新潟大学教育人間科学部数学教室,『数学教育研究』, 第 43 巻, 第 1 号, 10-34, 2008.

# 離散数学の考えに基づく 2 進法の教材化に関する研究
## ― 自然数の 2 進数表現に見られる図形的性質をとおして ―

新潟大学大学院教育学研究科
教科教育専攻　数学教育専修
平成 18 年度入学 竹内　喜紀

## １．　問題の所在

学校数学における 2 進法[1]は、昭和 44 年（昭和 47 年施行）の学習指導要領改訂より、中学校数学において初めて導入された内容であり、当初は小学校での記数法の考えを発展させ、10 進法との比較による位取り記数法の原理理解が主な学習ねらいであった。その後の改訂において、精選の方針、社会的背景により削除・再導入を経て平成 10 年の改訂から再度、中学校数学での居場所を失い、現在では高校の教科「情報」[2]を中心に内容が展開されている。

教科「情報」は A, B, C と科目が 3 つに分かれており、A はインターネットを中心とした情報の活用法、B は情報の科学的理解、C は情報そのものの表現とその伝達が中心に内容が構成されている。学習指導要領においては上記の趣旨の基、情報 C のみにおいて、2 進数表現という文言が示されているが(5)、教科書を概観すると教科書会社によって 2 進法に関する記述が A, B, C にそれぞれ見受けられ、教科「情報」に居場所を移してからも学習内容としての位置付けの不十分さが見受けられる(6)(7)(8)。

しかし、2 進法に関する内容が教科「情報」に居場所がある現状、今後の教科「情報」の展開を視野にいれたとき、教科「情報」を意識した数学教育での新たしい展開を考える取り組みが必要であると思われる。学校教育内での『情報科』について、一松は将来を見据え、『情報科』と『数学科』について葛藤と共生という提言を行っている。その中で、現在は葛藤ということは見られないが、教科「情報」に対して必要な支援を与え、よい素材を提供する姿を、『数学科』と『情報科』との共生の姿と呼び、今後の展開に期待を寄せている(9)。こうした観点から、教科「情報」を意識した学校数学の方向性について検討する価値は十分あると考えられる。

---

[1] 本来は、2 進位取り記数法を指すとされているが、本稿においては 2 進数およびその表現を含む意味で扱っている。
[2] 正式名[普通教科「情報」]は一科目（2 単位）の必修選択科目であり、情報及び情報技術を活用するための知識と技能の習得を通して、情報に関する科学的な見方や考え方を養うとともに、社会の中で情報及び情報技術が果たしている役割や影響を理解させ、情報化の進展に主体的に対応できる能力と態度を育てることをねらいとしている。このねらいを達成させるため、A, B, C と科目が 3 つに分かれている。

## ２． 本研究の目的

本研究は学校数学において居場所を失った 2 進法に関して、教科「情報」を意識した学校数学での新しい方向性について教材化をもとに検討する。

## ３． 本研究の方法

学校数学における 2 進法に関して、教育科学的視点及び数学的視点からその価値を見直し、開発教材による実践研究をとおして教科「情報」を意識した学校数学における方向性について考察する。

そのため、学校数学における 2 進法に関して、学習指導要領の観点からその変遷について整理を行い､教科書の記述内容分析を加え学校数学での特徴とその内実を明らかにする。さらに、学習指導要領の変遷の観点から先行研究を時代別に整理し、現状とその傾向を踏まえ、これまでの学校数学における 2 進法に関する考察を行う（教育科学的視点)。

また、2 進法の起源および変遷について、*D.Knuth*(10)，*Libniz* 著作集(11)， F.G.ヒース(12)の文献を基に調べ、歴史的変遷について情報科学的視点を加え整理し、2 進法に関する文化的価値について考察する（数学的視点)。こうした基礎資料を基に、教科「情報」を意識した学校数学における 2 進法に関しての方向性を検討するため、離散数学という比較的新しい数学に注目し､「*A New kind of Science*」(30)を援用し教材化を試みる。

以上のことから、本研究の内容は以下のように整理され、研究の全体的流れは図 1 のようになる。

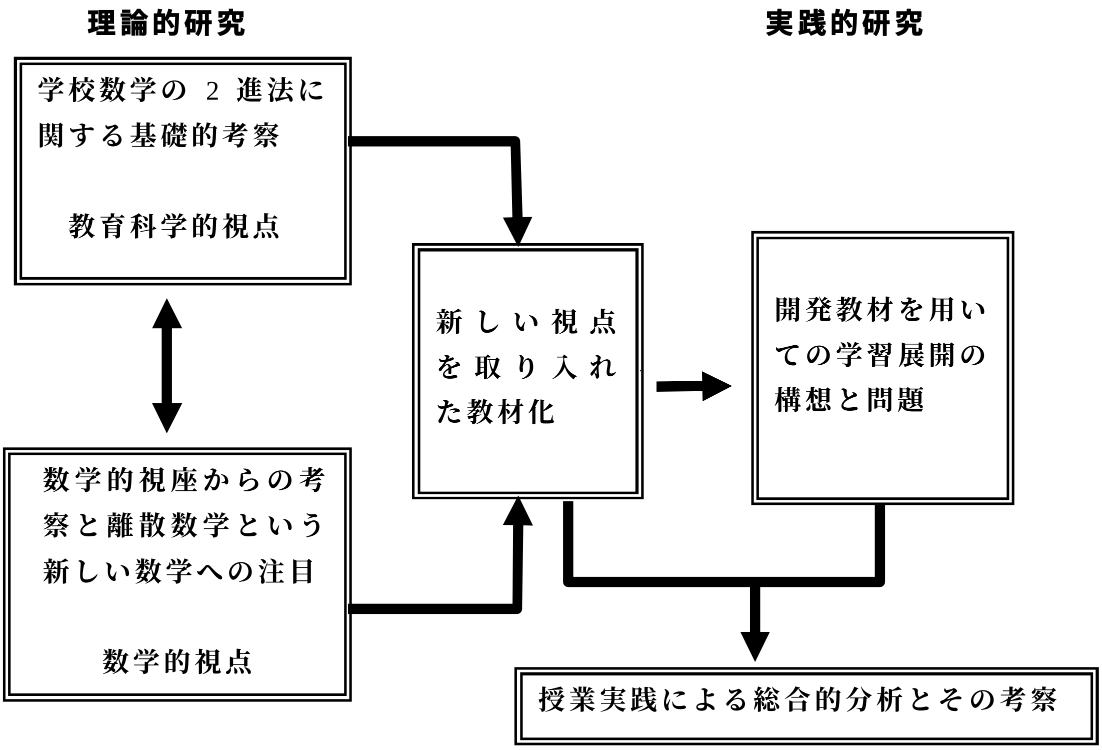



**図 1 本研究の全体的な流れ**

# 4． 学校数学の 2 進法に関する基礎的考察

## 4.1 学習指導要領における 2 進法の取り扱いの変遷

学習指導要領の観点から学校数学の 2 進法に関してその変遷を概観すると、2 進法は昭和 44 年改訂（昭和 47 年 4 月施行）の学習指導要領にて、中学校数学に初めて導入される。導入された背景としては数学教育現代化の影響があると考えられ、小学校における記数法の考えをさらに発展させ、十進法に限らず二進法、五進法などの取り扱いを通して、位取り記数法の基本的な原理を一般的に理解させ、数にはいろいろな表現があることについての理解を深めることが主な導入ねらいとされている。

しかし、次の昭和 52 年改訂（昭和 56 年 4 月施行）では、現代化による行き過ぎを是正する動きから、領域の整理統合と内容の精選集約が行われ、その方針に従い学習指導要領から二進法・五進法の内容は共に削除される。

ところが、次の平成元年改訂（平成 5 年 4 月施行）において再び 2 進法の文言が学習指導要領に明示され、再導入されることになる。再導入背景には、情報化の進展があり、コンピュータと関連付けが意識され、数の表現を学習する意義やその理解も深まるねらいから、2 進法などの記数法、$a\times10^n$ の形の表現が新たに取り上げられる。

そして、現行の平成 10 年改訂の学習指導要領（平成 14 年 4 月施行）において再度、2 進法は精選の方針から削除される経緯を辿る。しかし、平成 11 年の高等学校学習指導要領改訂において新たに新設された教科「情報」において、情報 C に 2 進数表現という文言が明記されており、コンピュータ内部の数表現との関連性を引き継ぐ形で、中学数学から高校教科「情報」へと移行されたと考えられる経緯を辿る。本研究ではこうした状況を表 1 のように整理した。

表 1　2 進法に関する主な導入・削除理由

| | 導入段階・領域 | 主な導入理由および削除理由 |
|---|---|---|
| S.44 年 | 中学校数学（1 年）<br>「数と式」 | 1. 小学校における記数法の考えの発展<br>2. 十進法との比較による位取り記数法の原理理解 |
| S.52 年 | 削除される | 1. 改訂による精選の方針<br>2. 第 1 学年の時間数の減少<br>3. その後の学習にあまり発展しない |
| H 元年 | 中学校数学（2 年）<br>「数量関係」 | 1. 情報化に伴い、コンピュータに触れる機会の増加<br>2. コンピュータとの関連により数の表現を学習する意義や理解の深化 |
| H. 10 年 | 削除される | 改訂による精選の方針 |

## 4.2　教科書の記述内容分析

（ S.51 と H.4 年発行の教科書「 東京書籍 」を例に ）

### 4.2.1　記述内容分析の目的

先の学習指導要領での変遷に見られる特徴を踏まえ、こうした特徴がどのように当時の教科書に反映されている記述内容分析の観点からその一端を明らかにすることを試みる。これらは学校数学における 2 進法の方向性を検討する上での重要な基礎資料となると思われ、昭和 44 年と平成元年の学習指導要領に見られる特徴と教科書の記述内容に見られる内実を明らかにすることを目的に分析を試みる。

