新潟大学教育学部数学教室,『数学教育研究』, 第 43 巻, 第 2 号, 11-16, 2008.

見通しの段階におけるストラテジーの指導

— 特殊化のストラテジーを把握させる教材の開発 —

長岡市立六日市小学校　　伊藤　祐輝

1　はじめに

問題の構造が複雑だったり，初めてのパターンの問題に出会ったりすると，子どもは解決の意欲がもてない。それは，子どもが見通しの段階において解決の糸口をつかめず，解けそうだという実感がもてないからである。

子どもが意欲をもち，主体的に問題解決に取り組むために，解決の見通しをもたせる指導が必要である。本研究では特に，問題を単純化したり，問題からパターンを見出したりして考える手立て（以下「ストラテジー」）の指導に注目する。

ストラテジーの指導について古藤怜氏は，Ｇ．ポリアの特殊化のストラテジー（以下「特殊化」）の有効性を指摘し，「数学の方法はまずもっとも簡単な場合について考え，つぎに順次それを複雑な場合に拡張していくことである。特殊化して考えることは問題構造を発見する一つの鍵である。」と述べている。（古藤，1971）

Ｇ．ポリアは特殊化について，特殊化した問題の解決ともとの問題の解決方法との関わりを観点にして，表１のように「極端な特殊（An extreme special case)」「代表的な特殊（A representative special case)」「有力な特殊（A leading special case)」の３つを示した。３つの特殊化のうち，「極端な特殊」は，単純化の考えのように，日常の算数授業でも多く取り上げられている。一方，「代表的な特殊」「有力な特殊」に関してはほとんど実践されていない。特殊化の考えのよさは，「代表的な特殊」「有力な特殊」によって明確にな

表１　Ｇ．ポリアによる特殊化の分類

	内　容	具体例
極端な特殊（An extreme special case)	単純化することによってその問題を易しくしたり，条件の一部を無視したりして考える。	「時速３。７５ｋｍの速さで２時間 45 分歩くと道のりはどれだけか。」という問題に対して，「時速３ｋｍで２時間歩く」ならば，どう解けるか？と考える。
代表的な特殊（A representative special case)	１つの特別な場合の説明が，一般の問題の解答を与えている場合。	ｂ／ａ÷ｄ／ｃ＝ｂ×ｃ／ａ×ｄの証明を，２／３÷４／５の場合で考える。
有力な特殊（A leading special case)	１つの特殊な問題の解が，他の一般的問題の解答の主要な役割をはたしている場合。	直角三角形の面積の求め方を用いて，一般的な三角形の面積を求める。

る。小学校でも「代表的な特殊」や「有力な特殊」の考えを活用する問題を開発する必要がある。

２　研究のねらい

問題解決の場面で，特殊化（「代表的な特殊」「有力な特殊」）を活用する教材を開発し，それを通して特殊化のよさを感得させる指導について検討する。

３　研究の内容（対象：小学４年生）

（１）特殊化の考えを活用する問題の設定

特殊化の考えを活用する問題として，きまり（表２）をもとに１位数でわり切れる数を

表２　各数でわり切れる数のきまり

	き　ま　り	例
２・４・８でわり切れる数	一の位の数字が偶数	３２，５６，１３８，３６０
３でわり切れる数	各位の数字の和が３の倍数	２１（２＋１＝３） ５１（５＋１＝６） １９２（１＋９＋２＝１２）
５でわり切れる数	一の位の数字が５・０	１５，６０，９５，１４０，３７５
６でわり切れる数	一の位の数字が偶数，かつ，各位の数字の和が３の倍数	３０（３＋０＝３） ８４（８＋４＝12） ２４６（２＋４＋６＝12）
７でわり切れる数	｜（一の位の数字）×２－（百の位・十の位）｜＝０または７の倍数	２１（｜１×２－２｜＝０） ３５（｜５×２－３｜＝７） ４９（｜９×２－４｜＝１４）
	３ケタの数が次の場合 ○△△（○＋△＋△＝７の倍数） ○△○（○＋△＝７の倍数） △△○（２△＝○または○＋７の倍数）	１３３，２６６，４５５ １６１，２５２，６８６ １１２，２２４，５５３
９でわり切れる数	各位の数字の和が９	４５（４＋５＝９） ７２（７＋２＝９） １３５（１＋３＋５＝９）

探す問題を設定する。これは，倍数のきまりに基づく問題である。

２年生「九九表のきまり」の単元では，九九表の数を考察し，きまりを発見する学習を行っている。そこでは，一の位の数字に着目したり各位の数字の和に着目したりして，きまりを見つける活動をしている。しかし，７の段の数に関しては，２年生の段階できまりを理解するのは難しいと考える。

本研究では，７以外の数でわり切れる数のきまりから類推して，７でわり切れる数のきまりを発見する問題を設定する。

（２）上記の問題の単元化

（ｉ）ねらい

- （２，３位数）÷（１位数）のわり算において，わる数が１～９までのそれぞれの場合でわり切れる数を探す活動を通して,それぞれの場合にはきまりがあることを理解する。
- 特殊化した問題をもとに，わり切れる数を見つけるきまりを見つけることができる。
- きまりを用いてその数でわり切れる数を見つけることができる。

