新潟大学教育学部数学教室，『数学教育研究』，第 45 巻，第 1 号，48-68，2010.

図式的推論を生かした数学の授業に関する研究

新潟大学大学院　教育学研究科
学校教育専攻　教育実践開発コース
山本　貴之

はじめに

近年，記号論は数学教育にとって，革新的な理論的枠組みとなっている。記号論の立場では，記号の役割を検討することで，記号の可能性について研究が進められている。中でも，Peirceの記号論は，抽象的な数学の対象に対して，人間がどのようにアクセスできるかを検討するのに適切とみなされ，注目を集めている(1)。例えば，Bakker他(2)は，Peirceの概念である図式的推論（Diagrammatic reasoning）および実在的抽象（Hypostatic abstraction）を用いて，第7学年の生徒を対象とした統計の授業を分析している。

平成20年3月に告示された中学校の学習指導要領では，数学的活動や表現，活用などが重視されている。その中で，数学的活動は3つに分類されている。すなわち，新しい内容を創造したり発展させたりする数学を探究する活動，日常生活や社会などの具体的事象に数学を利用する活動，数学的な表現を用いて説明して伝え合ったり議論したりする活動の3つである。この3つめの活動は，上述の記号論に基づいた活動といえるだろう。和田(3)は，この3つめの活動に焦点をあて，表現を対象とした数学的活動と表現を方法とした数学的活動という2つの側面から，今後の指導の課題を5つ挙げている。

記号と表現は密接不可分なものである。記号の役割を踏まえ，数学の授業を見直すことで，表現を対象とした数学的活動の課題が解決されるであろう。したがって，記号論に基づき，記号から学習が起こる方法について検討していくことには意義がある。

1　本研究の目的および方法

本研究の目的は，図式的推論を生かした数学の授業のあり方を明らかにし，図式的推論を生かした授業構成の原理を構築することである。本研究では，数学教育における図式的推論を，課題やはじめの状況にある関係を明確にするために，記号化し，そこから子どもたちが内在している関係を読み取っていくことと捉えている。

図式的推論に関する先行研究は，人工知能や情報処理といった研究で取り上げられているものの，教育分野における研究は国内には存在しない。しかし，海外では，数学教育において Peirce の記号論が見直されており，Hoffmann や Dörfler により数学教育に関わる研究が進められている。本稿も，両氏に倣い，Peirce の図式的推論から，数学教育における図式的推論を捉える枠組みを検討する。

次に，この枠組みに基づいた授業観察を行うことにより，実践から理論を導く作業を行う。すなわち，授業観察による知見より，数学教育における図式的推論を理論化し，それを生かした授業への示唆を得る。また，図式的推論に類似した先行研究についても，上記の枠組みからの検討を行い，同様の示唆を得る。そして，それらの示唆から，図式的推論を生かした数学の授業構成についての原理を構築する。

以上のことから，本研究の内容は以下のように整理される。

(1) 図式的推論に関する理論研究
(2) 数学の授業における図式的推論についての分析
(3) 図式的推論を生かした数学の授業についての考察
(4) 図式的推論を生かした数学の授業構成についての原理の構築

本研究の流れをまとめると図 1 のようになる。

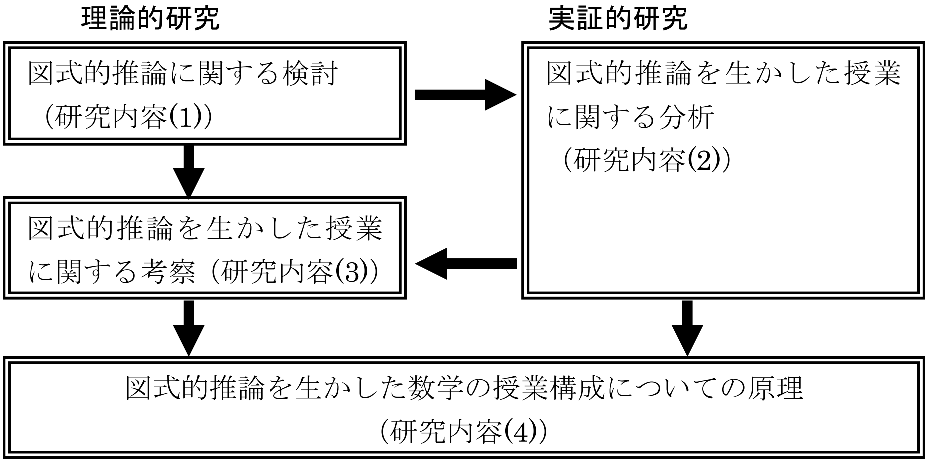


図 1　本研究の全体的な流れ

2　図式的推論に関する検討

図式的推論は，Peirce の概念である。この概念を理解するためには，彼の記号論について若干の知識が必要である。そのため，彼の図式（diagram）および図式的推論等の概念について整理する。また，図式的推論を学習過程や科学的発見の枠組みで捉えている Hoffmann や，数学教育への援用を図っている Dörfler の定義等についても概観する。

(1) 図式

Peirce[(4)]は，図式を「自分自身の諸部分における類比的な諸関係によって表意しているもの」〔CP2,277〕，と述べている。また，Hoffmann[(5)]は，Peirce を引用し「有力な関係の類似記号であり，慣習によってそのようなものとして援助される表意体である。（中略）それは，完全に一貫した表象体系に基づいて実行されなければならず，単純にかつ容易に理解可能な基本的アイデアに基づいている」〔CP4,418〕と定義している。また，Dörfler[(6)]は，上記の図式に何らかの対象の操作を加えたものも図式と捉えている。

本研究では，図式を「記号における部分間の関係で，対象を指示するもの(対象の操作を含む)」と定義する。

また，中心となって使われている表現について，中原[(7)]の表現様式に基づき，操作的表現による図式を「操作的図式」，記号的表現による図式を「記号的図式」と定義する。図 2 のような x^2+3x を表す操作可能なタイルは操作的図式であり，図 3 のような因数の関係を記号化した図式は記号的図式である。

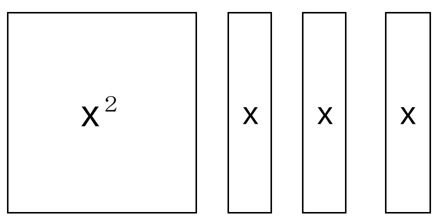


図 2　タイル等を用いる操作的図式

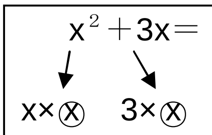


図 3　記号的図式

(2) 図式的推論

Hoffmann[5]は, 図式的推論について，Peirce を引用し，図式を構成し，その図式に内的または外的な実験を行い，その結果を観察する 3 つの段階があると述べている。各段階の特徴は表 1 のようになる。

表 1　図式的推論の特徴

構成	・馴染みのある表現を用いる
実験	・表現により規則が決まる ・範囲と結果が限定される
観察	・「不可避的な経験」が生じる ・これまで隠れていた関係を発見する

つまり，Peirce の図式的推論とは，知識領域の関係の表現を構成して，それらで実験して，結果を観察する 3 段階のプロセスである。

図式的推論を数学教育の枠組みで捉えるために，本研究では，図式的推論を「図式を用いて新しい性質などを見いだして，理解することで，図式の構成，図式の実験，実験結果の観察，の 3 つの段階からなるもの」と定義する。

構成される図式は，上述の図式の定義により，その表現の関係によって対象を指示するものである。また，実験とは，数学教育の枠組みで考えれば，描きかえ，思考実験および操作等が考えられる。また，観察は，新しい性質の認識や理解である。

