基本演算として “2 倍” と “2 倍プラス 1” をもつ 自然数論の公理化

新潟大学 教育学部　高 野 道 夫

表題に言う “2 倍” および “2 倍プラス 1” の演算とは，それぞれ $n^O = 2n,\ n^I = 2n + 1$ である演算 ^{O} および ^{I} のことである．自然数 1 にこれらの演算を次々と施すことにより，

$$2 = 1^O,\ 3 = 1^I,\ 4 = 2^O = 1^{OO},\ 5 = 2^I = 1^{OI},\ 6 = 3^O = 1^{IO},\ 7 = 3^I = 1^{II},\ \ldots$$

のように，各自然数が一通りのやり方で得られる．

では，**ペアノの公理系** (小節 1.1 参照) **で用いた後者演算**，すなわち $n^S = n + 1$ である演算 ^{S}，**の代わりに演算 ^{O} および ^{I} を用いるとすると，公理系はどんなものになるだろうか．**

その問題に一つの答を与え (小節 1.2)，それで十分であることを示す (第 2 節以降) のが本稿の目的である．

筆者はこの夏，自然数論の公理系をテーマとして教員免許状更新講習の講師を務めた．そこでは，ペアノの公理系の紹介とそれに基づく理論展開の略述に加え，筆者が文献 [4] で報告した，二つの n から $2n$ を作る演算および $n + 1$ と n から $2n + 1$ を作る演算を用いる自然数論の公理系の紹介とそれに基づく理論展開を略述した．その中で，どちらにおいても公理系は三つの群，すなわち，

I. 自然数を作る公理群

II. 新しく作られた自然数が前に作られている自然数とは異なることを主張する公理群

III. 公理群 I に基づいて作られたもののみが自然数であることを主張する公理

からなることを述べ，最後に認定試験の問題として上記の問題を課したのである．結果としては，講義中の「誘導」が効き，高等学校教員 6 名，中学校教員 1 名の計 7 名の受講者全員から，筆者が考えていた線，すなわち小節 1.2 に述べる公理系に沿った解答が返ってきた．解答の内訳は，公理群 I にあたる公理しか書いていない者が 1 名,「任意の自然数 x, y に対して $x^O \neq y^I$」にあたる公理 (小節 1.2 の公理 A6 参照) が抜けている者が 3 名，上の公理を「任意の自然数 x に対して $x^O \neq x^I$」としている者が 2 名，完全にできていた者が 1 名であった．

1　公理系

小節 1.1 でペアノの公理系を，また，表題に挙げた演算 ^{O} および ^{I} に基づく自然数論の公理系を小節 1.2 で，それぞれ述べる．最後の小節 1.3 において，これら二つの公理系が実質的に同じであることの証明には何が必要かを述べ，次節以降の課題を明らかにする．

1.1　ペアノの公理系

ペアノの公理系における無定義用語は，1 項述語「$\cdots$ は自然数である」，対象 1，および 1 項演算 ^{S} の三つであり，公理系は次の 5 個の公理からなる：

ペアノの公理 P1　1 は自然数である．

ペアノの公理 P2　x が自然数であれば，x^S も自然数である．

ペアノの公理 P3　x が自然数であれば，$x^S \neq 1$.

ペアノの公理 P4　x, y が自然数で $x^S = y^S$ であれば，$x = y$.

ペアノの公理 P5　自然数に関する性質 P が次の条件 (i), (ii) を満たせば，すべての自然数について性質 P が成り立つ：

(i) 自然数 1 について性質 P が成り立つ.

(ii) 自然数 x について性質 P が成り立てば，x^S についても性質 P が成り立つ.

上記 3 分類に関しては，公理 P1, P2 が自然数を作る I 群，公理 P3, P4 が新しく作られた自然数が前に作られている自然数とは異なることを主張する II 群，そして公理 P5 が公理 P1, P2 に基づいて作られたもののみが自然数であることを主張する III 群に，それぞれ分類される.

1.2　演算 ^{O} および ^{I} に基づく公理系

この公理系における無定義用語は，1 項述語「$\cdots$ は自然数である」，対象 1，および 1 項演算 ^{O}, ^{I} の四つであり，公理系は次の 9 個の公理からなる：

公理 A1　1 は自然数である.

公理 A2　x が自然数であれば，x^O も自然数である.

公理 A3　x が自然数であれば，x^I も自然数である.

公理 A4　x が自然数であれば，$x^O \neq 1$.

公理 A5　x が自然数であれば，$x^I \neq 1$.

公理 A6　x, y が自然数であれば，$x^O \neq y^I$.

公理 A7　x, y が自然数で $x^O = y^O$ であれば，$x = y$.

公理 A8　x, y が自然数で $x^I = y^I$ であれば，$x = y$.

公理 A9　自然数に関する性質 P が次の条件 (i), (ii), (iii) を満たせば，すべての自然数について性質 P が成り立つ：

(i) 自然数 1 について性質 P が成り立つ.

(ii) 自然数 x について性質 P が成り立てば，x^O についても性質 P が成り立つ.

(iii) 自然数 x について性質 P が成り立てば，x^I についても性質 P が成り立つ.

上記 3 分類に関しては，公理 A1–A3 が自然数を作る I 群，公理 A4–A8 が新しく作られた自然数が前に作られている自然数とは異なることを主張する II 群，そして公理 A9 が公理 A1–A3 に基づいて作られたもののみが自然数であることを主張する III 群に，それぞれ分類される.

公理 A9 に基づいて自然数に関するある性質がすべての自然数について成り立つことを示す証明法が，この公理系における**数学的帰納法**である.

1.3　二つの公理系の等値性

小節 1.1 に述べたペアノの公理系と小節 1.2 に述べた公理系の等値性，すなわち二つの公理系がすべての定理を共有することの証明には，次の $(*)$ および $(**)$ が必要である：

$(*)$ ペアノの公理系に基づいて，演算 ^{O} および ^{I} を定義し，小節 1.2 の公理 A1–A9 を証明する.

