

擬変数的思考を活かした式の指導 — 5年「割合とグラフ」の実践を通して—

新潟市立木戸小学校 梅津 祐介

1 はじめに

中学校段階における「文字の式」は、生徒にとって理解が著しく困難な教材とされてきた。平成20年度全国学力・学習調査の報告書からも、「与えられた文字式を具体的な事象と関連付け、その意味を読みとることに課題がある」と指摘されている。この原因の1つとして、小学校における式が計算の結果を表すものとして認識されていることが考えられる。

学習指導要領が改訂され、小学校でも文字式が指導されることになった。しかし、指導時期を早めたからといって、先のような問題が解決されるというものではない。重要なのは、式に対する子どもの認識を変えることである。

数字の式でも計算結果に至る過程を意図的に表現すれば、文字の式のように事象に潜む一般性を顕在化させることができる。このように表記としては数字であるが一般性を内包している数のことを藤井(1999)は「擬変数」と呼び、擬変数を用いて文字式の素地指導が展開できることを示している。小学校算数において、擬変数に焦点を当てた式の指導を行うことが必要ではないだろうか。

2 研究の目的

具体的な数値を用いて例示し、次にその計算法を一般的に記述するやり方は、小学校算数においても随所に用いられている。例えば、次のような問題で擬変数を用いることができる。

課題

マッチ棒を使って、正方形を横に並べた形を作ります。正方形が4個できるとき、マッチ棒の数は全部で何本ですか。また、正方形を10個つくるときはどうでしょうか。



この場合、「正方形が4個のとき」「正方形が5個のとき」「正方形が6個のとき」というように、帰納的に考えれば一般式「 $1 + 3 \times (\text{正方形の数})$ 」を導くことができる。

しかし、この図から「マッチ棒の数は最初に1本あり、正方形の数だけ3本ずつ増えていく。」という問題の構造をとらえることができれば、帰納的に考えるときのように複数の式を必要としない。このとき、正方形が4個のときの式「 $1 + 3 \times 4$ 」における「4」

は、様々な数の代表値と考えられ、一般性を含んでいる。ここでの「4」は、擬変数として意識されていると言えるのである。このように、擬変数は数字を多様に見ることが求められている。

この課題の解法を、数字の式、擬変数の式、文字の式で比較したのが表1である。この表から、数字の式から擬変数の式に移行する段階には大きな隔りがあることが分かる。数字の式から擬変数の式に移行するには考察の対象を個々の数から数量の関係に切り替え、定数と変数を見分けることが重要である。本研究では、この「定数と変数を見分ける」ことを「擬変数的思考」と呼ぶ。

本研究の目的は、子どもが擬変数的思考を働かせることで、式を擬変数の認識まで高めていくことである。

【表1 数字の式、擬変数の式、文字の式の対比】

式	一般式に表すまでの過程	式に対する認識
数字の式	正方形が3個のとき、4個のとき、5個のとき・・・と順に調べて、帰納的に「 $1 + 3 \times (\text{正方形の数}) = (\text{マッチ棒の数})$ 」を見出す。	数字は1つの数を表す。
擬変数の式	正方形が4個のとき「 $1 + 3 \times 4$ 」における「4」は様々な数の代表値であると認識し、「 $1 + 3 \times (\text{正方形の数}) = (\text{マッチ棒の数})$ 」を見出す。	数字は多様な数を表し、変わりうる。
文字の式	正方形の数を x 、マッチ棒の数を y として、「 $y = 3x + 1$ 」を見出す。	文字は変数を表す。

3 研究の内容

(1) 単元名 5年「割合とグラフ」

(2) 指導計画

- 1 割合(3時間)・・・本時(2 / 1 2)
- 2 百分率(2時間)
- 3 割合を使う問題(3時間)
- 4 割合を表すグラフ(2時間)
 - ・ 練習と力だめし(2時間)