図式的推論を，x^2+3x の因数分解を例にとって考えてみる〔図 4〕

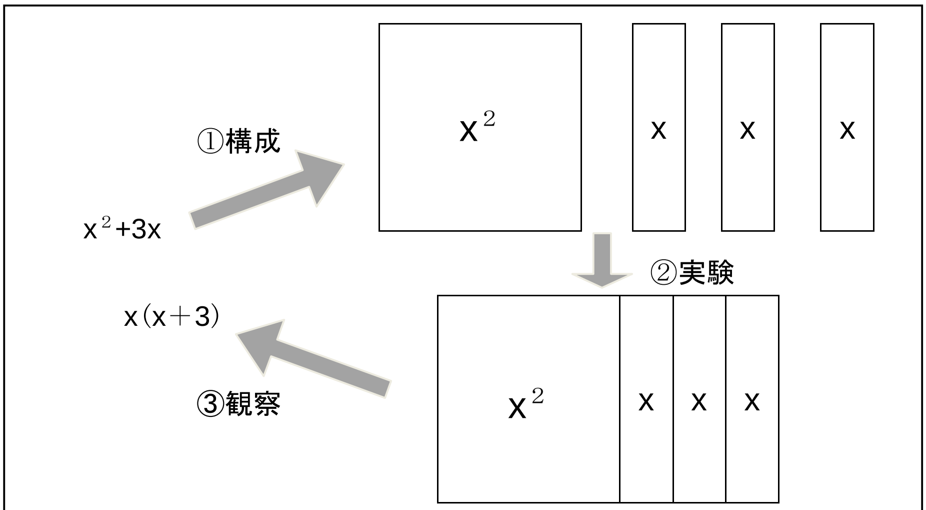


図 4　図式的推論の例

第 1 段階の構成は，この式からタイルによる操作的図式をつくることである。第 2 段階の実験は，目的が因数分解であることを踏まえて，タイルで長方形をつくることである。第 3 段階の観察は，実験結果である長方形の縦と横の長さを読み取り，因数分解 $x(x+3)$ を見いだすことである。

つまり，図式的推論とは，課題やはじめの状況にある関係を明確にするために，記号化し，そこから子どもたちが内在している関係を読み取っていくことである。

(3) 不可避的な経験

Hoffmann[5]は，図式的推論の観察の際，図式に働きかけることによって，図式が解釈者に何らかのリアクションを起こしてくること，すなわち，図式から我々に働きかけてくる経験を「不可避的な経験」と述べた。これは，以下の Peirce の引用による。

「(推論は) もしわれわれがある種の意思を働かせるならば, われわれがある強制的な知覚が返ってくることを経験するであろう, というアイデアに依拠する。この種の考慮, すなわち, 行為のある方向がある種の不可避的な経験を伴うであろうことは,「活動的な考慮」と呼ばれることである。」〔CP5,9〕

Hoffmann によると, この経験は次の 2 つの場合に区別が可能である。1 つは, 与えられた表象体系の範囲での構成の新しい含意を展開することで新しいことを手に入れることができる経験である。これは, Peirce が「部分間の気付かれなくて隠れていた関係を発見する」〔CP3,363〕と述べたように, われわれ自身の知識体系を広げる可能性を含んでいる。

もう 1 つは, 新しい展望と可能性を開くことができる表象体系それ自体を発展させる過程が存在する経験である。この場合は, Peirce が「われわれにまったく異なる思考を強制する」〔CP1,324〕と述べているように, 学習の可能性が保障される。

本研究では, 前者の『新しい含意を展開することで新しいことを手に入れることができる経験』を「受け入れられる経験」と定義する。また, 後者の『表象体系それ自体を発展させる過程が存在する経験』を「受け入れられない経験」と定義する。

例えば, x^2+3x の因数分解ができる生徒が,「x^2-3x も因数分解できた」とするのが「受け入れられる経験」である。それに対して, この生徒が「同様の方法では x^2+3x+2 の因数分解ができない」とするのが「受け入れられない経験」である。

(4) アブダクション

Hoffmann[8]は, 不可避的な経験により, 図式を修正する際に生じる推論がアブダクション (abduction) であると述べている。アブダクションも Peirce の概念である。また, 和田[9][10]は, 数学教育におけるアブダクションを形式等の観点から分類している。以下で, 両氏の論を簡潔にまとめる。

① Peirce のアブダクション

Peirce は, 科学的論理的思考 (推論) には, 演繹と帰納の 2 種類の他に, 彼が「アブダクション」と呼ぶ, もう 1 つの顕著な思考の方法が存在し, とくに科学的発見・創造的思考においてはアブダクションが重要な役割を果たす, と唱えた。アブダクションとは「説明的な仮説を築くプロセス」である。

Peirce が定めたアブダクションの「確かな論理形式」は次の通りである。

「驚くべき事実 C が観察される」
「しかし, A が真であるならば, C は当然の事柄であろう」
「よって, A が真実であると考える理由がある」〔CP5,189〕

ここで「驚くべき事実 C」というのは, 疑念と探求を引き起こすある意外な事実のことであり,「A」はその「驚くべき事実 C」を説明するために考えられた「説明仮説」である。Peirce が, よく説明に用いるアブダクションの例は, 次の通りである。

(例)「陸地のずっと内側に魚の化石が見つかった」
「この一帯はかつて海であったが, 地殻変動で陸地になったにちがいない」
「よって, この一帯の陸地はかつて海だったと考える理由がある」

② 和田のアブダクション

和田[9]は，Peirce の概念に基づき，数学教育におけるアブダクションを定義した。彼は，「驚くべき事実」を，「こういうことが言えるかも知れないという現象」と捉えた上で，数学教育への援用を図っている。

更に，和田[10]は，数学教育におけるアブダクションの形式を検討している。その結果，現象 B に対するアブダクションとして, 次の①から③の 3 種類を想定した〔図 5〕。(但し，③については検討の余地があるとしている。)

① $\dfrac{B}{A \to B}$　② $\dfrac{B}{B \to C}$　③ $\dfrac{B}{B \mid D}$

※B｜D の「｜」は「相容れない」の意

図 5　数学教育におけるアブダクションの形式

つまり，①は，B を受け入れた上で解析的に A を仮定し，その演繹的関係を推測するものである。また，②は，B を仮定として受け入れた上でそれから論理的に導かれる C を推測するものである。③は, B を受け入れた上でそれに相反する命題を推測するものである。

(5) 理論的変換と実在的抽象

アブダクションは, Hoffmann[8]によると, 2 つに分けられる。1 つは理論的変換 (Theoric transformation)，もう 1 つは実在的抽象 (Hypostatic abstraction) である。何れも Peirce の概念である。

Hoffmann[5]は，理論的変換とは「視座の変更」であり，「すべての種類の創造的推論における重要な要素である」と述べている。また，実在的抽象は「事物ではないことから事物を創造する過程」であり，「数学のような抽象的な科学の核心である」と述べている。

このようなプロセスについて，和田[10]は，同一の表現でその指示対象が変換される場合を変容と定義し，異なる表現への変換を翻訳と定義している。理論的変換が視座の変更であり，実在的抽象が事物を創造する過程であることから，理論的変換と変容，実在的抽象と翻訳が同義だと解釈することができる。

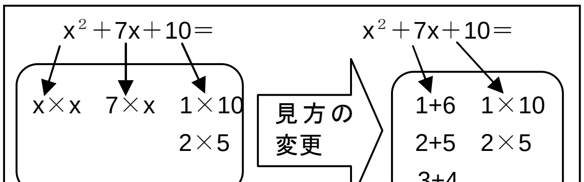


図 6　記号的図式内における変容

このことから，本研究では，理論的変換を「変容」，実在的抽象を「翻訳」と定義する。前出の図 4 は，記号的図式から操作的図式への翻訳である。また，図 6 は記号的図式内における指示対象の変換であるから変容である。

以上の検討を踏まえて，本研究における図式的推論の観察の段階を整理すると，図 7 のようになる。

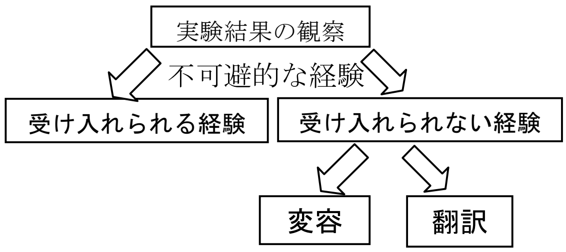


図 7　図式的推論の観察の段階

まず，図式的推論の観察の段階では，不可避的な経験が生じる。「受け入れられる経験」の場合は，新しい性質を見いだし学習が進むと考えられる。「受け入れられない経験」が生じたときには，アブダクションという推論が働いて，修正するプロセスが必要となる。それが変容または翻訳である。

３　授業分析の目的と方法

⑴ 授業分析の目的

因数分解の授業では，図的図式や操作的図式が多く用いられる。しかし，これらの図式は生成が唐突で, 単なる説明のために使われていることが多い。因数分解の授業を観察し，図式的推論が行われているかを分析し，数学の授業における図式的推論の特徴を明らかにすることを目的とする。