$(**)$ 小節 1.2 の公理系に基づいて，演算 ^{S} を定義し，ペアノの公理 P1–P5 を証明する.

このうち $(*)$ については，ペアノの公理系に基づく自然数論の展開が多くの文献に見られ，それらを利用すれば容易に実行することができるので，本稿では略す．

そこで以下においては $(**)$ の実行，すなわち，後者演算 ^{S} を定義し，ペアノの公理 P2–P5 を導くことを目標として，小節 1.2 の公理 A1–A9 に基づく自然数論を展開する．(ペアノの公理 P1 は公理 A1 と一致する．)

以下では簡潔のため，自然数全体からなる集合を $\mathbb{N}$ で表す．また，公理 A1, A2 は断らずに用いることにする．

2　帰納定理

この節では次の定理 2.1 および系 2.2 を証明する．ペアノの公理系における話であるが，系 2.2 型の定理をデーデキント [5]，島内 [3]，エビングハウス他 [2] においてそれぞれ「帰納法による決定の定理」,「帰納定理」,「再帰性定理」と呼び，系 2.2 の f にあたる写像を彌永 [1] では「準同型写像」と呼んでいる．系 2.2 型の定理はその他の多くの文献にも掲げられている．一方，より一般的な定理 2.1 型の命題は，系 2.2 型の命題から容易に導かれるせいか，どれにおいても触れられていない．しかしながら本稿では，加法の一意的存在を示すには系 2.2 で十分だが，後者演算の一意的存在を示すときには定理 2.1 のほうが便利であり，証明はどちらにしてもほとんど同じなので，より一般的な定理 2.1 に直接証明を与えることにした．

定理 2.1　任意の集合 M とその元 m_1，および直積 $M \times \mathbb{N}$ から M への二つの写像 g, h が与えられたとき，次の条件 (a), (b), (c) を満たす $\mathbb{N}$ から M への写像 f が一意的に存在する：

(a) $f(1) = m_1$.

(b) 任意の $x \in \mathbb{N}$ に対し，$f(x^O) = g(f(x), x)$.

(c) 任意の $x \in \mathbb{N}$ に対し，$f(x^I) = h(f(x), x)$.

小節 2.1 および 2.2 でそれぞれ一意性および存在の部分を証明する．

系 2.2 (帰納定理)　任意の集合 M とその元 m_1，および M から M への二つの写像 g, h が与えられたとき，次の条件 (a), (b), (c) を満たす $\mathbb{N}$ から M への写像 f が一意的に存在する：

(a) $f(1) = m_1$.

(b) 任意の $x \in \mathbb{N}$ に対し，$f(x^O) = g(f(x))$.

(c) 任意の $x \in \mathbb{N}$ に対し，$f(x^I) = h(f(x))$.

<u>証　明</u>　定理 2.1 の $M \times \mathbb{N}$ から M への二つの写像として $(m, x) \mapsto g(m)$ および $(m, x) \mapsto h(m)$ であるものを取ればよい．　□

2.1　定理 2.1 の一意性の部分の証明

$\mathbb{N}$ から M への写像 f_i $(i = 1, 2)$ がともに定理 2.1 の条件 (a), (b), (c) を満たしたとする：

$(\mathrm{a})_i$ $f_i(1) = m_1$.

$(\mathrm{b})_i$ 任意の $x \in \mathbb{N}$ に対し，$f_i(x^O) = g(f_i(x), x)$.

$(\mathrm{c})_i$ 任意の $x \in \mathbb{N}$ に対し，$f_i(x^I) = h(f_i(x), x)$.

$f_1 = f_2$，すなわち任意の $x \in \mathbb{N}$ に対して $f_1(x) = f_2(x)$ であることを示したい．これを x の性質 $f_1(x) = f_2(x)$ に数学的帰納法を適用することにより，証明する．

(i) $f_1(1) \overset{(\mathrm{a})_1}{=} m_1 \overset{(\mathrm{a})_2}{=} f_2(1)$ より，1 については成り立つ．

(ii) $\bar{x} \in \mathbb{N}$ については成り立つと仮定する．次の式変形により，$\bar{x}^O$ についても成り立つ：

$f_1(\bar{x}^O) \overset{(\mathrm{b})_1}{=} g(f_1(\bar{x}), \bar{x}) \overset{\text{仮定}}{=} g(f_2(\bar{x}), \bar{x}) \overset{(\mathrm{b})_2}{=} f_2(\bar{x}^O)$.

(iii) $\bar{x} \in \mathbb{N}$ については成り立つと仮定する．次の式変形により，$\bar{x}^I$ についても成り立つ：

$f_1(\bar{x}^I) \overset{(\mathrm{c})_1}{=} h(f_1(\bar{x}), \bar{x}) \overset{\text{仮定}}{=} h(f_2(\bar{x}), \bar{x}) \overset{(\mathrm{c})_2}{=} f_2(\bar{x}^I)$. □

2.2 定理 2.1 の存在の部分の証明

直積 $\mathbb{N} \times M$ の部分集合 X が次の条件 (a), (b), (c) を満たすとき，X を**連鎖的**であると言おう：

(a) $(1, m_1) \in X$.

(b) 任意の $x \in \mathbb{N}$ と $m \in M$ に対し，$(x, m) \in X$ ならば $(x^O, g(m, x)) \in X$.

(c) 任意の $x \in \mathbb{N}$ と $m \in M$ に対し，$(x, m) \in X$ ならば $(x^I, h(m, x)) \in X$.

直積 $\mathbb{N} \times M$ 自身は明らかに連鎖的である．そこで，すべての連鎖的集合の共通部分を X_0 とする．

補題 2.3 X_0 は連鎖的である，すなわち次の条件 $(\mathrm{a})_0$, $(\mathrm{b})_0$, $(\mathrm{c})_0$ が成り立つ：

$(\mathrm{a})_0$ $(1, m_1) \in X_0$.

$(\mathrm{b})_0$ 任意の $x \in \mathbb{N}$ と $m \in M$ に対し，$(x, m) \in X_0$ ならば $(x^O, g(m, x)) \in X_0$.