(3) 授業の概要

前時までには、バスケットのシュートの成績が、小数や分数で表すことができることを学習している。本時では、子どもが「同じ当たり具合」となる様々なくじをつくる活動を設定し、まず一般性を直観させるものとして「5本のうち3本当たり」のくじを示す。くじの数と当たりの数が変わっても「同じ当たり具合」は変わらない。ここでは、くじの数と当たりの数に変数、当たり具合が定数となる。これを見分けるのに、擬変数的思考が必要となる。

子どもは擬変数的思考を働かせ, 様々な方法で「同じ当たり具合」となるくじを求めていく。そして, 一般式「当たりの数÷くじの数=0.6」を導くことをねらいとした。

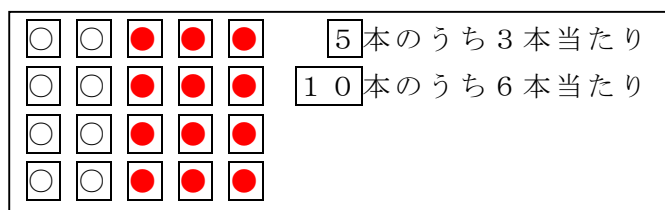
本時においては, 次の①が擬変数的思考, ②が擬変数としての認識である。

- ① 「5本のうち3本当たり」と「同じ当たり具合」となる複数の組み合わせを求めること。(くじの数と当たりの数に変数であり, 当たり具合が定数であることを理解すること。)
- ② 「10本のうち6本当たり」や「20本のうち12本当たり」のくじの2量の関係をとらえようとして, $6 \div 10$ も $12 \div 20$ も「0.6」になることが見えたとき, 2量の関係が「5本のうち3本当たり」と同じであることが分かること。このとき「6」「10」, 「12」「20」には一般性が内包されており, 擬変数と言える。

4 授業の実際と考察

(1)一般性を直観させる典型例を示す

まず, 箱に入ったくじ(赤のボール: 当たり 緑のボール: はずれ)を子どもに引かせた。このときのくじは, 5本のうち3本が当たりである。これが問題を考えていくときの典型となる。そして, 「5本のうち3本当たり」のくじを右のように図で表



【図1】

し, 分数で $3/5$ と表すこともできることを確認した。同じようにして, くじが10本になったときも確認したところで, 『5本のうち3本当たり』と『同じ当たり具合』となる, いろいろなくじを作りましょう。」と課題を提示した。

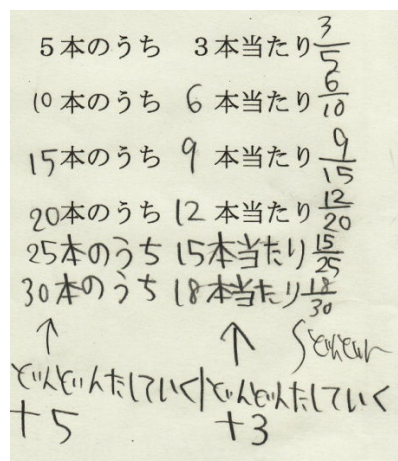
典型例を示した後に, 「10本のうち6本当たり」も示したことで, 子どもたちは方法の見通しをもって, 「同じ当たり具合」となるくじを求めることができた。

(2)「同じ当たり具合」となる複数のくじを求めさせる

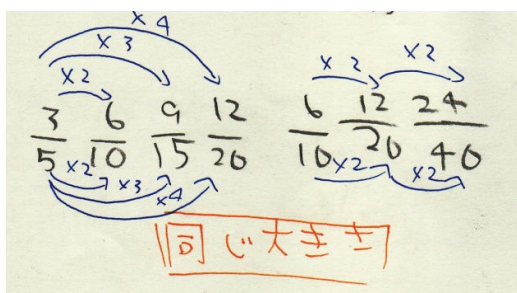
子どもの反応は, 図, 分数, 割合の 3 つの方法が予想された。図で考える子どもは, 「5 本 - 3 本」の組み合わせを増やして, 「同じ当たり具合」のくじを求めていく。分数で考える子どもは, $3/5$ をもとにして乗法的に求めるか, 分母と分子を順々と 2 倍して求めていく。割合で考える子どもは, 商分数から 0.6 を求め, くじと当たりの商が 0.6 となる組み合わせを求めていくだろうと予想であった。