⑵ 授業分析の方法

平成 21 年 5 月中旬から下旬にかけて，公立中学校 3 年生の 2 つのクラス（A 組，B 組とする）で行われた因数分解の単元の授業（各 8 時間）を観察した。授業者は，40 代の公立学校教員である。学習過程を詳細に観察するため，2 クラスとも 1 名ずつの抽出生徒を選んだ。授業では，2 台のビデオカメラを設置し，1 台は教室後方から授業者と黒板の様子を，1 台は抽出生徒を中心に学習の様子を全時間記録した。筆者は抽出生徒に対して一切支援することなく観察を行った。

授業後にビデオカメラからトランスクリプトを作成し, 主に扱われている図式を確認し，その検討を行った。

４ 授業の実際

一連の授業は，A・B 組で若干の違いはあるものの，概ね表 2 の内容で進められた。

表 2　一連の授業の流れ

時	内容の概要
1	式の展開の復習，因数分解，素数
2	素因数分解，共通因数を取り出す因数分解
3	$x^2+7x+10$ の因数分解
4	$x^2+(a+b)x+ab$ の因数分解
5	$a^2+2ab+b^2$ の因数分解
6	a^2-b^2 の因数分解
7	複雑な因数分解
8	問題練習，式の展開・因数分解の利用（導入）

第 1 時から第 2 時の途中までは, 素因数分解の学習を行った。整数をタイル図で表現し,「18 を因数分解するということは 3×6 の長方形をつくること」と確認し，タイル図で考える足場を設定した。

第 2 時の途中から文字式の因数分解に入り，共通因数を取り出す形を学習した。x^2+3x の因数分解をタイル図で考えさせ，その後，x^2-3x の因数分解を考えさせた。

第 4 時以降の，乗法公式を利用した因数分解では，教科書の指導配列を入れ替え，x^2+ax+b の一般形から入った。生徒が使用している教科書では，式変形の容易さから a^2-b^2 から入るが，これを最後に扱うこととした。

(1) B 組の授業（概要）

① 第 2 時（5 月 14 日）

20 分すぎから共通因数を取り出す因数分解の学習に入った。

まず，展開の学習の際に用いた公式のカードを使い，因数分解の意味を確認した。そして，$x^2+3x=x(x+3)$であることを生徒との対話から導いた〔図 8〕。この共通因数を取り出す記号的図式は，第 3 時の推論の足場となった。

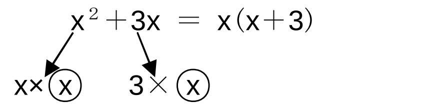


図 8　共通因数を取り出す記号的図式

その後，授業者は 1 人の生徒に声をかけ，正方形のタイル図 1 枚と，長方形のタイル図 3 枚を黒板に貼りながら，「長方形を作ってみよう」と指示をした。生徒はまず，2 つの長方形を作った〔図 9〕。授業者が「合わせて作ってほしいんですけど‥」と述べると，その生徒はタイル図を重ねる素振りを見せた。授業者が「重ねないでもらいたいんだけど。この 4 枚を使ってもらいたいんだけど」と述べたところで，1 つの長方形が完成した〔図 10〕。授業者は，長方形の縦と横の長さがそれぞれ x+3，x であることを，生徒との対話より確認した。

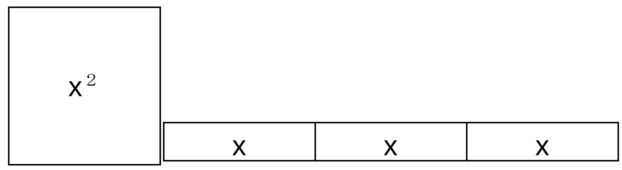


図 9　x^2+3x のタイル図による操作的図式①

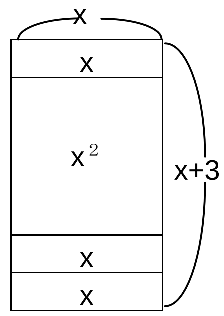


図 10　x^2+3x のタイル図による操作的図式②

抽出生徒の H は，図 10 の長方形の説明を頷きながら聞いており，理解できた様子であった。しかし，授業者が「$4x-6$（の因数分解)，わかる人？」と尋ねたところ，8 名が挙手したが，H は挙手しなかった。一人の生徒が「$2(2x-3)$」と答えたが, H は, じっと黒板を見たままだった。授業者が「$2(2x-3)$を展開してみると，$4x-6$ になるよね」と説明したときは，軽く頷いたものの，その後はじっと黒板を見つめていた。

② 第 3 時（5 月 18 日）

本時の課題は，「$x^2+7x+10$ の因数分解を考えよう」であった。課題提示の後，授業者は，生徒との対話から, 共通因数がないことを確認した〔図 11〕。

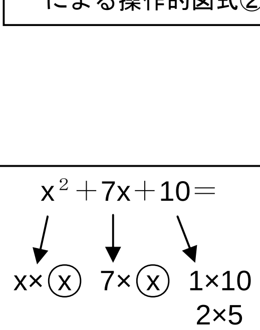
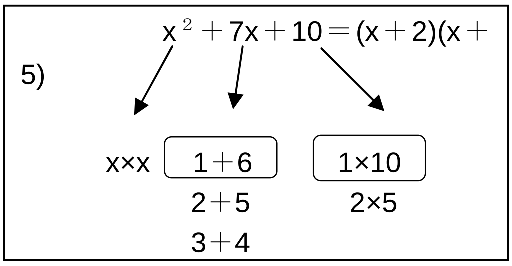


図 11　共通因数を取り出す記号的図式

この因数分解の答えを尋ねたところ，5 名が挙手し，H も自信なさそうに 5 番目に挙手をした。生徒の一人が$(x+2)(x+5)$と発言したため，これを展開すると，$x^2+7x+10$ となることを全体で確認したが，$x^2+7x+10$ の因数分解がなぜ$(x+2)(x+5)$になるかについては誰も説明できなかった。そこで，授業者は「自分なりに，こうだからこう因数分解できますっていうのを考えてみてください」と指示を出した。その際，x^2のタイルが 2 枚，$1\times x$ の長方形のタイルが 10 枚，1×1 の正方形のタイルが 16 枚入った封筒を配り，「これは使ってもいいし，使わなくてもいい」と述べた。

新潟大学教育学部数学教室,『数学教育研究』, 第 45 巻, 第 1 号, 48-68, 2010.



4〜5 名の生徒はタイル図を使わず「たして 7,かけて 10 になる数」を考察した〔図 12〕。

大半の生徒は,最初にタイル図を取り出し,H もタイル図で考えようとした。H は,この活動に 10 分を要した。この作業の終末で象徴的な場面が観察された。長方形の向きを変えて正方形の下につける発想に気づいた後,図中の矢印の部分を指でなぞって〔図 13 左〕,明るい表情になったのである。その直後に左下の 1 枚の長方形を動かした〔図 13 右〕ことから,この瞬間に(これでは,4×3 枚の正方形が必要になる。10 枚の正方形をあてはめるのだから,2×5 にしなくてはならない)と,気づいたのだと推測できる。

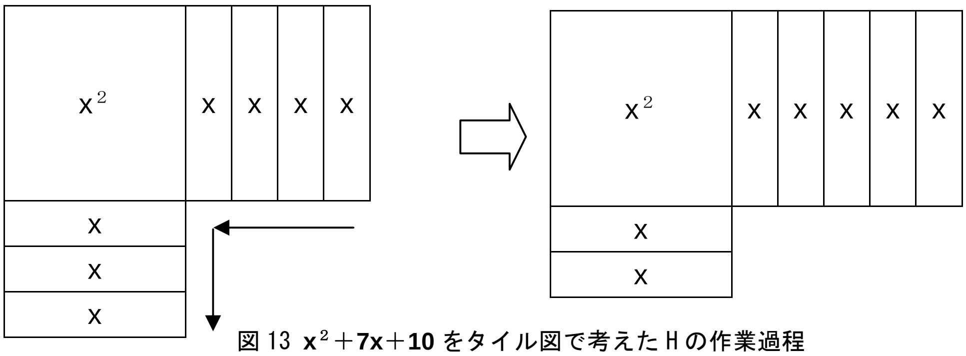


図 13 $x^2+7x+10$ をタイル図で考えた H の作業過程

作業開始から 10 分後,授業者はまず記号的図式で考察した生徒に説明を促した〔図 12〕。その説明に対して,授業者が「納得できる人」と聞いたところあまり手が挙がらなかった。

