新潟大学教育学部数学教室，『数学教育研究』，第 43 巻，第 2 号，4-10，2008.

数学教育におけるアブダクションの基礎的研究
―形式の観点からの検討―

新潟大学教育学部
和田　信哉

１．はじめに

平成 10 年に告示された現行の学習指導要領では創造性の育成が強調されており，このような観点から考えると，数学教育においては発見的推論と呼ばれる帰納的推論と類比的推論が，また論理的推論である演繹的推論も重要なものとなる（中原，1998）。しかしながら，発見的な推論は帰納的推論と類比的推論だけではない。他の発見的な推論の一つとして，C.S.Peirce のアブダクション（abduction）が挙げられる。

例えば，推論として演繹的推論と帰納的推論だけを対象とする立場であれば，帰納的推論が発見的推論であることになるけれども，これは単に特殊な事例にいえることを一般に拡張するだけであるとみなすことができるため，そう考えるならば本質的に新しい結論を導くものではないということになる。これに対し，アブダクションは，前提とはまったく質の異なる結論を仮説として導く推論であるため創造的な推論であるといわれる。そのため，創造性の育成という観点からすると，アブダクションは数学教育においても重要であると考える。

本研究は，子どもが算数・数学を探究する姿を目指す授業について研究している。そのために，算数・数学の授業を記号論的に分析して探究的な授業への示唆を得ることと，授業を推論の観点から分析して示唆を得ることの二点[(1)]を柱にして研究を進めている（和田，2000；2003；2007；2008）。しかし，アブダクションについての検討は不十分なままであり，課題が多く残されている。

そこで本稿では，数学教育におけるアブダクションについての考察を行う。とりわけ，その形式について，米盛（2007）の Polya（1954a，1954b）の研究に対する指摘を参考にしながら検討することを目的とする。そのため，まずアブダクションについて概観し，次にその形式について考察する。そして，米盛（2007）の指摘をふまえながら Polya（1954a，1954b）の発見的推論に基づいて，数学教育におけるアブダクションの形式を中心に検討する。

２．アブダクション

論理学的には，前提が真であれば結論も真である演繹的推論が論理的思考とみなされるので，数学においても演繹的推論が証明法として重視される。しかしながら，数学の探究においては，「まず推測し，その後に証明する（First guess then prove）」（Polya，1965，p.157）ことが重要であり，数学教育における子どもの主体的活動もそのようにみなすのであれば，推測の段階も重要であることが指摘される。

さて，それでは推測の段階ではどのような思考が重要であろうか。Polya（1954a，1954b）の指摘のように，帰納的推論や類比的推論はもちろん重要である。しかしながら，

ある問題をこれまでと同じように，すなわち帰納的に考えても成功的に解決できないとき，われわれは異なる観点からその問題にアプローチするように，帰納的推論や類比的推論では説明できないような推測も存在する。例えば，小学校第 4 学年の「変わり方」で表に表して横にみていく方法を身につけたとする。そして，$y = x^2$の事象について今までの方法を帰納的に適用して考えても解決できない状態になったとき，観点を変えて表を縦にみていくと解決できる。この観点を変えるときの思考は，発見的であるけれども帰納的推論では説明できず，アブダクションと呼ばれる推論で説明できる(2)。

アブダクションとは，Peirce の提唱した推論の一種であり，説明的仮説を導く推論である（CP5，172）(3)。それは，「驚くべき事実Cが観察される。しかし，もしAが真であるならば，Cは当然のことであろう。したがって，Aは真であると考えるべき理由が存在する」（CP5，189）という形式のものである。

数学教育においても，アブダクションの重要性に着目した研究がある。例えば，数学教育におけるアブダクションの例を挙げてその重要性を指摘する研究（Mason，1995；添田，2001），その形式や使用などの観点で分類する研究（Cifarelli，1999；Cifarelli & Sáenz-Ludlow，1996；Reid，2003；和田，2000），算数・数学の構成的方法に関わる研究（伊藤，1993），数学的一般化に関わる研究（Rivera & Becker，2007a，2007b），シェマの変容に関する操作の推測に関わる研究（Norton，2008），記号論的観点からみた記号間の関連づけに関わる研究（Sáenz-Ludlow，2003；和田，2007，2008）などがある。

しかしながら，その重要性にもかかわらず，アブダクションの形式に関する Peirce 自身のとらえ方の変遷による解釈の曖昧さや，数学というよりも事実を対象にした理論である傾向が強いことに由来するその使用の分類に関する数学教育的な解釈の曖昧さなどの問題点が残されている。したがって，本稿ではとりわけ，数学教育におけるアブダクションの形式について，認知的な観点も考慮に入れながら検討していくことにする。