子どもは, くじと当たりの数を自由に変化させて, 「同じ当たり具合」となるくじを求めていた。自由に数を変化させることで, 子どもからは変化のきまり着目した考え, 同値分数を用いた考え, 比例の見方を用いた考えが見出された。

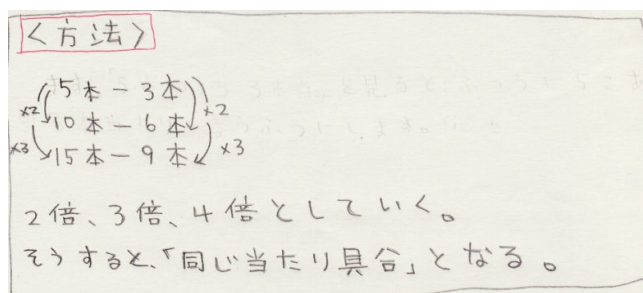
予想した商分数から 0.6 を求める考えは, ここでは出されなかった。子どもは, 前時と本時の学習内容を関連付けていなかったようである。



【図 2】変化のきまりに着目した考え



【図 3】同値分数を用いた考え



【図 4】比例の見方用いた考え

子どもたちがそれぞれの考えで「同じ当たり具合」となる複数の式を求めたところで, グループで話し合い, 他のグループとは違う「同じ当たり具合」となるくじを発表させた。この話し合いの中で, 求めた方法についても交流がされることを期待していた。各グループから出されたくじは次の 7 組である。⑦のくじは「同じ当たり具合」ではないのだが, ここで気付く子どもはいなかった。

- | | |
|-------------------|-------------------|
| ① 20本のうち 12本当たり | ② 25本のうち 15本当たり |
| ③ 30本のうち 18本当たり | ④ 50本のうち 30本当たり |
| ⑤ 100本のうち 60本 | ⑥ 185本のうち 111本当たり |
| ⑦ 765本のうち 339本当たり | |

割合の考えが子どもから出されなかったが, 提示した図にその原因があろう。この図からは, 増加のパターンしか確認することができないので, 図や分数の考えの方が求めやすかったのだと考える。

(3) 求めたくじが「同じ当たり具合」となる根拠を問う

各班から「同じ当たり具合」となるくじが出されたところで、求めたくじが本当に「同じ当たり具合」と言えるのか、その根拠を問うた。子どもたちは、変化のきまり着目した考え、同値分数を用いた考え、比例の見方を用いた考えを根拠としてもってきた。子どもたちの主たる根拠は分数であった。

(授業記録より)

- | | |
|------|--|
| C227 | はい、えっと、今やったやつが、何回もどんどん、かける2が、どんどんかける2が、上の数になって、その何本ってやつが、その今の当たり具合って出てる数 |
| T103 | になると思う。 |
| C228 | どんどん増やすというのは？ |
| T104 | かける何が増えていくことに出た何本ってやつが、数が合っていると思う。 |
| C229 | 今度かける3にするの？ |
| T105 | かける3とか、かける4にしていくと、絶対に出てる当たり具合だと思う。 |
| C230 | Yさん、今、何かたすとか増えるとかいったよね。 |
| T106 | あー、いんだいんだ、同じだ。 |
| C231 | じゃ、いいよ。同じでも。 |
| T107 | 足してたでしょ？ |
| C232 | 同じでも教えて。 |
| C233 | 5かける3とかじゃなくて、10たす5とかやった。ただそれだけ。 |
| T112 | 10たす5がその3で、15たす5が20みたいな感じ？ |
| C234 | Nさん、言ってること分かった？ |
| | えっと、その10たす5は、5を2つと5を5を1つでかける3ってことだから15になるから、だから、それを次は15たす5は4倍の20になるから、それをそんどん繰り返していった。 |