$(\mathrm{c})_0$ 任意の $x \in \mathbb{N}$ と $m \in M$ に対し，$(x, m) \in X_0$ ならば $(x^I, h(m, x)) \in X_0$.

証　明　定義より直ちにしたがう． □

補題 2.4 $(1, n) \in X_0$ である $n \in M$ は m_1 のみである．

証　明　$(\mathrm{a})_0$ より $(1, m_1) \in X_0$．そこで，$(1, n) \in X_0$ かつ $n \neq m_1$ である $n \in M$ が存在したと仮定して，$X_1 = X_0 - \{(1, n)\}$ とおく．

X_1 は連鎖的である．このことを示すために，X_1 に関して (a), (b), (c) を証明しよう．

(a) の証明：$(\mathrm{a})_0$ より $(1, m_1) \in X_0$．また $m_1 \neq n$ より $(1, m_1) \neq (1, n)$．よって $(1, m_1) \in X_1$.

(b) の証明：$(x, m) \in X_1$ と仮定する．$(x, m) \in X_0$ であるから $(\mathrm{b})_0$ より $(x^O, g(m, x)) \in X_0$．また公理 A4 より $x^O \neq 1$ であるから $(x^O, g(m, x)) \neq (1, n)$．よって $(x^O, g(m, x)) \in X_1$.

(c) の証明：$(x, m) \in X_1$ と仮定する．$(x, m) \in X_0$ であるから $(\mathrm{c})_0$ より $(x^I, h(m, x)) \in X_0$．また公理 A5 より $x^I \neq 1$ であるから $(x^I, h(m, x)) \neq (1, n)$．よって $(x^I, h(m, x)) \in X_1$.

これで X_1 が連鎖的であることが証明された．よって $X_0 \subseteq X_1$ であるが，これは $(1, n) \in X_0$ かつ $(1, n) \notin X_1$ に矛盾する．

したがって $(1, n) \in X_0$ である m_1 以外の $n \in M$ は存在せず，$(1, n) \in X_0$ である $n \in M$ は m_1 のみである． □

補題 2.5 $\bar{x} \in \mathbb{N}$, $\bar{m} \in M$ とし，

$(\bar{x}, n) \in X_0$ である $n \in M$ は $\bar{m}$ のみである　(2.1)

と仮定する．このとき，

$(\bar{x}^O, n) \in X_0$ である $n \in M$ は $g(\bar{m}, \bar{x})$ のみである．

証　明　(2.1) より $(\bar{x},\bar{m}) \in X_0$ であるから，(b)$_0$ より $(\bar{x}^O, g(\bar{m},\bar{x})) \in X_0$．そこで，$(\bar{x}^O, n) \in X_0$ かつ $n \neq g(\bar{m},\bar{x})$ である $n \in M$ が存在したと仮定して，$X_2 = X_0 - \{(\bar{x}^O, n)\}$ とおく．

X_2 は連鎖的である．このことを示すために，X_2 に関して (a), (b), (c) を証明しよう．

(a) の証明：(a)$_0$ より $(1, m_1) \in X_0$．また公理 A4 より $1 \neq \bar{x}^O$ であるから $(1, m_1) \neq (\bar{x}^O, n)$．よって $(1, m_1) \in X_2$．

(b) の証明：$(x, m) \in X_2$ と仮定する．$(x, m) \in X_0$ であるから (b)$_0$ より $(x^O, g(m, x)) \in X_0$．そして $(x^O, g(m, x)) = (\bar{x}^O, n)$ だったと仮定する．すると $x^O = \bar{x}^O$ かつ $g(m, x) = n$．前者と公理 A7 より $x = \bar{x}$ であるから $(\bar{x}, m) = (x, m) \in X_0$ となり，(2.1) より $m = \bar{m}$．よって後者より $n = g(\bar{m},\bar{x})$ となり，矛盾．したがって $(x^O, g(m, x)) \neq (\bar{x}^O, n)$ であり，$(x^O, g(m, x)) \in X_2$．

(c) の証明：$(x, m) \in X_2$ と仮定する．$(x, m) \in X_0$ であるから (c)$_0$ より $(x^I, h(m, x)) \in X_0$．また公理 A6 より $x^I \neq \bar{x}^O$ であるから $(x^I, h(m, x)) \neq (\bar{x}^O, n)$．よって $(x^I, h(m, x)) \in X_2$．

これで X_2 が連鎖的であることが証明された．よって $X_0 \subseteq X_2$ であるが，これは $(\bar{x}^O, n) \in X_0$ かつ $(\bar{x}^O, n) \notin X_2$ に矛盾する．

したがって $(\bar{x}^O, n) \in X_0$ である $g(\bar{m},\bar{x})$ 以外の $n \in M$ は存在せず，$(\bar{x}^O, n) \in X_0$ である $n \in M$ は $g(\bar{m},\bar{x})$ のみである．　□

補題 2.6 $\bar{x} \in \mathbb{N}$, $\bar{m} \in M$ とし，(2.1) を仮定する．このとき，

$(\bar{x}^I, n) \in X_0$ である $n \in M$ は $h(\bar{m},\bar{x})$ のみである．

証　明　(2.1) より $(\bar{x},\bar{m}) \in X_0$ であるから，(c)$_0$ より $(\bar{x}^I, h(\bar{m},\bar{x})) \in X_0$．そこで，$(\bar{x}^I, n) \in X_0$ かつ $n \neq h(\bar{m},\bar{x})$ である $n \in M$ が存在したと仮定して，$X_3 = X_0 - \{(\bar{x}^I, n)\}$ とおく．

X_3 は連鎖的である．このことを示すために，X_3 に関して (a), (b), (c) を証明しよう．

(a) の証明：(a)$_0$ より $(1, m_1) \in X_0$．また公理 A5 より $1 \neq \bar{x}^I$ であるから $(1, m_1) \neq (\bar{x}^I, n)$．よって $(1, m_1) \in X_3$．

