新潟大学教育学部数学教室,『数学教育研究』, 第 44 巻, 第 2 号, 1-5, 2009.

作図可能な角について調べましょう

新潟大学教育学部
鈴 木 保 高

Ⅰ. 序

a が整数のときと, 有理数のときと, 有限小数のときについて, a° の角が作図可能であるための a の条件について調べる。

定義. $p = 2^{2^s}+1$ ($s=0,1,2,3,\cdots$) の形の素数をフェルマー型の素数という。

定理1. (作図可能な正 n 角形)
$n \geqq 3$ である整数 n に対して, 正 n 角形が作図可能であるための必要十分な条件は, n が次の形の整数である。

$$n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot\cdots\cdot p_k$$

ここで, $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k$ は異なるフェルマー型の素数で, $m \geq 0$, $k \geq 0$ である。

定理2. (作図可能な n 度の角)
整数 n が 3 の倍数ならば, n° の角は作図できる。

定理3. (作図できない n 度の角)
整数 n が 3 の倍数でないならば, n° の角は作図不可能である。

フェルマー型の素数は, 現在 $s=0,1,2,3,4$ のときの, p = 3 , 5 , 17 , 257 , 65537 のみが知られています。フェルマー型の素数は, この 5 個のみしか存在しないのではないかという予想があります。しかし, 証明はできていません。

良く知られた定理 1 の証明は省略します([1]参照)。定理 2 と定理 3 は補題 4 と補題 5 を使えば証明できます([2]参照)。

補題4. (良く知られた作図可能と作図不可能の結果)
次の(イ)と(ロ)と(ハ)は成り立つ。

(イ) 60° の角は作図できる。
(ロ) 72° の角は作図できる。
(ハ) 20° の角は作図できません。

補題５．　（基本的な作図可能な操作）

次の角の作図は基本的な作図可能な操作です。

（角の和）　　作図できた角と作図できた角の和を作図できる。

（角の整数倍）　作図できた角の整数倍の角を作図できる。

（角の差）　　作図できた角と作図できた角の差を作図できる。

（角の二等分）　作図できた角の半分の角を作図できる。

Ⅱ．　主定理

補題 6～定理 9 を準備して，本書のメインである定理 10 と定理 11 を証明する。

補題６．　（最大公約数を１次結合の形で表す定理）

２つの整数 a, b の最大公約数を d とする。このとき，
$d = sa + tb$ を満たす整数 s, t が存在する。

定理７．　（作図可能な同値条件）

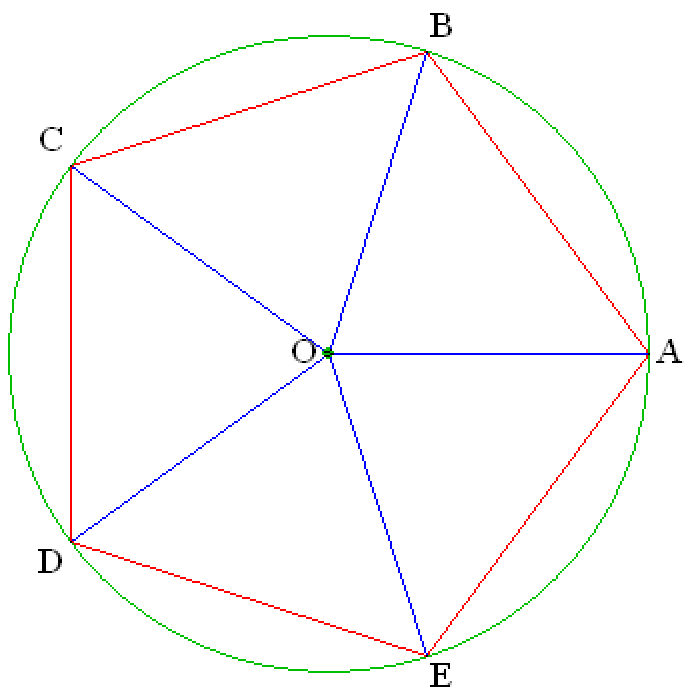
$n \geqq 3$ の整数 n に対して，次の条件は同値である。

(A)　$\dfrac{360^\circ}{n}$ の角は作図可能である。

(B)　正 n 角形の中心角は作図可能である。

(C)　正 n 角形は作図可能である。

証明．　明らか。



新潟大学教育学部数学教室,『数学教育研究』, 第 44 巻, 第 2 号, 1-5, 2009.

