

## 関数指導に関する研究

### — 『二元一次方程式と一次関数』の指導を中心に—

和田ゼミナール

山岸 卓矢

#### はじめに

平成20年度全国学力・学習状況調査【中学校】調査結果概要（文部科学省・国立教育政策研究所，2008）で，数学A【13】「二元一次方程式と一次関数のグラフとの関係」の問題について，以下のように述べられている。「二元一次方程式の解を座標とする点の集合が，直線のグラフとして表されることへの理解は，連立二元一次方程式の解が2直線のグラフの交点の座標と一致することへの理解など，方程式と関数の関係の学習場面で必要である。正答率は57.8%であり，二元一次方程式の解を座標とする点の集合を表すグラフについての理解について課題がある」（文部科学省・国立教育政策研究所，2008，p.249）。

また，グラフの位置づけについて，佐々木（2003）は以下のように述べている。

「ここでは，中学校2年生の内容に注目する。ここでは，1次関数のグラフから2元1次方程式のグラフへと発展する。そして，連立方程式の解が，グラフの直線の交点となることを指導する。

これは，関数のグラフから解析幾何への発展である。つまり，図形の性質と方程式の関係へと学習が発展しているのである。

しかし，これは多くの中学生にとっては，学習の飛躍となっている。現象における関係を表現する手段としての関数のグラフから，グラフそのものを考察する数学の世界へと入っていく。その世界へ，滑らかに入ることのできる生徒は多くはないだろう」（佐々木，2003，p.163）。

そして，佐々木（2003）はこの単元の課題として，「関数のグラフから方程式のグラフへと，解析幾何的な世界への学習の発展における生徒の理解の実態。また，その学習過程や指導はどうあるべきか」（p.163）と述べている。

このように，中学校第2学年の一次関数の中で扱われる「二元一次方程式と一次関数」の単元は，生徒の理解に困難があるといえる。しかし，この単元における生徒の理解の実態を明らかにしている研究は見当たらない。

よって，本研究では，中学校第2学年で扱われる「二元一次方程式と一次関数」について，生徒が学習をしていく上でどこが問題となっているかを焦点化し，生徒の理解の実態を調査し，指導への示唆を得ることを目的とする。そのため，本稿では，はじめに「二元一次方程式と一次関数」の指導における基礎的考察をし，生徒の学習上の困難を焦点化する。次に，インタビュー調査によって生徒の理解の実態を明らかにし，その結果を分析，考察する。そして，最後にそれらの考察を踏まえ，指導への示唆を得ることとする。

## 1. 「二元一次方程式と一次関数」の学習における基礎的考察

### 1.1. 「二元一次方程式と一次関数」の学習における問題点

ここでは、「二元一次方程式と一次関数」の学習において、生徒にとってどのような問題があるかを述べていく。

現行の学習指導要領（平成 10 年告示）の扱いを見ると、「二元一次方程式と一次関数」の学習内容について、「C 数量関係（1）ウ 二元一次方程式を関数を表す式とみることができること」（文部科学省，2004）とかかかれている。そして、指導内容の概観として、「二元一次方程式  $ax+by+c=0$ （ただし、 $b=0$  の場合は除く）は、変数  $x$  の値が一つ決まれば、 $y$  の値がただ一つ決まることから、二つの変数  $x$  と  $y$  の関数関係を表す式とみることができる。このような見方を通して、方程式と関数が統合的に理解され、さらに、連立方程式や二次関数などの理解へと発展していく」（文部科学省，2004）とかかかれている。

しかし、先に述べたように、平成 20 年度全国学力・学習状況調査（文部科学省・国立教育政策研究所，2008）や、佐々木（2003）の研究で、この単元において子どもたちが方程式と関数を統合的に理解することについては、学習の飛躍があると指摘されている。そこで、本章では、「二元一次方程式と一次関数」の単元に学習の飛躍があるということを踏まえ、どこに学習上の問題点があるのかを考察していく。

ここで、この単元の学習内容を概観すると、二元一次方程式と一次関数を統合的に理解するために、二元一次方程式を関数を表す式としてみるなどの「式の見方」と、方程式のグラフと関数のグラフが一致するなどの「グラフの見方」の、大きく 2 つの視点から成り立っていると考えられる。

よって、以下では、式の見方とグラフの見方それぞれについての生徒の学習上の困難について考察し、生徒の理解の実態について明らかにするべき点を明確にする。

### 1.2. 式の見方についての考察

ここでは、式の見方についての生徒の学習上の困難を考察していく。

鈴木（2008）は、子どもたちの方程式と関数のとらえ方について、「この学習に入るまでは、『方程式は解を求めるためのもの。関数はその式やグラフの特徴から変化の仕方を調べるためのもの』というように、多くの子どもたちは、それぞれ別々のものとしてとらえてきている」（p.45）と述べている。さらに、「二元一次方程式と一次関数」の学習について、鈴木（2008）は、「この学習を通して、与えられた文字式について、その式の中の文字を未知数としてとらえたり、変数としてとらえたりできるようになり、代数の分野の学習と関数の分野の学習が関係し合う」（p.45）と述べている。しかし、京極（2008）は、「教科書での扱いをみる限り、2 元 1 次方程式の中の文字を変数とみて、そこから関数関係を考察していくという学習は、誠に困難であるといわざるをえない」（p.60）と述べている。