(b) の証明：$(x, m) \in X_3$ と仮定する．$(x, m) \in X_0$ であるから (b)$_0$ より $(x^O, g(m, x)) \in X_0$．また公理 A6 より $x^O \neq \bar{x}^I$ であるから $(x^O, g(m, x)) \neq (\bar{x}^I, n)$．よって $(x^O, g(m, x)) \in X_3$．

(c) の証明：$(x, m) \in X_3$ と仮定する．$(x, m) \in X_0$ であるから (c)$_0$ より $(x^I, h(m, x)) \in X_0$．そして $(x^I, h(m, x)) = (\bar{x}^I, n)$ だったと仮定する．すると $x^I = \bar{x}^I$ かつ $h(m, x) = n$．前者と公理 A8 より $x = \bar{x}$ であるから $(\bar{x}, m) = (x, m) \in X_0$ となり，(2.1) より $m = \bar{m}$．よって後者より $n = h(\bar{m},\bar{x})$ となり，矛盾．したがって $(x^I, h(m, x)) \neq (\bar{x}^I, n)$ であり，$(x^I, h(m, x)) \in X_3$．

これで X_3 が連鎖的であることが証明された．よって $X_0 \subseteq X_3$ であるが，これは $(\bar{x}^I, n) \in X_0$ かつ $(\bar{x}^I, n) \notin X_3$ に矛盾する．

したがって $(\bar{x}^I, n) \in X_0$ である $h(\bar{m},\bar{x})$ 以外の $n \in M$ は存在せず，$(\bar{x}^I, n) \in X_0$ である $n \in M$ は $h(\bar{m},\bar{x})$ のみである．　□

補題 2.7 任意の $x \in \mathbb{N}$ に対し，$(x, n) \in X_0$ である $n \in M$ が一意的に存在する．

証　明　x の性質「$(x, n) \in X_0$ である $n \in M$ が一意的に存在する」に数学的帰納法を適用することにより，証明する．

(i) 補題 2.4 より，1 については成り立つ．

(ii) $\bar{x} \in \mathbb{N}$ については成り立つと仮定すると，補題 2.5 より $\bar{x}^O$ についても成り立つ．

(iii) $\bar{x} \in \mathbb{N}$ については成り立つと仮定すると，補題 2.6 より $\bar{x}^I$ についても成り立つ．　□

補題 2.7 に基づき，各 $x \in \mathbb{N}$ に対して一意的に存在する $(x,n) \in X_0$ である $n \in M$ を $f(x)$ として，写像 $f : \mathbb{N} \to S$ を定義しよう．$f(x) = n \leftrightarrow (x,n) \in X_0$ である．このとき補題 2.4, 2.5, 2.6 より直ちに，この写像 f が条件 $f(1) = m_1$，$f(x^O) = g(f(x),x)$，$f(x^I) = h(f(x),x)$ を満たすことが分かる．

これで定理 2.1 の存在の部分も証明された． □

3　後者演算

この節では，後者演算の一意的存在を示すとともに，その基本的性質を証明する．系 3.2，定理 3.3，定理 3.7 がそれぞれペアノの公理 P2, P3, P4 である．

定理 3.1 (後者演算の一意的存在) $\mathbb{N}$ 上の 1 項演算，すなわち $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像 ^{S} で，次の条件 (a), (b), (c) を満たすものが一意的に存在する：

(a) $1^S = 1^O$.

(b) 任意の $x \in \mathbb{N}$ に対し，$x^{OS} = x^I$.

(c) 任意の $x \in \mathbb{N}$ に対し，$x^{IS} = x^{SO}$.

<u>証　明</u>　定理 2.1 の M として $\mathbb{N}$，その元 m_1 として 1^O，さらに $M \times \mathbb{N}$ から M への二つの写像 g, h としてそれぞれ $(m,x) \mapsto x^I$ および $(m,x) \mapsto m^O$ であるものを取り，定理 2.1 を適用すればよい． □

系 3.2 (ペアノの公理 P2) 任意の $x \in \mathbb{N}$ に対し，$x^S \in \mathbb{N}$.

<u>証　明</u>　後者演算 ^{S} が $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像であることによる． □

定理 3.3 (ペアノの公理 P3) 任意の $x \in \mathbb{N}$ に対し，$x^S \neq 1$.

<u>証　明</u>　x に関する数学的帰納法で示す.

(i) $1^S = 1^O \overset{\text{公理 A4}}{\neq} 1$ より，1 については成り立つ.

(ii) $\bar{x} \in \mathbb{N}$ とする ($\bar{x}$ に関する仮定は不要)．$\bar{x}^{OS} = \bar{x}^I \overset{\text{公理 A5}}{\neq} 1$ より，$\bar{x}^O$ についても成り立つ.

(iii) $\bar{x} \in \mathbb{N}$ とする ($\bar{x}$ に関する仮定は不要)．$\bar{x}^{IS} = \bar{x}^{SO} \overset{\text{公理 A4}}{\neq} 1$ より，$\bar{x}^I$ についても成り立つ． □

補題 3.4 任意の $x \in \mathbb{N}$ に対し，$x^S = 1^S$ ならば $x = 1$.

<u>証　明</u>　x の性質「$x^S = 1^S$ ならば $x = 1$」に数学的帰納法を適用することにより，証明する．

(i) 1 については，明らかに成り立つ.

(ii) $\bar{x} \in \mathbb{N}$ とする ($\bar{x}$ に関する仮定は不要)．次の推論により，$\bar{x}^O$ についても成り立つ：
$\bar{x}^{OS} = 1^S \leftrightarrow \bar{x}^I = 1^O \overset{\text{公理 A6}}{\to}$ 矛盾.

(iii) $\bar{x} \in \mathbb{N}$ とする ($\bar{x}$ に関する仮定は不要)．次の推論により，$\bar{x}^I$ についても成り立つ：
$\bar{x}^{IS} = 1^S \leftrightarrow \bar{x}^{SO} = 1^O \overset{\text{公理 A7}}{\to} \bar{x}^S = 1 \overset{\text{定理 3.3}}{\to}$ 矛盾. □

補題 3.5 任意の $x, y \in \mathbb{N}$ に対し，$x^S = \bar{y}^{OS}$ ならば $x = \bar{y}^O$.

