

複素数の理解に関する調査研究

新潟大学大学院教育学研究科
数学教育専修
庄司 大祐

はじめに

数学を学ぶ上で「数」を理解することは重要である。数を必要に応じて拡張していく中で、学校数学で最後に登場する「複素数」とはどのような数であろうか。著者自身が高校生だった頃、明確に答えることができなかった。「複素数」の計算はできても、「複素数」がどのようなものを明確に理解している生徒は少ないのではないだろうか。先行研究においても「複素数の集合が高等学校までにおいて学習されるすべての数を含む集合であるという理解はされていないことが分かる」(佐々, 2003)などと指摘されており、複素数の理解を困難とさせる原因の究明が必要とされている。

本稿では、調査問題を通し、実数までの理解と複素数の理解との間にどのような障害があるのかを明らかにする。

1 先行研究における複素数の理解

複素数の理解に関する研究については、梶(1979)や佐々(2003)らの研究に見ることができる。

梶(1979)は、教科書において、すでにあるものとして複素数とその計算法を与え、計算を通じて理解させようとしていることに問題点があると指摘している。上記のような指導では、どのようにして複素数を考え出したかという点や、なぜそのように計算してよいかということの吟味が足りず、数を拡張する立場での複素数の理解は不十分になるという考えである。

佐々(2003)は、自身の調査問題の結果より、虚数単位の用いられていない数については、ほとんど複素数の集合に含まれると判断されておらず、複素数の集合が高等学校までにおいて学習されるすべての数を含む集合であるという理解はされていないことが分かったと述べている。また佐々(2003)は、集合間の理解には、集合における演算の閉鎖性および集合における稠密性の理解が影響するという分析結果を明らかにしている。

2 調査の枠組み

本稿では、集合間の理解と閉鎖性の理解との間に関係があるという前提に立ち調査を行う。

佐々(2003)は、集合間の関係の理解を問う問題を、「数の集合の包含関係」を問う問

題と, 「数の集合としての包含関係の体系的イメージ」を図的に示すことを求めた問題から作成している。本稿の調査問題でも, それに基づき, 自然数から複素数までの, 「閉鎖性の理解」「数の集合の包含関係の理解」「数の集合としての包含関係の体系的イメージの理解」の 3 項目について調査する。著者はその 3 項目について, 表 1 の調査の枠組み①, 表 2 の調査の枠組み②を設け分析する。

表 1 調査の枠組み①

	閉鎖性が理解できている	閉鎖性が理解できていない
包含関係が理解できている	I	III
包含関係が理解できていない	II	IV

表 2 調査の枠組み②

	体系的イメージが理解できている	体系的イメージが理解できていない
I	I 1	I 2
II	II 1	II 2
III	III 1	III 2
IV	IV 1	IV 2

特に, 実数では枠組み①において I に該当する生徒が, 虚数, 複素数では枠組み②のどこに該当するのかを調べる。枠組み②の各セルの特徴は以下の通りである。

I 1 集合としての理解ができている。かつ, 他の集合との関係も理解できている。

I 2 集合としての理解はできているが, 他の集合との関係が理解できていない。

II 1 集合としての理解はできていないが, 他の集合との関係は理解できている。

II 2 閉鎖性は理解できているが, 集合間の関係が理解できていない。

III 1 集合, 他の集合との関係が理解できているが閉鎖性が理解できていない。

III 2 集合としての理解はできているが, 他の集合との関係, 閉鎖性が理解できていない。

IV 1 集合としての理解, 閉鎖性の理解はできていないが, 他の集合との関係が理解できていない。

IV 2 閉鎖性も集合間の関係も理解できていない。

上記の調査の枠組み②において, 実数, 虚数, 複素数を照らし合わせてみることにより, 複素数理解の障害がどこで起こっているのかを明らかにすることができると著者は考える。例えば, 実数 I 1 虚数 II 2 複素数 II 2 という生徒ならば, 複素数への数の拡大の際に虚数の理解が障害となっていることが考えられる。また実数 I 2 虚数 II 2 複素数 II 2 であれば, 実数までの集合の体系的イメージの不足が障害になっていることが考えられる。

3 調査の概要

- (1) 調査学校 新潟県立高校
 (2) 調査学年 複素数指導を終えた第 2 学年 76 名
 (3) 実施時期 平成 20 年 9 月

4 調査結果

(1) 正答率

表 3 問 1 (閉鎖性の理解) の正答者数 (正答率)

自然数	整数	有理数	無理数	実数	虚数	複素数
39 (51.3)	43 (56.6)	15 (19.7)	11 (14.5)	35 (46.1)	4 (5.3)	5 (6.6)

表 4 問 2 (包含関係の理解) の正答者数 (正答率)