### 4.2.2　記述内容分析の方法

教科書の観点から昭和 51 発行及び平成 4 年発行の教科書を用いて、導入・再導入期の特徴を、記述内容の比較により分析する。分析方法としては、2 進法ならびにその数表現に関する小単元の内容に相当するページを抽出し比較検討を行う。また、本研究では分析それ自体が本研究の目的ではないことから、東京書籍の教科書を選択し、教科書の 2 進法に関する小単元について、導入場面，展開場面，まとめ場面という 3 つの観点を設定し、記述内容を分析する。なお、他の 4 社を視野に入れた比較分析は今後の課題とするが、単元構成は表 2，3 となっている。

表 2　昭和 51 年発行の教科書とその単元構成

| 書名 | 出版社 | 単元名 | 小単元名 |
|---|---|---|---|
| 中学数学 1 | 大阪書籍 | 整数の性質 | 1． 整数と集合<br>2． 整数の性質<br>3． 位取り記数法 |
| 新しい数学 1 | 東京書籍 | 数と集合 | 1． 集合<br>2．整数の性質（記数法） |
| 新数学 1 | 大日本図書 | 数 | 1． 整数とその性質<br>2． 数の計算<br>3． 記数法 |
| 標準　中学数学 1 | 教育出版 | 数と集合 | 1． 自然数の集合（記数法）<br>2． 整数の集合<br>3． 有理数の集合 |
| 改訂　数学 1 | 啓林館 | 数と集合 | 1． 集合<br>2． 整数の性質（位取り記数法） |
| 中学校　数学 1 | 学校図書 | 整数 | 1． 整数の性質<br>2． 記数法 |

表 3　平成 4 年発行の教科書とその単元構成

| 書名 | 出版社 | 単元名 | 小単元名 |
|---|---|---|---|
| | 大阪書籍 | | |
| 新しい数学２ | 東京書籍 | 資料の整理 | 1．資料の整理<br>2．数の表わし方（2 進法） |
| 中学校数学２ | 大日本図書 | 式と計算 | 1．式と計算<br>2．式の利用（整数の表し方） |
| 新版　中学数学② | 教育出版 | 式の計算 | 1．式の計算<br>2．式の利用(数の表し方) |
| 数学２年 | 啓林館 | 資料の整理 | 1．資料の整理<br>2．数のいろいろな表わし方（二進法） |
| 中学校数学２ | 学校図書 | 式の計算 | 1．式の計算<br>2．式の利用<br>3．数の表わし方(二進法) |

### 4.2.3　記述内容の特徴に関する考察

本研究の趣旨から分析対象とした教科書は一社ではあったが、教科書の記述内容分析を行った結果、次のような特徴が考えられる。

導入場面においては当時の学習指導要領に照らし合わせると、上記の教科書における導入当時（昭和 53 年発行）の記述内容については、10 進位取り記数法との原理理解が主なねらいであることから、整数の性質という小単元内で記数法という項目が設けられ、その中で十進位取り記数法の原理が中心に内容が構成されている。そして、この内容に沿うかたちで、2 進法・5 進法も同じような形式で記述される特徴が見られる。また、再導入時（平成 4 年発行）は、数の表し方という小単元内で、近似値及び有効数字の後に 2 進法という項目が設定され、記数法という観点ではなく、数の表現という観点から天秤(2,4, 6・・)の分銅を用いた実際の場面)が想定され、「数える」活動をとおして数を表現する記述内容の特徴があり、10 進法との関係性についての記述内容が展開されている。

展開場面という観点から教科書の記述内容を概観すると、導入時の記述内容においては、2 進法の演算に関する内容が中心に構成される傾向が見受けられ、演算に関しては、加法・減法・乗法がほとんどであり、除法についての記述内容が見受けられない特徴がある。再導入時からは、こうした導入時に見受けられた演算に関する記述内容は見受けられなくなり、10 進法と 2 進法の相互変換に関する内容がそのほとんどであり、数学の内容面に関する発展が見受けられない。相互変換に関する記述内容の変化では、導入時に比べ再導入時の記述内容の方が 2 進法と 10 進法の相互変換が式と関連づけて記述され、より丁寧な記述内容となっている。

まとめ場面の特徴については、学校数学への 2 進法の導入時には、電球を用いた点滅を数字の「1」と「0」に対応させる記述内容となっているが、再導入時にはコンピュータとの関係あるいは、領域内による関連性（流れ図を意識）を意識した記述内容（10 進法から

2 進法の変換に関するフローチャート等）が見受けられる。しかし、まとめの場面の記述内容を見ても、数学内での展開の内容の変化が見受けられない。

## 4.3 学校数学の 2 進法に関する先行研究の整理とその傾向

これまでの学校数学における 2 進法に関しての先行研究について、日本数学教育学会で発表された研究を中心に、数学教育、数学教室といった各雑誌を加え、先の学習指導要領の変遷を考慮に入れ時代別に整理する。こうした学習指導要領の時代的観点から整理することで学校数学における 2 進法に関する方向性の指針が得られると考えこうした手法を用いた。

表 4 各年代における 2 進法に関する実践研究

| 年代 | | 日本数学教育学会 | 数学教育 | 数学教室 |
|---|---|---|---|---|
| 導入期 | S.47(1969)<br>～<br>S.56(1981) | ・臼井幸雄「発見学習の実践（その4)」<br>・中原一「数学一般を見越した 2 進法の指導」(東京都桐朋女子高) | ・松野武「2 進法とその四則」<br>・海谷虔朗「コンピュータと 2 進法」 | |
| 削除期 | S.57(1982)<br>～<br>H.3 (1991) | | | ・小沢健一「授業研究 2<br>進法の世界」<br>・小林俊道「電卓のしくみにふれる」 |
| 再導入期 | H.4(1992)<br>～<br>H.14(2002) | ・飯野美井子「数の表し方(n 進法)の指導」(群馬県下仁中)<br>・障害児に対するタイルを使っての計算指導(5 -2 進法による)（高橋宏）<br>・大崎健吉「命題論理から 2 進法演算回路」(神奈川大師高等学校) | ・清水義則「数の表現」<br>・高橋健二「二進法と数学(1)～(3), 選択数学」<br>・青木光一「数の表現 (2 進法) による発展的な学習、課題学習」<br>・畑中一良「2 進法」, 課題学習 | ・佐藤勝彦「2 進法とパターン」<br>・有賀正信「誕生日当てあてパネル」<br>・大野敏実「三角形で 2 進法を」 |
| 削除以降 | H.15(2003) | | ・及川知洋「コンピュータの仕組みにふれてみよう」 | |

整理した先行研究を概観する、実践的研究がそのほとんどであり、2 進法に関する理論的研究を踏まえた研究はほとんど見受けられない。また、実践研究例も数を数えるほどであるが、十進位取り記数法を視野にいれた実践研究および、その拡張版である n 進法の指導といった研究、さらに、コンピュータとの関連性に注目した論理回路との関連、数当て

ゲームといったものであり、一つ一つの実践例は魅力的で興味深いものがあるが、トピック的要素が強く感じられる部分があり、学校数学での再導入や教科「情報」を意識しての新しい取り組みを視野にいれた研究は行われていない。

### 4.4　これまでの学校数学の 2 進法に関する考察

先の基礎資料を踏まえ、これまでの学校数学の 2 進法に関する教育科学的考察を行うと、以下のような学校数学の 2 進法に関する特徴が考えられる。

1．学習指導要領における導入・再導入の変遷を概観すると、2 進法の題材は社会的影響が強く反映され、学校数学に導入・削除される傾向がある。
2．学校数学での 2 進法は導入ねらいによって、取り扱う領域が、数・式領域、再導入時が数量関係というように、領域も学年も変わり、これまでの学校数学において明確な位置づけが見出されていない。
3．教科書の記述内容分析から、記述内容に見られる特徴が 10 進法と 2 進法の比較による位取り記数法の原理理解の促進、「数える」活動をとおしての「分銅を使った 2 進法の表記法の導入、2 進法と 10 進法の変換といった内容が主な学習内容であり、2 進法を使っての数学内での展開がほとんど見られない。
4．先行研究を時代的観点から概観すると、主に実践研究がほとんどであり、理論的研究を踏まえた研究例はほとんど見受けられない。また、実践研究例を概観してもトピック的要素が強く感じられ、削除期以降は学校数学への再導入、他教科・他領域を意識した新しい取り組みや研究は行われていない。

## 5．　数学的視座からの考察と離散数学という新しい数学への注目

### 5.1　2 進法の起源と歴史的変遷

純粋の 2 進表現が歴史に最初に現われたのは 1605 年頃であり、*Tomas Harriot*(1560-1621)の公表されなかった原稿の中にあると云われる。彼は、現在“より小さい”や“より大きい”関係に使われている表記法と同じような表記法を考え出した。しかし、彼はどういうわけか、考え出したことの多くを公表しないことを選ぶが、2 進法算術に関して彼が書いたものからの抜粋が *John W .Shirley,Amer.J.Physics*(1951)に再録されている。2 進法の議論で最初に出版されたものは、スペインの司教 *Juan Caramuel Lobkowitz* の比較的知られていない著書「*Mathesis biceps1*，1670」にある。

しかし、結局、*G.W.Leibniz* が著した 2 進法の加算、減法、乗算、除算を説明している論文「*Memoires de l'Academie Royale des Sciences*(Paris:1703)」によって 2 進法は脚光をあび、ふつうこの論文が 2 進法の誕生とされている。

彼は 2 進法を実用目的には推奨しなかったが、整数論の研究における重要性を強調している。それは、数列の型は、10 進法よりも 2 進法の場合に明らかになる場合が多いからである。また、彼は、なんでも数字の「0」と「1」を使って表わすことができるとう事実の

神秘的な重要性にも理解していた。*G.W.Leibniz* の未出版の原稿によると、彼は 1679 年には 2 進法表現に興味を持っており、*“bimal”System* と呼んでいる。