その直後,図 13 のように操作的図式を使って考えた生徒(H を含めた生徒 3 名)が発言した。この段階で,ほとんどの生徒が理解した。その後,因数分解の一意性を確認し,2 つの考え方の関係を確認する形で授業を終えた。

(2) A 組の授業(概要)

① 第 2 時(5 月 13 日)

本時は,前半 20 分で素因数分解を学習し,その後因数分解の学習に入った。因数分解の意味を確認した後,黒板のタイル図を使い,生徒の発言を生かす形で x^2+3x の因数分解を学習が行われた〔図 14〕。

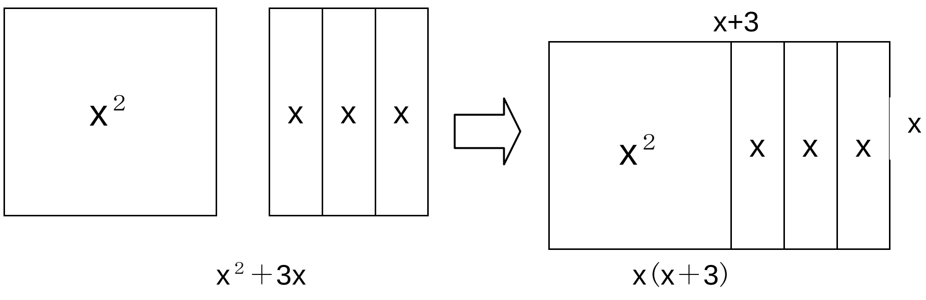


図 14 タイル図を使った x^2+3x の因数分解

その後,生徒に x^2+6x の因数分解を尋ねると,大半は理解できていた。

次に,「ちょっとだけひねります。x^2-3x を因数分解しなさい」と問うと, 6 名が挙手し, 一人が「$x(x-3)$です」と答えた。しかし, 授業者が挙手により確認したところ, 他の生徒の納得は得られなかった。そこで, 授業者が「周りの人と相談して」と促したところ,「図で考えるとわからない」といった声があちらこちら生徒から挙がりはじめた。周りとの相談の後, 一人の生徒に発言を促した。彼は図 15 のようにタイル図を並べ,「x^2分から 3x 分を引いて, 縦は x から 1 を 3 つ分引いて, $x-3$ になります」と答えた。

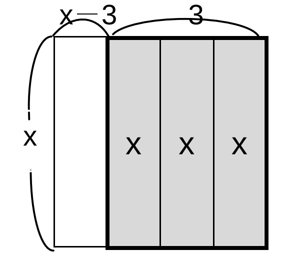


図 15　$x^2-3x = x(x-3)$の説

この生徒の説明も大半の生徒にとって, 理解しがたいものだった。そのため授業者は,「図で考えるとわけがわからなくなりそうなので, 式でいきましょう」と述べ, 図 16 を板書し, その説明をした。

$$ax+ay=a(x+y)$$
$$ma+na=a(m+n)$$

図 16 授業者が示した記号的図式

このやりとりの途中から, 抽出生徒の M は, 徐々に表情がさえなくなった。授業終了後, M は, 友人に「わかんない。私, 素因数分解が限界みたい」と漏らした。授業者が「どこがわからない?」と尋ねたところ,「(図 16 を指して) これとこれはわかるけど, (x^2-3x を指して)こっちがわからない」と質問した。授業者は, 共通因数の見つけ方および展開の逆演算であることを上記の 3 問で確認して, その場は終わった。

② 第 3 時 (5 月 14 日)

練習問題を行った後, 25 分過ぎから, 乗法公式を用いた因数分解の学習に入った。課題として x^2+5x+6 を提示したところ, 一人の生徒が$(x+6)(x-1)$と答え, 別の生徒が$(x+2)(x+3)$と答えたため議論となり, タイル図を導入する前に,「たして 5, かけて 6 となる 2 数を見つければよい」という意見が出された。

授業者は 36 分すぎ, 2 名の生徒を指名し, 黒板でタイル図を使ってこの因数分解を行うように指示をした。2 名は図 17 のようなタイル図を構成した。授業者はどちらも正しいこと, そして因数分解の意味を再確認した。

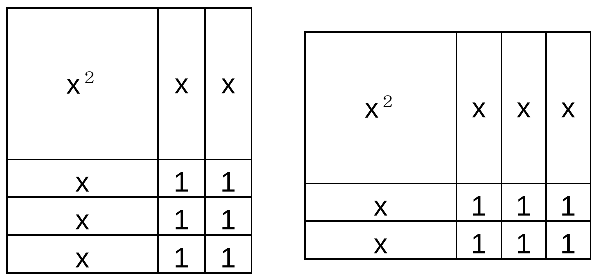


図 17　x^2+5x+6 の因数分解

続いて授業者が「タイル図を使って x^2+6x+8 を因数分解しなさい」と指示をしたところ, M は, すぐにタイル図を構成することができ, 表情に明るさが戻った。

授業の最後に, x^2+ax+b (a, b ともに正の場合) の因数分解の練習問題を行った。その際, M は図 18 のように, (4)のみ未習の問題を誤って写して, 困惑した。なかなか答えを求めることができず, 授業の終わりのあいさつをしても, 立ちつくしていた。しかし, 1 分ほど経ってから「あっ」と声を挙げて, 答えを正しく求めた。この数分間で, M は「かけて b, たして a となる 2 数は負

(1) $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$
(2) $x^2+7x+6=(x+6)(x+1)$
(3) $x^2+8x+12=(x+6)(x+2)$
(4) $x^2-10x+16=$　?

図 18　Mのノート

の数になる場合がある」ことに気づいたのである。

5　授業の分析

(1) 授業で用いられた図式の検討

前節では，授業の概略を示した。その中には，個人が構成した図式とクラス全体で取り上げられた図式が混在している。ここではまず，学習過程を捉えるために，第 4 時までについてクラス全体として取り上げられた図式を対象として考察を行う。

第 4 時までにクラス全体で取り上げられた図式の一覧は表 3 の通りである。

表 3　クラス全体として取り上げられた図式の種類

【A 組】

授業	操作的図式	記号的図式
1	○ →	○
2	○	
3	○	← ○
4		○

【B 組】

授業	操作的図式	記号的図式
1	○ →	○
2	○	← ○
3	○	← × ○
4		○

記号の意味
「○」‥図式による実験が成功
「×」‥図式による実験がうまくいかない
「←」‥（矢印の方へ）図式の翻訳が行われた

表 3 より，まず，同じ授業者による授業にもかかわらず，第 2 時および第 3 時で図式の表れ方が異なったことに注目する。

第 2 時は，A 組で生徒から出された図 15 の図式が生徒に受け入れられなかった。そのため，B 組ではこの図式が出ないように，授業者が授業展開を変えたことが推測できる。

また，第 3 時は，A 組では記号的図式の段階で反駁が起こり，生徒同士の議論が始まったのに対して，B 組では記号的図式に対して「受け入れられない経験」が生じて図式的推論が働き，授業展開が異なったためである。

次に，矢印の向きに注目したい。両クラスとも，第 1 時は「操作的図式→記号的図式」だが，第 2 時以降は「記号的図式→操作的図式」となっている点である。これは，数学の学習における特徴ともいうべき点であろう。抽象度の高い記号的図式では理解できないため，まず抽象度を下げて自己の認知的手段で考えるためである。一方，第 1 時で「操作的図式→記号的図式」となっているのは，この単元で扱う図式のルールを明示的に扱ったためである。

(2) 図式的推論が働いた場面の分析

これまでの検討から，図式的推論が働いた場面として，B 組第 3 時を分析する。この授業の構造を図 19 で示す。①～③が図式的推論の場面である。

本時の課題は「$x^2+7x+10$ の因数分解の“やり方”を考えよう」であった。

課題提示のあと，①の図式が生徒との対話により構成された。この図式から，共通因数を取り出すことができないことが確認された。一部の生徒から，$(x+2)(x+5)$ という発言があり，大半の生徒は，逆算すればそうなることは認めたものの，“やり方”としては納得