３．アブダクションの形式

前節のような数学教育における研究にもかかわらず，数学教育におけるアブダクションのとらえ方が明確になっているとは言い難い。とりわけ，その形式に関してはさらなる議論の余地があろう。前述の Peirce の示している形式を形式化すると，次のようになる（伊東，1975；米盛，1981）(4)。

$$\begin{array}{c} B \\ A \to B \\ \hline \therefore A \end{array}$$

例えば，魚の化石が内陸部でみつかったとすると，この事実を説明するために，われわれはこの一帯がかつて海であったに違いないと考える（CP6，25）。この例は，はじめに内陸部で魚の化石がみつかるという驚くべき事実に出会い，しかしもしこの一帯がかつて海であったならばそれは当然のこととして考えられるので，この一帯はかつて海であったに違いない，という仮説を採用するアブダクションである。この例から，結論として仮説

Ａ（この一帯はかつて海であったに違いない）を採用することは自然であると思われるけれども，数学の場合はどうであろうか。

数学の場合，四角形の各辺の中点を結ぶと平行四辺形になるということに気づいたとしたとき，中点連結定理によって説明がつくという例が考えられる。ここでの仮説Ａは「中点連結定理」である。このように，数学の場合，まずはじめの命題「Ｂ」は事実ではない。すなわち，アブダクションを拡張的に考えるならば，はじめの「Ｂ」を「現象」としてとらえることが適当であろう。また，現象Ｂを説明するための仮説Ａ（中点連結定理）は「真である」と認められている命題である。したがって，数学においては，仮説として採用される命題は真であると認められているものである。

さらに，数学では，真である仮説Ａだけを結論として採用して考えるのではなく，Ａ→Ｂ（中点連結定理による平行四辺形になることの証明）自体を考えることがより重要となる。また，大前提（Ｂ）と小前提（Ａ→Ｂ）を入れ替えると後件肯定式になる。後に述べるように，後件肯定式は帰納的推論であるとみなすことができる（Polya，1954b）。ということは，アブダクションは後件肯定式とは異なり，Ｂという現象に対してＡ→Ｂを導くことにその特徴があるといえよう。

したがって，本稿においては，アブダクションの形式について，本質的にはＡ→Ｂを導くことであるととらえる。また，さらに拡張的にとらえるならば，「現象Ｂの正当化を方向づける，Ｂを含む命題を導く」ことが重要であるといえよう。

４．数学教育におけるアブダクション

米盛（2007）は，Polya の発見的推論を取り上げ，それが帰納的推論とは異なる性格を有するものであるにもかかわらず Polya が明確にその点に言及しておらず，その点が明確にされていればアブダクションに通じる新しい推論の定式化がなされていたであろうことを指摘している。ここでは，米盛が指摘している Polya の発見的推論を検討し，数学教育におけるアブダクションについて考察する。

Polya（1954b）は，発見的推論のパターンとして，上述の後件肯定式を帰納的パターンとし，結果を検討する場合，可能な根拠を検討する場合，相反する推測を検討する場合それぞれについて検討し，表 1 のようにまとめている（Polya，1954b，pp.19-28）。

米盛（2007）は，表 1 の「１．結果を検討する」の（３）と（４）について帰納的推論とは異なる新しい推論となりうるものであったと指摘している。つまり，（３）や（４）の推論の大前提と小前提を交換するとアブダクションの形式と同じものになるという指摘である（米盛，2007，pp.185-202）。しかしながら，本来のアブダクションの形式における大前提と小前提との交換は，論理学的な構造という点からは問題ないかもしれないけれども，認知的な観点を考慮すると問題がある。すなわち，現象ＢからＡ→Ｂを導く場合とＡ→Ｂという前提の基で現象Ｂが生じるという継時的な問題であり，この点を考慮するとPolya の発見的推論はアブダクションではあり得ない。

むしろ，（３）と（４）の大前提である「Ａ→Ｂ」や「Ａ←Ｂ」，「Ａ｜Ｂ」を導く際に働くものがアブダクションであると考える。なぜならば，前述のように，アブダクションの本質は，現象Ｂの正当化を方向づける，Ｂを含む命題を導くこととととらえるからである。

表 1　発見的推論のパターン（Polya，1954b，p.28）[5]