2 進法による数体系を確立させた *Leibniz* の最初の論文である「数についての新しい学問試案」の中で、彼自身がこの記数法を数学内で利用した記述を引用し以下に示す。

| edcb | 自然数 |
|---|---|
| 00000 | 0 |
| 00001 | 1 |
| 00010 | 2 |
| 00011 | 3 |
| 00100 | 4 |
| 00101 | 5 |
| 00110 | 6 |
| 00111 | 7 |
| 01000 | 8 |
| 01001 | 9 |
| 01010 | 10 |
| 01011 | 11 |
| 01100 | 12 |
| 01101 | 13 |
| 01110 | 14 |
| 01111 | 15 |
| 10000 | 16 |
| 10001 | 17 |
| 10010 | 18 |
| 10011 | 19 |
| 10100 | 20 |
| 10101 | 21 |
| 10110 | 22 |
| 10111 | 23 |

| 3 倍数 | |
|---|---|
| 000000 | 0 |
| 000011 | 3 |
| 000110 | 6 |
| 001001 | 9 |
| 001100 | 12 |
| 001111 | 15. |
| 010010 | 18 |
| 010101 | 21 |
| 011000 | 24 |
| 011011 | 27 |
| 011110 | 30 |
| 100001 | 33 |
| 100100 | 36 |
| 100111 | 39 |
| 101010 | 42 |
| 101101 | 45 |
| 110000 | 48 |
| 110011 | 51 |
| 110110 | 54 |
| 111001 | 57 |
| 111100 | 60 |
| 111111 | 63 |

| 5 倍数 | |
|---|---|
| 0000000 | 0 |
| 0000101 | 5 |
| 0001010 | 10 |
| 0001111 | 15 |
| 0010100 | 20 |
| 0011001 | 25 |
| 0011110 | 30 |
| 0100011 | 35 |
| 0101000 | 40 |
| 0101101 | 45 |
| 0110010 | 50 |
| 0110111 | 55 |
| 0111100 | 60 |
| 1000001 | 65 |
| 1000110 | 70 |
| 1001011 | 75 |

| 素数 | |
|---|---|
| 0000000 | 0 |
| 0000001 | 1 |
| 0000010 | 2 |
| 0000011 | 3 |
| 0000111 | 5 |
| 0001011 | 7 |
| 0001101 | 11 |
| 0010001 | 13 |
| 0010011 | 17 |
| 0011101 | 19 |
| 0011111 | 23 |
| 0100101 | 29 |
| 0101001 | 31 |
| 0101111 | 37 |
| 0110101 | 41 |
| 0111101 | 43 |

| 5 の倍数の周期 | |
|---|---|
| 01 | a |
| 0011 | b |
| 01011010 | c |
| 0011011011001001 | d |

素数
素数には周期が
欠けている

| 自然数の周期 | |
|---|---|
| 01 | a |
| 0011 | b |
| 00001111 | c |
| 0000000011111111 | d |

| 3 の倍数の周期 | |
|---|---|
| 01 | a |
| 0110 | b |
| 00101101 | c |
| 0001110011100011 | d |

**図** 2　*Leibniz* **による** 2 **進法の利用**

## 5.2　2 進法の歴史的変遷から考察される価値

2 進法の表記特性に導かれた人々には、フランシスコ・ベーコン、ジャッカード、ジョージ・ブール、それにボードが挙げられる。この４人は、それぞれ全く異なった問題を解決するために 2 進法に導かれる。ベーコンは、たんに見ただけでは全く無意味な通信に見せかけて、秘密の通信文を伝えるために万人向きの万能暗号を考えだしたが、それが 2 値的であった。ジャッカードは、機織り機を動かすのに 2 進符号化したパンチ・カードのシステムを考え出した。英国の数学者であったブールは、命題計算の代数化を行なったが、これは現在の今ピュターの論理回路の基礎となっている。

そして､ボードは､フランスの技術者であるが､巡回的置換符号（グレイ符号= Gray code）を考えだして電信技術に大きな寄与となる。

表 5　2 進法およびその数表現に関する変遷

| 人物 | フランシス・ベーコン | ジョセフ・マリーン・ジャッカード | ジョウージ・ブール | ボード |
|---|---|---|---|---|
| 2 進法の表記（活用） | 2 値符号化を考案 | 織機の機を動かすのに 2 進符号化したパンチカードシステムを考案 | 命題計算の代数化を行ない、コンピュータの論理回路の設計の基礎を作る。 | 巡回的置換符号（Gray Code） |
| 内容 | 英語の 24 個のアルファベット 8 の各文字を、*a* と *b* のいろいろな組み合わせによる 5 文字の 2 進符号に作り上げる。 | 現代技術でも用いられている多くのデジタル制御装置機械の先祖であり、ジャッカードの織機は大量生産された最初の 2 値的制御機械である。 | 代数をコンピュータの初歩的な方法ではなく、思考過程や自然言語の深い、そして長い研究から発展させられる。 | 電信技術において、文字と数字と記号を送信するのに、2 進法 5 けたの数を用いた。 |

表 6　情報科学の観点から見た今日的応用領域

| | | |
|---|---|---|
| 応用分野 | 論理回路<br>および<br>回路設計 | 符号化理論とその技術的応用<br>（デジタル信号理論、パリティ検査符号理論） |

2 進法に関する符号化は、1949 年に始まる最初の 2 進コンピュータの設計・製作以来多様化して繁栄した。こうした変遷を概観すると、「符号化の考え」によって見出された性質の改善が今日の活用領域に活かされていると考えられる。

こうした歴史的事実から考察されることは、*Leibniz* の 2 進法研究は、1701 年の二つの論文以上の数学的成果をもたらすことはなく、それ以後この表記は埃をかぶることになる。しかし、フランシスコ・ベーコン、ジャッカード、ジョージ・ブール、それにボードであり、この４人はそれぞれ全く異なった問題を解決するために 2 進法に導かれ、それは 2 進法の表記特性にある「符号化という考え」に導かれているのである。

こうし観点から考えると、2 進法に関して見直した結果、「符号化の考え」が考察から得たれる文化的な価値であると思われる。こうした考えの重要性に、*Claude*・*Shannon*[3]は気づいており、情報理論という新しい領域を開かせるに至った要素となったのではないかと思える。

[3] 純粋に計算だけのために使われていた計算機に、ブール代数の考えを導入することで計算以外の目的でもコンピュータが有効であることを示した人物。誰よりも前に、情報単純な"1"と"0"の言語で符号化により生じる力を理解したシャノンが、若かった頃に書いた 2 つの論文は電子計算機科学と情報理論の分野で記念碑的なものである。また、「シャノンは全ての通信の基本的な要素は二進法であることを見抜いた人物だった。」M.I.T でシャノン博士と一緒に研究していたロバート・ガラシャーは「これは本当に彼の発見で、そこから全ての通信革命が誕生した」と述べている。

本研究では、こうした 2 進数表現に対しての「符号化」について、「2 値の見方」と呼ぶことにする。そして、これを数学的な考察から得られた新しい価値として設定し、この見方を取り入れた教材化を行い、教科「情報」を意識した学校数学における 2 進法の方向性について教材化をもとに検討していく。

### 5.3 離散数学という新しい数学への注目

前述の基礎資料を基に、教科「情報」を意識した学校数学における 2 進法の方向性を検討するに当たり、情報科学と結びつきが深い離散数学に注目した。離散数学は、コンピュータ科学ともに急速に発展している数学であり、こうした視点の導入は、教科「情報」を意識した学校数学における一つの方向性になると考えられ、こうした取り組みを考えることで、2 進法の学校数学への導入意義が他教科との関連性から見出されると思われる。

離散数学の学校数学への導入に関する議論は近年活発に議論されている。こうした議論の中心人物である長尾・長崎は、主に高等学校への導入を中心にした議論であり、これまでの研究の成果が報告書として『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究(2006.2), 最終報告書(2007.3)』[(21)(22)]にまとめられている。この報告書にある記述および、根上氏の論考[(23)]を引用し離散数学の特徴とその効用について述べる。

#### 5.3.1 離散数学の特徴とその効用

『離散数学とは、有限で離散的な構造を対象に展開される数学であり、グラフ理論、組み合わせ論、計算幾何学、アルゴリズム論、最適化問題などをいい、コンピュータの発展と相まって発展してきた数学である。そして、離散数学という新しい数学は、数学としての発展性としても豊かであり、社会有用性も高く、しかも、そこには多くの高校生が改めて新鮮な気持ちで取り組めそうな問題がある。離散数学は、わが国の高等学校の数学科の新しい内容の一つの頂点となる可能性が大いにあると考えられる。』と述べている。

また、離散数学の特徴については、次のようなことが挙げられている。

（１） 多くの予備知識を仮定しなくても解決できる問題が多い。
（２） いろいろな方法で解決できる問題が多い。
（３） 問題を解決を通して、数学の有用性をはじめ、数学的な見方や考え方のよさを感じとることができる。
（４） 比較的新しい数学の分野であるので、学習したことが研究の最先端と重なることもある。

さらに、離散数学の効用として根上氏は、『計算しない数学』[(23)]の中で「見てそれとわかること」、「自由に考える部分」をキーワードに「言葉による論証」への展開について提言を行っている。

根上氏の主張によると、平面幾何学を例に挙げて次のように論考している。『平面幾何の問題は、いくつかの条件が与えられていて、それを根拠に目的の結論を導き出すスタイルになっている（前提から結論を導く、演繹的推論)。（略）しかし、このスタイルは、2000年以上も前にユークリッドが「原論」を著したときからずっと続いており、私たちは、このスタイルを当然のように思えるが、実際直面する場面（現実の問題）で、こうした使ってよい条件（前提条件）を与えてくれず、何がその根拠として利用できるかを自分で見つけることが必要となる。

離散数学の問題は、前提や根拠として使える条件を見出すプロセスを提供し、「見てそれとわかる」ことを根拠や前提にした論理的思考を開始することができる。そして、「自由に考える部分」（お作法に従い証明を書き下す部分）を自分の言葉やその意味を補足するために図を添える活動をとおしての「言葉による論証」が展開できる』と述べている。

