

## 雪の硬化現象のモデル化と積雪変形有限要素解析への適用

Modeling of deformation hardening of snow and its application  
to snow deformation analysis by FEM阿部和久\*, 紅露一寛\*\*  
Kazuhisa Abe, Kazuhiro Koro

\*工博, 新潟大学助教授, 工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

\*\*博 (工), 新潟大学助教授, 大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

The enhancement of snow modeling is attempted by taking into account the hardening phenomenon. The hardening model is developed based on the experimental results given by Shinjima. In this paper the long-term behavior of snow is extracted from the experiments, and it is found that the hardening can be induced due to snow deformation. Besides, the snow specimens possess distinct hardening properties in extensional and compressional deformations. The application of the hardening model to finite element analysis is achieved. The settlement force acting on a beam embedded in deep snow is analyzed. The numerical results show that the introduction of the deformation-hardening model can provide good agreement with experimental results.

**Key Words :** snow, deformation hardening, FEM, VOF method

キーワード : 積雪, 変形硬化現象, 有限要素法, VOF 法

## 1. はじめに

積雪地域における構造設計では, 雪荷重を考慮する必要がある。積雪から構造物に作用する荷重には, その自重によるものの他に, 変形に起因して発現するものがある。特に後者は著大な作用力を生ずる場合があり, 構造設計上それを適切に評価することは重要である。

積雪の力学特性は, 一般に粘弾性体として表現することができる。したがって, 雪荷重の適切な評価には積雪の変形挙動の把握が不可欠となる。Lang<sup>1)</sup>やNakamura<sup>2)</sup>は, はりの埋設された積雪の自重圧密変形問題を対象に, 有限要素解析を試みた。その際に, 彼らは積雪変形の追跡にLagrange 記法を用いた。しかしこの場合, 大変形下において要素のゆがみを生ずるため, 精度低下や解析自体の破綻などが懸念される。また, 積雪どうしの接触・融合・分離などの積雪領域のトポロジー変化を, 特段の処理を介さずに解析することは不可能である。

一方, 著者らは上記のようなトポロジー変化を伴う積雪の複雑な変形過程を対象に, Euler 記法に基づいた解析手法を構成した<sup>3)</sup>。なおその際に, 積雪境界の捕捉法としてVOF (Volume of Fluid) 法<sup>4)</sup>を用いた。これにより移動境界の追跡はVOF関数の移流問題に帰着することとなり, 接触・融合・分離などの挙動を伴う積雪変形過程の解析が可能となった。

また, 文献3)では, Nakamura<sup>2)</sup>が行ったはりに作用する積雪沈降荷重の測定実験を対象に, その再現解析を試みた。解析結果を, Nakamuraの有限要素解析と実験結果, および著者の一人が以前行った個別要素法による解析結果<sup>5)</sup>と比較したところ, いずれの数値解法によるものも, 沈降荷重が時間の経過と共に漸減して行く, ほぼ同様の挙動を示した。これに対し, 実

験結果の沈降荷重においてのみ, その低下がほとんど認められず, 実験と解析とに有意な差を生ずる結果となった。各数値解法とも同様の結果を与えたことから, 実験との差異の原因は, 離散化手法に起因するものではなく, 積雪の力学特性のモデル化に内在しているものと考えられる。

積雪の長時間に亘る変形は, 主に粘性挙動に支配される。この積雪の粘性的性質は, 一般に雪質 (新雪, しまり雪など) や密度, 雪温に依存することが篠島の実験<sup>6)</sup>により明らかにされている。それ以降, 今日に至るまで積雪の力学特性に関する研究は鋭意進められて来ている<sup>7)</sup>。なお, 文献6)においては別して短時間載荷 (30分) と長時間載荷 (50時間) の2種類の一軸載荷実験がなされているが, 通常用いられている積雪モデルは前者に基づいて構築されたものであり, Nakamuraや著者らの解析でも, 基本的にはこのモデルを用いている。

これに対し, 長時間載荷実験の結果からは, 短時間実験には見られない雪の硬化現象が見出されている。ただし, 文献6)では, この硬化現象の解明およびモデル化まではなされていない。また, そのため上述のとおり, 著者らの解析を初め既往の解析モデルにおいて, この現象は反映されていない。しかし, 積雪からはりに作用する沈降荷重が長時間持続するという前述の実験事実に対し, 当該の硬化現象が関与していることが考えられ, その可能性について検討することは, 積雪モデルのさらなる改良に対し有用な知見を与え得るものと思われる。

そこで本研究では, 篠島が行った長時間載荷実験の結果を対象に, 短時間実験で確認されている粘性係数の密度依存性をそこから分離し, 長時間載荷で発生す

る硬化現象の抽出およびモデル化を試みる。さらに、当該モデルを新たに実装した VOF 法に基づく二次元有限要素解析手法により、Nakamura の実験結果の再現解析を再度実施し、その妥当性を検証する。

## 2. 積雪の従来モデル

積雪は一般に粘弾性体としての力学特性を示す。特に 10 分以上に亘る変形過程を対象とする場合には弾性変形が無視でき、積雪を粘性体と見なすことができる<sup>6)</sup>。なお、本研究では数日間に及ぶ積雪の長時間変形を対象とする。したがって、以下では積雪の粘性的性質についてのみ議論する。

篠島<sup>6)</sup>は新潟県塩沢の積雪を対象に、断面積  $20\text{cm}^2 \times$  長さ  $20\text{cm}$  の円筒供試体を作成し、一軸引張・圧縮および振り試験を実施した。また、各変形モードに対して短時間載荷実験 (30 分) と長時間載荷実験 (50 時間、引張・圧縮) をそれぞれ行い、前者の実験結果に基づき積雪の粘弾性モデルを構築している。

文献 6) によると、各変形モードにおける積雪の粘性係数は、雪温  $\theta$  と密度  $\rho$  に依存し、次式のように与えられる。

$$\eta_i = \bar{\eta}_{0i} e^{\kappa|\theta|} \cdot e^{\beta\rho} \quad (1)$$

ここで、下添え字の  $i$  は  $t$ (引張),  $c$ (圧縮),  $s$ (せん断) のいずれかを表し、 $\eta_i$  は各変形下での粘性係数、 $\bar{\eta}_{0i}$ ,  $\kappa$ ,  $\beta$  は各積雪に固有の定数である。