つまり、「二元一次方程式と一次関数」の学習において、文字式の中の文字を、未知数としてとらえたり、変数としてとらえたりすることが子どもたちには求められるが、実際は、生徒にとって非常に困難であると考えられる。

そこで、本研究では、「二元一次方程式と一次関数」の単元における式の見方について、次の 3 点において生徒の理解の実態を明らかにしていく。

まず、生徒が二元一次方程式の文字を、変数としてみているか、未知数としてみているかという点についてである。これは、京極（2008）が指摘しているように、生徒の理解に困難があると予想されるため、生徒の理解の実態を明らかにする必要がある。

次に、式として、二元一次方程式を関数を表す式としてみているかどうかについてである。学習指導要領（平成 10 年告示）では、この単元の学習内容を「二元一次方程式を関数を表す式とみることができること」（文部科学省，2004）としている。しかし、この単元については、生徒に学習の飛躍があると考えられるため、この単元の学習内容をどの程度の理解ができているかを明らかにする必要がある。

最後に、方程式と関数との統合的な理解をする上で、関数自体の理解は不可欠である。そのため、生徒がこれまでの学習で関数というものをどのように認識しているかについても明らかにする必要があると考える。

### 1.3. グラフの見方についての考察

ここでは、グラフの見方についての生徒の学習上の困難を考察していく。

佐々木（2003）は、連立方程式の解がグラフの交点の座標になるということについて、「これは、関数のグラフから解析幾何への発展である。つまり、図形の性質と方程式の関係へと学習が発展しているのである」（p.163）と述べている。そして、「これは多くの中学生にとっては、学習の飛躍となっている。現象における関係を表現する手段としての関数のグラフから、グラフそのものを考察する数学の世界へと入っていく。その世界へ、滑らかに入ることでできる生徒は多くはないだろう」（p.163）と述べているように、グラフが変化の様子を視覚化するための「方法」から、考察する「対象」へと扱いが変わっていると言えるのである。そのため、この点が子どもたちにとっての学習の飛躍となっていると考えられ、そこから生徒の理解に困難が生じると考えられる。

そこで、本研究では、「二元一次方程式と一次関数」の単元におけるグラフの見方について、次の 2 点において生徒の理解の実態を明らかにしていく。

まず、方程式のグラフを、関数や図形としての見方だけでなく、グラフを方程式の解の集まりであるとする「方程式としての見方」で見ているかということについてである。この単元の学習までは、関数のグラフとして一次関数のグラフを扱い、グラフの傾きや切片、変化の割合などを求めるなど、関数としての見方が中心となっている。また、グラフが右上がりの直線であるなど、図形としての見方も授業の中では扱われる。しかし、この単元で新しく方程式のグラフを学習することにより、グラフを二元一次方程式をみたす解の集まりとする見方が出てくる。そのため、グラフの方程式としての見方について、生徒がどの程度理解をしているのか、理解の実態を明らかにする必要がある。

次に、グラフの交点の座標が連立方程式で求めることができるということについての生徒の理解である。この単元で、グラフの交点の座標が連立方程式で求めることができるということを指導する。しかし、これは前述したように、佐々木（2003）が述べる学習の飛躍となる部分であるため、生徒に学習上の困難があると予想される。そこで、この学習内容について、生徒の理解の実態を明らかにしていく。

## 2. 調査の概要

### 2.1. 調査の目的及び方法

前節の課題を受け, 本研究では「二元一次方程式と一次関数」の学習における, 式の見方とグラフの見方それぞれについて, 生徒の理解の実態を明らかにすることを目的として調査を行う。調査はインタビュー調査で行い, 調査の対象は, 新潟市内の公立中学校の第 2 学年の生徒 6 名 (数学の成績が上位群の生徒【H 1】～【H 3】, 数学の成績が中位群の生徒【M 1】～【M 3】), 調査実施時期は平成 21 年 1 月中旬である。