しなかった。つまり,実験までは行ったものの,観察の段階で「受け入れられない経験」が生じたのである。

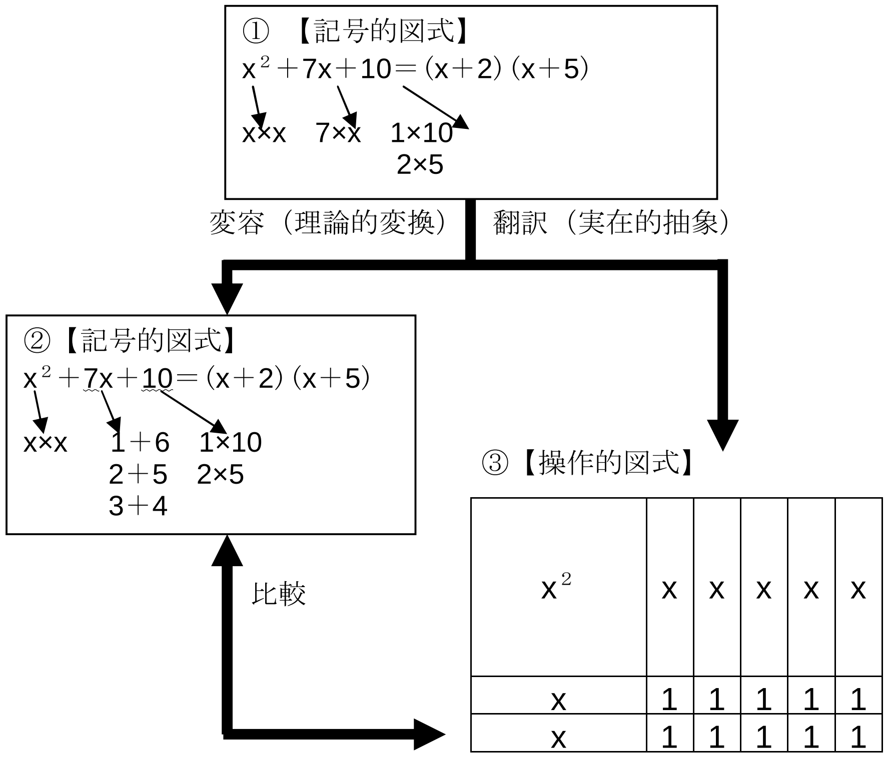


図 19　B 組第 3 時を図式から見た構造

そこで授業者は,x^2の正方形,x の長方形,1 の正方形のタイル図の入った封筒を配布し「因数分解がこうなる理由を考えよう。これは使っても使わなくてもよいから‥」と指示をした。4～5 名の生徒はタイル図を使わず,記号的図式（式表現）の操作を続け,①の図式の適切さを疑い,①の図式の実験を修正した。これは,アブダクティブな観察により,変容が行われたことを意味する。②の記号的図式から「受け入れられる経験」が生じ,「たして 7,かけて 10 になる 2 数」を見いだすことができたのである。

一方,ほとんどの生徒はタイル図を使った。①の記号的図式で考えることに限界を感じ,③の操作的図式で考えたのである。前時には,x^2+3x の因数分解をタイル図で考察する活動を行っていたため,x^2の正方形 1 枚,x の長方形 7 枚,1 の正方形 10 枚を容易に袋から取り出した。タイル図を長方形にする実験では,前時の学習から,横に並べる生徒が多かったが,それではうまくいかないことに気づき,試行錯誤により③の図式を見いだしていた。長方形にする実験ができた生徒は,その長方形を観察し,縦が x+2,横が x+5 であることを読み取っていた。第 1 時に,「18＝3×6」をタイル図で表現する実験をしていたため,「受け入れられる経験」が生じた。長方形の面積は「縦×横」で表されることとそれを読みとることは,概ね内在化されていた。

その後の授業では,②の記号的図式で考えた生徒 1 名と,③の操作的図式で考えた生徒 3 名が発言を行った。②の記号的図式の説明で納得できた生徒が少なく,③の図式による説明でほとんどの生徒が理解した。一意性を確認し,②と③の図式を比較することを通し

て，2 つの考え方の関係を確認する形で授業を終えた。なお，この授業における図式的推論の 3 段階を整理すると，表 4 のようになる。

表 4　B 組第 3 時に見られる図式的推論

	①記号的図式	②記号的図式	③操作的図式
構成	前時で学習した図式をそのまま用いる	①の図式をそのまま用いる	①から操作的図式への翻訳を行う
実験	目的：共通因数を出す 方法：各項の因数を探る	目的：(x＋2)(x＋5) 方法：逆思考で展開の逆を考える	目的:タイル図を長方形にする 方法：試行錯誤
観察	（観察した結果を受け入れられない）	・2 と 5 の組み合わせを見いだす	・長方形になったかを確認 ・長方形の面積は縦×横 ・縦と横の長さを調べる

6　授業分析による考察

数学の授業における図式的推論の理論を導き，授業への示唆を得るために，前章の授業分析に考察を加える。まず, B 組第 3 時で見られた図 19 の①～③の図式的推論について, 構成・実験・観察の 3 段階に分けて検討を行う。次に，授業分析全般から，「受け入れられない経験」およびアブダクションについて考察する。

(1) 構成について

まず，①の図式の構成について述べる。これは，前時の学習に基づいて構成された。本時は，この①の記号的図式が，重要な意味をもつ。それは，図 20 のように，既習との関連が明確になり，「受け入れられない経験」が生じ，アブダクティブな観察を促したからである。①の図式は，前時の学習を想起することにより，生徒の手による構成が可能である。

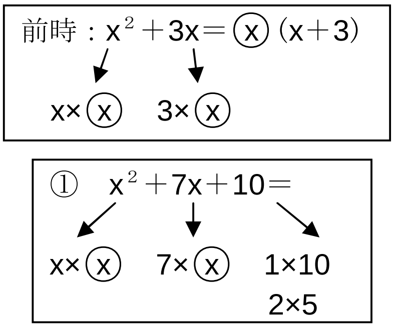


図 20　前時の図式と①の図式の比較

次に，変容による②の図式の構成である。これは図 21 のように，同一図式内で見方を変えるだけである。したがって，新しい図式を構成する必要はなく，若干の修正を加えるだけである。①の図式で各項の共通因数が見いだせないことから「受け入れられない経験」が生じ，①の図式を足場として，②の図式への変容が起こるのである。②の図式は,「以前に，多項式を展開して，こういう形になる式をやったなぁ。x の係数が 2 数の和で，定数項は 2 数の積だった」などと，解決の見通しをもつことができれば，生徒による構成が可能である。①の図式で「受け入れられない経験」

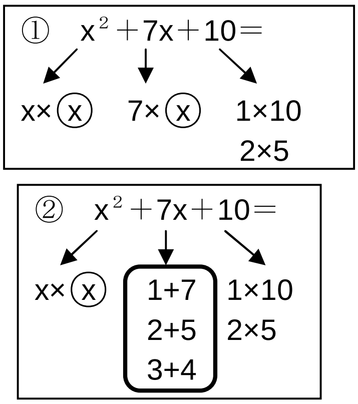


図 21　①の図式と②の図式の比較

が生じ，実験の方法を修正するといった図式的推論の一連の流れが，ここに表れている。変容による実験では，実験が成功するまで最初の構成に立ち戻るといった循環が起こる。

最後に，翻訳による③の図式の構成である。図 22 のような記号的図式から操作的図式の翻訳である。新しい図式の構成に，若干の困難性を有する。前時は，図 23 の図式が登場した。