また、積雪のポアソン比は引張で  $\nu = 1/2$ (等体積変形)、圧縮で  $\nu = 0$  となり、そのため各変形に対する粘性係数の比が次のようになることが述べられている。

$$\eta_t : \eta_c : \eta_s = 3 : 2 : 1 \quad (2)$$

式(1),(2)を反映した、一般の応力状態下における積雪の力学モデルは、等方性の仮定の下、次式により記述することができる<sup>3)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= 2\eta_G \mathbf{D} + p\mathbf{I}, \\ \text{tr}\mathbf{D} &= 0 \end{aligned} \right\} (p > 0), \quad (3)$$

$$\sigma = 2\eta_G \mathbf{D} \quad (p \leq 0),$$

$$\eta_G = \bar{\eta}_0 e^{\kappa|\theta|} \cdot e^{\beta\rho}$$

ここで、 $\sigma$  は応力、 $p = \text{tr}\sigma/3$  は圧力(引張を正)、 $\mathbf{I}$  は恒等テンソル、 $\eta_G$  はせん断粘性係数、 $\bar{\eta}_0$  は定数である。なお、篠島の実験においては、 $\bar{\eta}_0 = 1.69 \times 10^7 \text{ dyn}\cdot\text{sec}/\text{cm}^2$ 、 $\kappa = 8.89 \times 10^{-2}$ 、 $\beta = 25.3$  となる<sup>6)</sup>。

また、 $\mathbf{D}$  はひずみ速度であり次式で与えられる。

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla) \quad (4)$$

なお、 $\mathbf{v}$  は積雪の変位速度である。

## 3. 長時間載荷で生ずる硬化現象のモデル化

### 3.1 篠島の長時間載荷実験の概要

前述のように、式(1)や(3)は篠島が実施した短時間の載荷実験結果に基づき構成されたものであり、従来

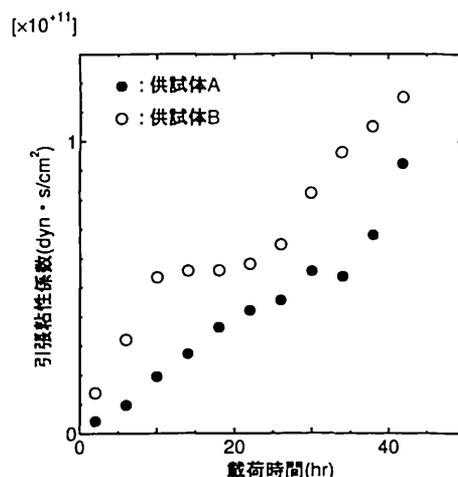


図-1 長時間引張載荷実験における粘性係数の時間変化<sup>6)</sup>。

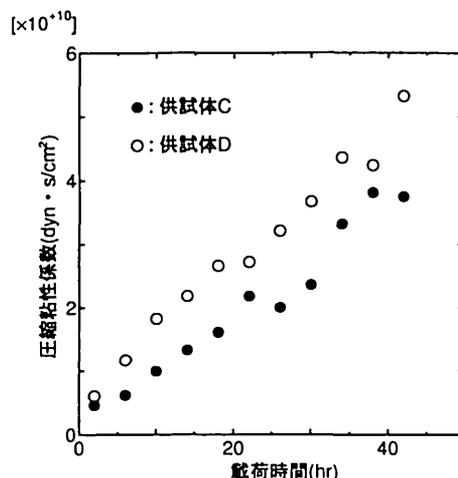


図-2 長時間圧縮載荷実験における粘性係数の時間変化<sup>6)</sup>。

表-1 初期と最終時点における密度と応力<sup>6)</sup>

	密度 ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )		応力 ( $\times 10^4 \text{ dyn}/\text{cm}^2$ )	
	初期	最終	初期	最終
A(引張)	0.129	0.131	3.92	5.19
B(引張)	0.184	0.183	3.92	4.40
C(圧縮)	0.132	0.197	3.92	3.69
D(圧縮)	0.184	0.229	3.92	3.82

の積雪変形解析ではこれらの関係式が用いられている。なお、篠島は長時間載荷実験を通し、短時間載荷実験では確認できなかった積雪の硬化現象の存在を見出している。

篠島により得られた長時間載荷の実験結果について、その幾つかを図-1,2に示す。図-1,2は、それぞれ一軸引張(供試体 A,B)および圧縮(供試体 C,D)変形下での粘性係数  $\eta_t, \eta_c$  の時間変化の様子を示したものである。なお、実験は初期密度  $0.132 \sim 0.216 \text{ g}/\text{cm}^3$  の雪を対象

として、引張・圧縮軸力が  $3.92 \times 10^5 \text{ dyn}$  と  $7.84 \times 10^5 \text{ dyn}$  の各ケースについてなされているが、図-1,2 は軸力が  $7.84 \times 10^5 \text{ dyn}$  での例である。ちなみに、引張実験では供試体上下にジュラルミン製の円盤を凍着させ、下端に重りを載荷している。一方、圧縮実験では上端に載荷している。試料は採取後低温室 ( $-5^\circ\text{C}$ ) で保存したものをを用いており、いずれの実験も雪温は  $-5^\circ\text{C}$  で一定となっている。また、文献6)には初期および最終時点における密度と応力が記載されているので、供試体 A ~ D におけるそれらの値を表-1 に示す。表より、変形過程において、引張では密度がほぼ一定 ( $\nu \approx 1/2$ ) であり、圧縮では応力がほぼ一定 ( $\nu \approx 0$ ) であることが確認できる。図-1,2 より、引張・圧縮の両変形とも、粘性係数が時間の経過と共に増大している様子が窺える。なお、粘性係数は式(1)に示したように、密度の増加と共に指数関数的に増大する。圧縮変形過程では  $\nu = 0$  となるので、変形の進行に伴い密度は増加する。したがって、図-2 における粘性係数の変動には密度増加による影響も含まれている。一方、引張変形過程では  $\nu = 1/2$  となり、密度変化を生じない。ちなみに篠島の長時間載荷実験における引張変形時の密度変化は 5%(対数軸ひずみは最大で約 50%) 以下となっている。しかし、図-1 に示すように粘性係数は載荷時間と共に増大しており、積雪が密度や雪温以外の影響により硬化し得ることが確認できる。

