

## 数学的アイデアに基づいた内容の関連づけ — 6 年・加法の計算の仲間分けにおける実践を通して —

長岡市立阪之上小学校

寺井 昌人

### はじめに

児童は, 問題解決に取り組む中でそれぞれの課題に対して, 数学的アイデアを媒介として関連性を見出そうとしている。例えば, 端の量を数値化する際に小数のような見方で数値化しようとする児童もいれば分数のような見方をする児童もいる。また, 体積(かさ)を比べる際に, かさで比べたり重さで比べたりする児童もいる。このような考えはそれぞれの内容に関連性があるからであり自然な思考であると考えられる。

しかし, これまでの教材の配列や構成の原理は, 國本(1998)が「きめ細かく分けられ, 配列されている。」(p.2)と指摘するように細分化されている。このような状況では, 学習内容が互いに関連しているとしてもその関連性が見えにくいものになっている。

この関連性に関して, 新学習指導要領では, 身につけた知識及び技能を活用していくことを重視している。この活用に関する場面は, 生活や学習など広く捉えられている。算数の学習においては, 既習の内容を活用して新しい知識や方法を生み出すことや先の算数や数学の学習にも活用していくことも示されている。つまり, 知識を活用するためには, 違う場面などにも活用できることが重要である。そのためには関連性を見出すことが必要である。

そこで, 本研究では, 関連性に関する問題と新学習指導要領のねらいを踏まえ, 関連性を見出して知識を活用する児童の姿を目指すことを目的とし, さらに中学校数学の指導内容につなげていきたいと考えた。

なお, 本稿は寺井(2009)での児童が数学的アイデアを一般化していく過程上の課題を受け, 再実践を行ったものである。

### 1. 研究のねらい

本研究では, まず内容の関連づけの観点から内容に関連づける視点を設定する。そして, それを基にしながら児童が関連性を見出すような教材を提示する。これにより, 児童が関連性に気付き内容の理解を深め, 知識を活用する能力を高めることをねらいとする。

### 2. 研究の内容及び方法

本研究では, 先の研究のねらいを達成するために以下の内容について, 研究を進めることとする。

#### (1) 内容の関連づけに関する視点の設定

先行研究(金本,1994,1995;奥,1997,1998;Standards2000,NCTM2000 など)から, 内容に関連づける視点として, 次の3つの視点を設定した(表1)。

表 1 内容を関連づける視点

① 数学的アイデアに着目した関連づけ
② 表現様式に着目した関連づけ
③ 知識に着目した関連づけ

①は, 異なった内容同士に何らかの共通の考えを見出し関連づけていこうとするものである。②は, ある内容を複数の表現で表し表現同士を関連づけていこうとするものである。③は, ある内容の手続きとその意味を関連づけていこうとするものである。本研究の目的は, 児童にとって異なると思われる内容同士を関連づけていくものである。そのためには, それぞれの内容間の共通点を認識させる必要がある。よって3つの視点のうち異なる内容同士を関連づけるものとして「①数学的アイデアに着目した関連づけ」に焦点を当てることとする。

また, この数学的アイデアとは, 児童が問題解決に用いる着想のことである(古藤,1971)。しかし, その種類は多く, 児童の思いつきから, より一般性をもつもの(例えば, 方法としては帰納や類推など, 内容としては集合や関数など)まで幅広い。そこで, 授業設計段階では, より一般性のある数学的アイデアとして述べられている数学的な考え方(片桐,2004)に着目していくこととする。さらに, 本研究では, 内容同士を関連づけることを目的とするために, 内容に関係する数学的な考え方の中から, 特に数, 量, 図形の原理を捉えることの基盤になっている「構成要素(単位)の大きさや関係に着目する(単位の考え)」考えを基にする。そして, 数・量の単位や図形の構成要素に着目させ, それに基づき内容を関連づけていくことにより, 児童が内容に関する共通点に気づき理解を深めることができるようにする。