証　明　$y \in \mathbb{N}$ を固定して，x の性質「$x^S = \bar{y}^{OS}$ ならば $x = \bar{y}^O$」に数学的帰納法を適用することにより，証明する．

(i) 次の推論により，1 については成り立つ：$1^S = \bar{y}^{OS} \leftrightarrow 1^O = \bar{y}^I \overset{\text{公理 A6}}{\to}$ 矛盾．

(ii) $\bar{x} \in \mathbb{N}$ とする ($\bar{x}$ に関する仮定は不要)．次の推論により，$\bar{x}^O$ についても成り立つ：$\bar{x}^{OS} = \bar{y}^{OS} \leftrightarrow \bar{x}^I = \bar{y}^I \overset{\text{公理 A8}}{\to} \bar{x} = \bar{y} \to \bar{x}^O = \bar{y}^O$.

(iii) $\bar{x} \in \mathbb{N}$ とする ($\bar{x}$ に関する仮定は不要)．次の推論により，$\bar{x}^I$ についても成り立つ：$\bar{x}^{IS} = \bar{y}^{OS} \leftrightarrow \bar{x}^{SO} = \bar{y}^I \overset{\text{公理 A6}}{\to}$ 矛盾．　□

補題 3.6 $\bar{y} \in \mathbb{N}$ とし，

$$\text{任意の } x \in \mathbb{N} \text{ に対して，} x^S = \bar{y}^S \text{ ならば } x = \bar{y} \text{ である} \tag{3.1}$$

と仮定する．このとき，

任意の $x \in \mathbb{N}$ に対して，$x^S = \bar{y}^{IS}$ ならば $x = \bar{y}^I$ である．

証　明　x の性質「$x^S = \bar{y}^{IS}$ ならば $x = \bar{y}^I$」に数学的帰納法を適用することにより，証明する．

(i) 次の推論により，1 については成り立つ：$1^S = \bar{y}^{IS} \leftrightarrow 1^O = \bar{y}^{SO} \overset{\text{公理 A7}}{\to} 1 = \bar{y}^S \overset{\text{定理 3.3}}{\to}$ 矛盾．

(ii) $\bar{x} \in \mathbb{N}$ とする ($\bar{x}$ に関する仮定は不要)．次の推論により，$\bar{x}^O$ についても成り立つ：$\bar{x}^{OS} = \bar{y}^{IS} \leftrightarrow \bar{x}^I = \bar{y}^{SO} \overset{\text{公理 A6}}{\to}$ 矛盾．

(iii) $\bar{x} \in \mathbb{N}$ とする ($\bar{x}$ に関する仮定は不要)．次の推論により，$\bar{x}^I$ についても成り立つ：$\bar{x}^{IS} = \bar{y}^{IS} \leftrightarrow \bar{x}^{SO} = \bar{y}^{SO} \overset{\text{公理 A7}}{\to} \bar{x}^S = \bar{y}^S \overset{(3.1)}{\to} \bar{x} = \bar{y} \to \bar{x}^I = \bar{y}^I$.　□

定理 3.7 (ペアノの公理 P4) 任意の x, y に対し，$x^S = y^S$ ならば $x = y$.

証　明　y の性質「任意の $x \in \mathbb{N}$ に対し，$x^S = y^S$ ならば $x = y$」に数学的帰納法を適用することにより，証明する．

(i) 補題 3.4 より，1 については成り立つ．

(ii) $\bar{y} \in \mathbb{N}$ とする ($\bar{y}$ に関する仮定は不要) と，補題 3.5 より $\bar{y}^O$ についても成り立つ．

(iii) $\bar{y} \in \mathbb{N}$ のときは成り立つと仮定すると，補題 3.6 より $\bar{y}^I$ についても成り立つ．　□

次の補題はペアノの公理 P5 を証明するにあたり，用いられる (定理 5.2 参照)．

補題 3.8 任意の $x \in \mathbb{N}$ に対し，$x \neq 1$ ならば，ある $y \in \mathbb{N}$ に対して $x = y^S$ となる．

証　明　x の性質「$x \neq 1$ ならば，ある $y \in \mathbb{N}$ に対して $x = y^S$ となる」に数学的帰納法を適用することにより，証明する．

(i) 1 については，明らかに成り立つ．

(ii) $\bar{x} \in \mathbb{N}$ については成り立つと仮定する．$\bar{x} = 1$ ならば，$\bar{x}^O = 1^O = 1^S$．一方 $\bar{x} \neq 1$ ならば，仮定より，ある $\bar{y} \in \mathbb{N}$ に対して $\bar{x} = \bar{y}^S$ となり，$\bar{x}^O = \bar{y}^{SO} = \bar{y}^{IS}$．したがって，いずれにしても，$\bar{x}^O$ についても成り立つ．

(iii) $\bar{x} \in \mathbb{N}$ とする ($\bar{x}$ に関する仮定は不要)．$\bar{x}^I = \bar{x}^{OS}$ より，$\bar{x}^I$ についても成り立つ．　□

4　加　法

前節でペアノの公理 P2–P4 の証明は済んだが，残るペアノの公理 P5 の証明には加法が必要である．そこでこの節では，加法の一意的存在を示すとともに，その基本的性質を証明する．

定理 4.1 (加法の一意的存在) $\mathbb{N}$ 上の 2 項演算，すなわち直積 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像 $+$ で，次の条件 (a), (b), (c) を満たすものが一意的に存在する：

(a) 任意の $x\in\mathbb{N}$ に対し，$x+1=x^S$.

(b) 任意の $x,y\in\mathbb{N}$ に対し，$x+y^O=(x+y)+y$.

(c) 任意の $x,y\in\mathbb{N}$ に対し，$x+y^I=\{(x+y)+y\}^S$.