### 3.2 長時間載荷における影響の抽出方法

長時間載荷実験において、密度以外に粘性係数に影響を及ぼし得る要因として、ひずみ(変形)と載荷時間とが挙げられる。なお、ひずみは雪の結晶構造の変形を惹き起こす。また、載荷時間は焼結の進行に伴う結晶間の結合の変化<sup>6)</sup>に対応する。ここでは、これらの要因が積雪の硬化現象に関与し得るものと考え、その影響を抽出する目的で式(1)の  $\eta_i$  を次式のように書き改める。

$$\eta_i = \eta_{0i}(1 + f_i(\varepsilon, t))e^{\beta\rho}, \quad (i = c, t) \quad (5)$$

ここで、 $f_i(\varepsilon, t)$  は長時間載荷による硬化を表す項(以下、硬化係数と呼ぶ)であり、軸ひずみ  $\varepsilon$  と載荷時間  $t$  に依存するものとする。なお、短時間載荷との整合性から、 $f_i(0, 0) = 0$  となる。また、簡単のため雪温は一定とし、 $\eta_{0i} = \bar{\eta}_{0i}e^{\kappa|\theta|}$  とおいた。

式(5)より、実験結果からの硬化係数の抽出は、次式に基づき実施することができる。

$$f_i(\varepsilon, t) = \frac{\eta_i}{\eta_{0i}e^{\beta\rho}} - 1 \quad (6)$$

### 3.3 各測定時刻における密度の算出

$\eta_i$  の実験データに対し、式(6)から硬化係数を求めるためには、各測定時刻における密度  $\rho$  の値が必要となる。文献6)では、実験の開始時と終了時の密度が示されているだけであり、他の測定時刻における値は記載されていない。引張変形の場合、供試体密度を一定と見なせば、初期密度を用いて式(6)の右辺より硬化係数を求めることができる。一方、圧縮変形においては、密度

が変形と共に変化する。そこで、圧縮変形に対しては図-2 に示した様な載荷時間と粘性係数との関係から、以下の手順により密度を間接的に求めることとした。

供試体の現時刻における高さを  $h$ 、一軸圧縮時の真応力を  $\sigma$  とすると、次の関係が成り立つ。

$$\sigma = -\eta_c \frac{\dot{h}}{h}, \quad (\dot{h} = \frac{dh}{dt}) \quad (7)$$

圧縮変形では  $\nu = 0$  となるので、供試体の断面積は変化せず、したがって  $\sigma$  は一定と仮定すると、式(7)より次式を得る。

$$\ln \frac{h}{h_0} = -\sigma \int_0^t \frac{dt}{\eta_c} \quad (8)$$

ここで、 $h_0$  は  $t = 0$  における供試体の高さである。

今、時刻  $t_j$  において測定された粘性係数を  $\eta_{cj}$  と表し、各測定時刻における粘性係数の変動を  $\eta_{cj}$  の線形補間で近似評価するものとする。このとき、時刻  $t_n$  における式(8)の積分項は次式により近似されることとなる。

$$\int_0^{t_n} \frac{dt}{\eta_c} = \sum_{j=1}^n \frac{t_j - t_{j-1}}{\eta_j - \eta_{j-1}} \ln \frac{\eta_j}{\eta_{j-1}} \quad (9)$$

式(8),(9)より  $t_n$  における供試体高さ  $h_n$  を求めることができる。また、圧縮変形時では  $\nu = 0$  であるので、 $t_n$  における密度  $\rho_n$  は供試体高さをを用いて次式により計算することができる。

$$\rho_n = \rho_0 \frac{h_0}{h_n} \quad (10)$$

ここで、 $\rho_0$  は初期密度である。

なお、式(8)~(10)により求めた最終時刻における密度  $\rho_f$  は、一般にその測定値  $\bar{\rho}_f$  と完全には一致せず、5%前後の差異が認められた。そこで、各時刻  $t_j$  における密度の補正值  $\rho'_j$  を次式により求めることとした。

$$\rho'_j = \rho_0 + (\rho_j - \rho_0) \cdot \frac{\bar{\rho}_f - \rho_0}{\rho_f - \rho_0} \quad (11)$$

### 3.4 各測定時刻におけるひずみの算出

式(6)より求めた硬化係数と軸ひずみとの関係を考察する目的で、各供試体の載荷軸方向の対数ひずみを求める。なお、引張・圧縮共に軸力が  $7.84 \times 10^5 \text{ dyn}$  の場合については、各測定時刻における対数ひずみが文献6)に示されている。供試体 A ~ D における載荷時間と対数ひずみとの関係をそれぞれ図-3,4 に例示する。実験終了時におけるひずみは、0.1 ~ 0.5 の範囲に分布している。

一方、軸力を  $3.92 \times 10^5 \text{ dyn}$  とした実験については、各時刻毎のひずみが示されていない。そのため、引張・圧縮載荷実験に対して、それぞれ以下の手順によりひずみの時間変化を間接的に求めることとした。

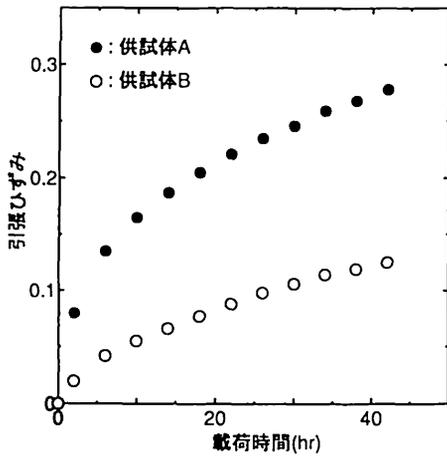


図-3 長時間引張載荷実験における軸ひずみの時間変化<sup>6)</sup>.

