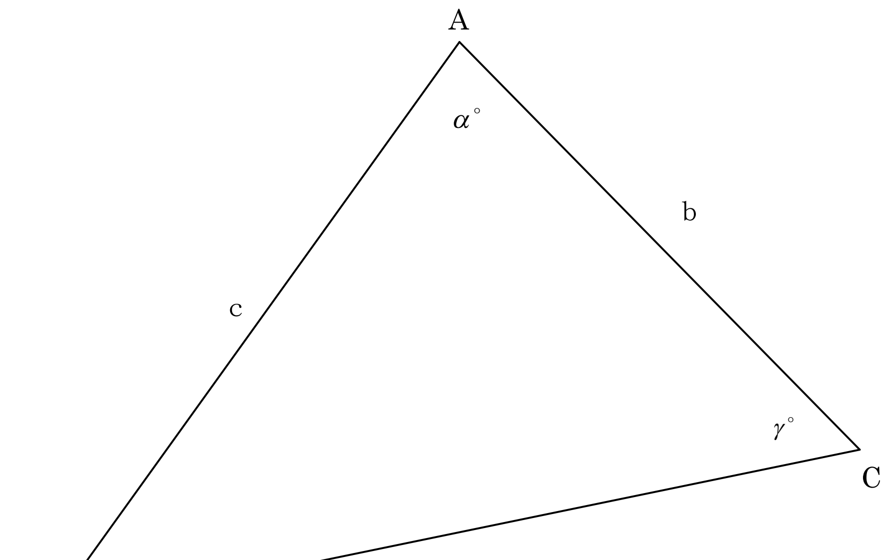
新潟大学教育学部数学教室，『数学教育研究』，第 43 巻，第 2 号，1-3，2008.

整数または有理数 a, b, c で $\sin\ a^\circ$, $\cos\ b^\circ$, $\tan\ c^\circ$ の値が有理数となるもののすべて

新潟大学教育学部

鈴 木 保 高

記号. 三角形 ABC において，BC＝ａ，CA＝ｂ，AB＝ｃ，∠Ａ＝ α°，∠Ｂ＝ β°，∠Ｃ＝ γ° とする。



ysuzuki@ed.niigata-u.ac.jp Yasutaka Suzuki

定理１．（直角三角形）　直角三角形 ABC において，３つの角∠Ａ＝ α° ，∠Ｂ＝ β° ，∠Ｃ＝ γ° の α ，β ，γ がすべて有理数で，３辺の長さ BC＝ａ，CA＝ｂ，AB＝ｃのうち，２つが有理数であるのは，
（１） 45°， 45°， 90°の直角二等辺三角形か，
（２） 30°， 60°， 90°の直角三角形
のいずれかに限る。

定理２．（三角形）　三角形 ABC において，３つの角∠Ａ＝ α° ，∠Ｂ＝ β° ，∠Ｃ＝ γ° の α ，β ，γ がすべて有理数で，かつ，３辺の長さ BC＝ａ，CA＝ｂ，AB＝ｃがすべて有理数であるのは，正三角形に限る。

補題３．　最高次の係数が 1 である整数係数多項式 $g(x)$ が，最高次の係数が 1 である２つの有理数係数多項式 $f(x), h(x)$ の積で表されている。つまり， $g(x)=f(x)\,h(x)$ が成り立っているとする。このとき， $f(x)$ も $h(x)$ も整数係数多項式である。

証明．　省略。

定理４．　有理数 b に対して， $\cos b^\circ$ の値が有理数であるのは， $\cos b^\circ = -1, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, 1$ に限る。

証明．　b は有理数で， $\cos b^\circ = m$ が有理数であるとする。 $b=\dfrac{t}{s}$ （ s は正の整数。 t は整数）とおく。

まず， $-1<\cos b^\circ = m<1$ のときを考える。このとき， $\sin b^\circ \neq 0$ である。$\alpha=\cos b^\circ + i\,\sin b^\circ$ ，$\overline{\alpha}=\cos b^\circ - i\,\sin b^\circ$ ， $f(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}=x^2-2mx+1$ とおく。

$\sin b^\circ \neq 0$ より， $\alpha \neq \overline{\alpha}$ である。また， $f(x)$ は２次の有理数係数多項式である。
$\alpha^{360s}=(\cos b^\circ + i\sin b^\circ)^{360s}=\cos 360t^\circ + i\sin 360t^\circ = 1$ である。同様に $(\overline{\alpha})^{360s}=1$ である。
$g(x)=x^{360s}-1$ とおくと， $g(\alpha)=0$ ， $g(\overline{\alpha})=0$ ， $\alpha\neq\overline{\alpha}$ より， $g(x)=f(x)\,h(x)$ と表せる。そして， $g(x)$ は整数係数多項式で， $f(x)$ は有理数係数多項式である。従って， $h(x)$ は有理数係数多項式である。 $g(x)$ ， $f(x)$ ， $h(x)$ の最高次の係数はすべて 1 である。