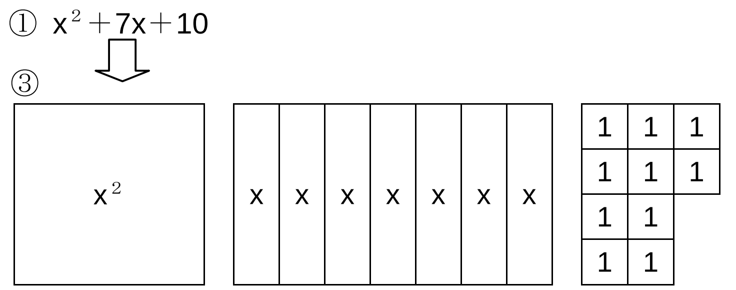


図 22　本時の課題と③の図式

前時の学習過程を踏まえ，生徒が③の操作的図式を構成できれば，①と③の関係を自発的に捉えることが可能である。

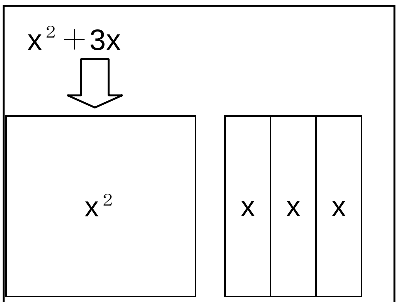


図 23　前時の課題と図式

今回の授業では，タイル図を使うアイデアを教師が示し,必要な枚数を取り出す作業を生徒が行った。つまり，翻訳を教師が行ったのである。生徒が自発的に翻訳による図式の構成を行うためには，それまでの学習過程で類似した学習を経験していること，更にそれらを想起させる場の設定が必要であろう。

(2)　実験について

①の図式による実験から述べる。この実験の目的は，記号的図式から共通因数を取り出すもので，その方法は，各項の共通因数を探ることである。これは前時に学習した方法である。構成と実験の段階を明確に分けるのであれば,積の形を書き出すところまでが構成,共通因数に○をつけるところまでが実験となる。

次に，②の変容による実験について述べる。授業におけるこの実験の目的は，(x+2)(x+5)を見いだすもので，その方法は逆思考による実験である。これらは，構成のところで述べた通り，①の観察から一連の流れの中で行われる。一般的にこうした実験は，生徒にとって難しい。新しいことを学習する際，この難しさを乗り越えさせるのか,「受け入れられない経験」を生じさせて他の方法を考えるのかを，指導者側で精査しておく必要があろう。

また，③の翻訳による実験の目的は，タイルを長方形にすることである。その方法は試行錯誤によるものである。このような実験は，生徒に馴染みのある表現を用いて行うことが重要である。また，用いた表現固有の規則によって遂行されなければならず，目的とルールが明確であることも重要である。

実際，一部の生徒は，教師から「前の時間は長方形を作ったのだよね」との説明を聞くまで，実験の目的が明確でなかった。これは，①の記号的図式から③の操作的図式への翻訳を教師が行ったため，①と③の図式がうまく関連づけられなかったからである。状況の把握・再確認の意味でも，生徒が構成に関わる工夫が必要である。

また，B 組第 2 時には，長方形にする実験の際，タイル図を重ねて考えた生徒の発言が

あった。タイル図を「重ねず，余らせず，１つの長方形にする」といったルールを明確にした上での実験が必要であろう。

(3) 観察について

①の図式的推論では，観察した結果が受け入れられるものではなかった。「この式は，因数分解できそうなのに‥」と，「受け入れられない経験」が生じ，実験または図式を修正することにつながった。それが，②と③の図式である。

②の図式的推論では，実験によって「たして 7，かけて 10」の 2 数，2 と 5 を見つけた後，(x＋2) (x＋5) と表現するところまでが観察である。また，③の図式的推論では，実験によってできた長方形について，タイル図が余らず長方形になったことを確認し，縦と横の長さを読み取り，それを文字による積で表すことが観察である。

観察の際は，いずれの場合でも，前の表現の目的に照らした再解釈が重要である。

(4) 「受け入れられない経験」について

Hoffmann(5)は，不可避的な経験は，観察の段階に生じると述べている。しかし，授業分析から，数学の授業における「受け入れられない経験」は，実験の段階にも生じていることが本研究より明らかになった。また，観察の段階に生じるそれは，2 つに分類できそうである。以下に，具体例を挙げて示す。

実験の段階の「受け入れられない経験」は，“実験ができない場合”である。例えば，B 組の第 2 時の 4x－6 の因数分解は，操作的図式が構成されていても，実験は困難である。このような場合は，他の図式で考えることが適当であろう。

また，観察の段階の 2 通りの「受け入れられない経験」は，“観察できない場合”および“観察結果を受け入れられない場合”と考えることができる。

前者は，B 組第 3 時の図 11 が適例である。共通因数を取り出す実験までは行ったものの，ここからは新しい性質の認識または理解につながらなかった。全ての項に共通な因数がないことが，判明したに過ぎないのである。

後者は，A 組第 2 時の図 15 である。実験から観察に至ったものの，この図式は多くの生徒にとって理解できないものだった。数学のような抽象的な科学の学習を考えた場合，知識の発達の段階によって，命題としては真であっても，受け入れられない場合も考えられる。つまり，観察ができることと，学習が進むことは同等ではない。このことを，まとめると，図 24 のようになる。

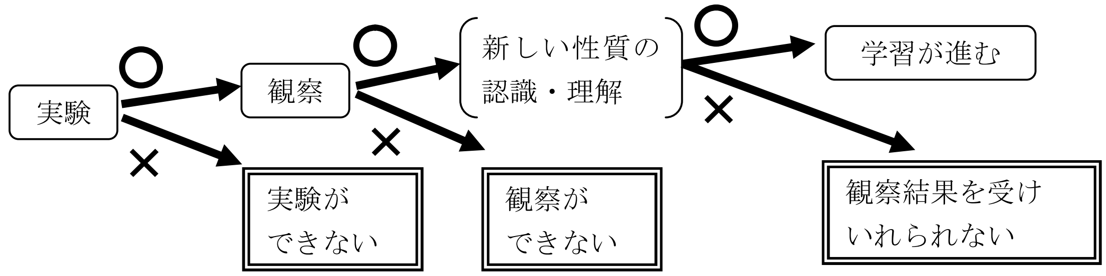


図 24　3 つの受け入れられない経験

(5) アブダクションについて

本研究におけるアブダクションの定義は，和田(10)の形式を援用した。ただし，図式的推論においてアブダクションが起こる場面は，実験がうまくいかず修正する場合が主であることを踏まえると，形式に若干の補足を加えることが適当である。

$$① \quad \frac{B}{A \to B}$$

今回の授業観察では，右の形式①のアブダクションを修正する場面が 2 つ見られた。

１つは，B 組第 3 時の冒頭で見られた「$x^2+7x+10$ の因数分解もできそうだ」という現象 B に対して，「共通因数を取り出せば，因数分解できる」という説明的な仮説を立てた場面である〔図 15〕。これは，授業で共通因数を取り出す方法しか学習していない段階だったため，ここでは共通因数を取り出すことができず，「因数分解できない」という結論が導かれることになる。

この「$x^2+7x+10$ の因数分解ができない」という結論に対して働くのは，命題 A「共通因数を取り出せば」を変更するアブダクションである。具体的は，命題 A を，命題 D「和が 7 で積が 10 である 2 数を見いだす」に変更することである。これは，右の形式(ア)で表すことができる。

$$(ア) \quad \frac{B}{D \to B}$$

もう 1 つは，命題 A と現象 B の関係を調整するアブダクションである。A 組第 4 時の終末，抽出生徒 M が「$x^2-10x+16$ の因数分解もできそうだ」と考えた場面である〔図 18〕。この段階では，$(x+a)(x+b)$の因数分解で，a，b の 2 数が正の場合しか学習していないため，M は「積 16 が，和が－10 である，2 つの正の整数を見いだせば因数分解できそうだ」という仮説を立てて考えたと推測できる。この場合には，「積が 16，和が－10 である，2 つの正の整数」は見いだせず，「因数分解できない」という結論が導かれることになる。

この「$x^2-10x+16$ の因数分解はできない」という結論に対して働くのは，現象 B に負の係数を含んでいることから，命題 A を調整するアブダクションである。具体的には，現象 B を踏まえ，命題 A を「負の領域まで拡張する」アブダクションである。前記(ア)と似ているが，現象 B との関係から命題 A を調整するという意味で，左の形式(イ)で表すことができる。

$$(イ) \quad \frac{B}{A' \to B}$$

以上の検討から，図 5 の①でうまくいかなかった場合のアブダクションとして，(ア)および(イ)が想定できる。この 2 つは論理学上の違いはない。しかし，授業を構想する上では，意識しておくべきであろう。