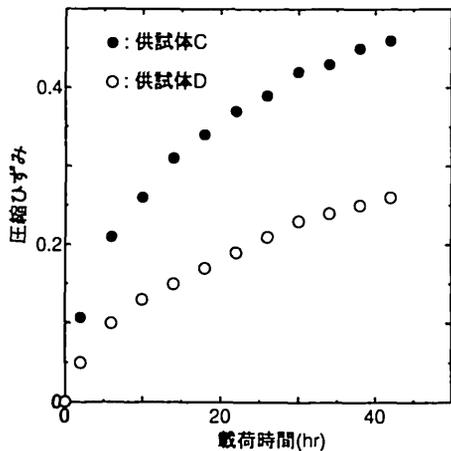


図-4 長時間圧縮載荷実験における軸ひずみの時間変化<sup>6)</sup>.

### (1) 引張載荷実験

軸ひずみの時間微分  $\dot{\epsilon} (= \dot{h}/h)$  は軸力  $P$  を用いて次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \frac{\dot{h}}{h} \\ &= \frac{\sigma}{\eta_t} = \frac{P}{\eta_t A} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $A$  は現時刻における供試体の断面積である。

引張変形下においては  $\nu = 1/2$  なので、供試体の体積が一定 ( $V_0$ ) とすると、次式が成り立つ。

$$\dot{A}h + A\dot{h} = 0 \quad (13)$$

式(12)の右辺第1,3式に  $A$  をかけ、式(13)の関係をを用いると次式を得る。

$$\dot{A} = -\frac{P}{\eta_e} \quad (14)$$

式(14)を積分して、時刻  $t$  における断面積  $A(t)$  を得る。

$$A(t) = A_0 - P \int_0^t \frac{dt}{\eta_t} \quad (15)$$

ここで、 $A_0 = A(0)$  である。

式(15)右辺の積分は、式(9)と同様にして実験結果より計算して求める。各時刻における供試体の断面積が求められれば、体積一定の条件から、次式により軸ひずみ  $\epsilon$  を求めることができる。

$$\begin{aligned} \epsilon &= \ln \frac{h}{h_0} \\ &= \ln \frac{A_0}{A} \end{aligned} \quad (16)$$

なお、文献6)には供試体高さの初期値  $h_0$  と最終値  $h_f$  が示されているので、最終時刻の対数ひずみの測定値  $\bar{\epsilon}_f$  は与えられている。一般に、式(15),(16)より求めた最終時刻のひずみ  $\epsilon_f$  は  $\bar{\epsilon}_f$  とは完全に一致せず、最大で20%程度の差異が認められた。そこで、各時刻において求めたひずみに対し、次の補正を加えることとした。

$$\epsilon' = \epsilon \cdot \frac{\bar{\epsilon}_f}{\epsilon_f} \quad (17)$$

### (2) 圧縮載荷実験

式(10)より、対数ひずみ  $\epsilon$  は、密度から次式のように評価することができる。

$$\begin{aligned} \epsilon &= \ln \frac{h}{h_0} \\ &= \ln \frac{\rho_0}{\rho} \end{aligned} \quad (18)$$

なお、各時刻における  $\rho$  は前節の手順により求めておくものとする。

### 3.5 硬化係数の抽出

以上の準備の下、文献6)に示された引張・圧縮各々10ケースの実験データに対し、硬化係数の抽出を行った。結果を図-5,6に示す。図-5,6はそれぞれ引張と圧縮載荷における対数ひずみと硬化係数との関係を示したものである。なお、図には0~40時間までの載荷時間におけるデータを10時間毎に分け、各々異なる記号で表示してある。個々の供試体に関しては、載荷時間とひずみとが一対一に対応するので、当然のことながら載荷時間とひずみとは同義となる。しかし、異なる条件下にある多数の供試体についてまとめて表示した図-5,6においては、異なる載荷時間帯のデータが混在して分布しており、載荷時間による違いは認められず、硬化係数と載荷時間とは明確な関係が存在していないことがわかる。一方、引張・圧縮の両ケースにおいて、硬化係数はひずみの増加と共に増大する傾向にあり、これらの間には対応関係の存在が認められる。なお、圧縮載荷では、ひずみと硬化係数との関係が概ね比例関係にある。これに対し、引張載荷では、硬化係数がひずみの二乗に概ね比例している。また、その変動幅は圧縮載荷に比べて大きく、変形に対してより鋭敏であることが窺える。

篠島の行った実験について、硬化係数のひずみ依存性を最小二乗近似すると、引張と圧縮載荷に対しそれ

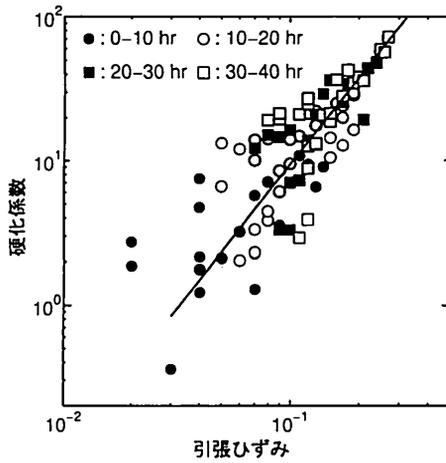


図-5 ひずみと硬化係数との関係 (引張).

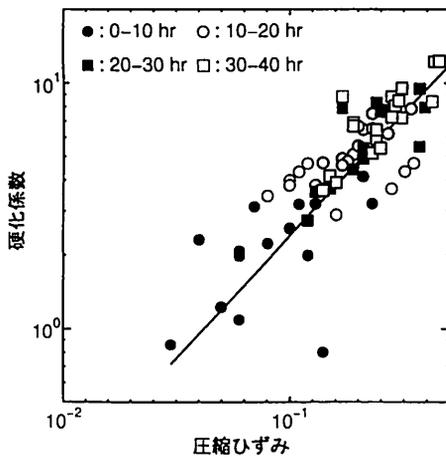


図-6 ひずみと硬化係数との関係 (圧縮).