補題３により， $f(x)=x^2-2mx+1$ は整数係数多項式であることが導かれるので， $2m$ は整数である。 $2m$ が整数であることと， $-1<m<1$ より， $m=-\dfrac{1}{2}$ ， $m=0$ ， $m=\dfrac{1}{2}$ のいずれかである。 $\cos b^\circ = m$ が有理数であるのは，他に $m=1$ ， $m=-1$ のときがある。以上により， b は有理数で， $\cos b^\circ = m$ が有理数であるのは， $\cos b^\circ = m$ の値が， $-1, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, 1$ のときに限る。証明終。

定理５．　a ， b ， c は有理数とする。このとき，
（イ） 有理数 a に対して，$\sin a^\circ$ の値が有理数であるのは， $\sin a^\circ = -1, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, 1$ に限る。
$0\le a<360$ の範囲に限定すれば， $\sin 0^\circ$ ， $\sin 30^\circ$ ， $\sin 90^\circ$ ， $\sin 150^\circ$ ， $\sin 180^\circ$ ， $\sin 210^\circ$ ， $\sin 270^\circ$ ， $\sin 330^\circ$ に限る。

新潟大学教育学部数学教室,『数学教育研究』, 第 43 巻, 第 2 号, 1-3, 2008.

(ロ) 有理数 b に対して, $\cos b^\circ$ の値が有理数であるのは, $\cos b^\circ = -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$ に限る。
$0 \le b < 360$ の範囲に限定すれば, $\cos 0^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\cos 90^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\cos 180^\circ$, $\cos 240^\circ$, $\cos 270^\circ$, $\cos 300^\circ$ に限る。
(ハ) 有理数 c に対して, $\tan c^\circ$ の値が有理数であるのは, $\tan c^\circ = -1, 0, 1$ に限る。
$-90 < c < 90$ の範囲に限定すれば, $\tan(-45^\circ)$, $\tan 0^\circ$, $\tan 45^\circ$ に限る。

証明. (ロ)の前半は定理 4 である。このことから, $0 \le a < 360$ の範囲に限定すれば, $\cos 0^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\cos 90^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\cos 180^\circ$, $\cos 240^\circ$, $\cos 270^\circ$, $\cos 300^\circ$ に限る。
(イ) 有理数 a に対して, $\sin a^\circ$ の値が有理数であるのは, $\sin a^\circ = \cos(a^\circ - 90^\circ)$ が有理数になるときであるから, 定理 4 または (ロ) から, $\sin a^\circ = -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$ に限る。
$0 \le a < 360$ の範囲に限定すれば, $\sin 0^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\sin 90^\circ$, $\sin 150^\circ$, $\sin 180^\circ$, $\sin 210^\circ$, $\sin 270^\circ$, $\sin 330^\circ$ に限る。
(ハ) 次に, $\tan c^\circ = t$ (c は有理数, $-90 < c < 90$) が有理数とする。このとき, $\sin 2c^\circ = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos 2c^\circ = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ は共に有理数である。 $-180 < 2c < 180$ の範囲に, $\sin 2c^\circ$ と $\cos 2c^\circ$ が共に有理数となるのは, (イ), (ロ) の結論から, $2c = -90, 0, 90$ のみである。従って $c = -45, 0, 45$ のみである。確かに, $\tan(-45^\circ) = -1$, $\tan 0^\circ = 0$, $\tan 45^\circ = 1$ は有理数である。証明終。

定理 1 の証明. 直角三角形 ABC において, 3 つの角∠A= α°, ∠B= β°, ∠C= γ° の α, β, γ がすべて有理数で, 3 辺の長さ BC= a, CA= b, AB= c のうち, 2 つが有理数であるとする。
$\gamma^\circ = 90^\circ$ の直角三角形とする。
(1) a と b が有理数のとき。$\tan \alpha^\circ = \frac{a}{b}$ は有理数であるから, 定理 5 の(ハ)により, $\alpha = 45$ である。従って, このとき, この三角形は 45°, 45°, 90° の直角二等辺三角形である。
(2) b と c が有理数, または c と a が有理数のとき。 $\cos \alpha^\circ = \frac{b}{c}$, または $\cos \beta^\circ = \frac{a}{c}$ が有理数であるから, 定理 4 または定理 5 の(ロ)により, $\alpha = 60$ または $\beta = 60$ である。従って, このとき, いずれの場合も, この三角形は 30°, 60°, 90° の直角三角形である。証明終。

定理 2 の証明. 三角形 ABC において, 3 つの角∠A= α°, ∠B= β°, ∠C= γ° の α, β, γ がすべて有理数で, かつ, 3 辺の長さ BC= a, CA= b, AB= c がすべて有理数であるとする。
余弦定理により, $\cos \alpha^\circ = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ である。a, b, c がすべて有理数のとき, $\cos \alpha^\circ$ は有理数である。従って, 定理 4 または定理 5 の(ロ)により, 有理数 α は 60 か 90 か 120 のいずれかでなければならない。同様に, 有理数 β も, 有理数 γ も 60 か 90 か 120 のいずれかである。更に, $\alpha + \beta + \gamma = 180$ を満たさなければならないから, $\alpha = \beta = \gamma = 60$ である。つまり, この三角形は正三角形である。証明終. 2008.9.3.