定理８．　（ $\dfrac{360^\circ}{n}$ が作図できる正の整数 n について）

正の整数 n に対して，次の（Ａ）と（Ｂ）は同値である。

（Ａ）　$\dfrac{360^\circ}{n}$ の角は作図可能である。

（Ｂ）　正の整数 n は次の形の整数である。

n ＝ １， n ＝ ２ と正 n 角形が作図可能な ３ 以上の整数 n である。

$$n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots\cdots p_k$$

ここで， $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k$ は異なるフェルマー型の素数で， $m \geq 0$ ， $k \geq 0$ である。

証明．　n ＝ 1， n ＝ 2 のとき，明らかに $\dfrac{360^\circ}{n}$ は作図可能である。

条件（A）は，定理 7 の条件（C）と同値である。従って， n ≧ 3 のとき， $\dfrac{360^\circ}{n}$ の角が作図可能であるのは， n が次の形の整数のときである。（参：定理１）

$$n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots\cdots p_k$$

ここで， $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k$ は異なるフェルマー型の素数で， $m \geq 0$ ， $k \geq 0$ である。
（証明終）

定理９．　（ $\dfrac{a^\circ}{b}$ が作図可能な分数 $\dfrac{a}{b}$ の分子 a は 3 の倍数である）

a は整数， b は 0 でない整数とする。

$\dfrac{a^\circ}{b}$ の角が作図可能ならば， a は 3 の倍数である。

証明．　$\dfrac{a^\circ}{b}$ の角が作図可能ならば，補題 5 により， $b \times \dfrac{a^\circ}{b} = a^\circ$ の角も作図可能です。

従って，定理 2 と定理 3 により， a は 3 の倍数である。（証明終）

新潟大学教育学部数学教室,『数学教育研究』, 第 44 巻, 第 2 号, 1-5, 2009.

定理１０. （ $\dfrac{a^\circ}{b}$ **が作図可能な分数** $\dfrac{a}{b}$ **について**）

a は整数, b は正の整数, a と b は互いに素とする。このとき,

$\dfrac{a^\circ}{b}$ の角が作図可能であるための必要十分な条件は

- a は 3 の倍数であって,
- b は次の形の整数である。

$$b = 2^m \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdots\cdot q_h$$

ここで, $q_1, q_2, q_3, \cdots, q_h$ は 3, 5 以外の異なるフェルマー型の素数で, $m \geq 0$, $h \geq 0$ である。

証明.

a , b の最大公約数は 1 であるから, 補題 6 により, $sa + tb = 1$ ($s, t \in Z$) と表せる。

$3sa + 3tb = 3$, $3s \times \dfrac{a}{b} + 3t = \dfrac{3}{b}$ が成り立つ。$\dfrac{a^\circ}{b}$ と 3° の角は作図可能だから,

補題 5 により, $\dfrac{3^\circ}{b}$ の角は作図可能である。

また, $8 \times \dfrac{3^\circ}{b} = \dfrac{8 \times 3 \times 5 \times 3^\circ}{3 \times 5 \times b} = \dfrac{360^\circ}{3 \times 5 \times b}$ の角は作図可能であるから, 定理 8 により,

$n = 3 \times 5 \times b$ が定理 8 の条件を満たす整数でなければならない。

故に b は次の形の整数でなければならない。

$$b = 2^m \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdots\cdot q_h$$

ここで, $q_1, q_2, q_3, \cdots, q_h$ は 3, 5 以外の異なるフェルマー型の素数で, $m \geq 0$, $h \geq 0$ である。

逆に, b がこの形の整数ならば, $\dfrac{a^\circ}{b}$ の角が作図できることが示せる。(詳細略)

(証明終)

例. 分数の形で有限小数でない, $\dfrac{a^\circ}{b}$ の角が作図可能な簡単な数値の例として,

作図可能な $\dfrac{3^\circ}{17}$ の角があります。

定理１１． （$\dfrac{a^\circ}{b}$ が作図可能な分数 $\dfrac{a}{b}$ で $\dfrac{a}{b}$ が有限小数の場合）

a と b は正の整数とする。

$\dfrac{a^\circ}{b}$ の角が作図可能で，正の有限小数である $\dfrac{a}{b}$ は次の形の分数に限る。

$$\frac{a}{b} = 2^m \cdot 3 \cdot k \qquad (\ m \text{ は整数，} \ k \text{ は正の整数})$$

注． m は 0 でも，負の整数でも良い。

証明． $\dfrac{a^\circ}{b}$ の角が作図可能であるから，定理 10 の条件を満たしていなければならない。

更に，$\dfrac{a}{b}$ が有限小数である条件を追加すれば，結論が成り立つ。（証明終）

例．

$\dfrac{3^\circ}{2} = 1.5^\circ$ は作図可能。

$\dfrac{3^\circ}{8} = 0.375^\circ$ は作図可能。

$\dfrac{3^\circ}{5} = 0.6^\circ$ は作図不可能。

$\dfrac{378^\circ}{100} = 0.378^\circ$ は作図不可能。

参考文献

［１］Ｉ．スチュワート著，新関章三訳，ガロアの理論，共立出版，1979.

［２］鈴木保高著，作図可能な n° の角について，数学セミナー，Note，日本評論社，March 2002.