な目的を見据えたうえで, 各活動を行なっていく様子が見られた。以上のことから, 本教材は生徒に対し, 表現, 変形との関連のなかで読む能力を育成することに関し, 有効である。このことは, 前述した調査問題において生徒の能力が低いことから, 意義深いことである。しかし, 各活動間の関連を意識させることにおいては, さほど有効ではないと判断する。つまり, 式の読みに対する情意面の育成に関して, 十分な教材とは言えない。よって, 本教材を開発するうえで設定した【教材開発の観点 2】は, 生徒が表現, 変形との関連のなかで読む能力を向上させる教材を開発する可能性を持つことから, 有効なものであるが, 式の読みに対する情意を育成する点で課題が残るものと判断する。また, この観点においても, 十分なデータが揃っているとは言い難い面があることには留意したい。

おわりに

ここでは, 本研究を振り返り, その成果と今後の課題を記す。

まず, この研究で得られた成果として以下の 3 つが挙げられる。

成果 1 : 式を読む活動を定義し, 式を読む活動を捉える枠組みを構築できた。

三輪 (1996, 2001), 両角 (1993, 1997), 杉山 (1990) の先行研究を基に, 式の読みの定義に関して明らかにし, 本研究における「式を読む」活動を定義することができた。しかし, 式の読みの類型に関しては, 先行研究からの統合的な類型化が困難であった。そこで, 三輪 (1996) の「式を読む仕方」と調査問題の結果を参考に, 「式を読む方法」と「文脈」の観点を抽出し, 式を読む活動を捉える枠組みを構築することができた。

成果 2 : 式の読みに関する生徒の実態を明らかにすることができた。

調査問題に対する分析から「数学的文脈において式を演算された数量に結び付けて読む () 能力が弱いこと」, 「表現, 変形との関連のなかで読む能力が弱いこと」を生徒の実態として明らかにすることができた。さらに, 教科書分析から「第 1 学年, 第 2 学年で数量的文脈において式を演算された数量に結び付けて読む () 問題が, 他の文脈に比べ顕著に少ないこと」, 「第 1 学年で, 表現, 変形との関連のなかで読む問題が少ないこと」を生徒の実態として, 学習の面から補完するとともに, 教材開発への示唆を導出することができた。

成果 3 : 生徒の実態に即した教材を開発することができた。

教材開発への示唆を基に, 学年ごとの教材開発の観点を設定し, それに従った教材を開発することができた。さらに, 最も強化が必要とされた第 1 学年を対象に授業実践を行い, 開発した教材ならびに教材開発の観点に対する質的な検討を行った。その結果として, 開発した教材が「数量的文脈において式を演算された数量と結び付けて読む能力を向上させる可能性を持つこと」, 「表現, 変形との関連のなかで読む能力を向上させる可能性を持つこと」が明らかになった。

次に, 今後の課題として以下の 3 つが挙げられる。

課題 1 : 枠組みの ~ に関する生徒の実態が明確化されていない。

本研究で扱った調査問題は, 枠組みにおける ~ に対応する問題のみであった。さらに, そのなかで満足な考察が行えたものは, ~ に限定される。つまり, これ以外の式を読む活動に関する生徒の実態は, 本研究において明らかにされていない。よって, ~ に関する生徒の実態を明らかにするために, 調査問題の開発, さらにこれを実際に行い, 分析が必要である。

課題 2 : 開発した教材に対して実証的検討が十分になされていない。

本研究では, 調査問題分析ならびに教科書分析から得られた生徒の実態を基に, 教材開発の観点を設定した。しかし, 設定した 2 つの観点は, 生徒の式を読む能力を向上させる点で有効であるものの, 生徒の活動間の関連の重要性に対する情意を育成する点では満足なものではなかった。よって, その点を補完するための新たな観点, もしくは教材ならびに指導を再考し, 改善を図る必要がある。

課題 3 : 各活動の関連をより意識化させるための手立てが必要である。

本研究では,開発した教材を用いて授業実践を行った。その授業におけるデータを基に,質的な分析を行い,教材開発の観点の有効性に関して検討を加えた。しかし,分析するためのデータ,また,分析方法が十分ではなく,教材開発の観点の有効性を裏付けるには困難な側面もあった。よって,本研究において開発した教材に対し,さらなる実証的な検討を行うことが必要である。