一意性と存在の証明のどちらでも，M として $\mathbb{N}$ 上の 1 項演算の全体からなる集合 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，その元 m_1 として後者演算 ^{S}，さらに M から M への二つの写像 g,h としてそれぞれ $\varphi\mapsto\varphi\circ\varphi$ および $\varphi\mapsto{}^S\circ\varphi\circ\varphi$ であるものを取り，系 2.2 を適用する．ただし "$\circ$" は写像の合成を表し，φ が $\mathbb{N}$ 上の 1 項演算のとき，$\varphi\circ\varphi$ および ${}^S\circ\varphi\circ\varphi$ はそれぞれ $x\mapsto\varphi(\varphi(x))$ および $x\mapsto\{\varphi(\varphi(x))\}^S$ である $\mathbb{N}$ 上の 1 項演算を意味する．

<u>存在の証明</u>　集合 M とその元 m_1，および写像 g,h をそれぞれ上のように取り，系 2.2 によって存在する $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ への写像を f とする．$y\in\mathbb{N}$ のとき $f(y)$ が $\mathbb{N}$ 上の 1 項演算であることに注意して，$\mathbb{N}$ 上の 2 項演算 $+$ を $x+y=f(y)(x)$ と定義する．次に示すように，この演算 $+$ が定理の条件 (a), (b), (c) を満たし，証明が終わる．

(a) の証明：$x+1=f(1)(x)=m_1(x)=x^S$.

(b) の証明：$x+y^O=f(y^O)(x)=g(f(y))(x)=f(y)\Big(f(y)(x)\Big)=f(y)(x+y)=(x+y)+y$.

(c) の証明：$x+y^I=f(y^I)(x)=h(f(y))(x)=\Big\{f(y)\Big(f(y)(x)\Big)\Big\}^S=\{f(y)(x+y)\}^S$
$=\{(x+y)+y\}^S$. □

<u>一意性の証明</u>　$\mathbb{N}$ 上の 2 項演算 $+_i$ $(i=1,2)$ がともに定理の条件 (a), (b), (c) を満たしたとする：

(a)$_i$ 任意の $x\in\mathbb{N}$ に対し，$x+_i 1=x^S$.

(b)$_i$ 任意の $x,y\in\mathbb{N}$ に対し，$x+_i y^O=(x+_i y)+_i y$.

(c)$_i$ 任意の $x,y\in\mathbb{N}$ に対し，$x+_i y^I=\{(x+_i y)+_i y\}^S$.

$+_1=+_2$，すなわち任意の $x,y\in\mathbb{N}$ に対して $x+_1 y=x+_2 y$ であることを示したい．そのために $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ への写像 f_i を，各 $y\in\mathbb{N}$ に対して $f_i(y)$ が $x\mapsto x+_i y$ である $\mathbb{N}$ 上の 1 項演算であるように定義する．つまり $f_i(y)(x)=x+_i y$ である．このとき下に示すように，集合 M とその元 m_1，および写像 g,h をそれぞれ上のように取ったときの系 2.2 の条件 (a), (b), (c) を f_1,f_2 がともに満たし，一意性より $f_1=f_2$，つまり任意の $y\in\mathbb{N}$ に対して $f_1(y)=f_2(y)$．よって任意の $x,y\in\mathbb{N}$ に対して $x+_1 y=f_1(y)(x)=f_2(y)(x)=x+_2 y$ となり，証明が終わる．

(a) の証明：任意の $x\in\mathbb{N}$ に対し，$f_i(1)(x)=x+_i 1\overset{(\mathrm{a})_i}{=}x^S=m_1(x)$．したがって，$f_i(1)=m_1$.

(b) の証明：任意の $x\in\mathbb{N}$ に対し，$f_i(y^O)(x)=x+_i y^O\overset{(\mathrm{b})_i}{=}(x+_i y)+_i y=f_i(y)(x)+_i y$
$=f_i(y)\Big(f_i(y)(x)\Big)=g(f_i(y))(x)$．したがって，$f_i(y^O)=g(f_i(y))$.

(c) の証明：任意の $x\in\mathbb{N}$ に対し，$f_i(y^I)(x)=x+_i y^I\overset{(\mathrm{c})_i}{=}\{(x+_i y)+_i y\}^S=\{f_i(y)(x)+_i y\}^S$
$=\Big\{f_i(y)\Big(f_i(y)(x)\Big)\Big\}^S=h(f_i(y))(x)$．したがって，$f_i(y^I)=h(f_i(y))$. □

補題 4.2 任意の $x,y\in\mathbb{N}$ に対し，$x^S+y=(x+y)^S$.

<u>証　明</u>　y の性質「任意の $x\in\mathbb{N}$ に対し，$x^S+y=(x+y)^S$」に数学的帰納法を適用することにより，証明する．

(i) $x^S+1=x^{SS}=(x+1)^S$ より，1 については成り立つ．

(ii) $\bar{y}\in\mathbb{N}$ については成り立つと仮定する．次の式変形により，$\bar{y}^O$ についても成り立つ：
$x^S+\bar{y}^O=(x^S+\bar{y})+\bar{y}\overset{\text{仮定}}{=}(x+\bar{y})^S+\bar{y}\overset{\text{仮定}}{=}\{(x+\bar{y})+\bar{y}\}^S=(x+\bar{y}^O)^S$.

(iii) $\bar{y}\in\mathbb{N}$ については成り立つと仮定する．次の式変形により，$\bar{y}^I$ についても成り立つ：
$x^S+\bar{y}^I=\{(x^S+\bar{y})+\bar{y}\}^S\overset{\text{仮定}}{=}\{(x+\bar{y})^S+\bar{y}\}^S\overset{\text{仮定}}{=}\{(x+\bar{y})+\bar{y}\}^{SS}=(x+\bar{y}^I)^S$. □

補題 4.3 任意の $x,y\in\mathbb{N}$ に対し，$x+y^S=(x+y)^S$.