なお, 本研究における「構成要素(単位)の大きさや関係に着目する(単位の考え)」とは次のものである(小林,1999;片桐,2004)。

#### ○数と計算の領域

数の単位とは, 1 や 10,100,0.1,0.01 などや単位分数のことである。また, これら数の単位や構造に着目しその大きさを捉えたり, その個数による計算をしたりすることである。

#### ○量と測定の領域

量の単位とは, 量の大きさを表す cm,m,g などや任意単位のことである。また, 量の大きさを数値で表そうとすることである。

#### ○図形の領域

図形の構成要素とは, 頂点, 中心, 辺, 直径, 対角線, 面などや, ある図形を他の図形を単位として考える見方(例えば, 四角形は, 2つの三角形で構成されているという見方)である。また, 図形の構成要素に着目し図形の性質や概念などを捉えようすることである。

### (2) 内容を関連づける授業の構想

#### ①教材の関連づけの視点

単位の考えを基にしながら児童が内容を関連づける教材を開発する。日常の授業では, 既習の学習内容(以下既習内容)と未習の学習内容(以下, 学習内容と記す)を関連づけた授業が展開される。ここで, 内容を既習内容と学習内容と考えた場合, 表2のⅠ～Ⅲの

ような 3 つの関連づけが考えられる。そして主にこれを基にしながら教材を開発した (寺井, 2008)。

表 2 関連づける内容

内容	既習内容	学習内容
既習内容	I	II
学習内容	II	III

I は, 既習内容と既習内容を関連づけることである。例えば, 整数と小数はそれぞれの数の単位に基づいて考えると同じ構造になっていることに気付かせたりするものである。II は, 既習内容と学習内容を関連づけることである。例えば, 整数の学習をした後に, それを基に数の範囲を小数に広げていったり, 長さの学習を基に面積の学習を考えていったりするものである。これは, 先行研究などで既に実践が行われている (浦川 1971; 五十嵐 1984)。III は, 学習内容と学習内容を関連づけることである。例えば, かさと重さを同時に学習していく中である 1 つ分を単位とする点で共通する部分を見つけたり, 乗法や除法は基準とする量への操作をする点では同じであることをを見つけたりするものである。

## ②本研究の教材

「整数・小数・分数の計算の仲間分け (特設) (第 6 学年)」

この教材は既習内容同士を関連づけるものである。まず, 下の①~⑫の加法の式 (図 1) を提示して仲間分けを行わせる。この仲間分けを通して, 整数・小数・分数といった数の種類による仲間分けから, 数の単位に着目した仲間分けにも気付かせていく。この数の単位に着目した仲間分けから, それぞれの式は数の単位の個数によるものになっており, 数の種類が異なっても, 同じ構造があることを理解させる。

そして, 加法はを単位とする数の個数による演算として理解することによって, 中学校における文字や文字式などの代数の学習への素地も育むことができると考える。

① $0.2+0.3$	② $2+3$	③ $0.3+0.5$	④ $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$	⑤ $\frac{2}{3} + \frac{5}{3}$	⑥ $30+50$
⑦ $300+500$	⑧ $2+5$	⑨ $0.02+0.03$	⑩ $\frac{3}{2} + \frac{5}{2}$	⑪ $200+500$	⑫ $\frac{3}{7} + \frac{5}{7}$

図 1 提示した加法の式

## ③授業の構想

寺井 (2009) では, 児童が数学的アイデアを一般化していく過程に課題があった。これは, 児童の数学的アイデアを十分に引き出すことを行わないまま一般化を行ったからである。そのために, 児童は図や式などを用いて式の構造を説明したり理解したりすることに困難を示した。そこで, 本稿では児童の数学的アイデアを十分に引き出した後に一般化を行う。

まず①～⑫の加法の式(図1)を半分程度提示し, その中で数の単位に着目した仲間分けに気付かせる。次に残り半分の式を提示し, 児童自身で同様の仲間分けをさせる。これにより児童は数学的アイデアに気付きはじめると思われる。そして, 仲間分けの理由を話し合うことにより数学的アイデアを十分に引き出し, その後図や式で一般化を図っていく。このように授業を展開することにより, 数学的アイデアを一般化していく過程の課題が解決できると考える。