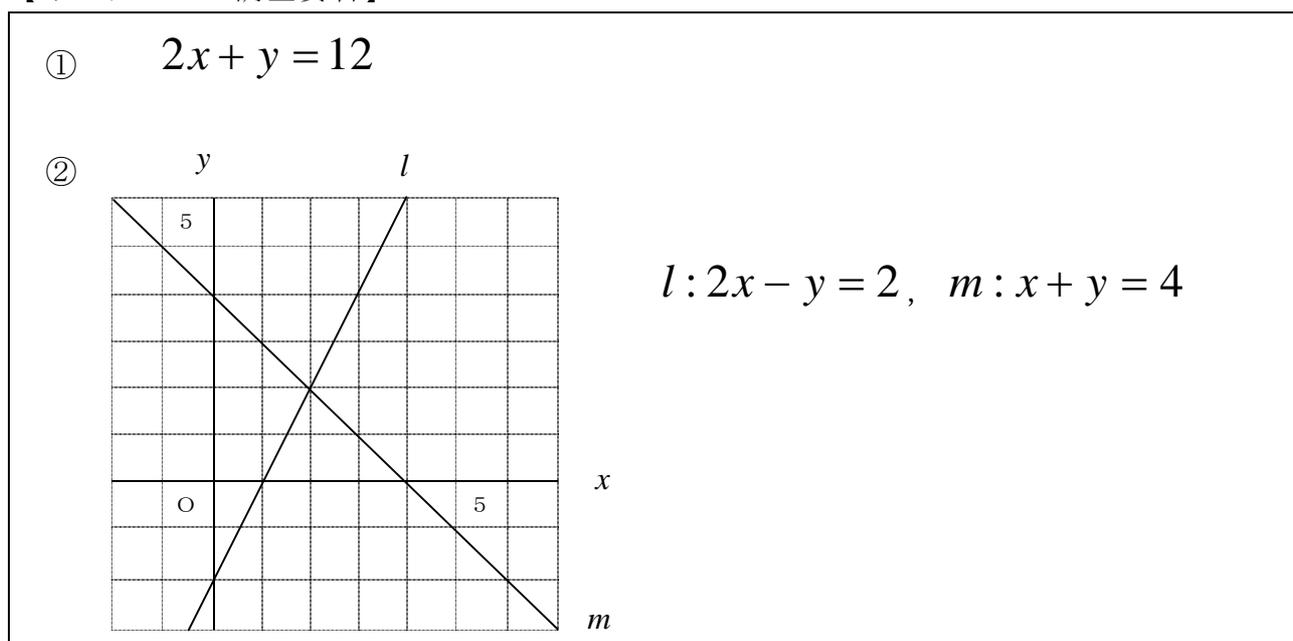
インタビュー調査で明らかにする内容は, 以下の 5 つである。

1. 二元一次方程式の中の文字を, 変数として見ているかどうか
2. 式の形について, 二元一次方程式を関数を表す式として見ているかどうか。
3. 「関数」をどのように捉えているか。
4. グラフを関数や図形として見るだけでなく, さらに方程式としても見ているか。
5. 連立方程式とグラフの交点の座標の関係における, 生徒の理解はどのようなものか。

そして, 上記の 1～5 の内容を明らかにするため, 以下のインタビュー調査資料を用い, 次の質問によってインタビュー調査を行う。

- 質問 1** 二元一次方程式  $2x + y = 12$  が成り立つような  $x, y$  を求めなさい。
- 質問 2**  $2x + y = 12$  は, 関数であると言えるでしょうか。
- 質問 3** 関数であるとはどういうことでしょうか。
- 質問 4** 2 つのグラフ  $l : 2x - y = 2, m : x + y = 4$  があります。この 2 つのグラフを見て, グラフからわかることを説明しなさい。
- 質問 5** なぜグラフの交点の座標が, 連立方程式で求められるのですか。

#### 【インタビュー調査資料】



## 2.2. 調査結果の概要

### 2.2.1. 質問1の結果

- 【H1】二元一次方程式の解を複数求めることはできた。そして、二元一次方程式ではどうして解が1つに決まらないかという質問に対しては、「いろんな組み合わせがあるから」、「 $x$ が変われば、 $y$ も変わるから」と回答している。
- 【H2】はじめは、二元一次方程式の解の求め方を忘れていたが、結果的には二元一次方程式の解を複数求めることはできた。しかし、二元一次方程式ではどうして解が1つに決まらないかという質問に対しては、「わからないです」と回答している。
- 【H3】二元一次方程式の解を複数求めることはできた。また、二元一次方程式の解を表を用いて表そうとしていた。二元一次方程式ではどうして解が1つに決まらないかという質問に対しては、「数に決まりがないから」、「数が0のときとか、数が1のときとか、何回も、なんていうんだろう、パターンがあるから」と回答している。
- 【M1】二元一次方程式の解を複数求めることはできた。そして、二元一次方程式ではどうして解が1つに決まらないかという質問に対しては、「 $x$ と $y$ の組み合わせもいろいろあるし、マイナスも加わるので、それだけまた増える」、「数を上下させて」という表現が見られた。
- 【M2】はじめは、二元一次方程式の解の求め方を忘れていたが、結果的には二元一次方程式の解を複数求めることはできた。二元一次方程式ではどうして解が1つに決まらないかという質問に対しては、「 $y$ が決まってないから、 $x$ を定めていけば、あとの求める数字がわかってくるから」、「 $y$ が決まっていれば1つだけど、まあ、決まってないので、いくつでも解がでます」と回答している。
- 【M3】二元一次方程式の解を複数求めることはできた。二元一次方程式ではどうして解が1つに決まらないかという質問に対しては、「どっちかが変われば、どっちかともなって変わるからです」と回答している。