### 5.3.2 高等学校への離散数学の導入に関する基本的考え方

長尾・長崎は、離散数学の基本的考え方について次のように述べている。この考え方は、小学校・中学校段階へも広く適用される考えでもあると思われ、引用して以下に述べる。『今日の社会が高度情報化社会へと変容しており、こうした変容した社会に生きる生徒も当然変化しており、その中での必要とされる教育内容についても再考する必要がある。わが国の数学科の内容は主に理科系の生徒が学習する微分法、積分法を唯一とする内容で構成されており、そこまで達しない生徒は、何のために数学を学習しているのか分かりにくくなってきた。離散数学という新しい数学は、社会有用性も高く、しかも、そこには多くの生徒が改めて新鮮な気持ちで取り組めそうな問題があり、数学科の新しい一つの頂点となる可能性がある。（略）

さらに、一つの指針として、現行の小中高校の算数・数学科の学習指導要領には「離散数学」という内容領域はないが、離散数学を、「有限で離散的な構造を扱う数学で、重い計算をするよりは言葉で考え、論証する数学である」と捉えると、現行の小中高校の算数・数学科の内容にも離散的な内容は存在すると述べている。（長尾・長崎）』

## ６． 離散数学という新しい視点の導入と教材化の意義

先の長尾・長崎を中心とした報告書(21)(22)及び、中央教育審議会に提出された要望書(25)を概観すると、長尾・長崎氏は主に高等学校への新しい数学の導入として離散数学に注目し、「グラフ」を中心に単元を構成すること視野にいれ検討している。しかし、長尾・長崎は報告書の中で導入に関しては多くの検討事項を含んでおり、未だ検討段階の部分が多いとも述べている。離散数学という新しい数学は、入門的内容は既存の数学的知識を必要とせず、新鮮な感覚で数学を取り組むことができる利点があるが、中に入ると急に難しくなり実にユニークな考えや解法の切り口が必要となる特徴がある。こうした観点から考えると、離散数学という新しい数学の導入に関する議論は、未だ不十分な状況にあると考えられる。

本研究では離散数学に対する基本的な考えは、長尾・長崎氏の立場に立つが、離散数学

の題材で単元を構成するのではなく、教科「情報」に対して中学校数学あるいは高等学校数学から教科「情報」へ向けた支援として離散数学を位置づけ、この新しい数学の視点を導入することを試みる。本研究では中学校数学の側からの支援を視野にいれ、教材化により学校数学における 2 進法に関して、位取り記数法およびコンピュータの深い関連性から新しい広がりを求めた（図 3)。

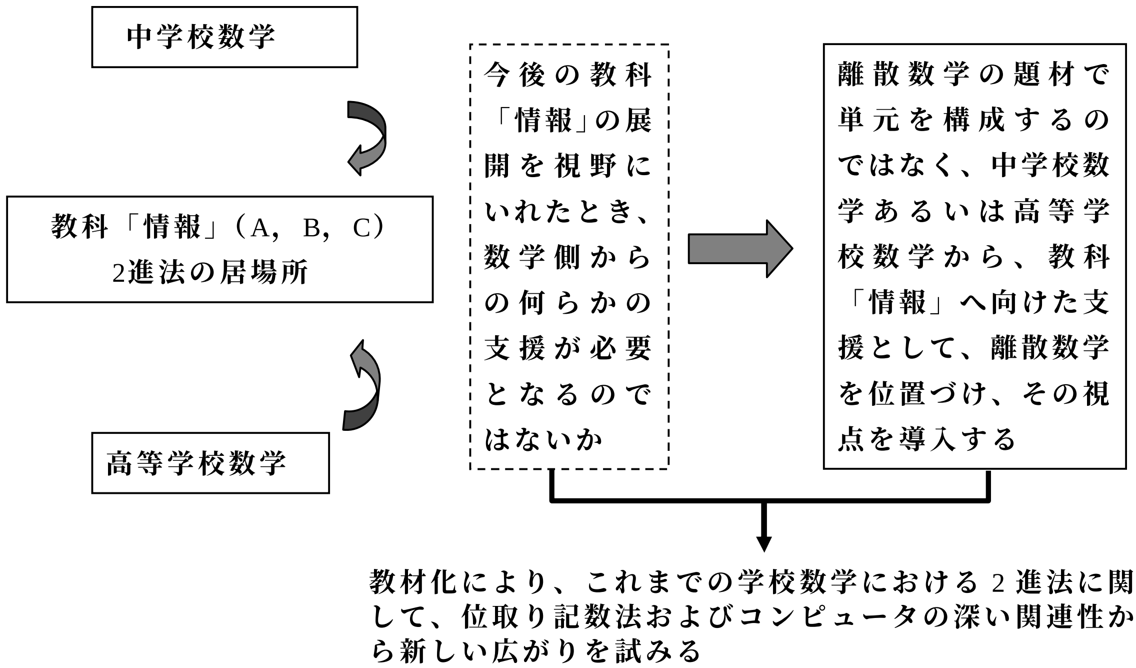



**図 3　考察から得られる学校数学での一つの方向性**

## 7．　新しい視点を取り入れた開発教材

上述の趣旨の基「*A New Kind of Sceience*」(*S.wolfram*[4])(30)を援用し、そこに使われている離散数学の見方および考え方に注目した。複雑系[5]の科学の研究では、コンピュータがその威力を最大限に発揮し、実際の問題解決に活用されている。そして、コンピュータは有限な事象のみを対象としているため、必然的に、離散的な物の見方が実際に使われている特徴がある。こうした観点からの教材化により学校数学における 2 進法は、従来の学習内容に新しい可能性を加えることができると思われる。

[4]　*S.Wolfram*(米国のコンピューター科学者)は、14 歳で素粒子論の論文を書き、二十歳で博士号を取得後、マッカーサー財団“ジーニアス”研究員の第一期性となる。彼は、フォン・ノイマンが考案したセルオートマトン（*cellular automata*[CA]）の研究を進め、一次元 CA によりライフ・ゲームの規則を極めて簡単なものであることを示し、その有効性を示す。彼は、わずか二百五十六通りの規則群を調べることで、セル・オートマトンの大域的なふるまいを統べている一種類の法則性の存在に気づき、その直観をもとに規則群を四つのクラスに分類したことでその業績が認められた人物である。

[5]　複雑系（Complex system）とは言語上では「複雑なシステム」を示す。近代科学は現象を分解し、微分方程式に代表されるそれぞれに単純化したモデルを立ててきた。しかし、科学の進歩により、微分方程式などでは解明できない事象も少なくない。そこで、複雑な全体を分解せずに研究する必要がでてきた。その全体をあらわす概念が複雑系と言われる。

新潟大学教育人間科学部数学教室,『数学教育研究』, 第 43 巻, 第 1 号, 10-34, 2008.

### 7.1.1　自然数の 2 進数表現に見られる図形的性質

2 進数は 0 と 1 の 2 つの数字のみで、任意の整数を表現できる数の表記であり、自然数の数列に対して 2 進数展開を行ない、各桁を揃え表記する(図 4)。そして、図 5 では表記された 0 と 1 の数字パターンに対して、1 と 0 の数字を正反対の性質を持つ別の対象に置き換えている。こうした 1 と 0 の数字を正反対の性質を持つ別の対象に置き換える見方を 2 値の見方と呼ぶことにする。

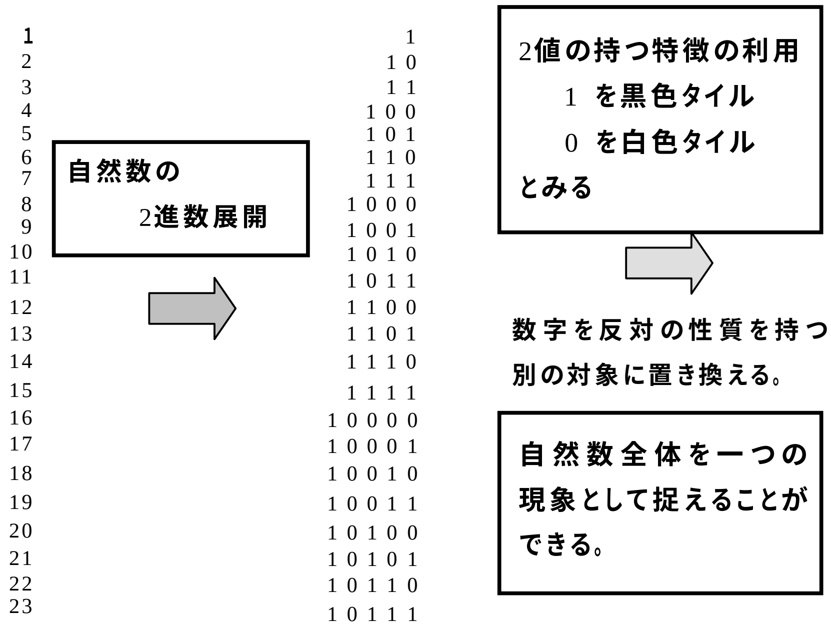



図 4　自然数の 2 進数表現

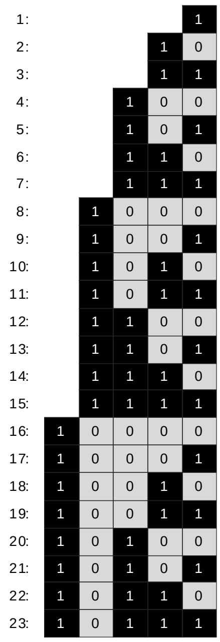



図 5 モザイク模様

この 2 値の見方（本稿では 0 を白、1 を黒の正方形タイルと見る）により、1 と 0 の数字のパターンが視覚化され、よりその自然数の構造に注目することが可能となる。さらに、模様が白黒の単純なパターンかつ、有限個のタイルで構成されているため、こうした模様の部分に注目するか、模様全体に注目するかで見えてくるものが異なる特徴がある。