	（1） 論　証　的	（2） ぼかされた 論　証　的	（3） ぼかされた 帰　納　的	（4） 帰　納　的
1．結果を検討する	A → B B 偽 ――― A 偽	A → B B 信頼減 ――― A 信頼減	A → B B 信頼増 ――― A やや信頼増	A → B B 真 ――― A 信頼増
2．可能な根拠を検討する	A ← B B 真 ――― A 真	A ← B B 信頼増 ――― A 信頼増	A ← B B 信頼減 ――― A やや信頼減	A ← B B 偽 ――― A 信頼減
3．競争推測を検討する	A ｜ B B 真 ――― A 偽	A ｜ B B 信頼増 ――― A 信頼減	A ｜ B B 信頼減 ――― A やや信頼増	A ｜ B B 偽 ――― A 信頼増

そう考えると，次のような三種類のアブダクションを想定することができる。

$$①\ \frac{B}{A \to B} \qquad ②\ \frac{B}{B \to C} \qquad ③\ \frac{B}{B \mid D}$$

例えば，測定により「三角形の内角の和は 180°である」ということがわかったとする。この現象がＢであり，これに対し，①「平行線の性質を用いてすべての角を一カ所に集めて平角（直線）になるならば，三角形の内角の和は 180°である」という命題を推測する場合，②「三角形の内角の和が 180°であるならば，他の三角形を調べても内角の和は 180°になる」という命題を推測する場合，③「三角形の内角の和は 180°ではない」という相反する命題を推測する場合が考えられる。

このように，①のアブダクションはＢを受け入れた上で解析的にＡを仮定し，その演繹的関係を推測するものである。また，②のアブダクションはＢを仮定として受け入れた上でそれから論理的に導かれるＣを推測するものである。③のアブダクションは，Ｂを受け入れた上でそれに相反する命題を推測するものである。このように，それぞれのアブダクションは，その形式から困難点が異なることがわかる。例えば①であれば解析的にＡを仮定すること，②では論理的にＣを導くこと，③は相反する命題を推測することに困難点があると考えられる。

また，Peirce が指摘するように，探究においてはアブダクションの後に演繹的推論が続き，さらに帰納的推論が続くように，推論は連鎖的に働くものである（CP6，468-473）。

新潟大学教育学部数学教室，『数学教育研究』，第 43 巻，第 2 号，4-10，2008.

数学の探究においても，Polya の指摘のように推測の後に証明が続くことになる（Polya，1965，p.157）。しかしながら，とりわけ小学校段階では子どもの認識論的な困難から，演繹的な証明ではなく帰納的な説明も含めた正当化が続くことになる。

上述の①の場合は，表 1 の「２．可能な根拠を検討する」のＡとＢを入れ替えたものであるから，その後には演繹的推論が働く。例えば先の例では，「平行線の性質を用いてすべての角を一カ所に集めて平角（直線）になるならば，三角形の内角の和は 180°である」という命題に基づいて証明を構成することが続くので，中学校の証明の学習以降に重要となるアブダクションになる。また②の場合は，表 1 の「１．結果を検討する」推論が続くことになる。例えば先の例では，「三角形の内角の和が 180°であるならば，他の三角形を調べても内角の和は 180°になる」という命題に基づき他の三角形についても成り立つかどうかを調べる帰納的推論が続く。これは，小学校段階での正当化の一つである。③の場合は，表 1 の「３．競争推測を検討する」が続くもので，背理法に通じるものである。

以上のように，アブダクションを現象Ｂから「Ａ→Ｂ」や「Ａ←Ｂ」，「Ａ｜Ｂ」を導くものと拡張的にとらえるならば，それぞれの形式から困難点が異なるものであることが指摘できる。また，それぞれのアブダクションの後には Polya の発見的推論が続くことになり，米盛の指摘を補足することになる。

５．おわりに

本稿の目的は，数学教育におけるアブダクションの形式について，米盛（2007）の Polya（1954a，1954b）の研究に対する指摘を参考にしながら検討することであった。その結果，次のような成果を得ることができた。

Ⅰ．
$$\begin{array}{c} B \\ A \to B \\ \hline A \end{array}$$
という形式でアブダクションを表すならば，数学教育においてはＡ→Ｂを導くことがより重要である。

Ⅱ．現象Ｂに対し，次のような三種類のアブダクションが想定される。

① $\dfrac{B}{A \to B}$　② $\dfrac{B}{B \to C}$　③ $\dfrac{B}{B \mid D}$

Ⅲ．Ⅱのそれぞれのアブダクションに対し，形式の特徴からそれぞれの困難点が異なり，またそれぞれのアブダクションに続く発見的推論が Polya の示したものになる。

しかしながら，特に③の形式については，アブダクションと呼んでよいかどうかは検討の余地があろう。また，類比的推論との関係についても検討しなければならない。今後は，これらのことに加え，具体的な事例から数学教育におけるアブダクションの役割を再検討し，算数・数学の授業におけるメカニズムについて研究を進めたい。