### 2.2.2. 質問2の結果

- 【H1】 $2x+y=12$ を関数だと「言える」とした。しかし、質問直後に「関数ってなんですか？」と質問している。また、なぜ関数だと「言える」と思ったのか理由を尋ねると、「イコールで関係しているから」と回答したが、詳しくはわからず「なんとなく」と回答している。
- 【H2】 $2x+y=12$ を関数だと「言える」とした。なぜ関数だと「言える」と思ったのか理由を尋ねると、「よくわからない」、「なんとなく」と回答している。
- 【H3】 $2x+y=12$ を関数だと「言えない」とした。しかし、質問後に「関数が何かわからないけど」と発言している。なぜ関数だと「言えない」と思ったのか理由を尋ねると、「関数はその、答えが決まっている。1つしかないからじゃないですかね」と回答したが、関数自体がよくわからないため、説明はできない。
- 【M1】 $2x+y=12$ を関数だと「移項させれば言える」とした。なぜ関数だと「言える」と思ったのか理由を尋ねると、「 $y=-2x+12$ が、あの、一次関数の形になると思います」と回答し、 $2x$ を移項した式が一次関数となるため、もとの二元一次方程式も関数であるとしてみている。

【M 2】  $2x+y=12$  を関数だと「言える」とした。しかし, 質問後に「関数っていう意味がよくわからない」, 「関数って何なんですかね?」と発言している。なぜ関数だと「言える」と思ったのか理由を尋ねると, 「なんか, よくわからないですけど」と回答している。

【M 3】  $2x+y=12$  を関数だと「言える」とした。なぜ関数だと「言える」と思ったのか理由を尋ねると, 「例えば一次関数の式は,  $y=ax+b$  っていう式なので, それを移行すれば, 例えばこれだったら, えっと,  $y=-2x+12$  で, 一次関数の式ができると思ったからです」と回答している。

### 2.2.3. 質問 3 の結果

【H 1】 関数がどういうものかは「わからない」と回答している。今までどういうものを関数と呼んでいたかを尋ねると, 「一次関数」と回答し, 一次関数を「 $y$  が  $x$  で表せる」ものだとしている。また, 関数の授業のイメージは「グラフ, 文字」と答えており, 関数自体を「 $y$  が  $x$  の式で表せるもの」だとしている。

【H 2】 関数がどういうものかは「わからない」と回答している。今までどういうものを関数と呼んでいたかを尋ねると, 「 $x$  と  $y$  があって, イコールがついているもの」と回答している。関数については, あまりよく覚えていないと回答している。

【H 3】 関数がどういうものかは「わからない」と回答している。今までどういうものを関数と呼んでいたかを尋ねると, 「方程式の授業で出てきた」, 「文字使うやつ」と回答している。また, 関数のイメージについて尋ねると, 「 $y=ax+b$ 」と答え, その例として連立方程式の例を挙げている。

【M 1】 関数がどういうものかは「わからない」と回答している。今までどういうものを関数と呼んでいたかを尋ねると, 「傾き, 切片があり, それで  $y=ax+b$  が一次関数。形が法則性のあるもの」と答えており, 最終的には, 関数は「 $y$  と  $x$  がわからないものなので, それを求めるために必要な式」と回答している。

【M 2】 関数がどういうものかは「わからない」と回答している。今までどういうものを関数と呼んでいたかを尋ねると, 「 $y=ax+b$  で求められる式のこと」と回答し, 式のことを関数だと呼んでいる。また, どうして  $y=ax+b$  が関数だといえるのかを尋ねると, 「難しくてわからない」という回答であった。

【M 3】 関数を「2 つの変数の  $x$  と  $y$  がともなって変わる, 2 つの間の関係の数のことです」と回答している。また, 具体例として比例の例を挙げている。

### 2.2.4. 質問 4 の結果

【H 1】 グラフを見てわかることとして, 「関数のグラフ」, 「傾き」, 「グラフが交点をもつこと」, 「 $l$  と  $m$  の交点」, 「交点の座標」などを挙げている。しかし, 交点の座標の意味, 交点の座標が何を表すかについては答えられない。

【H 2】 グラフを見てわかることとして, 「 $l$  と  $m$  が交わる」, 「 $l$  と  $m$  の交点」, 「交点の座標」などを挙げている。しかし, 交点の座標の意味, 交点の座標が何を表すかについては答えられない。

【H 3】 グラフを見てわかることとして, 「切片, 傾き, 直線  $l$ ,  $m$  の交点」, 「交点の座標」,

「 $x$ の増加量， $y$ の増加量」，「一次関数」などを挙げている。そして，交点の座標の意味，交点の座標が何を表すかについては，「 $1$ と $m$ に，まあ適当に数字を入れてって，点を打ってったときに，お互いに等しい数になるときのことの点」と回答している。

- 【M1】 グラフを見てわかることとして，「 $1$ は右上がり， $m$ は右下がり」，「 $1$ は傾きがプラス， $m$ は傾きがマイナス」，「交点の座標」などを挙げている。交点の座標の意味，交点の座標が何を表すかについては「グラフ（線）が交わる場所」と回答している。
- 【M2】 グラフを見てわかることとして，「交点がある」，「交点の座標」，「グラフの傾き」などを挙げている。交点の座標の意味，交点の座標が何を表すかについては答えられない。
- 【M3】 グラフを見てわかることとして，「交わっている」，「交点の座標」，「傾き」，「双曲線ではない」，「比例の式」などを挙げている。交点の座標の意味，交点の座標が何を表すかについては「ともなって変わったときに交わる点のこと，交わる数のこと」と回答している。