### 7.1.2　モザイク模様に内包するフラクタル的性質と不変構造

先のモザイク模様には、フラクタルの性質を備えた図形とも考えられる。このフラクタル的性質を表わすものが図 6 に抜き出した長方形の白黒タイルが 2 等分され一定の規則をもち置き換わる規則である（不変構造）。これは模様を全体的に捉え、数字「0」を補い符号化することで、その規則を発見することが始めて可能となる。この不変構造の繰り返しにより図 7 が生成される。これは単に 2 進数表現を表記するのではなく、自然数の数列の一部分全体に対して各桁を揃え、位取り記数法の原理を保持したまま表記するからこそ、こうしたフラクタル的性質を備えると考えられる。

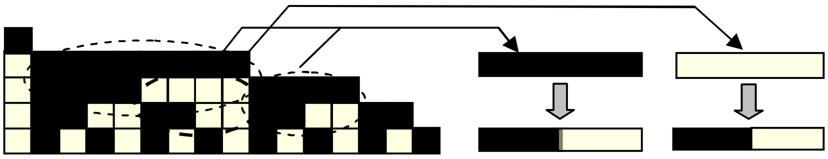


図 6　不変構造の抽出

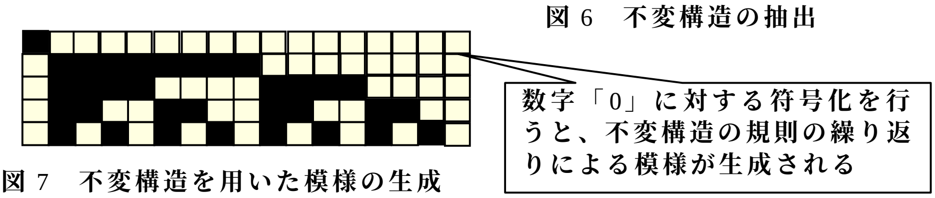



図 7　不変構造を用いた模様の生成

自然数の数列を模様と見なすことで、離散数学の一分野と関連性があるフラクタル的性質を持つ図形へと変わり、数学的表現のよさを感得する一つの契機となると考えられる。

さらに、部分的に見られる線対称のパターンおよび不変構造の発見をとおして、方程式を書いたり、一般的な公式を適用するやり方ではアプローチすることのできないユニークな問題ともなり、既存の数学的知識に左右されずに数学的に考えを伝え合う活動を促進する学習が展開が期待される。

### 7.1.3　自然数の 2 進数表現に見られる周期性と不変構造との関係

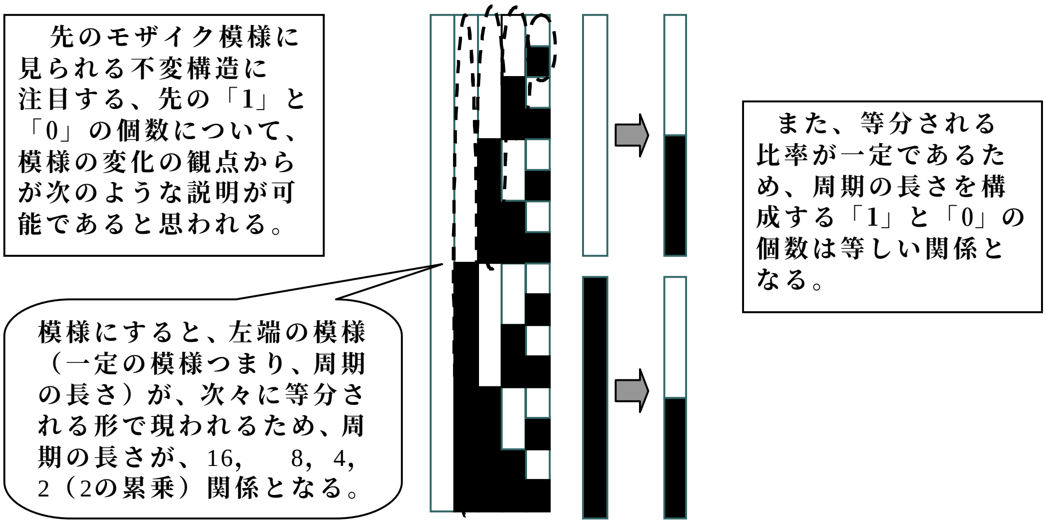



**図 8　周期性に対する不変構造を用いた説明**

## 7.2　教材化の観点

上記の趣旨のもとで、次の 3 点を教材化の観点として設定する。

(1) 1 と 0 の離散値に対して特有の見方を行うことにより「数学的活動」を体験することができ、視覚化された有限個で作られる模様に対して、「見てそれとわかる」ことや、簡単な規則に対して「言葉による論証」を促す場面を提供する。

(2) 複雑なものを単純化することや、その逆に複雑なものの中に有る単純さを解明するような科学的見方を育む。
(3) 自然数に見られる周期性やその長さについて、模様を様々な角度から観察することで、言葉やその意味を補足するために図を利用し、その理由を説明することができる。

### 7.3 学習内容としての特徴

#### 7.3.1 「2 値の見方」とその意義

先の自然数を模様として見るには、自然数の 2 進数表現で表記される 2 つの数字に対して対立的意味を与え、正反対の性質をもつ対象物と考えている。

本研究では先の数学的視点からの考察より、2 進数表現で表された数字「1」・「0」に対して対立的意味を付加することが可能であり、この数字と対立的性質をもつ図や具体物への変換を「2 値の見方」と呼ぶことにする。これは先の考察から得た価値であり、2 進法及びその数表現に対して考えられる「符号化」の質の改善である。

| | | |
|---|---|---|
| 対立的性質を持つ<br>(「1」・「0」) | ⟷ | 数字 |

図 9　2 値の見方

基礎的考察において、こうした見方は教科書のまとめ場面や、コンピュータとの関係性との関連づけのための記述内容がほとんどであることを明らかにしたが、この見方の意義については述べられていない。さらに、活用例を概観しても、数字「1」と「0」に対して豆電球の点滅を対応させる例や、白・黒タイルに置き換える例で留まる範囲であり、自然数やその他の数学的な事象を対象にした展開例は、教科書および実践研究を概観してもほとんど見受けられない。こうした見方については、教科「情報」の中のデジタルとアナログに関する学習内容において活用されていることを考慮すると、教科「情報」への支援に関する学習内容として捉えることが可能と思われる。

#### 7.3.2 モザイク模様に潜むパターンの活用

図 3-3 に示したモザイク模様は、着眼点を変えることにより、反復と再帰の模様パターンとして捉えることが可能となる。下記に示す事例は、事前に大学 2 年生を対象に実験授業を行い、生徒から出された答えを参考に筆者が再構成した事例である。以下の右側が学生の記述であり、左側が筆者によって加筆したものである。

本研究のように、新しい内容について教材化を試みるとき、学生の反応を視野にいれた内容を導入することで、授業を展開する上での重要な要素（生徒の反応による評価など）となると考えこうした試みを行った。

### ア　色に着目する

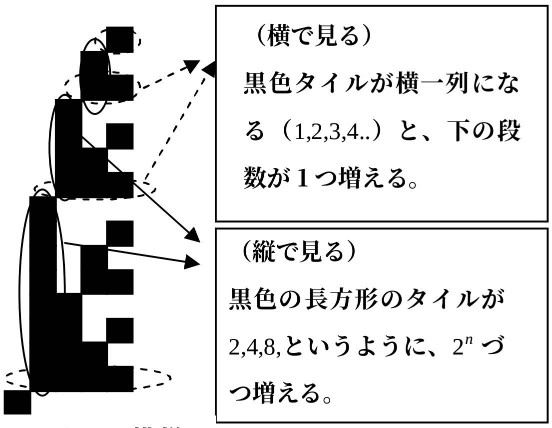
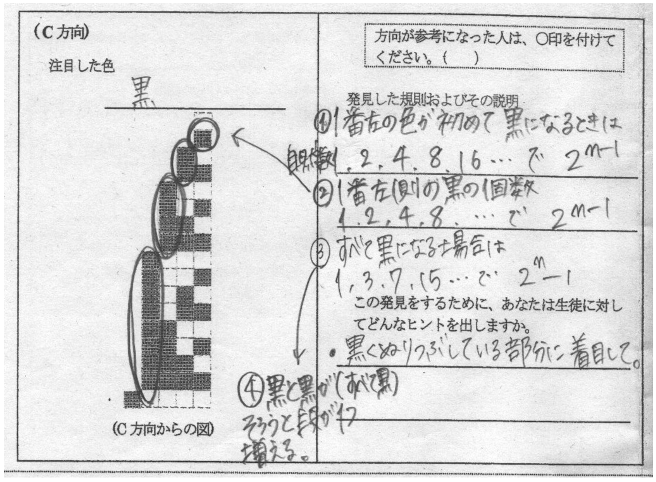



図 5　モザイク模様



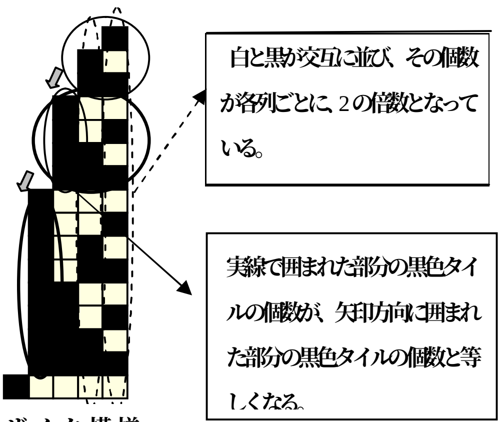
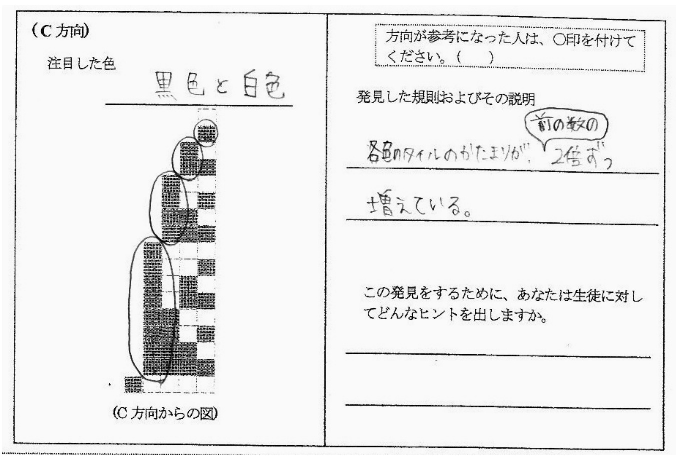