### 3. 授業の実際

#### (1) 授業の対象及び時期

授業の対象: 新潟市内公立小学校 6 学年 32 名 (男子 19 名, 女子 13 名)

日 時: 平成 21 年 3 月中旬

#### (2) 授業の実際

ここでは, 授業の全体の様子と抽出児 2 名 (A 児, B 児) の様子から, 授業の実際を次の 3 つの場面から述べる。

①序盤「問題提示の場面」

②中盤「加法の式の共通点を見つける場面」

③終盤「個々の気付きを言葉, 図, 式で表し共通理解を図る場面」

なお, 下記の記述の中の T は教師, A 児 B 児は抽出児童, C は抽出児以外の児童を表す。

#### ①序盤「問題提示の場面」

まず, 問題 12 問中の 6 問 (①～⑥) を児童に示し仲間分けをさせた。発表があったのは, 次のような仲間分けだった (図 2, 図 3)。図 2 は, 和に着目した仲間分けである。これは, 和が 1 より小さい数と 1 より大きいものに分けている。図 3 は, 数の種類に着目した仲間分けである。これは, 整数・小数・分数に分けている。ほとんどの児童は, この図 3 の仲間分けを行っていた。また, A 児, B 児はともに図 3 の仲間分けを行っていた。

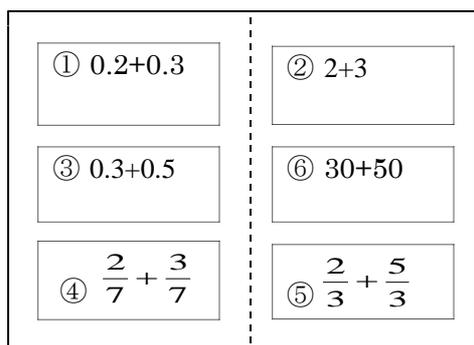


図 2 和に着目した仲間分け

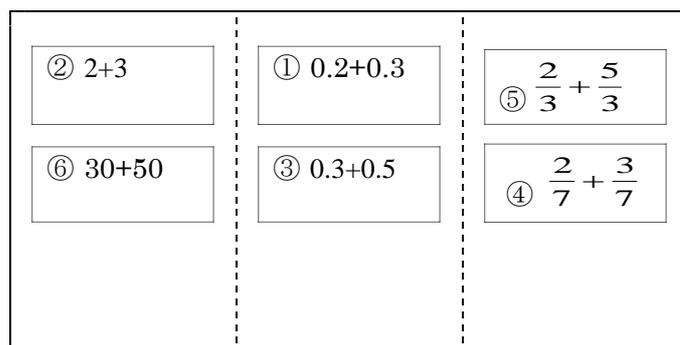


図 3 数の種類に着目した仲間分け

#### ②中盤「加法の式の共通点を見つける場面」

次に図 4 の仲間分けを教師から示し, この分け方では, 残りの 6 問 (⑦～⑫) の問題はどのように分けられるのか児童に考えさせた。全ての児童は, 容易に図 5 のように問題を