ぞれ次式を得る.

$$\begin{aligned} \text{引張荷重} : f_t &= 938\varepsilon^2, \\ \text{圧縮荷重} : f_c &= 23.8|\varepsilon| \end{aligned} \quad (19)$$

なお, 図-5,6 には式(19)の近似曲線も合わせて示した.

積雪を構成する氷の粒子は, 一般に複雑な形状をしているが, 各粒子間の接触点の数や分布などは積雪の巨視的変形の影響を受けると考えられる. 例えば, 圧縮方向に直交する接触面では新たな接触点が発生し, 引張方向に直交する接触面では積雪変形が接触点の集積を誘発することが予想される. これら雪の微視構造における接触状態の変化が積雪の粘性係数に影響を及ぼし, 硬化現象のひずみ依存性につながったことが可能性として挙げられる.

なお, 文献(6)には, 当該の硬化現象が北海道のしまり雪に対しては認められなかったこと, および積雪の力学的性質は密度が一定であっても, 雪どうしの結合の度合いにより変化し得ることが述べられている. しかし, 硬化現象の発生機構については明らかにされていない.

### 3.6 硬化現象のモデル化

前節に述べた硬化現象のひずみ依存性を有限要素解析に反映させるためには, 式(19)の関係の一般化を図る必要がある. ここでは, 式(19)に矛盾しないようなものとして, 次の関係式を採用する.

$$\begin{aligned} \eta_G &= \eta_0(1+f)e^{\beta p}, \\ f &= \int_0^t a(p, \bar{\varepsilon})\dot{\bar{\varepsilon}} dt, \end{aligned} \quad (20)$$

$$a(p, \bar{\varepsilon}) = \begin{cases} 2a_t\bar{\varepsilon} & (p > 0), \\ \frac{3}{2}a_c & (p \leq 0) \end{cases} \quad (21)$$

ここで,  $\eta_G$  は式(3)で定義したせん断粘性係数,  $\eta_0 = \bar{\eta}_0 e^{\alpha|p|}$ ,  $\bar{\varepsilon}$  は次式で与えられる相当ひずみである.

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\varepsilon} : \dot{\varepsilon} dt \quad (22)$$

また,  $\dot{\varepsilon}$  は次式で定義されるひずみ速度の偏差成分である.

$$\dot{\varepsilon} = \mathbf{D} - \frac{1}{3}(\text{tr}\mathbf{D})\mathbf{I} \quad (23)$$

さらに, 式(21)において  $a_t, a_c$  は一軸引張・圧縮時の硬化特性を定めるパラメータであり, 篠島の実験では式(19)のように  $a_t = 938, a_c = 23.8$  となる.

一般の変形状態においては, ひずみ速度  $\mathbf{D}$  の時間積分により対数ひずみに相当するテンソル量を得ることは不可能である<sup>9)</sup>. ただし, 一軸応力下での一様変形過程においては, 左・右ストレッチテンソル  $\mathbf{V}$  および  $\mathbf{U}$  が変形勾配テンソルに一致し, それらの対数の時間微分がひずみ速度 (ストレッチングテンソル)  $\mathbf{D}$  を与える.

$$(\ln \mathbf{U})' = \mathbf{D} \quad (24)$$

その結果, ひずみの主軸が変化しない場合, ひずみ速度の時間積分は一軸荷重における対数ひずみを与えることとなる. なお, 常に引張荷重状態にある場合は,  $\nu = 1/2$  より,  $\bar{\varepsilon}$  は荷重軸方向の対数ひずみに一致する. このとき, 式(20),(21)より, 一軸引張変形下での硬化係数  $f_t$  は次式のように表わすことができる.

$$\begin{aligned} f_t &= \int_0^t 2a_t\bar{\varepsilon}\dot{\bar{\varepsilon}} dt \\ &= a_t\bar{\varepsilon}^2 = a_t\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (25)$$

一方, 常に圧縮荷重状態にある場合,  $\nu = 0$  となり,  $3\bar{\varepsilon}/2$  は荷重軸方向の対数ひずみの絶対値を与える. すると式(20),(21)より, 一軸圧縮変形下での硬化係数  $f_c$  は次式のように表すことができる.

$$\begin{aligned} f_c &= \int_0^t \frac{3}{2}a_c\dot{\bar{\varepsilon}} dt \\ &= \frac{3}{2}a_c\bar{\varepsilon} = a_c|\varepsilon| \end{aligned} \quad (26)$$

以上より, 式(25),(26)はそれぞれ式(19)の第1,2式に対応しており, 式(20)が式(19)を包含していることが確認できる. なお, 硬化パラメータ  $a_t, a_c$  は, 以降の解析結果に示すように積雪状態に依存すると考えられ, 各積雪で固有の値をとるものとする.

#### 4. VOF法を用いた有限要素解析法の概要

本研究では、3. に構成した硬化モデルを文献3)に示した有限要素解析法に実装して解析を実施する。ここでは、その解析手法の概要について述べる。なお、解法の詳細については文献3)を参照されたい。

##### 4.1 有限要素方程式

式(3)のように、積雪は  $p > 0$  においてのみ等体積変形を受ける。有限要素方程式の定式化においては、 $p$  の符号によらない解析アルゴリズムの構成、および求解方程式の解法の安定化を図る目的で、積雪の変位速度  $\mathbf{v}$  と圧力  $p$  を未知量としたペナルティ混合法を採用した。このとき、重み付き残差式より、部分積分を経て最終的に次式を得る。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{2\eta_G}{\eta_0} \bar{\mathbf{D}} : \mathbf{D} \, d\Omega + \int_{\Omega} \frac{(p)_+}{\eta_0} \text{tr} \bar{\mathbf{D}} \, d\Omega \\ = \int_{\Gamma_t} \frac{1}{\eta_0} \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{1}{\eta_0} \mathbf{w} \cdot \mathbf{X} \, d\Omega \quad (27) \\ + \int_{\Omega} w_p (\eta_0 \text{tr} \mathbf{D} - \frac{p}{\gamma}) \, d\Omega \end{aligned}$$