#### 2.2.5. **質問5**の結果

- 【H1】 グラフの交点の座標が連立方程式で求められることは知っている。その理由を質問すると，「答えがでるから」と回答しており，それ以上はよくわからない。
- 【H2】 グラフの交点の座標が連立方程式で求められることは知っている。その理由を質問すると，「わからない」，「授業で習ったから」と回答しており，それ以上はよくわからない。
- 【H3】 グラフの交点の座標が連立方程式で求められることは知っている。その理由を質問すると，「 $1$ と $m$ をひいてやることで，お互いに通る点が求められるから」，「どちらか片方をひいてやることで，両方の通っている点が求められるから」と回答している。
- 【M1】 グラフの交点の座標が連立方程式で求められることは知っている。その理由を質問すると，「この連立方程式の解が，座標と一致するというか，同じ数字になるというのを習ったので」と回答している。しかし，それをグラフで説明させると，よくわからない。
- 【M2】 グラフの交点の座標が連立方程式で求められることは知っている。その理由を質問すると，「よくわかんないですけど，授業でやってて」，「連立方程式でこの交点の求め方を教えてもらって，なんか使えるなあって」と回答しており，それ以上はよくわからない。
- 【M3】 グラフの交点の座標が連立方程式で求められることは知っている。その理由を質問すると，「習ったからです」と回答しており，それ以上はよくわからない。

### 3. 調査結果の分析・考察

#### 3.1. 二元一次方程式の中の文字を、変数として見ているかどうか

この質問では、調査を行ったすべての生徒が、二元一次方程式の解を複数答えることができていた。これは、第 2 学年の「連立方程式」の学習の際に、二元一次方程式の解の求め方を学び、さらに「二元一次方程式と一次関数」の学習の際にも導入で二元一次方程式の解を求めることを復習していたため、すべての生徒が二元一次方程式の解の求め方を覚えていたのだと考えられる。

また、二元一次方程式ではどうして解が 1 つに決まらないかという質問に対しては、【H 2】の生徒が「わからない」と回答したものの、残りの生徒は、「 $x$ が変われば、 $y$ も変わるから【H 1】」、「 $y$ が決まってないから、 $x$ を定めていけば、あとの求める数字がわかってくるから【M 2】」というように、二元一次方程式を関数としてみるような表現で回答していた。そのため、上位・中位の生徒については、二元一次方程式の中の文字を変数としてみるができるものと判断する。

#### 3.2. 式の形について、二元一次方程式を関数を表す式として見ているかどうか

この質問では、調査をした 6 名のうち 1 名が関数だと「言えない」とし、あとの 5 名は関数だと「言える」とした。

二元一次方程式が関数だと「言えない」とした生徒【H 3】は、その理由について「関数はその、答えが決まっている。1 つしかないからじゃないですかね」と回答している。この発言は、その後の質問で「 $y = ax + b$ の形で表されるものを関数としてみている」という意味であることがわかった。そして、「関数自体がわからない」と回答しており、明確な根拠を述べることはできなかった。

また、二元一次方程式が関数だと「言える」とした 5 名の生徒のうち、3 名は理由を答えられず、2 名は「 $y = -2x + 12$ が、あの、一次関数の形になると思います【M 1】」、「例えば一次関数の式は、 $y = ax + b$ っていう式なので、それを移行すれば、例えばこれだったら、えっと、 $y = -2x + 12$ で、一次関数の式ができると思ったからです【M 3】」と回答をしており、式変形をして  $y = ax + b$ の形になるものも関数とみなすとしていた。この 5 名の生徒は、二元一次方程式を関数を表す式として見てはいるが、その理由について明確な根拠を述べている生徒はいない。

これらの結果から、上位・中位の生徒においても、二元一次方程式を関数を表す式としてみる見方は身につけていないと判断する。

この原因として考えられるのは、まず、生徒が「式の形で、二元一次方程式と一次関数とを区別している」ということである。【H 3】の生徒は、式の形で二元一次方程式と一次関数とを区別しており、二元一次方程式を関数ではないとした。また、関数だと言えとした生徒【M 1】、【M 3】も、式変形をして二元一次方程式が一次関数になるから、二元一次方程式は関数と言えると説明しており、二元一次方程式と一次関数を別のものとして認識しているということが言えるのである。

次に、「関数関係の意味の理解が十分ではない」ということである。ここでは、生徒が関数を、「関係する 2 つの数量について、一方の値が決まればもう一方の値が 1 つ決まる」

という見方で捉えることによって，二元一次方程式を関数を表す式として見ることができるのである。しかし，関数が何かわからないと回答した生徒が何名もいるように，生徒に関数関係の意味が理解されていないということが言えるのである。これは，現行の学習指導要領（平成 10 年告示）では，関数関係の意味について第 2 学年で始めて導入されており，関数関係の意味について十分な理解がなされぬまま，「二元一次方程式と一次関数」の学習へと進んでいくためであると考えられる。

### 3.3. 「関数」をどのように捉えているか

この質問では，5 名の生徒が関数がどのようなものか「わからない」と回答し，1 名の生徒【M3】が「2つの変数の  $x$  と  $y$  がともなって変わる，2つの間の関係の数のことです」と回答している。