7　指導への示唆

(1) 授業分析から得られる示唆

これまでの検討に基づき，授業分析から得られる示唆を，図式的推論の 3 段階および不可避的な経験とアブダクションに分けて整理したものが，以下の表 5 である。

表 5　授業分析から得られる示唆

構成	(ｱ) 関連した既習内容や，類似した学習過程を想起することで，図式の構成が可能となる

実験	(ｲ) 実験は，生徒に馴染みのある表現を用いて行う (ｳ) 実験は，用いた表現固有の規則によって遂行されるため，ルールと目的が明確でなくてはならない
観察	(ｴ) 観察の際は，前の表現の目的に照らした再解釈が重要である
不可避的な経験とアブダクション	(ｵ) 生徒が自発的にアブダクションを行うためには，生徒一人一人がじっくりと図式を観察し，「受け入れられない経験」が生じる場の設定が重要である (ｶ) 教材研究の段階から，アブダクションが起きる場面や構成する図式について想定しておく必要がある (ｷ) アブダクションは，新たな命題を導出する場合だけでなく，適用範囲を拡げるといった場合も考えられる (ｸ) 解決の見通しをもつことが，変容につながる (ｹ) 変容は，前に構成された図式に実験の修正を加えるため，一連の流れの中で考える (ｺ) 目的に沿った操作に関して，馴染みのある表現を想起することが，翻訳につながる (ｻ) 翻訳は，若干困難を伴うが，少なくとも生徒と関わりながら行うことが望ましい

この表から，構成の段階では，既習内容や馴染みのある表現の想起と，想起できなかった際の教師の関与のあり方が示唆として導出された。また，実験の段階ではルールと目的の明確化，観察の段階では再解釈の重要性が指導への示唆として導出された。また，不可避的な経験を生じさせて，アブダクションを自発的に行えるよう，その場面や図式を想定した教材研究を行うことが重要であること，変容や翻訳の際の手だてが示唆された。

(2) 図を使った先行研究から得られる示唆

図式的推論に類似した算数・数学教育の先行研究（布川(12)，廣井(13)，川又(14)，田中(15)，久保(16)，Dörfler (17) ）を，図式的推論の観点から分析する。この目的は，授業分析では見いだせなかった図式的推論への示唆を得ることである。分析から得られる示唆を整理したものが，以下の表 6 である。

表 6　先行研究から得られる指導への示唆

全般	(a)図式的推論は，以前の図式的推論の想起を必要とする
構成	(b)構成は，生徒の理解に応じて行われる (c)生徒は，自らが構成した図式を思考の対象として推論を行う (d)構成は自由かつ創造的に行うが，図式的推論がうまくいくためには，正確さが求められる (e)構成の手だてとして，生徒同士の相互作用や，教師による足場設定も有効である
実験	(f)図式のもつ規則や不変性を見いだすことが，実験を成功に導く (g)実験は，知覚，観察，パターン認識に基づいて行われる

	(h)実験・観察によって，これまで隠れていた関係を見いだすことができる
観察	(i)実験の目的が不明確だと，観察の際，目的に照らした再解釈ができない (j)観察がうまくいくためには，その図式を理解していることが必要である
不可避的な経験とアブダクション	(k)実験ができない場合は，構成を見直す必要が出てくる (l)他者との交流により新たな理解が生じ，図式の修正が可能となる (m)実験がうまくいかないときは，図式の見直しやルールの再確認が必要である (n)図式の構成を誤っても，観察の段階で気づき，修正できる場合もある (o)図式には限界があることを生徒に認識させることが，新たなことを学ぶ契機となる (p)翻訳の際，翻訳して考える理由を明らかにする必要がある (q)類似した学習の想起から，翻訳のアイデアを見いだすことが可能である (r)既習事項で“新たな図式”の見方を導入することが，新たなことを学ぶ際の自発的な翻訳に繋がる (s)翻訳できない場合は，教師が生徒と関わりながら行うとよい

図式的推論全般では，以前の図式的推論の想起が不可欠であること，構成の段階では，図式の構成は生徒の理解に応じて行われるが，正確性や適切性が重要であることが示唆された。また，実験の段階では，規則性や不変性といった，それまで隠れていた関係を見いだすことが重要であり，観察の段階では図式についての理解が不可欠であることが指導への示唆として導出された。さらに，不可避的な経験では，図式には限界があることを生徒に認識させることが, 新たなことを学ぶ契機となること, 類似した学習場面の想起により，翻訳のアイデアが見いだせることが示唆された。

８　数学教育における図式的推論の構造

第 1 章で構築した図式的推論の理論を，第 3 章までの考察を踏まえ構造化すると，次のようになる〔図 25〕。

図式的推論の 3 段階は，第 1 章で定義したとおり，図式の構成・図式の実験・実験結果の観察である。第 3 段階の観察で,「受け入れられる経験」が生じれば，新しい性質を見いだし，学習が進むと考えられる。

一方で，図式的推論において新しい性質などを見いだす契機となるのは，実験または観察の際に起こる「受け入れられない経験」である。これには,「実験ができない場合」,「観察ができない場合」そして「観察結果を受け入れられない」3 つの場合が考えられる。

「実験ができない場合」とは，その段階での認知的手段では解決できない場合である。この場合は，第 1 段階に戻り，新たな図式を構成することにより，新たな実験が可能となる。

「観察ができない場合」とは，ある目的をもって実験をしたものの，その目的に達しなかった場合である。また,「観察結果を受け入れられない場合」は，観察結果が意に反しており，予想外の結果となった場合である。これらの場合は，2 つの可能性を検討しなくて

はならない。1 つは，図式を見直す場合，もう 1 つは，第 2 段階に戻り，実験を見直す場合である。

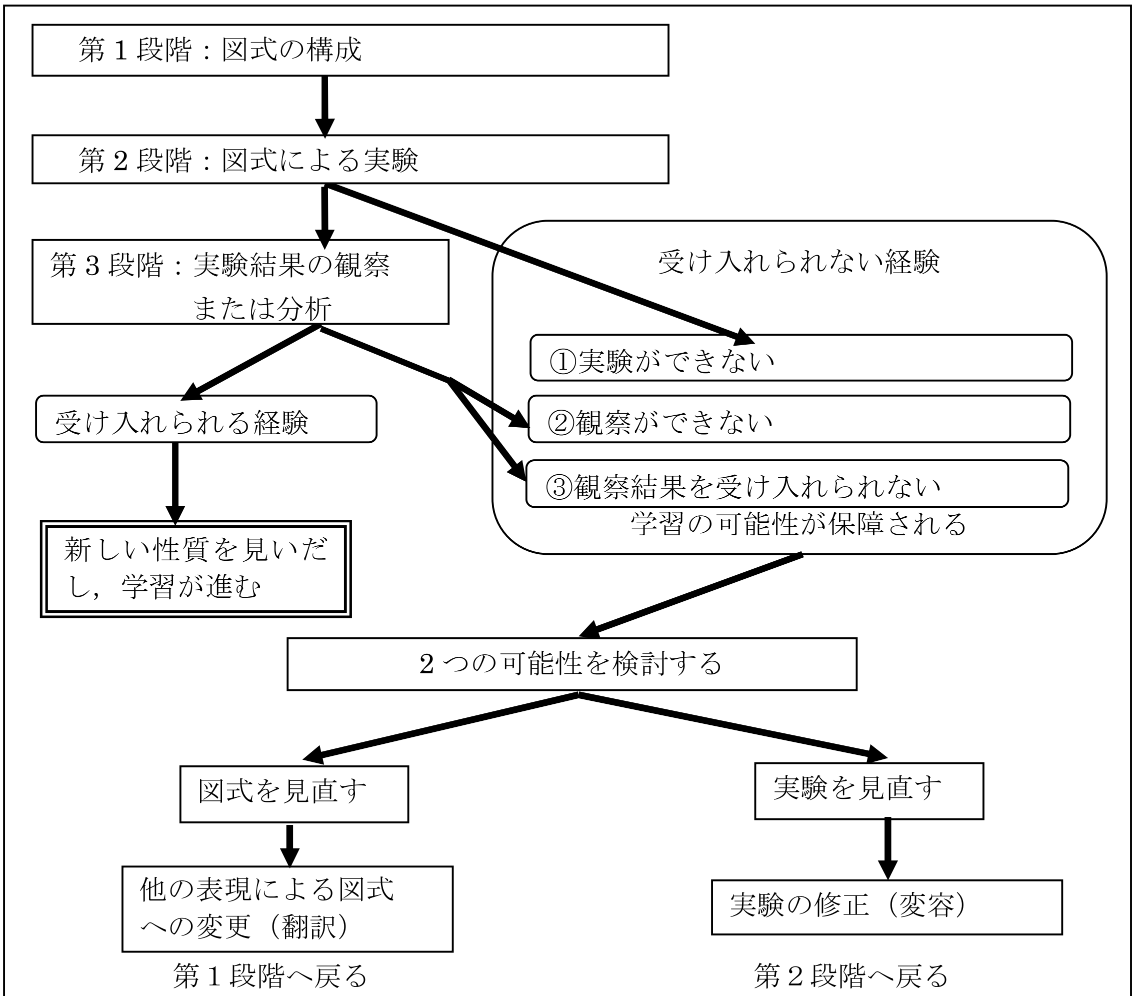


図 25　数学教育における図式的推論の構造

図式を見直す場合は，翻訳が行われる。すなわち，異なる図式への変換または同一図式内の異なる表現への変換である。翻訳の目的は，自己の認知的手段で考察することであるため, B 組第 3 時のように変換された図式の抽象度は下がることが一般的である。しかし，図式に限界が生じた後は，抽象度は上がることが想定される。