ここで、 $\Omega$  は解析領域、 $\Gamma_t$  は表面力  $\bar{\mathbf{t}}$  が規定されている境界、 $\mathbf{X}$  は物体力、 $\mathbf{w}$ ,  $w_p$  は重み関数、 $\bar{\mathbf{D}} = (\mathbf{w} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{w})/2$ 、 $(p)_+ = p(p > 0)$ 、 $(p)_+ = 0(p \leq 0)$ 、 $\gamma = G(p > 0)$ 、 $\gamma = 2\eta_G/3\eta_0(p \leq 0)$  であり、 $G$  は等体積変形に関するペナルティ係数である。

式(27)の離散化に際し、変位速度  $\mathbf{v}$  および  $\mathbf{w}$  には2次元4節点一次要素を用い、圧力  $p$  および  $w_p$  には要素内で一定値をとる一次要素近似を用いる。

##### 4.2 VOF法

積雪の複雑な変形挙動を解析するためにVOF法<sup>4)</sup>を用いる。まず、積雪を包含する解析領域に有限要素メッシュを設定する。その下で、要素毎に積雪の占有率を0から1の範囲で与え、これによりVOF関数  $\psi$  を定義する。なお、式(27)の離散化は解析領域全体で展開し、要素毎に求めた係数行列にその要素における  $\psi$  を乗じたものにより求解方程式を構成する。当該手法の下では、積雪領域の変形はVOF関数の移流により記述されることとなる。その結果、積雪領域のトポロジー変化を初めとする複雑な変形挙動が解析可能となる。なお、 $\psi$  は次の移流方程式をみだす。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi = 0 \quad (28)$$

式(28)に基づく  $\psi$  の更新に際し、数値拡散等による界面捕捉の精度低下を抑制する目的で、本解析ではCIP法<sup>10)</sup>を用いる。

積雪変形解析では、粘性係数が密度  $\rho$  と硬化係数  $f$  に依存する。そのため、 $\psi$  に加えこれらの値を更新する必要がある。 $\rho$  は次の連続式をみだす。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (29)$$

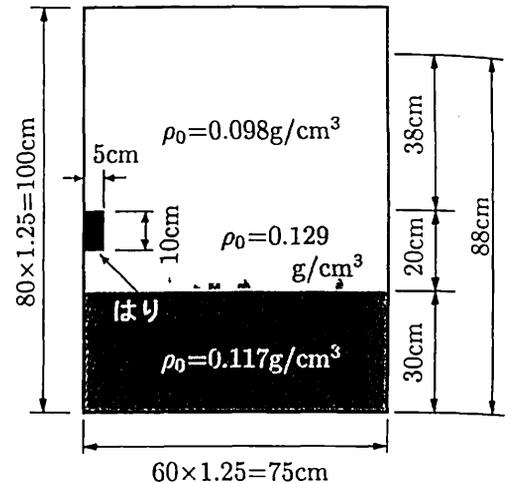


図-7 はりが埋設された積雪の解析条件。

また、式(20)より硬化係数  $f$  は次式をみだす。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = a\dot{\epsilon} \quad (30)$$

式(29),(30)に基づく  $\rho$  と  $f$  の更新においては、まず各式の右辺をゼロとおいた移流方程式に対し、VOF関数と同様にCIP法を適用する。その結果得られた値  $\rho'$ ,  $f'$  に対し、次式により更に右辺の補正を施す。

$$\begin{aligned} \rho(t + \Delta t) &= \rho' - \rho(t) \nabla \cdot \mathbf{v} \Delta t, \\ f(t + \Delta t) &= f' + a\dot{\epsilon} \Delta t \end{aligned} \quad (31)$$

ここで、 $\Delta t$  は時間増分、 $\rho(t + \Delta t)$ 、 $f(t + \Delta t)$  は時刻  $t + \Delta t$  における  $\rho$  と  $f$  の値である。式(31)によりこれらの値を陽的に更新し、時刻  $t + \Delta t$  における解を式(27)より求める。

## 5. 解析結果

### 5.1 解析条件

Nakamura<sup>2)</sup>が行ったはりの埋設された積雪の自重圧密実験を対象に、その再現解析を試みる。文献2)に示された実験では、幅200cm、高さ90cm、奥行き100cmの箱の中央に、10cm×10cmの正方形断面のはりを高さ50cmの位置に水平奥行き方向に設置し、そこに屋外より採取した新雪を充填したものを用いている。当該の実験条件に基づき、以前著者らが行った解析<sup>3)</sup>と同様、図-7のように解析領域を設定した。なお、図中に示した各積雪層の初期密度も文献2)の条件に合わせて与えた。

解析では対称性を考慮し、積雪領域の右半分を離散化した。初期の積雪深は88cmであるが、有限要素分割域は高さ100cmまで設定してある。なお、解析領域は、1.25cm×1.25cmの正方形要素により一様に分割した。要素分割の様子を図-8に示す。また、実験におけ

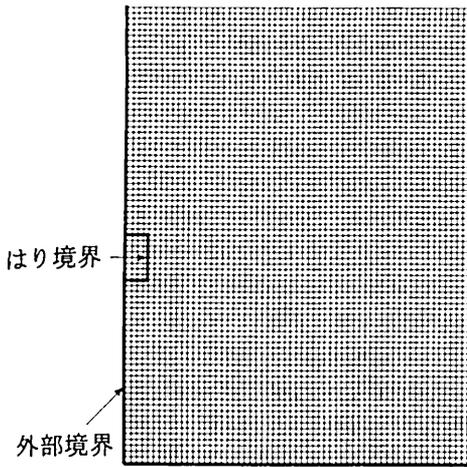


図-8 解析領域の要素分割.