関数を，「2つの変数の  $x$  と  $y$  がともなって変わる，2つの間の関係の数のことです」と回答した生徒【M3】は，調査のため，調査前日に一次関数の復習をしてきた生徒である。そのため，関数の定義を覚えてきており，このような回答をすることができたのだと考えられる。しかし，質問2では式変形をして  $y = ax + b$  の形になるものも関数とみなすという回答をしているため，【M3】の生徒は，関数の定義について表面的な理解に留まっていると判断する。

他の 5 名の生徒は，「今までどういうものを関数と呼んできたか」，「関数の授業にはどのようなイメージがあるか」という質問に対して，「 $y$  が  $x$  の式で表せるもの。  $y = ax + b$ 【H1】」，「 $x$  と  $y$  があって，イコールがついているもの【H2】」，「 $y = ax + b$  で求められる式のこと【M2】」と回答している。そのため，関数のイメージとして， $y = ax + b$  という式の形を関数ととらえていると判断できる。しかし，第 2 学年では，関数として一次関数しか学習していないため，「関数＝一次関数（ $y = ax + b$ ）」という回答が出るのは当然であるといえるだろう。

しかし，この質問に対し【M1】の生徒は，「傾き，切片があり，それで  $y = ax + b$  が一次関数。で，形が法則性のあるものを習ったのは関数だと思います」と回答している。さらに法則性について質問すると，「この  $y = ax + b$  となるみたいに，えっと，その形，その求めるための形があるものみたいな。そういうのだと思います」と回答している。このことから，【M1】の生徒は，式の形だけでなく， $x$  と  $y$  の対応に着目した考え方をしていると判断できる。

このように， $x$  と  $y$  の対応に着目した意見もあり，関数についての素地がある生徒もいるが，「関数」がどのようなものであるかを理解している生徒は多くないと判断できる。

この原因として考えられるのは，「関数の定義，関数関係の意味を授業の中で扱うことが少ない」からであろう。教科書（澤田他，2006，pp. 48-74）の扱いをみても，一次関数の導入で関数の定義，一次関数の定義を確認した後は，式，表，グラフの扱いについての内容が多く，生徒が関数の定義を意識する場面はほとんどないといえる。そのため，生徒に一次関数の表現・処理の能力は身につくが，関数がどういうものであるかということ意識しないまま学習が進行するのだと考えられる。

### 3.4. グラフを関数や図形として見るだけでなく、さらに方程式としても見ているか

この質問では、グラフを関数や図形としてだけではなく、方程式のグラフが二元一次方程式の解の集まり（点の集まり）であるという考えに基づき、方程式としての見方ができているかを調査した。

生徒の回答として、「傾き、切片、一次関数、関数のグラフ」などの関数としての見方や、「グラフが交わる、直線が交わる、直線が重なる、右上がり・右下がりの直線、交点の座標」などの図形としての見方は、すべての生徒から出された。しかし、「交点の座標にはどのような意味があるか」、「交点の座標は何を表しているか」、「方程式のグラフは何を表しているか」という質問に対しては、答えられない生徒がほとんどであった。

しかし、【H3】の生徒は、交点の座標の意味について、「1とmに、まあ適当に数字を入れてって、点を打ってったときに、お互いに等しい数になるときのことの点」と回答している。これは、グラフが方程式の解の集まりを表しており、交点の座標が2つの二元一次方程式を同時にみたす解となることを理解していると判断できる。

このように、方程式のグラフを方程式の解の集まりだとする見方ができる生徒もいるが、多くの生徒は関数のグラフと方程式のグラフとの区別をしておらず、方程式のグラフを方程式の解の集まりだとする見方は、生徒には定着していないと判断できる。

この原因として、次の2つのことが言えるだろう。まず、方程式のグラフの学習の際に、「方程式のグラフが方程式の解の集まりであるということを意識する機会が少ないこと」が挙げられる。教科書（澤田他、2006）の扱いを見ると、方程式のグラフの導入で二元一次方程式の解を表にし、座標上に解をプロットして、点を直線で結ぶという作業が行われる。しかし、その後で二元一次方程式をyについて解くと一次関数の式の形で表すことができ、それぞれのグラフが一致するというのを学習する。このことによって、生徒が方程式のグラフと関数のグラフとを混同することが考えられ、方程式のグラフが何を表すのかということが生徒に定着しないまま学習が進行するということが考えられる。

次に、「一次関数の学習では、グラフに点をとるという作業が少ない」ということが挙げられるだろう。磯田（1995）は、グラフの見方について、「当初は、動的に一次関数のグラフの変化の様子を意識していたが、2点を決めて直線を引く簡単なかき方を学ぶなどすると、グラフを静的にみるようになる。そこへきて、解の組の集合として方程式のグラフを学び、静的な見方で利用を扱って終わるのである。この展開では、「一次関数＝方程式のグラフ＝解析幾何」という認識のみを、生徒に残しかねないのである」（pp.240-241）と述べている。つまり、一次関数の学習では、生徒がグラフをかく際に2点だけを決めて直線をかく方法を学ぶため、グラフが多くの点の集まりであるということを意識せずに、グラフを単なる直線としてとらえてしまうということがいえるのである。