実験を見直す場合は，変容が行われる。これは，指示対象を変えずに，実験方法またはルールを修正することである。実験方法の修正とは，図式も目的もルールもそのままで，方法のみを見直す場合である。一例として，B 組第 3 時に，長方形のタイル図を正方形の横に並べる方法でしか実験していなかった抽出生徒 H が，下に並べる方法に気付き，実験を見直した場面がこれにあたる。また，実験ルールの見直しとは，図式と目的がそのままで，ルールを変更する場合である。当然，ルールの変更に付随して方法も変わる。A 組第 2 時に，タイル図を重ねて説明した事例がこれに該当する。方法やルールは，学習集団や

学習者に内在化されているものであるため，実験の見直しは，気づかれなくて隠れた関係を見いだす作業となる。

こうして，図式的推論の構成または実験の段階に戻り，「受け入れられる経験」が生じるまで，この循環が繰り返されるのである。

９　図式的推論を生かした授業についての原理

(1) 授業構成についての原理

授業考察および先行研究から，図式的推論を生かした授業への示唆を得ることができた。また，数学教育における図式的推論の構造も明らかとなった。これらのことから，以下のような授業構成についての原理が導き出される。

Ⅰ　図式は，生徒によって自発的に構成されなければならない
Ⅱ　実験は，ルールと目的が明確でなくてはならない
Ⅲ　観察は，前の表現の目的に照らした再解釈を行わなくてはならない
Ⅳ　新しい性質などを見いだす際は，「受け入れられない経験」が生じなくてはならない
Ⅴ　「受け入れられない経験」が生じた際は，図式または実験を修正しなくてはならない

(2) 授業構成についての方法

前述の授業構成についての原理を具体化し，授業を行う際の教師の働きかけのあり方は，これまでの検討から，以下のように導き出される。

Ⅰ－１　関連した既習内容や類似した学習過程を想起させる場面を設定すること
Ⅰ－２　図式の構成は，状況の把握・再確認の意味でも，生徒と関わりながら行うこと
Ⅱ－１　構成された図式における実験の目的を明らかにしておくこと
Ⅱ－２　実験で用いる表現固有のルールを明らかにしておくこと
Ⅲ―１　観察の際，前の表現の目的に照らした再解釈ができるように，それまでの学習過程を工夫すること
Ⅳ－１　授業を構想する段階から，「受け入れられない経験」が生じる場面や構成する図式について想定しておくこと
Ⅳ―２　生徒一人一人がじっくりと図式を観察し，図式の限界を認識する場を設定すること
Ⅴ－１　翻訳の際は，目的に沿った操作に関して，馴染みのある表現を想起させること
Ⅴ－２　翻訳の際は，実験の目的が変わることを生徒に意識させること
Ⅴ－３　変容の際は，生徒に解決の見通しをもたせること

おわりに

本研究の主な成果は，以下の 4 点である。

(1)　図式的推論の枠組みの構築を行ったこと
(2)　授業分析から図式的推論の特徴を明らかにしたこと
(3)　授業分析および先行研究の考察により図式的推論を生かした数学の授業への示唆を

示したこと

(4) 図式的推論の枠組みを構造化し, 授業構成についての原理と方法を導き出したこと

今後の課題としては, 以下の点が挙げられる。

まず, 本研究で導いた授業構成についての原理と方法は, 主に授業観察と先行研究から得られた示唆から導いたものである。授業構成の原理に基づいた検証はまだ行っていないため, 実践により, この原理の一般性について今後検証する必要がある。

また, 図式的推論では,「受け入れられない経験」の後の, 翻訳または変容が授業の鍵となる。アブダクションが起きる場の設定, 生徒が自発的に翻訳を行う手だて, 変容の際の見通しのもたせ方について, 明らかにしていく必要がある。

最後に, 授業を参観させていただきました当該校の校長先生, 授業者の先生, 並びに生徒の皆さんに深く感謝いたします。

註および主な引用・参考文献

※ 慣例に従って, *Collected papers of Charles Sanders Peirce* からの引用の場合,〔CP 巻番号, パラグラフ番号〕) で表すことにする。

(1) Hoffmann,M.H.G. (2006). ‘Commentary paper: What is a “semiotic perspective”?’,*Educational Studies in Mathematics, Special Issue on “Semiotic Perspectives onEpistemology and Teaching and Learning of Mathematics”*, *61*(1–3). pp279-291.

(2) Bakker,A & Hoffmann,M.H.G. (2005). Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts, *Educational Studies in Mathematics 60*: pp333–358.

(3) 和田信哉(2009),「表現からみた数学的活動」, 日本数学教育学会誌『数学教育』, 第 91 巻, 第 9 号, pp15-20.

(4) Peirce, C.S. (1931-1935,1958) *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, Harvard UP.

(5) Hoffmann,M.H.G (2005). Signs as Means for Discoveries. In M. Hoffmann, J. Lenhard, F.Seeger (Eds.), *Activity and Sign*, pp45-56. Springer, New York.

(6) Dörfler,W. (2005). Diagrammatic Thinking: Affordances and Constraints. In M. Hoffmann,J. Lenhard, F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign*, pp. 57-66. New York: Springer.

(7) 中原忠男(1995),「算数・数学教育における構成的アプローチの研究」, 聖文社.

(8) Hoffmann,M.H.G.(2006).Seeing problems, seeing solutions. Abduction and diagrammatic reasoning in a theory of scientific discovery. In O. Pombo & A. Gerner (Eds.), *Abduction and the Process of Scientific Discovery* .pp213-236.

(9) 和田信哉(2000),「算数・数学教育におけるアブダクションについての考察」, 中国四国教育学会誌『教育学研究紀要』, 第 45 巻, 第二部, pp281-286.

(10) 和田信哉(2008),「数学教育におけるアブダクションの基礎的研究―形式の観点からの検討―」, 新潟大学教育学部数学教室,『数学教育研究』, 第 43 巻, 第 2 号, pp4-10.

(11) 和田信哉(2008),「小数の乗法の意味に関する記号論的考察」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第 14 号,pp9-18.

(12) 布川和彦(2007),「小学校 3 年生による比例的推論の課題の解決―下位単位の利用の焦点を当てて―」, 上越数学教育研究,『上越教育大学数学教室』, 第 22 号, pp1-10.

(13) 廣井弘敏(2003),「小学 5 年に見られる図による問題把握」, 日本数学教育学会誌『算数教育』, 第 85 巻, 第 6 号, pp10-19.

(14) 川又由香(2006),「図的表現を活用した算数教育に関する研究」, 新潟大学修士論文(未刊行).

(15) 田中由美恵(2009),「算数授業における図的表現から記号的表現への変換に関する研究」, 新潟大学

修士論文.
(16) 久保良宏(2001),「数学的な見方や考え方のよさを知る授業モデル」, 長崎栄三・五十嵐一博編著『新しい時代の学力づくり・授業づくり　中学校新数学科の授業モデル　第 3 学年』, 明治図書, pp29-34.
(17) Dörfler,W. (2007). Matrices as Peircean diagrams: A hypothetical learning trajectory, http://ermeweb.free.fr/CERME%205/WG6/6_Dorfler.pdf