図 5　モザイク模様




### イ．　見る方向を変えて模様を捉える

#### a．再帰パターンの発見

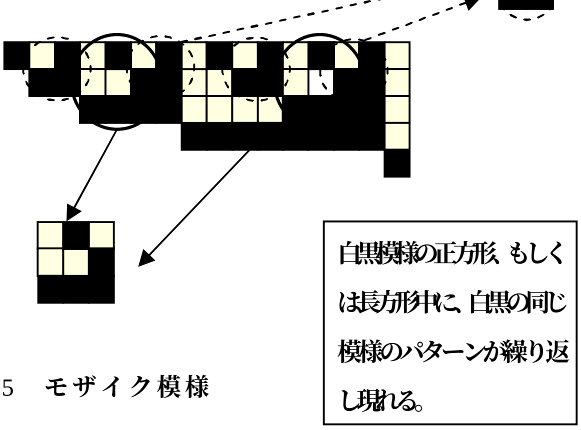
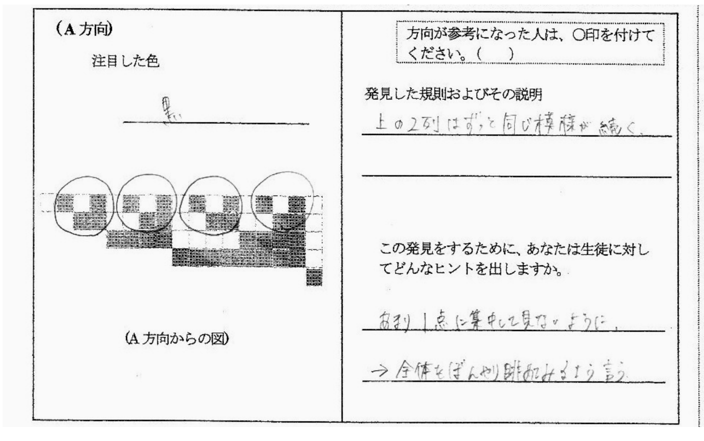



図 5　モザイク模様



**b. 図形として捉える**

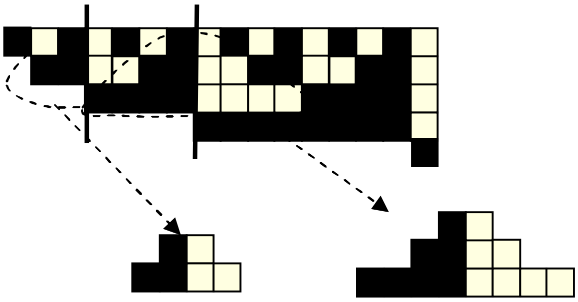
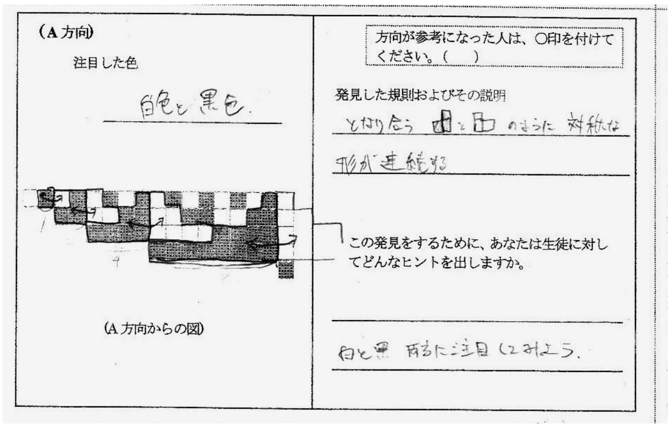


図 5　モザイク模様

点線で囲まれた部分の図形が白黒の境界線を対称軸として線対称な図形の関係にある。




**ウ　白・黒の両方に着目し、見る方向も変える(全体)**

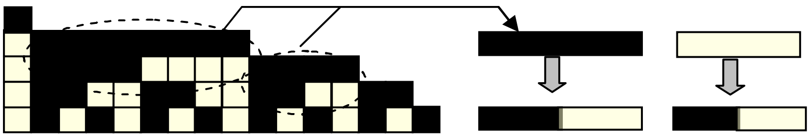


図 6　不変構造の抽出

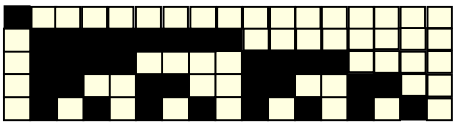
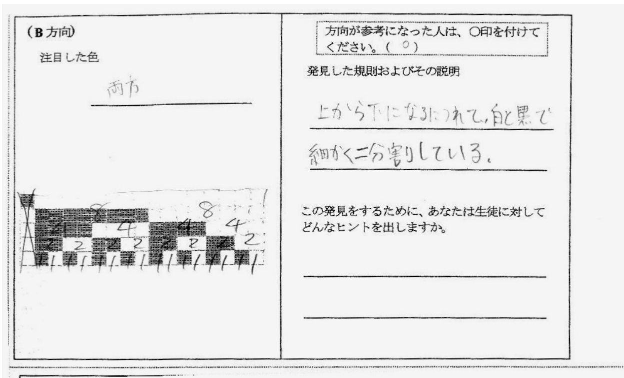


図 7　不変構造を用いた模様の生成

数字の「0」に対する符号化を行い、不変構造の規則の繰り返りによる模様の生成。




## 7.3.3　　抽出模様を活かした課題

先の模様は、一部の自然数の数列と 2 進数表現を対応させているが、自然数を平面に拡張させ、先のモザイク模様を関連させると、次のような問題に展開できる。図 3 -11 のように正方形の碁盤上に $2^0$～$2^8$ を配置し、モザイク模様で数を表現する。図 3 -3 では位を揃えて表記したが、これは先の学習との関連性をもたせる課題となると思う。配置の仕方を工夫することで、課題が膨らみ、数字を使った数の表現とは違い試みにより、数を創造する学習への展開が期待される。

新潟大学教育人間科学部数学教室,『数学教育研究』, 第 43 巻, 第 1 号, 10-34, 2008.

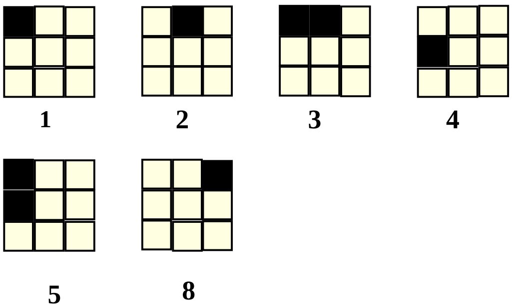



図 10　模様による自然数の表現

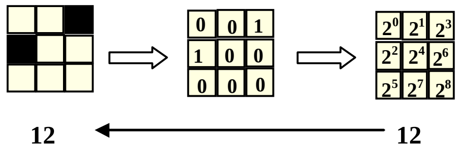



図 11　2 進法と模様の仕組

(問1)　数 6,7,108 を上の模様のように表しなさい。
(問2)　2 進法で現わした数とどんな関連があるか述べよ。
(問3)　規則の仕組みについて述べなさい。

## 8．学習展開の構想と問題

先の開発教材を基に中学生を対象とした学習展開の構想と問題を示す。

### 8．1　学習展開の構想

#### 8.1.1　目標

① 2 進法による数の表わし方を理解し、自然数の 2 進表現に見られる各桁の周期性の発見をとおして、この表記の有効性について理解する。
② 自然数の一部の 1 と 0 で表されたパターンに対して、数字の「1」と「0」を正反対の持つ別の対象物に結びつける活動をとおして、自然数をモザイク模様として捉える活動から数学的表現のよさを感得し、逆に正反対の性質を持つ対象物に対して、積極的に、「1」と「0」の数字を活用し、視覚的に捉えようとする。
③ 有限個で作られる模様を様々な角度から観察し、反復や再帰模様のパターンを発見する活動をとおして、（部分的模様を枠で囲む、模様の一部分を既習図形として捉える等）自分の表現で得られた内容から、複雑なものの中に有る単純さを解明する科学的な見方をフタクタル的性質をとおして育む。

#### 8.1.2　学習展開の概要

2 進法の記数法については、平成元年の再導入時から各教科書において多用されている 2g,4g,8g,16g・・の分銅を各位のとして考え、この限られた分銅を用いて計る重さを意識した「数える」活動をとおして 2 進法の記数法についての導入を行う。表には自然数の 2 進数表現（0 を考慮すると 2 進符号化）が表記され、各桁に現われる「1」と「0」の数字パターンを捉えることが可能となる。「数える」活動の際に発見したきまりや、表を埋める際の活動によって発見した、数字のパターンや、完成後の表から「それと見てわかる」こ

とを自分の表現方法で論じさせ、その各桁に現われる周期性に気づくような支援を行う。

単位を取り去ったあとに現われる「1」と「0」による数の表し方（2 進法およびその表現)について述べ、10 進法ならびに 10 進数との関係を分銅とその個数を用いて説明する。さらに、各分銅に現われる数字のパターンから、周期についての説明を行う。

**表 7**

| はかる重さ | | 分銅の個数 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 g | 1 g | | 16 g | 8 g | 4 g | 2 g | 1 g |
| | 0 | | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | | | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 2 | | | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | 3 | | | | | 1 | 1 |
| | 4 | | | | | | |
| | 5 | | | | | | |
| | 6 | | | | | | |
| | 7 | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| 2 | 2 | | | | | | |
| 2 | 3 | | | | | | |