しかし、これは第3学年の $y = ax^2$ や、高等学校で学習する二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の学習などで、式をみたす多くの点をとってそれらのグラフをかくことによって養われる見方であるといえるだろう。

### 3.5. 連立方程式とグラフの交点の座標の関係における、生徒の理解はどのようなものか

この質問では、グラフの交点の座標が連立方程式で求められるということを、すべての

生徒が回答していた。しかし、なぜ連立方程式でグラフの交点の座標を求めることができるのか、その理由を質問すると、5名の生徒が「授業で習ったから」、「連立方程式で求めることができるというのは知っているが、その理由はよくわからない」と回答している。

しかし、【H3】の生徒は、「交点の座標を、連立方程式を解くことによって、お互いに通る、必ず通る、その、交わる線を引いたときに交わる座標を連立方程式で解ける」と回答している。質問4の結果から言えるように、【H3】の生徒は、方程式のグラフが二元一次方程式の解の集まりであるという見方をしている。そのため、グラフの交点の座標が、連立方程式の解であるという見方をしていると判断できる。

このように、「連立方程式によってグラフの交点の座標を求めることができる」ことの理由を説明できる生徒もいたが、多くの生徒は、連立方程式とグラフの交点の座標の意味について道具的理解に留まっていると判断できる。

この原因として考えられることは、まず「連立方程式の解の意味を理解していないこと」であろう。連立方程式の解が、2つの二元一次方程式を同時にみたす値の組であるということを理解していない生徒にとっては、グラフの交点の座標を求めるために連立方程式を用いるということが、単なる手続きになると考えられる。

次に、「グラフを点の集まりとしてみていない」ということが挙げられるだろう。これは、「連立方程式とグラフ」の単元における教科書（澤田他，2006）の扱いを見ると、2つの二元一次方程式のグラフをかき、その交点の座標はどちらの二元一次方程式もみたすため、交点の座標が連立方程式の解となるということを示している。しかし、生徒はこの直前に方程式のグラフを多くの点を取らずにかく方法を学習しているため、このような扱いではグラフの直線上の点が方程式の解を表しているということを意識しづらく、また、連立方程式の解の意味を理解していない生徒にとっては交点の座標の意味はわかりづらいものであると考えられる。

そのため、グラフを点の集まりとしてみることで、二元一次方程式のグラフの意味や、連立方程式でグラフの交点の座標を求めることができることの根拠を知ることができると考えられる。

## 4. 指導への示唆

### 4.1. 式の見方について

前節の考察から、二元一次方程式を関数を表す式として見る見方には課題があり、その原因は、式の形で二元一次方程式と一次関数を区別することと、関数関係の意味の理解が十分ではないことであると考えられる。また、質問3の結果から、関数関係の意味の理解は十分でないということも明らかになっているため、式の見方については、「方程式を関数を表す式として見るための指導」と、「関数の定義、関数関係の意味を理解させるための指導」について、生徒への手立てが必要であると考えられる。そこで、この二つについて考えていこう。

まず、方程式を関数を表す式として見るための指導についてである。調査結果から、生徒は二元一次方程式と一次関数を区別していたり、二元一次方程式が式変形によって「関

数になる」と捉えていたりしている。しかし、二元一次方程式を関数を表す式としてみるには、二元一次方程式は「関数になる」のではなく、「関数である」と見るような指導が必要になる。そこで、授業の中で、「 $x$ の値が1つ決まれば、 $y$ の値がただ1つ決まる」という関数の定義を生徒に理解させた上で、二元一次方程式が関数を表す式と言えるかどうか考えさせ、生徒に二元一次方程式が関数を表す式であるということを理解させる必要がある。

次に、関数関係の意味を理解させるための指導についてである。前節の考察より、関数関係の意味の理解が十分でない原因として、関数の定義や関数関係の意味を授業の中で扱うことが少ないということが考えられるため、授業の中で関数関係の意味についてより多くの指導を行っていく必要があると考えられる。

現行の学習指導要領（平成10年告示）では、関数関係の意味についての指導は中学校第2学年で行われている。しかし、新しい学習指導要領（平成20年告示）では、関数関係の意味の指導が中学校第1学年の比例、反比例の学習の中で行われることになった。これにより、中学校第1学年から関数関係を意識した指導が行えるため、関数関係の意味の理解に改善の可能性があると考えられる。そこで、中学校第1学年の段階で、伴って変わる2つの数量に着目させ、「…と…は関数関係にある」、「…は…の関数である」と表せるさまざまなものを扱い、どのようなものを関数と呼ぶのかを生徒に考えさせながら指導していく必要がある。そのような指導を行うことで、第1学年で学習した関数関係の意味を第2学年の一次関数の単元で再び指導することになるのであるから、生徒の関数関係における理解はより深まると考えられる。

そして、関数関係の意味の理解を基礎として、生徒に「二元一次方程式と一次関数」の単元で、式の見方について指導をしていくことによって、二元一次方程式を関数を表す式として見ることができ、さらには方程式と関数との統合的な理解ができるようになると考えられる。

#### 4.2. グラフの見方について

前述の考察から、グラフの見方については、「グラフを点の集まりとして見る見方の指導」、「方程式のグラフを方程式の解の集まりとして見る見方の指導」、「連立方程式の意味の指導」について、生徒への手立てが必要であると考えられる。そこで、この三つについて考えていこう。