仲間分けを行うことができた。

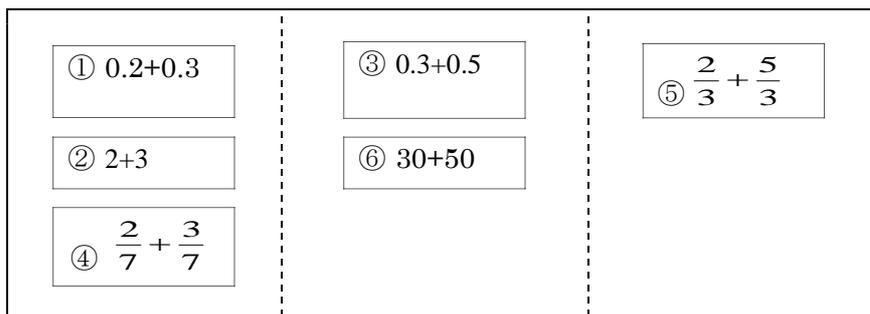


図 4

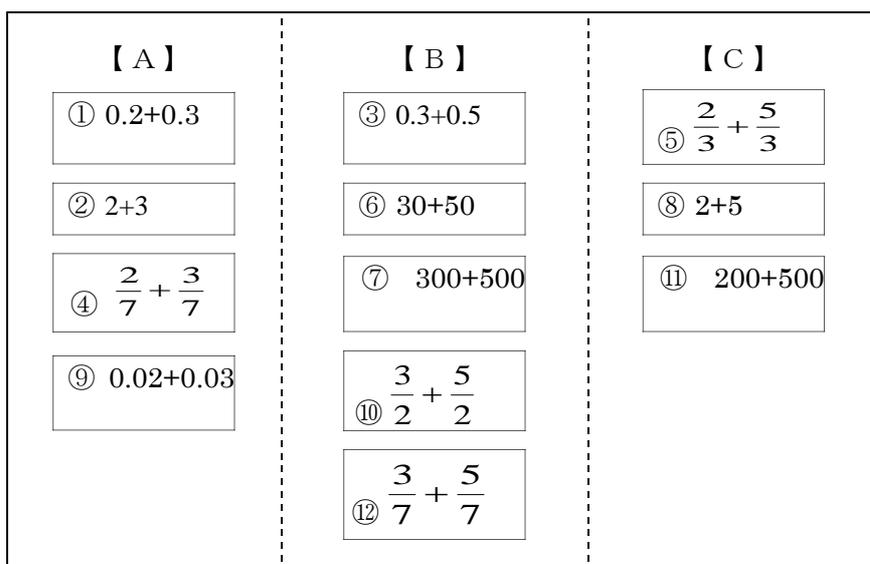


図 5

そして, 図 5 の仲間分けの理由を聞いた。児童が述べた仲間分けの理由は次のようなものである。

**【授業記録①】**

C : 足した時出てくる数が同じ数。例えば  $0.2 + 0.3 = 0.5$ ,  $2 + 3 = 5$ ・(略)・など答えに 5 が全部ある。」

C : 分けたやつに同じ数字が入っている。例えば, それは, 2 と 3 が入っている。真ん中の中のものには, 3 と 5, 右のには, 2 と 5 が入っている。入っている数字が同じだと思いました。

T : 記号をつけましょう。左から **【A】【B】【C】** ということにしましょう。

C : **【A】** は, 2 と 3 が入っていて, 足すと 5, 全部 2 と 3 と 5 が入っている。

C : ぼくもだいたいみんなと同じで, パターンがある。**【A】** は 2 と 3 が全部入っていて, **【B】**, **【C】** も同じ数字が入っている。だから, パターン **【A】** だと全て同じ数字が入っている。

はじめ, 児童は, 答えや式の中の数字に着目した発言をしていた。その中で, 「パター



大方の児童の記述が終了した時点で、どのような説明ができたのか児童に発表させた。

【授業記録③】

B児：ぼくは、式で表しました。例えば、①  $(0.2 + 0.3)$  の式だと、 $2 \div 10 + 3 \div 10$  になる。②の式は・・・

T：【A】のグループだと、どうなるの？

B児： $(2 + 3) \times \square$ （しかく）

T：Bさんが考えている【B】グループはどう書けばいい？

C： $(3 + 5) \times \square$ （しかく）

T： $\square$ （しかく）の中にどんな数字が入るの？

C：例えば、【A】の場合、0.2は2を10個に分けたうちの1つ分なので、かける1/10で当てはまると思います。②だと整数の1、…（略）…

C：別の言い方だけど、【C】の①は、わる100をすると2+5になる。わるなにかするともとの式になる。

児童は、式の構造に着目した発言を行っていた。そこで、先ほど児童が述べていた「基本の式」が（カッコ）の中の数式であることを児童とともに確認した。次に、図で説明した児童が数名いたので、その考えを取り上げた。