証　明　y の性質「任意の $x\in\mathbb{N}$ に対し，$x+y^S=(x+y)^S$」に数学的帰納法を適用することにより，証明する．

(i) $x+1^S=x+1^O=(x+1)+1=(x+1)^S$ より，1 については成り立つ．

(ii) $\bar{y}\in\mathbb{N}$ とする ($\bar{y}$ についての仮定は不要)．次の式変形により，$\bar{y}^O$ についても成り立つ：
$x+\bar{y}^{OS}=x+\bar{y}^I=\{(x+\bar{y})+\bar{y}\}^S=(x+\bar{y}^O)^S$.

(iii) $\bar{y}\in\mathbb{N}$ については成り立つと仮定する．次の式変形により，$\bar{y}^I$ についても成り立つ：
$x+\bar{y}^{IS}=x+\bar{y}^{SO}=(x+\bar{y}^S)+\bar{y}^S\overset{\text{仮定}}{=}(x+\bar{y})^S+\bar{y}^S\overset{\text{仮定}}{=}\{(x+\bar{y})^S+\bar{y}\}^S\overset{\text{補題 4.2}}{=}\{(x+\bar{y})+\bar{y}\}^{SS}$
$=(x+\bar{y}^I)^S$. □

定理 4.4 (結合法則) 任意の $x,y,z\in\mathbb{N}$ に対し，$(x+y)+z=x+(y+z)$.

証　明　$x\in\mathbb{N}$ を固定して，z の性質「任意の $y\in\mathbb{N}$ に対し，$(x+y)+z=x+(y+z)$」に数学的帰納法を適用することにより，証明する．

(i) $(x+y)+1=(x+y)^S\overset{\text{補題 4.3}}{=}x+y^S=x+(y+1)$ より，1 については成り立つ．

(ii) $\bar{z}\in\mathbb{N}$ については成り立つと仮定する．次の式変形により，$\bar{z}^O$ についても成り立つ：
$(x+y)+\bar{z}^O=\{(x+y)+\bar{z}\}+\bar{z}\overset{\text{仮定}}{=}\{x+(y+\bar{z})\}+\bar{z}\overset{\text{仮定}}{=}x+\{(y+\bar{z})+\bar{z}\}=x+(y+\bar{z}^O)$.

(iii) $\bar{z}\in\mathbb{N}$ については成り立つと仮定する．次の式変形により，$\bar{z}^I$ についても成り立つ：
$(x+y)+\bar{z}^I=[\{(x+y)+\bar{z}\}+\bar{z}]^S\overset{\text{仮定}}{=}[\{x+(y+\bar{z})\}+\bar{z}]^S\overset{\text{仮定}}{=}[x+\{(y+\bar{z})+\bar{z}\}]^S$
$\overset{\text{補題 4.3}}{=}x+\{(y+\bar{z})+\bar{z}\}^S=x+(y+\bar{z}^I)$. □

以後，3 個の数 x,y,z の和を $x+y+z$ のように括弧を省いて書き，定理 4.4 を断りなしに用いる．

補題 4.5 任意の $x,y\in\mathbb{N}$ に対し，$x^O+y^O=(x+y)^O$.

証　明　y の性質「任意の $x\in\mathbb{N}$ に対し，$x^O+y^O=(x+y)^O$」に数学的帰納法を適用することにより，証明する．

(i) 次の式変形により，1 については成り立つ：
$x^O+1^O=x^O+1+1=x^{OS}+1=x^{OSS}=x^{IS}=x^{SO}=(x+1)^O$.

(ii) $\bar{y}\in\mathbb{N}$ については成り立つと仮定する．次の式変形により，$\bar{y}^O$ のときにも成り立つ：
$x^O+(\bar{y}^O)^O=x^O+\bar{y}^O+\bar{y}^O\overset{\text{仮定}}{=}(x+\bar{y})^O+\bar{y}^O\overset{\text{仮定}}{=}(x+\bar{y}+\bar{y})^O=(x+\bar{y}^O)^O$.

(iii) $\bar{y}\in\mathbb{N}$ については成り立つと仮定する．次の式変形により，$\bar{y}^I$ についても成り立つ：
$x^O+(\bar{y}^I)^O=x^O+\bar{y}^I+\bar{y}^I=x^O+\bar{y}^{OS}+\bar{y}^{OS}\overset{\text{補題 4.3}}{=}(x^O+\bar{y}^O)^S+\bar{y}^{OS}\overset{\text{補題 4.2, 4.3}}{=}(x^O+\bar{y}^O+\bar{y}^O)^{SS}$
$\overset{\text{仮定}}{=}\{(x+\bar{y})^O+\bar{y}^O\}^{SS}\overset{\text{仮定}}{=}(x+\bar{y}+\bar{y})^{OSS}=(x+\bar{y}+\bar{y})^{IS}=(x+\bar{y}+\bar{y})^{SO}=(x+\bar{y}^I)^O$. □

補題 4.6 任意の $x\in\mathbb{N}$ に対し，$x+x=x^O$.

証　明　x の性質 $x+x=x^O$ に数学的帰納法を適用することにより，証明する．

(i) $1+1=1^O$ より，1 については成り立つ．

(ii) $\bar{x}\in\mathbb{N}$ については成り立つと仮定する．次の式変形により，$\bar{x}^O$ についても成り立つ：
$\bar{x}^O+\bar{x}^O \overset{\text{補題 }4.5}{=} (\bar{x}+\bar{x})^O \overset{\text{仮定}}{=} \bar{x}^{OO}$.

(iii) $\bar{x}\in\mathbb{N}$ については成り立つと仮定する．次の式変形により，$\bar{x}^I$ についても成り立つ：
$\bar{x}^I+\bar{x}^I=\bar{x}^{OS}+\bar{x}^{OS} \overset{\text{補題 }4.2,\ 4.3}{=} (\bar{x}^O+\bar{x}^O)^{SS} \overset{\text{補題 }4.5}{=} (\bar{x}+\bar{x})^{OSS} \overset{\text{仮定}}{=} \bar{x}^{OOSS}=\bar{x}^{OIS}=\bar{x}^{OSO}=\bar{x}^{IO}$.