まず、グラフを点の集まりとして見る見方の指導についてである。磯田（1995）が述べているように、一次関数の学習では、はじめは多くの点をとってグラフをかくが、2点だけを決めて直線をかくような指導をすると、グラフを点の集まりとしては意識しなくなる。そのため、生徒にはグラフの簡単なかき方を指導した後も、グラフは直線で表されるが、式をみだす点の集まりであるということを意識させるような指導をしていく必要があると考える。

次に、方程式のグラフを方程式の解の集まりとして見る見方の指導についてである。まず、生徒が方程式のグラフを解の集まりとして見ることができない原因として、授業の中で方程式のグラフが解の集まりであるということを意識する機会が少ないということが挙げられる。そこで、方程式のグラフを指導する際には、グラフが単なる直線ではなく、方

程式の解の集まりであるということを意識させた指導が必要であると考えられる。

連立方程式でグラフの交点の座標を求めることができることを指導する際に, 教科書(澤田他, 2006)では 2 つの方程式のグラフをかき, その 2 つの直線の交わる点を座標から読み取るという指導になっている。しかし, これではグラフを方程式の解の集まりとして見るには困難があると考えられる。そこで, 次のような授業を提案する。方程式のグラフを多くの点で表し, 2 つの方程式の解が 1 点で重なる点を座標から読み取らせる。そうすることにより, グラフの交点の座標が, 2 つの二元一次方程式を同時にみたす点であるということがイメージしやすくなると考えられる。

最後に, 連立方程式の解の意味の指導についてである。学習指導要領解説編(2004, p. 65)には, 「連立方程式の解の意味については, 一次関数と二元一次方程式のグラフとを関連付けることによって一層理解を深めることができる」とかかかれている。つまり, 「二元一次方程式と一次関数」の単元において, 連立方程式の解についての生徒の理解が深まるのである。そのため, この単元においては, グラフの交点の座標を連立方程式で求めるといった計算方法のみを指導をするだけでなく, 連立方程式の解の意味の理解を深めるための指導も行う必要がある。

## おわりに

本研究では, 「二元一次方程式と一次関数」の単元における生徒の学習上の困難を焦点化し, そして生徒の理解の実態を調査し, 指導への示唆を得ることを目的としていた。その結果, 本研究における成果として以下の 2 点が挙げられる。

### 1. 「二元一次方程式と一次関数」の単元における生徒の学習上の問題点を明らかにしたこと

本研究では, 「二元一次方程式と一次関数」の単元において, 式の見方とグラフの見方の 2 つの視点から, それぞれの見方における生徒の学習上の困難を焦点化した。そして, インタビュー調査によって生徒の理解の実態を明らかにし, 学習上の問題点を明らかにできた。

### 2. 「二元一次方程式と一次関数」の単元における指導への示唆を得たこと

本研究では, インタビュー調査によって, 「二元一次方程式と一次関数」の単元における生徒の理解の実態を明らかにすることができた。そして, その結果から得られる学習上の問題点をもとに, 式の見方, グラフの見方についての指導への示唆を得ることができた。

今後の課題としては, 本研究では指導への示唆を得るだけで, 授業実践を行うことはできなかったため, 本研究で提案した指導への示唆の有効性を検証する必要がある。また, 今回は調査を第 2 学年の生徒にしか行っていないが, 第 3 学年の生徒, 高等学校の生徒への調査を行い, 学習段階によって方程式と関数との統合的な理解にどのような段階があるのかを明らかにしていくことが必要であると考えられる。

最後に, 本研究の調査にあたり, ご多用の中ご協力いただいた中学校の先生方, 並びに

生徒の皆さんには心より感謝申し上げます。そして, 指導教員である和田信哉先生には, 最後まで厳しくも温かいご指導をしていただき, ここまで研究をすすめることができました。この場をかりて厚く御礼申し上げます。

【引用及び参考文献】

- 磯田正美 (1995), 「関数のグラフと方程式・不等式の解法の指導のポイント」, 関数: 関係性をとらえる (CRECER: 中学校数学科教育実践講座), pp. 237-241, ニチブン.
- 京極邦明 (2008), 「2 元 1 次方程式を関数的にとらえるには」, 数学教育 11 月号 No.613, pp. 60-63, 明治図書.
- 佐々木哲郎 (2003), 「中学校数学における関数領域の研究成果のまとめと課題」, 日本数学教育学会第 36 回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録, pp160-165.
- 澤田利夫他 (2006), 「中学数学 2」, 教育出版, pp. 48-74.
- 鈴木良隆 (2008), 「ハッとしたその感動が価値を知る」, 数学教育 7 月号 No.608, pp. 44-48, 明治図書.
- 文部科学省 (2004), 中学校学習指導要領 (平成 10 年 12 月) 解説—数学編—, 大阪書籍.
- 文部科学省 (2008), 中学校学習指導要領 (平成 20 年 9 月) 解説—数学編—, 教育出版.
- 文部科学省・国立教育政策研究所 (2008), 平成 20 年度全国学力・学習状況調査【中学校】調査結果概要, pp. 248-249.