【授業記録④】

T：【A】を $\bigcirc\bigcirc + \bigcirc\bigcirc\bigcirc$ と書いた人もいるよ。説明できる人

A児：これは①でいうと、0.1が2個足す0.1が3個という意味を表します。

T：そうすると $\bigcirc$ の中には何が入る。

C：0.1

T：では、【C】は、 $\bigcirc$ で考えると…。

C：パターン【C】は、 $\bigcirc\bigcirc + \bigcirc \times 5$

児童は、図を使い式の構造を説明する中で、図の $\bigcirc$ の中に入る数の単位を説明した。また、【A】【B】【C】の仲間分けは、 $\bigcirc$ を使った図で表すとそれぞれが同じ構造の式になっていることに気付いていった。

なお、授業の振り返りでは、A児、B児は下のような記述をしている。

A児：この勉強で学んだみたらしだんごなどを忘れずに中学でも生かしていきたいです。  
\* A児のみたらしだんごとは、式を $\bigcirc\bigcirc + \bigcirc\bigcirc\bigcirc$ と表すことである。

B児：基本の式を $\div \square$ 、 $\times \square$ をした数になっている。なので【A】の場合は、 $(2 + 3) \times \square$ になっている。

### (3) 考察

#### ① 序盤「問題提示の場面」

問題提示後，多くの児童は，整数・小数・分数といった数の種類による仲間分けを行っていた。授業の構想では，図 4 のような同じ構造の式による仲間分けも児童の発想から出てくると予想していた。しかし，この仲間分けが出てこなかった。この原因は，授業の【手だて①】で，整数・小数・分数，それぞれの数とはどのようなものかと児童に問い掛けたためである。このことにより，数の種類が違うことが強調されたためと考えられる。但し，一部，柔軟な発想で仲間分けを行った児童もいた。この考えを取り上げることでいろいろな分け方ができることを基に次の同じ構造の式による仲間分けにつなげることができた。

#### ② 中盤「加法の式の共通点を見つける場面」

教師が提示した分け方は，スムーズに考えることができた。これは，残りの加法の式を仲間分けをする中で，式の中で使われている数字に着目しやすかったためである。その後，この仲間分けの理由を説明する過程で，ある児童の「パターン」という発言をきっかけに加法の式の共通点を見出そうとしていた。また，「基本の式」という発言も同様である。この場面では，児童は，加法の式の見方を数字に着目したものから徐々に式の構造に着目したものへと変化させていったと考える。

#### ③ 終盤「個々の気づきを言葉，図，式で表し共通理解を図る場面」

この場面では児童は「パターン」や「基本の式」を図や式で表した。この中で，「式による説明」「図による説明」から児童は仲間分け【A】【B】【C】の共通性に気付いていた。式による説明では，同じ構造の式という共通点が明らかになった。また図による説明では，加法の式は数の単位の個数による演算であることが明らかになった。そして，式の構造や数の単位に着目することで整数・小数・分数の加法の式は関連づけることできるといった加法の式に対する見方を深めることができたと考える。

しかし，数字に着目して説明していた児童が 7/32 いた。この場面では，「パターン」と「基本の式」の両方で取り組んでいたため，「パターン」を数字の共通性のみに着目した状態であった。この場面での児童への働きかけを明確にする必要があった。また，児童は，自分の考えを図や式にして説明することができたものの，それらを関連づけることを行わなかった。式での説明での式の構造にかかる乗数や除数，そして図の説明の○がそれぞれの数の単位を表していることを認識させる余地があったと考える。

## 4. 研究のまとめ

### (1) 成果

本研究で実践で提示した一般化した数学的アイデアに基づいた教材により，児童は最終的に式の構造や数の単位に気づき関連性を見出すことができた。複数の式の「パターン」や「基本の式」といった共通性に着目させることにより，児童は，式の中の数字から次第に数の単位や式の構造に着目していった。そして，それを図や式で表現させることで，式の構造や数の単位からそれぞれの式の共通性を認識し，互いの式を関連づけることができ