（ⅱ）単元の指導計画

第１時「わり切れる数のきまり」

初めにあまりが出ないことを「わり切れる」ということを確認し，１位数でわり切れる数を考える問題を出す。次に，教師から「２でわり切れる数を挙げてみよう。」と発問し，子どもにいくつか挙げさせる。ここで，それらの数にはきまりがあることを説明し，他の数もわり切れる数にきまりがあることを知らせる。次に５や９でわり切れる数のきまりを教え，当てはまる数を子どもに考えさせる。この時，電卓でわり切れることを確かめさせる。その後，３・４・６・８でわり切れる数のきまりを類推して考えていく。この順番は，子どもにとって考察しやすい順番と考える。

最後に，７の場合を残った問題として次時につなげていく。

第２時「７でわり切れる数のきまり」(本時)

第２時は，７でわり切れる数のきまりを問題として提示する。前時で，位の数字に着目し,それらの関係からきまりを見つける考えを７の場合にも用いる。ただし，７の場合は，きまりを用いる時，他の数の場合より操作が少し複雑になる。既習の考えを発展させた操作になることを理解させる必要がある。第２時は，次の①②のような，７でわり切れる数のきまりを理解し，活用する活動を構成する。

①一の位の数字を２倍したものと十の位の数字の差が０か７の倍数になる数を探す

はじめに，２１，４２を取り上げ，一の位と十の位の関係に着目させる。子どもは一の位の２倍が十の位と同じになることを発見するだろう。これは，６３や８４の時にも成り立つ。次に，１４，３５，５６を取り上げて考察する。これらの数の一の位を２倍しても十の位と等しくならない。そのとき，両者の差に着目させる。差を求めると，７になる。

次に，２８，４９を取り上げる。一の位を２倍して十の位との差を求めると１４になる。これらの活動を通して，一の位を２倍して十の位との差を見ると，７の倍数が現れてくることを発見させ，きまりを一般化する。この時,「倍数」という言葉は未習なので,「７の段」という言葉を用いる。はじめの２１，４２できまりを検討する活動は，G．ポリアのいう有力な特殊にあたる。

②３位数において，以下のきまりになっている数を探す

○△△（ただし，○＋△＋△＝７の倍数）

○△○（ただし，○＋△＝７の倍数）

△△○（ただし，２△＝○または○＋７の倍数）

これらのきまりは，子どもが発見するのは難しいので教師から紹介する。○や△には数字が入り，同じ記号には同じ数字が入ることを説明する。教師からいくつか例を紹介し，その後，子どもにそれぞれのきまりに該当する例を見つける活動をさせる。見つけた例は電卓で計算して７でわり切れることを確かめさせる。はじめに教師から提示する例は，G．ポリアのいう代表的な特殊にあたる。

①，②の活動を通して，有力な特殊や代表的な特殊を活用し，子どもが７でわり切れる数のきまりを理解できるようにする。

４　指導の実際

（１）　有力な特殊を活用する場面

① ７でわり切れる数のきまりの一つを見出させる

九九表の７の段の数２１，４２，６３に着目させ,「きまりはないか？」と発問した。これらの数の共通性から７でわり切れる数のきまりの一つを見出すことができる。すなわち，有力な特殊である。

子どもは，はじめ「一の位の数字が１，２，３…と増えている。」「２１ずつ増えている。」という反応を示し，３つの数を同時に見てきまりを見出そうとしていた。そこで教師は，「一つ一つの数を見て，数字にきまりはないか？」と補助発問した。この発問によって，子どもは「各位の数字に着目すると，十の位の数字は一の位の２倍になっている。」ことを発見した。教師がその発見をきまりとし，他の例（８４）を示すと，子どもは「できる。」「本当だ。」「他にも７でわり切れる数があるよ。」と反応し，電卓で確かめた。

② ①から類推してきまりを表現させる

教師は次に１４を示し,「この場合はどうか？」と発問した。１４は，①で発見したきまりが成り立たない。ここで，教師が「(一の位を２倍したものと十の位の）違いを見てみよう。」と補助発問した。この操作によって，①のきまりを発展させた新たなきまりが発見できそうだという見通しを子どもにもたせた。そして１４の場合，一の位の二倍したものと十の位の差は７になることを確かめた。

③ きまりを一般化させる

教師は次に４９を示した。一の位の２倍と十の位の差は１４になる。②と合わせてきまりはないか発問した。４９の例によって，②で教師が示した操作をすると，７の倍数を見出すことができる。子どもに４９の一の位を２倍して十の位との差を求めさせた。子どもは「分かった。」「１４になる。」「７の段じゃないの？」と反応し，自分で計算して確かめた。

また,「３０１の場合はどうか？」と教師が発問して，子どもに確かめさせた。一の位の２倍と百・十の位の差は２８になることを確かめた。子どもは,「７か１４か２８になる。」「７の段の数だ。」と反応した。子どもは，差を求めると７の段の数になるきまりを一般化させることができた。