[問題 1]

分銅を一つずつ使って、はかれる重さを調べたいと思います。表の空欄に使用する分銅の個数を書き､空欄を埋めてください。

また、表を埋める際に気づいたことや、埋めた表から、各分銅に現われる 1 と 0 のパターンについて「みてわかる」ことを例のように自分の言葉で書いてください。(誰でも見てわかるあたりまえのことでよいです）

**（例） 1[g]の縦列が 1 と 0 が交互に並んでいる。**

**表 8**

| はかる重さ | | 分銅の個数 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 g | 1 g | | 16 g | 8 g | 4 g | 2 g | 1 g |
| | | | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | | | | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | | | | | 1 | 0 | 1 |
| | | | | | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | 1 | 1 |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

[問題 2]

問題 1 と同じように、分銅を一つずつ使って、はかれる重さを調べますが、最初に 1 と 0 のパターンが書いてあります、このパターンから推測して、得られる重さと残りの表を埋めなさい。

また、各重りの列に現われる周期の長さと、その周期の長さを作っている数字の「1」と「0」の個数の関係を調べなさい。

問題 1 について

(1g) 周期の長さ

「1」の個数 ,「0」の個数

(2g) 周期の長さ

「1」の個数 ,「0」の個数

先ほどの逆の過程から、各分銅に現われる数字のパターンから、周期を利用して自然数の中の 3 の倍数が導き出される活動を行う。各分銅に見られる周期の長さと、その周期を作っている「1」と「0」の個数を各分銅に対して調べさせ、気づいたことを書かせる。比較すると、数字の「1」と「0」の個数が等しくなる。実は、5 の倍数、7 の倍数等、自然数の倍数は「1」と「0」の個数が等しくなる。

「なぜ、個数が等しくなるのか」自然数の“なぞ”に迫るため違った視点から自然数を考える展開へと移る。先の表に対して数字「1」を黒タイル、「0」を白タイルと見なしタイ

ルに「色を塗る」活動を行わせ、浮かび上がる模様を完成させてもらう。先ほどは、分銅を意識していたが、今度は模様として捉えることが可能となったため、縦 1 列ではなく 2、3 列に注目させ、特徴的な模様を発見させる（再帰模様パターンの発見）。
その際、模様が有限個で構成されているため、相手に伝わるように自分の表現方法を工夫し、自分の考えを図や包含線を使って注目した部分を抜き出すなど、「見てそれとわかる」ことを記述するよう指示する。

**表 9**

| はかる重さ | | 分銅の個数 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10g | 1g | | 16g | 8g | 4g | 2g | 1g |
| | 0 | | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | | | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 2 | | | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | 3 | | | | | 1 | 1 |
| | 4 | | | | 1 | | |
| | 5 | | | | 1 | | 1 |
| | 6 | | | | 1 | 1 | |
| | 7 | | | | 1 | 1 | 1 |
| | | | | | | | |
| 1 | 5 | | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | | | | | | |
| 2 | 3 | | 1 | | 1 | 1 | 1 |

[問題 3]
点線で囲まれた部分は、分銅(8g)に見られる周期を示しています。
「なぜ」問題 2 で調べた周期の長さの関係があるのか、その理由を表ア（模様）を観察し説明しなさい。
説明を行う際、相手に伝わるように、自分の言葉で説明し、その意味を補足するために図を添えるなどの工夫をしましょう。

**表 10**

| はかる重さ | | 分銅の個数 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10g | 1g | | 16g | 8g | 4g | 2g | 1g |
| | 0 | | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 3 | | | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | 6 | | | 0 | 1 | 1 | 0 |
| | 9 | | | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 2 | | | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 5 | | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| 6 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

[問題 4]
問題 2 で周期を構成する「1」と「0」の個数について調べました。「なぜ」そのような関係にあるのか、その理由を表アの模様を観察し説明しなさい。模様を注意深く観察するとその「なぜ」が解明できるはずです。なお、表イには、表アで見つけた理由は存在しません。
説明を行う際、相手に伝わるように、自分の言葉で説明し、その意味を補足するために図を添えるなどの工夫をしましょう。

## 8.2　指導案に基づく学習展開例

| 問題意識 | 学習活動・内容 | 教師の働きかけと意図 |
|---|---|---|
| 量る重さと分銅の個数との関係は | （図1）<br>図１　予想される生徒の記述<br><br>《学習内容》<br>● 量る重さを意識しながら「数える」活動を通して表を埋める。<br>● 途中から量る重さを意識しなくとも 1・0 にパターンがあることに気づかせ、そのパターンの規則を自分の言葉で表現する。<br>【1・0 のパターンに注目】<br>・　1[g]　０１０１０１・・・続く。<br>2[g]　００１１のパターンの繰り返し。<br>・ 途中から、「1」「0」のパターンに注目すると、量る重さを意識しなくても埋められる。<br>・　各分銅の重さと「1」と「0」のパターンの個数が対応している。（重さと個数の関係） | 8g,4g,2g,1g の分銅が 1 個ずつあります。このときこれらの分銅を使って量れる重さを調べます。<br><br>**発問 1**<br>表 1 の空欄に使用する分銅の個数を書き入れ表を完成させてください。また、表を埋める際に気づいたことや、完成した表から各分銅の列に現われる「1」と「0」のパターンについて、「見てそれとわかる」ことを例のように自分の言葉で書いてください。<br><br>**説明 1**<br>「g」の単位を取捨することで、私たちが普段使用している10進法となります。みなさんが「数える」ことを通して完成させた表は、10進法から2進法への変換を表しています。この表の各分銅の重り（各位に対応）と、分銅の個数は次のような関係にあります。<br>1　0　1　1　1<br>$1\times 8+0\times 4+1\times 2+1\times 1$<br>$\Rightarrow 1\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2+1\times 1 \quad = \quad 11$<br>**図 2 各分銅の個数と重さ（各位）の関係** |
| 各分銅の列に見られる「1」と「0」のパターンと重さの関係は | （図3）<br>図 3　予想される生徒の記述 | **発問 2**<br>表 2 を見てください、問題 1 と同じように分銅を 1 つずつ使って量れる重さを調べたいのですが、最初に「1」と「0」のパターンが書いてあります。このパターンから推測して、得られる重さと残りの表を埋めてください。<br><br>**補助発問 1**<br>1[g],2[g]の列のパターンは見通しがつき、埋められるが残りは、先ほど習った変換を上手く利用しましょう。 |

（図1）

| はかる重さ | | 分銅の個数 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 g | 1 g | 16 g | 8 g | 4 g | 2 g | 1 g |
| | 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 2 | | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | 3 | | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | 4 | | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | 5 | | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | 6 | | 0 | 1 | 1 | |
| | 7 | | 0 | 1 | 1 | 1 |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| 2 | 3 | | | | | |

図１　予想される生徒の記述

（図3）

| はかる重さ | | 分銅の個数 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 g | 1 g | 16 g | 8 g | 4 g | 2 g | 1 g |
| | 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 3 | | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | | | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | | | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | | | | | 0 | 0 |
| | | | | | 0 | 1 |
| | | | | | 1 | 0 |
| | | | | | 1 | 1 |
| | | | | | 0 | 0 |
| | | | | | | |

図 3　予想される生徒の記述

| 問題意識 | 学習活動・内容 | 教師の働きかけと意図 |
|---|---|---|

**学習活動・内容**

《学習内容》

- ● 量る重さと個数の関係を意識しながら表を埋める。
- ● 量る重さが 3 の倍数であり、この数列においても 1・0 のパターンの規則があることを理解する。

- ・ 量る重さが 3 の倍となっている。
- ・ 1「g」,2「g」のパターンは推測できるが、4「g」,8「g」がよくわからない。
- ・ この表にも 1・0 のパターンがある。

○　先ほどの表から周期の長さとそれを構成する「1」と「0」の個数の関係を調べる活動に移る。

- ・ 周期の長さは、2,4,8,・・・となっている。表 1 も 2 も同じだ。
- ・ 周期を構成する「1」と「0」の個数は、どの周期の長さを見ても等しくなっている。

**教師の働きかけと意図**

説明 2

先ほどの「1」と「0」のパターンには、10101、00110011と言う繰り返しで表現してくれた人がいましたが、10、0011 のように始め部分だけ表現してよく、これを「周期」と呼び、この長さを「周期の長さ」と呼びます。

指示 1

表 1、2 について周期の長さとそれを構成する「1」と「0」の個数の関係を調べてください。

指示2

各班を作り、自分の答えと友達の答えを見比べ、自分が気づかなかった点を色鉛筆で書き加えましょう

指示 3

みなさんが見つけた「周期の長さ」と「その個数」の関係の“なぞ”を追求したいと思います。数字の「1」を黒色に、「0」を白色（そのまま）で塗ってください。そして、どんな模様が現われますか、模様を完成させてください。

**問題意識**

各周期の長さとその個数との関係は、「なぜ」そのような関係にあるのか

**学習活動・内容**

○ 各班での学習活動に移り、表 1 と表 2 に対して、模様を完成させる。

| はかる重さ | | 分銅の個数 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 g | 1 g | | 16 g | 8 g | 4 g | 2 g | 1 g |
| | 0 | | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | | | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 2 | | | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | 3 | | | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | 4 | | | 0 | 1 | | |
| | 5 | | | 0 | 1 | | 1 |
| | 6 | | | 0 | 1 | 1 | |
| | 7 | | | 0 | 1 | 1 | 1 |
| | | | | | | | |
| 1 | 5 | | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | | | | | | |
| 2 | 3 | | 1 | | 1 | 1 | 1 |

図 4　予想される生徒の記述

**教師の働きかけと意図**

発問 3

8[g]の周期の長さの模様を○で囲んでください。その模様をヒントに、周期の長さの変化について説明してくだい。説明するときは、相手に伝わるように、自分の言葉で表現し、その意味を補足するために、図を添えるなど工夫をしましょう。図を積極的に活用しましょう。