た。

また，寺井(2009)の数学的アイデアを一般化していく過程上の課題から考えると，本実践からは次のようなことが言える。まず，児童の素朴な着想を拾い上げる。次にある程度共通の認識を図る。そして，より抽象化されたもの(図や式)で表現させる。この段階を踏むことにより，数学的アイデアをスムーズに一般化することができる。これは，今後さら検証していく必要はあるが，一応の成果といえる。

さらに，関連性を見出すことによって，児童は抽象的な式の構造に着目していった。そのような式の構造を基にすることで，知識の活用の範囲を広げることができた。このことは，中学校における文字や文字式などの代数の学習への素地も育むことができると考える。

## (2) 課題

児童は，自分の考えを図や式にして説明することができたものの，それらを関連づけることを行わなかった。式での説明での式の構造にかかる乗数や除数や図の説明の○が数の単位を表していることを認識させる余地があったと考える。このことにより数の単位が強調され，内容の理解をさらに深めることができたと考える。

また，今回は，数と計算の領域内での実践のみだった。この他にも関連づけることができる内容などが多くある。よって，内容を関連づける実践を重ねていき問題点などを明らかにしていく必要がある。

※本稿は，第 91 回全国算数・数学教育研究(京都)大会の発表資料を加筆・修正したものである。

## 参考引用文献

National Council of Teachers of Mathematics(2000)，“Principle and Standards for SCHOOL MATHEMATICS” the United States of America，(筑波大学数学教育研究室 翻訳・監修(2001)，『新世紀をひらく学校数学—学校数学におけるカリキュラムと評価のスタンダード—』，筑波出版会.)

五十嵐京他 8 名(1984)，「教材に流れる単位の考え」，『日本数学教育学会誌』，第 66 集，第 8 号，pp.157-162.

浦川龍巳(1970)，「単位の考えを重視した指導」，『日本数学教育学会誌』，第 52 集，第 12 号，pp.200-202.

奥恒政(1997)，「数学的な関連づけに関する考察(1) —NCTMによる強調とその今日意義を中心に—」，『九州数学教育学研究』，第4号，pp. 9-19.

奥恒政(1998)，「数学的な関連づけに関する考察(2) —「モデル化の関連づけ」と狭義の数学的関連づけ」，『九州数学教育学研究』，第5号，pp. 25-34.

片桐重男(2004)，『数学的な考え方の具体化と指導』，第 1 卷，明治図書.

金本良通他 3 名(1994)，「数学的な関連を生かした教材構成への視点」，『埼玉大学紀要 教育学部(教育科学)』，第 43 卷，第 2 号，pp.25-39.

金本良通他 3 名(1995)，「数学的な関連を生かした授業への試み」，『日本数学教育学会誌』，

第 77 卷, 第 11 号, pp.2-7.

古藤 怜(1971), 『新しい算数授業の創造』, 近代新書出版.

國本景 亀(1998), 「機械論的・原始論的数学教育から活動的・創造的数学教育へ」, 『全国数学教育  
学研究』, 第 4 卷, pp.1-9.

杉山吉茂他 8 名監修(1999), 『CREAR 生きる力を育む算数授業の創造』, 第 5 卷, 数学的な  
考え方を伸ばしていく子ども』, ニチブン, pp.234-239.

寺井昌人(2008), 「単位の考えに基づき内容を関連づける教材の開発」, 『数学教育研究, 新潟  
大学教育人間科学部数学教 室』, 第 43 卷, 第 1 号, pp.78-94.

寺井昌人(2009), 「数学的アイデアに基づき内容を関連づける授業に関する研究」, 『数学教育  
研究, 新潟大学教育人間科学 部数学教室』, 第 44 卷, 第 1 号, pp.78-94.