自然数	整数	有理数	無理数	実数	虚数	複素数
16 (21.1)	20 (26.3)	13 (17.1)	6 (7.9)	14 (18.4)	22 (28.9)	4 (5.3)

表 5 問 3 (体系的イメージの理解) の正答者数 (正答率)

自然数	整数	有理数	無理数	実数	虚数	複素数
21 (27.6)	23 (30.3)	17 (22.4)	2 (2.6)	11 (14.5)	3 (4.0)	10 (13.2)

上記の結果より, 補集合である虚数, 無理数の理解の低さが目立っているが, 虚数は包含関係の理解が高いことから, 数のイメージが強く, どのような数かはよく理解されていることがわかる。また, 有理数の理解が低いことから, 複素数以前の数の構築でのつまずきが複素数理解に影響を与えていることが予想できる。

(2) 調査の枠組み①の結果

表 6 枠組み① 自然数 (括弧の中は割合)

問 2 \ 問 1	閉鎖性が理解できている		閉鎖性が理解できていない		合計
	数	割合	数	割合	
包含関係が理解できている	11	(14.5)	5	(6.6)	16 (21.1)
包含関係が理解できていない	28	(36.8)	32	(42.1)	60 (78.9)
合計	39	(51.3)	37	(48.7)	76 (100)

表 7 枠組み① 整数 (括弧の中は割合)

問 1 \ 問 2	閉鎖性が理解できている	閉鎖性が理解できていない	合計
包含関係が理解できている	18 (23.7) I	2 (2.6) III	20 (26.3)
包含関係が理解できていない	25 (32.9) II	31 (40.8) IV	56 (73.7)
合計	43 (56.6)	33 (43.4)	76 (100)

表 8 枠組み① 有理数 (括弧の中は割合)

問 1 \ 問 2	閉鎖性が理解できている	閉鎖性が理解できていない	合計
包含関係が理解できている	4 (5.3) I	9 (11.8) III	13 (17.1)
包含関係が理解できていない	11 (14.5) II	52 (68.4) IV	63 (82.9)
合計	15 (19.7)	61 (80.3)	76 (100)

表 9 枠組み① 無理数 (括弧の中は割合)

問 1 \ 問 2	閉鎖性が理解できている	閉鎖性が理解できていない	合計
包含関係が理解できている	1 (1.3) I	5 (6.6) III	6 (7.9)
包含関係が理解できていない	10 (13.1) II	60 (78.9) IV	70 (92.1)
合計	11 (14.5)	65 (85.5)	76 (100)

表 10 枠組み① 実数 (括弧の中は割合)

問 1 \ 問 2	閉鎖性が理解できている	閉鎖性が理解できていない	合計
包含関係が理解できている	14 (18.4) I	0 (0) III	14 (18.4)
包含関係が理解できていない	21 (27.6) II	41 (53.9) IV	62 (81.6)
合計	35 (46.1)	41 (53.9)	76 (100)

表 11 枠組み① 虚数 (括弧の中は割合)

問 1 \ 問 2	閉鎖性が理解できている	閉鎖性が理解できていない	合計
包含関係が理解できている	3 (3.9) I	19 (25) III	22 (28.9)
包含関係が理解できていない	1 (1.3) II	53 (69.7) IV	54 (71.1)
合計	4 (5.3)	72 (94.7)	76 (100)

表 12 枠組み① 複素数 (括弧の中は割合)

問 1 \ 問 2	閉鎖性が理解できている	閉鎖性が理解できていない	合計
包含関係が理解できている	1 (1.3) I	3 (3.9) III	4 (5.3)
包含関係が理解できていない	4 (5.3) II	68 (89.5) IV	72 (94.7)
合計	5 (6.6)	71 (93.4)	76 (100)

上記の結果より, 全体的に閉鎖性, 包含関係ともに理解が低い段階であることがわかる。このことより, 複素数指導の際に, それまでの数をもう一度構築するという作業を間にいれるという改善点を示唆できる。

また, 表 11 の III より, 虚数は閉鎖性が理解できていないにもかかわらず, 包含関係を理解している生徒が多いことがわかる。このことから, (1) でも述べたように, 虚数はイメージが強く, 虚数がどのような数かわかっているが, 数としてどのような性質をもっているかを把握できていない生徒が多いことが考えられる。このことより, 複素数指導の際に, 虚数の数としての閉鎖性を重視した指導を示唆することができる。

(3) 調査の枠組み②の結果

表 13 枠組み② 自然数 (括弧の中は割合)