（予め、説明を行いやすいように、模様の図 1 を学習プリントに記載しておく）

指示 4

自分の説明が完成したら、班の友達に自分の発見を説明してください。その中で、よりわかりやすい説明を一つ選んでください。

| 問題意識 | 学習活動・内容 | 教師の働きかけと意図 |
| --- | --- | --- |

**《学習内容》**
同じ模様（周期の長さ）が、16,8,4・・という関係が発見でき、周期の長さの関係について模様の観点から一つの答えが導かれる。

[問題 4]は授業の展開状況によってはカットする。

| はかる重さ | | 分銅の個数 | | | | | |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 10 g | 1 g | | 16 g | 8 g | 4 g | 2 g | 1 g |
| | 0 | | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 3 | | | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | 6 | | | 0 | 1 | 1 | 0 |
| | 9 | | | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 2 | | | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 5 | | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| 6 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**図 5 予想される生徒の記述**

**《学習内容》**
模様（周期の長さ）を構成する白、黒の長方形が、右側に移るほどに一定の比率（二等分）の関係で、変化していることから、各周期を構成する「1」と「0」の個数は等しくなる。こうした論述を模様とその意味を補足する図を使って説明してくれればよい。

問題 4 をカットした場合、模様を様々な角度から観察しやすいように、学習プリントに例を付け加えてあるので、その例を基に模様を使った説明の仕方を挙げておく。

**発問 4**
問題 2 で周期を構成する「1」と「0」の個数について調べました。「なぜ」そのような関係にあるのか、その理由を表アの模様を観察し説明しなさい。模様を注意深く観察するとその「なぞ」が解明できるはずです。なお、表イには、表アで見つけた理由は存在しません。説明を行う際、相手に伝わるように自分の言葉で説明し、その意味を補足するために図を添えるなどの工夫をしましょう。

**補助発問 2**
図 3 において 8[g]に現われる周期と 1[g]に現われる模様を囲み、その間の変化に注目しましょう。

**指示 5**
自分の説明が完成したら、班の友達に自分の発見を説明してください。その中で、よりわかりやすい説明を一つ選んでください。

**＜観察の視点＞**
◎「見てそれとわかる」ことを自分の言葉で表現する姿勢を大切に、丸で囲ませるなどして、そこに意識を向わせ、この前提を根拠にそのなぞを上手く説明していく「言葉による論証」が可能か。
◎ 模様にすることの良さを、周期の長さや、その個数の関係という初等整数論の入門的問題を通して感得し、模様の観点からその変化を捉え、等分割に連続的に変化する模様を発見することが可能か。(離散数学のフラクタの原理に通じる考えの感得)

## ９．研究の成果

本研究の成果としては次が挙げられる

1． 学校数学において居場所を失った 2 進法に関して、教育科学的視点からの考察により、2 進法を扱う必要性を高校の教科「情報」との関連性に求め、教科「情報」を意識した学校数学での方向性を視野に入れ、離散数学という新しい数学の視点が一つの方向性として考えられること導いた。
2． 自然科学的視点からの考察により、2 進法に関する価値を見直し、2 進法に関して、整数論（初等整数論）を視野にいれた学校数学での方向性が期待され、2 進数の数表現と「1」と「0」に対する符号化を考慮した（2 進符号化）の考えが、文化的価値として考えられることを導いた。
3． 教科「情報」を意識した学校数学での方向性を視野に入れ、離散数学という新しい数学の視点を取り入れた 2 進法の教材化を行い、教材の性質、学習内容としての特徴について述べ, 開発教材を用いた授業の構想と問題を提示した。

## １０．今後の課題

本研究は理論的研究と実践的研究で構成されると述べておきながら、実践的研究の面で学習展開の構想と問題の提示で終える結果となっている。これは研究の内容面において不十分であり、修了後も研究に励み実践的研究を継続し本研究の完成に努めたいと考えている。

本研究では学校数学における 2 進法を扱う必要性を、高等学校の教科「情報」の在り方に対して問題の所在を見出し、この解決に向け教育科学的視点からの考察、数学的視点からの考察を行い、その解決の方法性を離散数学という新しい数学に求めた。そして、この数学の視点を取り入れた教材化を試みた。

本研究は教材化に関する研究であり学校数学における 2 進法の再導入を視野に入れ、研究内容を膨らませ、より具体的な研究へ展開させることが今後の課題といえる。これから新学習指導要領となるが、今後の教科「情報」の展開を考慮すると、学校数学との「共生」を意識した数学教育の展開を検討する研究は必要であると思われる。そのためには教科書分析や先行研究等に関する研究の充実、および諸外国によるカリキュラムや教科書分析も視野に入れ研究内容の充実をはかり、その研究結果によって単元化を構想するべきか、あるいは既存の内容に埋め込む方法を選択した方が妥当なのか検討する研究が必要と考えている。

### 引用・参考文献

(1) 明治図書(1969),『中学校学習指導要領の展開』, 原弘道・大野清四郎, pp341-346
(2) 文部省(S.45),『中学校指導書（- 数学編 - ）』,大阪書籍, p.35
(3) 文部省（H.1）,『中学校指導書 数学編 』, 大阪書籍, pp42-44, pp101-102, pp149-151
(4) 文部科学省(1999),『中学校学習指導要領（解説 – 数学編 -）』,pp.4-7
(5) 文部科学省(1999),『高等学校学習指導要領 解説-情報編-)』,pp.1-7,pp.15-18,pp31-75, pp196-201

(6) 岡本敏雄, 山極隆,『情報 A』, H14 年検定済み H18 年発行, 実教出版株式会社
(7) 岡本敏雄, 山極隆,『情報 B』, H14 年検定済み H18 年発行, 実教出版株式会社,
(8) 岡本敏雄, 山極隆,『情報 C』, H14 年検定済み H18 年発行, 実教出版株式会社,
(9) 日本数学教育学会(2004),『日本の算数・数学教育 2004 高度情報通信社会における学校数学の新たな展開』, 教育出版, pp95-102
(10) D.Knuth,『The Art of Computer Programing=4』(準数値算法/算術演算), pp.8-18
(11) G.F.Libniz(原亨吉, 横山雅彦, 三浦伸夫等訳), 『ライプニッツ著作集 3 (数学・自然学)』pp.49-58,pp.177-206,
(12) G.H.ヒース,「2 進法とコンピュータの歴史」, 日経サイエンス社, 数学ゲームⅠ, pp.32-40
(13) 中原忠男,「狭義の教科教育学の発展と展望」,教科教育学研究, 第 17 号,pp17 -27
(14) 池田秀雄,「教科内容学からみた教科教育学研究の発展と展望」,教科教育学研究, 第 17 号,pp29 -39
(15) 明治図書(1977),『中学校学習指導要領の展開 数学科編 』, 大野清四朗・福森信夫, pp.45-49
(16) 玉置和之(1977),『中学校 新学習指導要領の解説と展開(数学編)』,教育出版, pp.121-123
(17) 坂村 健(2002),『痛快コンピュータ学』, 集英社文庫, pp.50-61
(18) 大村 平(2001),『情報数学のはなし』, 日科技連, pp.1-11
(19) 桁元新一郎,「算数・数学科以外の教科で使われている数学的表現(中学校理科教科書における「ともなって変わる量」の記述の分析)」, 金沢大学教育学部教育黄濁研究・実践研究 第 33 号
(20) 竹田尚彦・中西麻衣,「「情報A」における学習指導要領と教科書との対応の比較」, 社団法人 情報処理学会
(21) 長尾篤志・長崎栄三,『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究(中間報告書 2006.2)』,国立教育政策研究所,pp.3-9,pp.33-56,pp.62-77,pp.109-119
(22) 長尾篤志・長崎栄三,『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究(最終報告書 2007.3)』,国立教育政策研究所, pp.3-9,pp.31-40
(23) 根上生也,『計算しない数学』, 青春出版社,pp153-167
(24) 西村圭一,「中等教育における離散グラフを用いた数学的モデル化に関する研究」,
(25) 日本数学教育学会(教育課程委員会)『新しい時代の算数・数学教育を目指して』,社団法人 日本数学教育学会 pp.30-53
(26) 安野光雄・野崎昭宏,『石垣コンピューター』, 日本評論社, pp.2-27
(27) 吉永良正,『「複雑系」とは何か』, 講談社, pp.34-35,pp237-238
(28) 山下正雄,『思考の中の数学的構造』, 筑摩書房, pp.36
(29) 小野巧生(2007),『図学雑学「構造主義」』, ナツメ社, pp.199
(30) S.Wolfram(2004),『A New Kind of Science 』, Wolfram Media Incorporated,pp.82,83, pp.117-119, pp.893
(31) 竹内喜紀,「離散数学の考えに基づく 2 進法の教材化」, 第 40 回数学教育論文発表会論文集, pp.816-822

## 謝辞

これまでにご指導・ご助言をいただいた新潟大学教育人間科学部数学教室の諸先生方をはじめ、多くの方々に深く感謝の意を表し、厚くお礼を申し上げます。

また、本研究にあたり、終始、厳しくも温かいご指導をいただきました指導教官の山田和美教授に深く感謝しております。さらに、一年次には附属新潟中学校へ、二年次には坂之上小学校そして、白新中学校へと通年、週 1 回通い続け、教育実践を中心に数学教育について学ぶことができました。こうした貴重な経験の機会を与えてくださった山田和美教授をはじめ、新潟県の中学校・小学校の先生方に深く感謝しております。

私自身も他大学より本大学院教育学研究科に入学してから、大学院での教科教育に関する研究に努め、学業の傍ら非常勤講師を 2 年間行うことができました。こうした経験を行うことに対してご理解を示してくれたことに再度感謝申し上げます。数多くの先生方との出会い、生徒との触れ合いから私自身多くのことを学び人間的に成長できました。本当にありがとうございました