□

次の補題はペアノの公理 P5 を証明するにあたり，用いられる (定理 5.2 参照)．

補題 4.7 任意の $x\in\mathbb{N}$ に対し，$1+x=x+1$.

証　明　x の性質 $1+x=x+1$ に数学的帰納法を適用することにより，証明する．

(i) 1 については，明らかに成り立つ．

(ii) $\bar{x}\in\mathbb{N}$ については成り立つと仮定する．次の式変形により，$\bar{x}^O$ についても成り立つ：
$1+\bar{x}^O=1+\bar{x}+\bar{x} \overset{\text{仮定}}{=} \bar{x}+1+\bar{x} \overset{\text{仮定}}{=} \bar{x}+\bar{x}+1 \overset{\text{補題 }4.6}{=} \bar{x}^O+1$.

(iii) $\bar{x}\in\mathbb{N}$ については成り立つと仮定する．次の式変形により，$\bar{x}^I$ についても成り立つ：
$1+\bar{x}^I=(1+\bar{x}+\bar{x})^S \overset{\text{仮定}}{=} (\bar{x}+1+\bar{x})^S \overset{\text{仮定}}{=} (\bar{x}+\bar{x}+1)^S \overset{\text{補題 }4.6}{=} (\bar{x}^O+1)^S=\bar{x}^{OSS}=\bar{x}^{IS}=\bar{x}^I+1$.

□

次の定理はペアノの公理 P5 の証明には不要だが，ここまで来れば証明は簡単なので，証明しておく．

定理 4.8 (交換法則) 任意の $x,y\in\mathbb{N}$ に対し，$x+y=y+x$.

証　明　$x\in\mathbb{N}$ とし，y の性質 $x+y=y+x$ に数学的帰納法を適用することにより，証明する．

(i) 1 については補題 4.7 で証明済み．

(ii) $\bar{y}\in\mathbb{N}$ については成り立つと仮定する．次の式変形により，$\bar{y}^O$ についても成り立つ：
$x+\bar{y}^O=x+\bar{y}+\bar{y} \overset{\text{仮定}}{=} \bar{y}+x+\bar{y} \overset{\text{仮定}}{=} \bar{y}+\bar{y}+x \overset{\text{補題 }4.6}{=} \bar{y}^O+x$.

(iii) $\bar{y}\in\mathbb{N}$ については成り立つと仮定する．次の式変形により，$\bar{y}^I$ についても成り立つ：
$x+\bar{y}^I=(x+\bar{y}+\bar{y})^S \overset{\text{仮定}}{=} (\bar{y}+x+\bar{y})^S \overset{\text{仮定}}{=} (\bar{y}+\bar{y}+x)^S \overset{\text{補題 }4.6}{=} (\bar{y}^O+x)^S \overset{\text{補題 }4.2}{=} \bar{y}^{OS}+x=\bar{y}^I+x$.

□

5　ペアノの公理 P5

この節では，ペアノの公理 P5 を証明する．証明にあたり簡単のため，自然数に関する性質 Q が自然数 z について成り立つことを $Q(z)$ と記す．このとき，ペアノの公理 P5 は次のようになる：

自然数に関する性質 P が二つの条件

$P(1)$ (5.1)

任意の $x\in\mathbb{N}$ に対し，$P(x)$ ならば $P(x^S)$ (5.2)

を満たせば，任意の $x\in\mathbb{N}$ に対し $P(x)$.

補題 5.1 自然数に関する性質 P が上記の条件 (5.2) を満たせば，任意の $x,y\in\mathbb{N}$ に対し，$P(x)$ ならば $P(x+y)$.

<u>証　明</u>　y に関する性質「任意の $x \in \mathbb{N}$ に対し，$P(x)$ ならば $P(x+y)$」を P^* とし，性質 P^* に数学的帰納法を適用することにより，証明する．

(i) 次の推論により，$P^*(1)$ が成り立つ：$P(x) \overset{(5.2)}{\to} P(x^S) \leftrightarrow P(x+1)$.

(ii) $\bar{y} \in \mathbb{N}$ とし，$P^*(\bar{y})$ が成り立つと仮定する．次の推論により，$P^*(\bar{y}^O)$ も成り立つ：
$P(x) \overset{\text{仮定}}{\to} P(x+\bar{y}) \overset{\text{仮定}}{\to} P(x+\bar{y}+\bar{y}) \leftrightarrow P(x+\bar{y}^O)$.

(iii) $\bar{y} \in \mathbb{N}$ とし，$P^*(\bar{y})$ が成り立つと仮定する．次の推論により，$P^*(\bar{y}^I)$ も成り立つ：
$P(x) \overset{\text{仮定}}{\to} P(x+\bar{y}) \overset{\text{仮定}}{\to} P(x+\bar{y}+\bar{y}) \overset{(5.2)}{\to} P\Big((x+\bar{y}+\bar{y})^S\Big) \leftrightarrow P(x+\bar{y}^I)$. □

定理 5.2 (ペアノの公理 P5) 自然数に関する性質 P が上記の二つの条件 (5.1) および (5.2) を満たせば，任意の $x \in \mathbb{N}$ に対し $P(x)$.

<u>証　明</u>　$x = 1$ ならば，(5.1) より $P(x)$．一方，$x \neq 1$ ならば補題 3.8 より，ある $y \in \mathbb{N}$ に対して $x = y^S = y + 1 \overset{\text{補題 4.8}}{=} 1 + y$ である．よってこの場合にも，(5.2) と補題 5.1 より $P(1+y)$，したがって $P(x)$. □

参考文献

[1] 彌永昌吉，数の体系 (上)，岩波書店 (新書版)，1972.

[2] H. -D. エビングハウス他，数 (上)，シュプリンガー・フェアラーク東京，1991.

[3] 島内剛一，数学の基礎，日本評論社，1971.

[4] 高野道夫，自然数論の新しい公理化試論，本誌，**42** (2)，15–28，2007.

[5] デーデキント，数について——連続性と数の本質——，岩波書店 (文庫版)，1961.