問 3 枠①	体系的イメージが理解されている	体系的イメージが理解されていない
I	9 (11.8) I 1	2 (2.6) I 2
II	6 (7.9) II 1	22 (28.9) II 2
III	2 (2.6) III 1	3 (3.9) III 2
IV	4 (5.3) IV 1	28 (36.8) IV 2
合計	21 (27.6)	55 (72.4)

表 14 枠組み② 整数 (括弧の中は割合)

問 3 枠①	体系的イメージが理解されている	体系的イメージが理解されていない
I	12 (15.8) I 1	6 (7.9) I 2
II	5 (6.6) II 1	20 (26.3) II 2
III	1 (1.3) III 1	1 (1.3) III 2
IV	5 (6.6) IV 1	26 (34.2) IV 2
合計	23 (30.3)	53 (69.7)

表 15 枠組み② 有理数 (括弧の中は割合)

問 3 枠①	体系的イメージが理解されている	体系的イメージが理解されていない
I	3 (3.9) I 1	1 (1.3) I 2
II	5 (6.6) II 1	6 (7.9) II 2
III	4 (5.3) III 1	5 (6.6) III 2
IV	5 (6.6) IV 1	47 (61.8) IV 2
合計	17 (22.4)	59 (77.6)

表 16 枠組み② 無理数 (括弧の中は割合)

問 3 枠①	体系的イメージが理解されている	体系的イメージが理解されていない
I	1 (1.3) I 1	0 (0.0) I 2
II	0 (0.0) II 1	10 (13.2) II 2
III	0 (0.0) III 1	5 (6.6) III 2
IV	1 (1.3) IV 1	59 (77.6) IV 2
合計	2 (2.6)	74 (97.4)

表 17 枠組み② 実数 (括弧の中は割合)

問 3 枠①	体系的イメージが理解されている	体系的イメージが理解されていない
I	7 (9.2) I 1	7 (9.2) I 2
II	2 (2.6) II 1	19 (25.0) II 2
III	0 (0.0) III 1	0 (0.0) III 2
IV	2 (2.6) IV 1	39 (51.3) IV 2
合計	11 (14.5)	65 (85.5)

表 18 枠組み② 虚数 (括弧の中は割合)

問 3 枠①	体系的イメージが理解されている	体系的イメージが理解されていない
I	1 (1.3) I 1	2 (2.6) I 2
II	0 (0.0) II 1	1 (1.3) II 2
III	2 (2.6) III 1	17 (22.4) III 2
IV	0 (0.0) IV 1	53 (69.7) IV 2
合計	3 (3.9)	73 (96.1)

表 19 枠組み② 複素数 (括弧の中は割合)

問 3 枠①	体系的イメージが理解されている	体系的イメージが理解されていない
I	1 (1.3) I 1	0 (0.0) I 2
II	0 (0.0) II 1	4 (5.3) II 2
III	3 (3.9) III 1	0 (0.0) III 2
IV	6 (7.9) IV 1	62 (81.6) IV 2
合計	10 (13.2)	66 (86.8)

上記の結果より, 無理数, 虚数の体系的イメージの理解が不足していることがわかる。とりわけ虚数は, 包含関係の理解が高いことから, 体系的イメージの理解を高める指導がより効果的になってくるといえるのではないだろうか。実数と虚数の和集合が複素数になっていることを体系的に指導していく必要があると考える。

次に, 表 17 の I 1 に該当する生徒 (実数について閉鎖性, 包含関係, 体系的イメージともに理解できている) が虚数, 複素数で枠組み②に当てはめるとどのような分布になるのかを調査し, 複素数理解の障害を導く。

(4) 実数 I 1 の生徒 (7 名) の虚数, 複素数の理解の結果

表 20 実数を理解している生徒の枠組み②における虚数 (括弧の中は割合)

問 3 枠①	体系的イメージが理解されている	体系的イメージが理解されていない	合計
I	1 (14.3) I 1	1 (14.3) I 2	2 (28.6)
II	0 (0.0) II 1	0 (0.0) II 2	0 (0.0)
III	1 (14.3) III 1	3 (42.9) III 2	4 (57.1)
IV	0 (0.0) IV 1	1 (14.3) IV 2	1 (14.3)
合計	2 (28.6)	5 (71.4)	7 (100)

表 21 実数を理解している生徒の枠組み②における複素数 (括弧の中は割合)

問 3 枠①	体系的イメージが理解されている	体系的イメージが理解されていない	合計
I	0 (0.0) I 1	0 (0.0) I 2	0 (0.0)
II	0 (0.0) II 1	0 (0.0) II 2	0 (0.0)
III	2 (28.6) III 1	0 (0.0) III 2	2 (28.6)
IV	2 (28.6) IV 1	3 (42.9) IV 2	5 (71.4)
合計	4 (57.1)	3 (42.9)	7 (100)