また, 中には①で例示した数をそのきまりに基づいて確かめ直す子どももいた。「４２や６３は違いが０だ。」と反応し,「違いは０か７の段になる。」ときまりを統合することができた。

（２） 代表的な特殊を活用する場面

① パターンを示す

② パターンに当てはまる数を探させる

３けたの数について３つのパターンを順次示して, それぞれ７でわれることを電卓で確認した。子どもはパターンに当てはまる数を探し, 電卓で確認すると,「２６６もできる。」「４５５もわれる。」など, 次々に数を挙げた。子どもたちはその都度, ７でわれることを電卓で確認していた。

また, ○△○のパターンの検討の場面では,「６１６の親戚は？」と教師が発問すると, 子どもは「１６１だ。」「他の数も親戚いるよ。」と反応した。子どもは, ○＋△＝７になる組み合わせを見つけたら, ○と△の数字を入れ替えるだけでもう一つの数が見つかることを発見した。

ノートには「△△○の時は△×２＝○になっているとわり切れる。」「○△△は, ○＋△＋△＝７, １４, ２１…になる。」と, 記号の式を用いてきまりを表現する子どももいた。また,「(△△○の時は) １１２, ２２４, ４４８は（十の位を）×２をしていることが分かった。」と, 具体例を挙げ, 演繹的にきまりを表現する子どももいた。

５ 研究のまとめ

（１） 成果

有力な特殊による導入によって, 難しいきまりを理解することができた。

７でわり切れる数のきまりは, 子どもにとって複雑で理解が難しいものであった。しかし, ２１や４２など, 検討しやすい数を導入問題にしたことによって, 子どもは問題の見通しをもつことができたと考える。

はじめ２１, ４２, ６３の検討によって成立しそうになったきまりが, 次の数の検討によって修正され, 最後には「一の位の数字を２倍したものと十の位の数字との差が０か７の段の数」のきまりに一般化されていった。このように子どもは, 導入の２１や４２の場合も含めてきまりを統合的に理解することができた。この要因として, ２１, ４２, ６３の検討において, 子どもが各位の数字の関係に着目する考えを導くことができたことが考えられる。

代表的な特殊が, 子どもにとって分かりやすい例になった。

代表的な特殊を示す場面では, ○や△の記号を用いてパターンを子どもに示した。記号を用いることによって各位の数字の関係が子どもにとって分かりやすくなった。また, 子どもは記号に数字を当てはめる簡単な操作できまりを理解でき, 自ら他の例を探すことができた。授業後の感想にも,「○△△と○△○と△△○はわかりやすかった。」「△△○が一番分かりやすいやり方だった。」「パターンを知ればたくさん数が見つかる。」「まだ続けて（数を）見つけることができそうだ。」とあり, 記号で示した例が子どもにとって分かりやすく, かつ, 自ら答えを追求する足場になったことが分かる。

きまりの理解をクラスで共有する場をつくることができた。

本時では，有力な特殊の場合において，きまりの発見→確認→一般化という展開になっていた。きまりの発見の場では，一部の子どもによる追究になり，多くの子どもはきまりを発見した子どもの考えを聞いていた。しかし，教師が提示した数の考察や他の数できまりを確かめる場では，全員が電卓を用いて確かめをし，きまりを理解することができた。

また，代表的な特殊の場合において，教師が示した具体例の解釈→例の検証→きまりの確認という展開になっていた。○△△のような記号だけの問題提示できまりを解釈できなかった子どももいたが，具体例を挙げ，電卓で確かめるときまりを理解できるようになった。代表的な特殊の場合の方が分かりやすいと反応する子どももいた。

それぞれの活動において，きまりを電卓で確かめる場があったことによって，全員がきまりを共有できたと考える。

（２） 今後の課題

子どもが特殊化のよさを知り，自ら特殊化を用いることができるために

本時では，７でわりきれる数を探すために，教師が提示した数について子どもは検証していった。子どもから「～の場合はどうか？」と自ら特殊な場合を挙げて考える場面が少なかった。

教師の方から特殊な場合を提示するだけでなく，子どもが自ら特殊な場合を挙げ，そこで考察したことをもとの問題に生かせるようにしたい。そのためには，子どもが特殊化のよさを感得できる指導が必要である。今後さらに，特殊化のよさを感得できる教材を開発し，その指導を通して，よさを生かして特殊化を自ら使える子どもを育てていきたい。

※ 本稿は，第９０回全国算数・数学研究（福島）大会の発表資料を加筆・修正したものである。

〔参考引用文献〕

Ｇ．ポリア（1954),「いかにして問題をとくか」(柿内賢信訳)，丸善株式会社.

Ｇ．ポリア（1959),「帰納と類比」(柴垣和三雄訳)，丸善株式会社.

古藤怜・羽二生恵太郎・近藤恒夫（1971),「数学科における学習指導」pp．118-119，近代新書.

古藤怜（1985),「問題解決におけるストラテジーの指導」，明治図書.

古藤怜 (2002),「７の倍数の見つけ方」, 東洋館出版社『新しい算数研究Ｎｏ．３７９(2002 年８月号)』，pp．28-29.