るはりと積雪との付着状態は不明であるため、本解析でははりを剛体とし、接触面に摩擦は一切生じないものとした。

はりは分割領域内に位置している。すなわち、はりの断面内にも  $4 \times 8$  個の有限要素が配置されている。このはりと積雪との接触境界は、本分割においては有限要素メッシュと重複しているので、当該のメッシュ上に位置している節点において上述の滑り境界条件を設定した。さらに解析領域の左右鉛直境界と底面境界上の節点にも滑り境界条件を設定した。また、式(27)の圧力項に関するペナルティ係数  $G$  の値は、文献3)と同様に  $\eta_G/\eta_0 \times 10^8$  と設定した。

式(20)の積雪のせん断粘性係数に関する定数  $\eta_0$  と  $\beta$  は、文献2)に示されている以下の値を用いた。

$$\left. \begin{aligned} \eta_0 &= 1.06 \times 10^6 \text{ (dyn} \cdot \text{sec/cm}^2\text{)}, \\ \beta &= 52.4 \end{aligned} \right\} (\rho \leq 0.11 \text{g/cm}^3),$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_0 &= 2.09 \times 10^7 \text{ (dyn} \cdot \text{sec/cm}^2\text{)}, \\ \beta &= 25.3 \end{aligned} \right\} (\rho > 0.11 \text{g/cm}^3)$$

(32)

## 5.2 解析結果の検討

$\Delta t = 60 \text{sec}$  の下、 $3.24 \times 10^5 \text{sec}$  (約 3.7 日) までの解析を実施した。解析では、3. に構成した変形硬化モデルを用い、引張変形時の硬化パラメータ  $a_t$  の値を変え、それが結果に及ぼす影響について調べた。なお、圧縮変形時の硬化パラメータ  $a_c$  はゼロのまま一定に設定した。これは、文献3)で行った著者らの解析において、はりから十分に離れたほぼ一様な自重圧密域での積雪沈下量が実験と良好な一致を示したことより、少なくとも Nakamura の実験に用いられた雪については、圧縮変形時の粘性係数に硬化現象が認められないと判断したことによるものである。

$a_t = 0, 10, 25$  の3ケースに対して得られた、はりに作用する積雪沈降荷重の時刻歴を図-9 に示す。なお、図には比較のため、Nakamura の実験結果も合わせて示

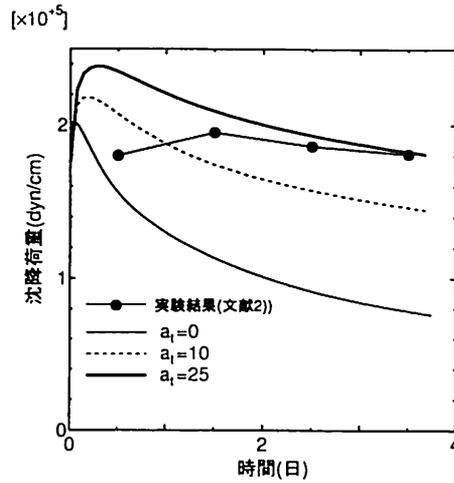


図-9 はりに作用する沈降荷重時刻歴の比較.

した。図中の沈降荷重は、単位奥行き (1cm) 当りのはりに作用するものである。 $a_t = 0$  の結果は、硬化現象を考慮しない従来モデルに対応している。図より、 $a_t = 0$  の場合の沈降荷重は、時間の経過と共に大幅に減少しており、解析最終時 (3.7 日目) における値は実験値の  $1/2$  以下となっている。

一方、 $a_t > 0$  の設定により荷重の減少傾向が緩和され、 $a_t = 25$  での結果が 1.5 日目以降において実験値と概ね良い一致を与えていることがわかる。なお、比較的初期の段階で解析による沈降荷重が実験値に比べ大きな値を示しているが、これは実験と解析との初期条件の違いによるものと思われる。実験では、常時重力が作用して圧密が進行する中、底面から順次積雪を充填して初期状態を作成している。これに対し、解析では重力の作用しない無変形状態を初期状態として、そこから解析を開始しており、これらの差異が沈降荷重に影響したものと考えられる。

また、篠島の実験においては、式(19)のように  $a_t = 938$  となっており、硬化パラメータが非常に大きな値をとったが、本問題においては、比較的小さな  $a_t$  の下で実験結果に対応した結果を得ており、硬化パラメータが積雪により異なる値をとり得ることがわかる。

次に、3.7 日目における積雪表面形状を図-10 に示す。なお、解析での表面形状は VOF 関数  $\psi = 0.5$  の等高線を描画したものである。また、図には Nakamura が実験の際に求めた積雪表面形状も合わせて示した。

$a_t = 0$  における解析結果と実験結果とは良く一致している。一方、 $a_t = 25$  とした場合、はり上部近傍の積雪沈下が多少小さ目となっており、変形に伴う積雪硬化の影響が認められる。しかし、図-9 に示したように、はりの沈降荷重が  $a_t$  の設定に顕著な鋭敏性を示したのに比べると、変形状はそれ程変化していないことがわかる。

以上のことより、本研究において構成した変形硬化モデルを用いることで、完全にではないものの、沈降荷重と変形状の両者を概ね同時に再現できており、当該の硬化現象が沈降荷重の発生機構に影響を及ぼして

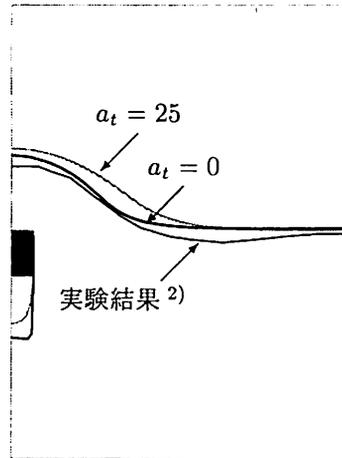


図-10 積雪面形状 (3.7 日目).