体系的理解とあわせて表 20, 21 の I, II に該当する生徒が少ないことより, 実数を理解している生徒は, 虚数, 複素数ともに閉鎖性の理解不足が障害になっていることが考えられる。また, 表 20 の I 2~IV 2 より, 虚数の体系的イメージの不足もみられる。

5 おわりに

全ての調査結果を踏まえて, 次の 2 点を指導への示唆として提示する。

- ・複素数指導の際に実数までの数を, 閉鎖性を中心として再度構築する。
- ・実数と虚数の和集合としての複素数の体系的理解を深める指導を行う。

これらの指導を行うことにより, 複素数理解の障害となっていることが考えられる補集合の理解, 複素数までの数の理解を高められる。それと同時に, 実数を理解している生徒の障害である虚数, 複素数の閉鎖性の理解も高めることができると考える。

今後の課題として, 個人の自然数から複素数までの理解を調べ, 全体の傾向を導きたい。

引用・参考文献

梶外志子 (1979), 「数を拡張する立場にたつての複素数指導」, 日本数学教育学会誌『数学教育』, 第 61 卷, p155.

佐々祐之 (2003), 「学校数学における数体系の研究 (IV) - 数の体系的理解についての調査分析 -」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第 9 卷, pp223-234

調査問題

問 1 以下の問いで, 常に成り立つ式には○, そうでない場合は×, わからない場合は△をつけてください。

(1)

自然数 + 自然数 = 自然数	
自然数 - 自然数 = 自然数	
自然数 × 自然数 = 自然数	
自然数 ÷ 自然数 = 自然数	

(2)

整数 + 整数 = 整数	
整数 - 整数 = 整数	
整数 × 整数 = 整数	
整数 ÷ 整数 = 整数	

(3)

有理数 + 有理数 = 有理数	
有理数 - 有理数 = 有理数	
有理数 × 有理数 = 有理数	
有理数 ÷ 有理数 = 有理数	

(4)

無理数 + 無理数 = 無理数	
無理数 - 無理数 = 無理数	
無理数 × 無理数 = 無理数	
無理数 ÷ 無理数 = 無理数	

(5)

実数 + 実数 = 実数	
実数 - 実数 = 実数	
実数 × 実数 = 実数	
実数 ÷ 実数 = 実数	

(6)

虚数 + 虚数 = 虚数	
虚数 - 虚数 = 虚数	
虚数 × 虚数 = 虚数	
虚数 ÷ 虚数 = 虚数	

(7)

複素数 + 複素数 = 複素数	
複素数 - 複素数 = 複素数	
複素数 × 複素数 = 複素数	
複素数 ÷ 複素数 = 複素数	

問 2 次の表のそれぞれの数に該当するものを○で囲んでください。一度囲んだ数でも、必要であれば何度囲んでもかまいません。

自然数	$2, -5, 2i, \pi, 2+5i, 0, \frac{2i}{\sqrt{5i}}, \frac{4}{2}, \frac{2}{5}$
整数	$2, -5, 2i, \pi, 2+5i, 0, \frac{2i}{\sqrt{5i}}, \frac{4}{2}, \frac{2}{5}$
有理数	$2, -5, 2i, \pi, 2+5i, 0, \frac{2i}{\sqrt{5i}}, \frac{4}{2}, \frac{2}{5}$
無理数	$2, -5, 2i, \pi, 2+5i, 0, \frac{2i}{\sqrt{5i}}, \frac{4}{2}, \frac{2}{5}$
実数	$2, -5, 2i, \pi, 2+5i, 0, \frac{2i}{\sqrt{5i}}, \frac{4}{2}, \frac{2}{5}$
虚数	$2, -5, 2i, \pi, 2+5i, 0, \frac{2i}{\sqrt{5i}}, \frac{4}{2}, \frac{2}{5}$
複素数	$2, -5, 2i, \pi, 2+5i, 0, \frac{2i}{\sqrt{5i}}, \frac{4}{2}, \frac{2}{5}$

問 3 自然数, 整数, 有理数, 無理数, 実数, 虚数, 複素数それぞれの集合としての関係を図にかいて示してください。

【問 3 の判断基準】

自然数 - 自然数から複素数までの数の集合の中で一番内側にある集合ということが理解できている, かつ整数との関係を理解できているか。

整数 - 自然数との関係を理解できているか。

有理数 - 自然数, 整数, を含む集合であることを理解できているか。

無理数 - 実数における有理数の補集合であることを理解できているか。

実数 - 虚数以外の集合を含む集合であることを理解できているかどうか。

虚数 - 複素数における実数の補集合であることを理解できているかどうか。

複素数 - 自然数から虚数までを含む集合であることを理解できているかどうか