引用・参考文献

- 岡本和夫 他(2006),『楽しさひろがる数学 1』,啓林館。
- 岡本和夫 他(2006),『楽しさひろがる数学 2』,啓林館。
- 岡本和夫 他(2006),『楽しさひろがる数学 3』,啓林館。
- 国宗進 編(1997),『確かな理解をめざした文字式の学習指導』,中学校数学科・新しい授業づくりシリーズ,第5巻,明治図書。
- 国立教育政策研究所 編(2004),『生きるための知識と技能 OECD生徒の学習到達度調査(PISA)2003年調査国際結果報告書』,ぎょうせい。
- 国立教育政策研究所教育課程研究センター,「平成19年度全国学力・学習状況調査の調査問題について 中学校数学A」,
<http://www.nier.go.jp/homepage/kyoutsuu/mondii-07.pdf>
- 国立教育政策研究所教育課程研究センター,「平成19年度全国学力・学習状況調査の調査問題について 中学校数学B」,
<http://www.nier.go.jp/homepage/kyoutsuu/mondii-07.pdf>
- 国立教育政策研究所教育課程研究センター,「平成19年度全国学力・学習状況調査【中学校】調査結果の概要 教科に関する調査の結果」,
http://www.nier.go.jp/homepage/kyoutsuu/tyousakekka/gaiyou_chuu/kyouka_tyousa_kikka.pdf
- 国立教育政策研究所教育課程研究センター,「特定の課題に関する調査(算数・数学)調査結果」,
<http://www.nier.go.jp/kaihatsu/tokutei/04002030200004000.pdf>
- 佐々木徹郎(2006),「筆算から文字式の学習へ」,『第39回数学教育論文発表会 論文集』,日本数学教育学会,pp.271-276。
- 杉山吉茂(1990),「式をよむ」ことについて」,『東京学芸大学数学教育研究』,第2号,pp.17-25。
- 杜威(1991),『学校数学における文字式の学習に関する研究 数の世界から文字の世界へ』,東洋館出版社。
- 中原忠男(1995),『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』,聖文社。
- 一松信 他(2006),『中学校数学 1』,学校図書。
- 一松信 他(2006),『中学校数学 2』,学校図書。
- 一松信 他(2006),『中学校数学 3』,学校図書。
- 藤井斉亮(1988),「認知的コンフリクトによる理解の分析と評価 方程式・不等式を具体的題材として」,『数学教育学論究』,第53号,pp.3-31。

- 細水保宏 編 (2007), 『ガウス先生の不思議な算数授業録』, 東洋館出版社, pp. 36 - 39.
- 松村明 編 (1988), 『大辞林』, 三省堂.
- 三輪辰郎 (1996), 「文字式の指導序説」, 『筑波数学教育研究』, 第15号, pp. 1 - 14.
- 三輪辰郎 (2001), 「文字式の指導に関する重要な諸問題」, 『筑波数学教育研究』, 第20号, pp. 23 - 38.
- 両角重男 (1993), 「「式を読む」ことに関する一考察 文字式の理解のために」, 『筑波大学附属中学校研究紀要』, 第45号, pp. 39 - 54.
- 両角重男 (1997), 「「式を読む」ことを重視した文字式指導に関する研究 同一生徒に対する3年間の継続的な授業実践を通して」, 『第30回数学教育論文発表会 論文集』, 日本数学教育学会, pp. 253 - 258.
- 文部省 (1998), 『中学校学習指導要領』, 国立印刷局.
- 文部省 (1999), 『中学校学習指導要領解説 数学編』, 大阪書籍.
- 文部科学省 (2006), 『小学校算数・中学校数学・高等学校数学 指導資料 PISA 2003 (数学的リテラシー) 及びTIMSS 2003 (算数・数学) 結果の分析と指導改善の方向』, 東洋館出版社, p. 20, 34.
- 吉田稔 他 (2006), 『新版中学校数学 1』, 大日本図書.
- 吉田稔 他 (2006), 『新版中学校数学 2』, 大日本図書.
- 吉田稔 他 (2006), 『新版中学校数学 3』, 大日本図書.