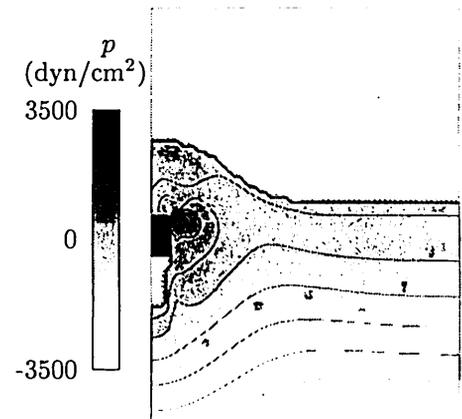


図-11 積雪中の圧力分布 (3.7 日目,  $a_t = 0$ ).

いた可能性を支持する結果が得られた。

最後に、解析で得られた積雪中の圧力分布を図-11( $a_t=0$ ), 図-12( $a_t=25$ ) に示す。これらの図はいずれも 3.7 日目における結果である。沈降荷重の発生に密接に関係していると考えられる引張圧力の最大値は、 $a_t$  の値に関わらずはり上部角点付近に分布している。なお、 $a_t=0$  での圧力最大値は  $2880 \text{ dyn/cm}^2$  であった。これに対し、 $a_t=25$  での圧力最大値は  $20400 \text{ dyn/cm}^2$  となっており、 $a_t=0$  の場合の約 7 倍の値を示す結果となった。

図では  $3500 \text{ dyn/cm}^2$  以上の圧力を有する領域は全て黒色で表示しているが、積雪の変形硬化の発生によって大きな引張力がはり上部角点から下方に向かって扇状に分布しており、これが大きな沈降荷重の発生を惹き起こしていることが理解できる。なお、はり(黒い長方形)下部の白色の領域は空洞部である。

また、図-12 のはり上方の積雪表面近傍において、表面境界と平行に引張場が分布している様子が窺える。これは、雪の沈下に伴い、はり上部の雪が水平方向に引き伸ばされ、その結果積雪が変形硬化を受けたことによるものである。

## 6. おわりに

篠島が行った実験結果に基づき、積雪の長時間載荷において認められる硬化現象について考察した。その結果、積雪の硬化は変形と連動して発生していることがわかった。また、一軸変形下では、粘性係数における硬化係数のひずみ依存性が引張と圧縮とは異なり、篠島の実験結果に関しては、それぞれ二次と一次関数で近似できることがわかった。さらに、これらの結果に基づき積雪の硬化特性のモデル化を試みた。最後に、Nakamuraが行った、はりの埋設された積雪の自重圧密実験の再現解析を実施した。その結果、上述の変形硬化を解析モデルに組み込むことで、積雪変形が多少小さ目となるものの、はりに作用する沈降荷重の時間

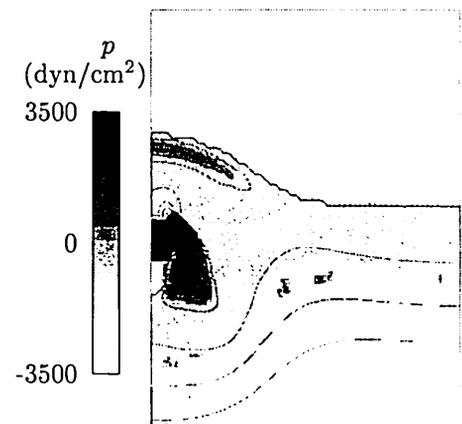


図-12 積雪中の圧力分布 (3.7 日目,  $a_t = 25$ ).

推移が概ね適切に再現可能であることがわかった。

なお、本研究では上述のように、積雪の硬化現象は変形(ひずみ)により惹き起こされるものとしてモデル化した。しかし、積雪の圧密変形特性については現在でも基礎的研究が進められているものの、篠島の実験に見られた硬化現象に関する研究は著者の知る限りなされていない。したがって、積雪の硬化現象が変形以外の要因により惹き起こされる可能性の有無や、硬化現象の発生規模を支配している因子などについては未解明なままである。これらの点が今後明らかにされて行くことが望まれるが、少なくとも既往の研究成果を基に本研究で構成した比較的簡易な硬化モデルによって、従来モデルでは再現不可能であった沈降荷重を概ね適切に捉えることができたものと考えている。

また、積雪を構成している氷の微細構造は変形過程で変化するので、積雪の粘性係数や硬化特性は異方性を示す可能性がある。しかし、積雪の異方性に関する研

究事例はほとんど無く、現状では本解析に用いた様な等方性を仮定した力学モデルを用いざるを得ない。これについても、今後の研究のさらなる深化が期待される場所である。

#### 参考文献

- 1) Lang, T.E. : Settlement force on a beam in snowpack by computer modelling, *Annals of Glaciology*, **6**, 95-99, 1985.
- 2) Nakamura, H. : Studies on the settlement force of snow as a generation mechanism, *Rep. of NRCDP*, No.41, 361-385, 1988.
- 3) 阿部和久, 紅露一寛 : VOF 法を用いた積雪変形解析有限要素解析手法, 構造工学論文集, Vol.51A, 277-284, 2005.
- 4) Hirt, C.W. and Nichols, B.D. : Volume of fluid (VOF) method for the dynamic of free boundaries, *J. Comp. Phys.*, **39**, 201-225, 1981.
- 5) 阿部和久, 金子正浩 : 個別要素積雪変形解析における接触点密度関数の評価, 構造工学論文集, Vol.41A, 377-384, 1995.
- 6) 篠島健二 : 雪の粘弾性的取扱い, 鉄建報告, No.328, 1962.
- 7) 遠藤八十一, 小南裕志, 山野井克己, 庭野昭二 : 粘性圧縮モデルによる時間降雪深と新雪密度, 日本雪氷学会誌, 64 巻 1 号, 3-13, 2002.
- 8) (社) 日本建設機械化協会編, 新防雪工学ハンドブック, pp.13, 森北出版, 1977.
- 9) 久田俊明, テンソル解析の基礎, pp.100, 丸善, 1992.
- 10) Yabe, T. : A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation I. One-dimensional solver, II. Two- and three- dimensional solvers, *Comp. Phys. Commun.*, **66**, 219-242, 1991.

(2005 年 9 月 10 日 受付)