子どもたちは、「5本のうち3本当たり」の関係を崩さないように複数のくじを作っていた。このときの子どもは、数が変わってもくじの数と当たりの数の関係が変わらないことに確信をもっていた。しかし、商である「0.6」に着目することはできなかった。

子どもの発言からは、くじの数や当たりの数が具体的にいくつであるかにこだわらず、それらの関係に意識があることが分かる。このことから、子どもが式を対象として認識していたと考えられる。

また、定数「0.6」に着目することができなかったのは、式を対象として認識し、計算しようとしなかったためだと思われる。計算もしつつ、式を対象として認識することは、子どもにとって困難であったようである。

(4) 商分数「0.6」が何を意味しているのかを問う。

式を対象と認識していたために、教師の「求めたくじが、なぜ『同じ当たり具合』と言えるのか」という問いかけにも、商「0.6」を根拠とする発言は出なかった。

そこで、意図的にくじと当たりの組み合わせを○で囲んだ。これまで横に見ていた関係を縦に見させることで、どの組み合わせにも共通する「0.6」という数値を発見させ、「同じ当たり具合」となる根拠を見出そうとした。そして、C311「 $3 \div 5$ をして出た小数と $6 \div 10$ をして出た小数は、同じ数なら答えは同じ数。同じ大きさだと思おう。」という発言が出され、自分たちが求めたくじと当たりの商がどれも「0.6」になっているかを確認めた。そうすることで、⑦765本のうち339本当たりが「同じ当たり具合」ではないことも確認することができた。最後に、この「0.6」が「当たり具合」を示すものであることを確認し、本時を終えた。

本時における教師の一般性のとらえは、一般式を求めることであった。しかし、次時では「0.6を使えば、いろいろなくじを作ることができる。」という子どもの発言があり、一般性をより広くとらえていた。擬変数の認識と一般性のとらえは大きく関連するので、教師が指導過程で一般性をどうとらえるかということが重要である。

5 研究のまとめ

(1) 成果

本研究では、数字の式から擬変数の式に至る段階に、「定数と変数を見分ける」という擬変数的思考を位置づけた。子どもは「同じ当たり具合」となる複数の式を求める過程で、くじと当たりの数を自由に変化させていた。子どもは、数が変わってもくじの数と当たりの数の関係が変わらないことに確信をもっており、変わるものと変わらないものを見分けるには、自分で数を自由に変化させることが重要であることが分かった。

また、子どもは、具体的な数にこだわることなく、考察の対象を個々の数から数量の関係に切り替えることができていた。これは式を対象と認識していたと言えるであろう。

(2) 課題

計算をしつつ、式を対象として見ることには、子どもにとって困難が伴った。数字の式から擬変数の式に移行するには、計算しないで式の構造や関係をとらえることだけでなく、演算との対応も視野に入れた指導が必要である。

子どもがどこまで一般性を認識しているのか、代表例としての意識をどこまでもっているのか、はっきりと示すことができなかった。擬変数としての認識は、子どもの発言や記述の途中に出てくることが多い。子どもの発言や記述をさらに丁寧に追うことが必要である。

※本稿は、第91回全国算数・数学教育研究（京都）大会の発表資料を加筆・修正したものである。

【引用・参考文献】

- ・藤井斉亮(1999)「『数字の式』から『文字の式』に至る指導－擬変数について－」『新しい算数・数学教育の実践を目指して』東洋館出版社, pp.153-162
- ・藤井斉亮(2000)「『式に表す』ことの困難性について」『第33回数学教育論文発表会論文集』 pp.349-354
- ・国立教育政策研究所『特定の課題に関する調査』
<http://www.nier.go.jp/kaihatsu/tokutei/index.htm>
- ・国立教育政策研究所『平成20年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書』
http://www.nier.go.jp/08chousakekkahoukoku/03chuu_chousakekka_houkokusho.htm