なお，本研究は科学研究費補助金若手研究（Ｂ）（課題番号：19730534）の助成を受けている。

註及び引用・参考文献

（１）記号には思考が介在するのであるから，記号の連鎖と推論の連鎖は同義に等しい。つまり，これらは異なるアプローチを行っている訳ではない。

（２）類比的推論で説明できるかもしれないけれども，すべてのアブダクションを類比的推論で説明できる訳ではない（和田，2000）。

（３）慣例にしたがい，Peirce の論文集（Peirce，1931-35，1958）からの引用・参考の場合には，（CP 巻数，パラグラフ数）と表記する。

（４）「→」は「含意する」の意味である。

（５）表 1 における「３．競争推測を検討する」の「｜」は「相容れない」の意味である。

Cifarelli, V.（1999）. Abductive inference: Connections between problem posing and solving. In the *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.2, pp.217-224. Haifa, Israel.

Cifarelli, V. & Sáenz-Ludlow, A.（1996）. Abductive processes and mathematics learning. In the *Proceedings of the Eighteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp.161-166. Columbus, OH.

Mason, J.（1995）. *Abduction at the heart of mathematical being*. Paper presented in honor of David Tall at the Centre for Mathematics Education of the Open University, Milton Keynes, UK.

Norton, A.（2008）. Josh's operational conjectures: Abductions of a splitting operation and the construction of new fractional schemes. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol.39, No.4, pp.401-430.

Peirce, C. S.（1931-35, 1958）. *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Polya, G.（1954a）. *Mathematics and plausible reasoning: Vol.I Induction and analogy in mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press.（柴垣和三雄訳，『数学における発見はいかになされるか 1　帰納と類比』，丸善，1959）

Polya, G.（1954b）. *Mathematics and plausible reasoning: Vol.II Patterns of plausible inference*. Princeton, NJ: Princeton University Press.（柴垣和三雄訳，『数学における発見はいかになされるか 2　発見的推論―そのパターン―』，丸善，1959）

Polya, G.（1965）. *Mathematical discovery Vol.II*. New York / London / Sydney: JOHN WILEY & SONS, INC.（柴垣和三雄・金山靖夫訳，『数学の問題の発見的解き方 2』，みすず書房，1967）

Reid, D. A.（2003）. *Forms and uses of abduction*. Paper presented to Working Group 4: Proof and argumentation. Third Annual Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. Bellaria, Italy.

Rivera, F. D. & Becker J. R.（2007a）. Abduction in pattern generalization. In Jeong-Ho, W. et al.（Eds.）, the *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.4, pp.97-104. Seoul, Korea: Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Rivera, F. D. & Becker J. R.（2007b）. Abduction-induction（generalization） processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, Vol.26, No.2, pp.140-155.

Sáenz-Ludlow, A.（2003）. A collective chain of signification in conceptualizing fractions: A case of a fourth-grade class. *Journal of Mathematical Behavior*, Vol.22, No.2, pp.181-211.

伊東俊太郎（1975）.「創造の機構－科学的発見の方法論的考察－」. 理想社，『理想』, No.506， pp.69-82.

伊藤説朗（1993），『数学教育における構成的方法に関する研究』，明治図書.

添田佳伸（2001），「数学教育において「アブダクション」を考える意味」，日本科学教育学会『年会論文集 25』，pp.357-360.

中原忠男（1998）.「21 世紀型の算数教育の方向と研究課題」. 日本数学教育学会誌，『算数教育』，第 80 巻，第 12 号，pp.16-23.

米盛裕二（1981）.『パースの記号学』. 勁草書房.

米盛裕二（2007），『アブダクション―仮説と発見の論理―』，勁草書房.

和田信哉（2000），「算数・数学教育におけるアブダクションについての考察」，中国四国教育学会誌『教育学研究紀要 1999』，第 45 巻，第二部，pp.281-286.

和田信哉（2003），『帰納的推論と類比的推論を活かした算数の教授・学習に関する研究』，広島大学学位論文（未公刊）.

和田信哉（2007），「図的表現の認識に関する記号論的考察―小数の乗法における数直線を事例として―」，『新潟大学教育人間科学部紀要　自然科学編』，第 10 巻，第 1 号，pp.13-22.

和田信哉（2008），「小数の乗法の意味に関する記号論的考察」，全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，第 14 巻，pp.9-18.