

図形感覚を鋭くする指導に関する研究

新潟大学大学院教育学研究科
教科教育専攻 数学教育専修
U08B116H 竹内 明子

はじめに

中学校学習指導要領解説－数学編－（文部省，1999）には，図形領域における「論理的な思考力の育成」の項目で，直観や洞察といった，図形の性質の根底にある本質的なものを見抜く力の重要性が記述されている。

しかし，平成20年度に行われた全国学力・学習状況調査【中学校】の結果からは，直観や洞察といった図形感覚を働かせる必要のある問題に課題があることが見えてきた。よって，中学校の図形指導の見直し，とりわけ図形感覚の育成に関する指導の見直しが必要であるといえる。

そこで本研究は，図形感覚を鋭くする授業構成の観点を明らかにすることを目的とする。

そのために，まず，文献解釈的な方法によって，図形感覚に関する先行研究を検討し，そのとらえ方を明確にする。次に，図形感覚の指導の現状と課題について，小学校及び中学校学習指導要領解説の平成11年及び平成20年を比較することにより明らかにする。次に，現象学的に述べた「認識」を数学教育学的にとらえ直した上で「価値判断」について考察し，中学校の図形指導に求められている図形感覚である「鋭い図形感覚」について検討する。さらに，大学生を対象にしたインタビュー調査により，図形の問題解決において働く図形感覚の様相を明らかにした上で，鋭い図形感覚が働いた被験者と働かなかった被験者を，図形的側面と言語的側面から分析・考察することで，図形感覚を鋭くするための指導への示唆を得る。最後に，調査から得られた示唆をもとに図形感覚を鋭くするための授業構成の観点を述べ，授業例を示す。

1 図形感覚に関する基礎的考察

（1）現象学的にとらえた図形感覚の全体像

川寄（2001）は，「対象に対する働きかけの違いや意味のとらえ方の違いの観点から分析すると，図形感覚には[……]いくつかの側面がある」（p.97）とし，図形感覚とは何かを規定している（図1参照）。

つまり，図形感覚を大きくとらえると，以下のようにまとめられる。

外的感覚：主体の外にあるものをとらえる感覚

- ①知覚直観：形を認めること
- ②本質直観：特徴を認めること

内的感覚：外的感覚で知覚されたものをどのように感じるかといった感覚

- ①価値判断：よさを認めること
- ②情意的感性：美しさを感じることに

図形感覚

外的感覚：外部の対象（もの，図形）に関する図形認識

知覚直観：対象の具体的な実体の認識

対象は感性的実在物 具体的図形

図形の空間的要素（形，大きさ，位置）に関する視覚的，同時的認識

本質直観：対象の理念的な意味の認識

知；真の追求

対象は理念の実在物…… 一般的，普遍的図形

図形の空間的要素や関係に関する言語的，継時的認識

経験や学習により得られる対象図形に関する意味本質（個人的図形概念）

内的感覚：外部の対象（もの，図）に対する主観の状態に関する認識

価値判断：「よさ」の認識

意；善の追求

外的感覚による図形情報の価値の判定，選択に関する志向的，知性的認識

情意的感性：「美しさ」の認識

情；美の追求

図形的美しさや安定性などの感覚感情に関する主観的認識

図 1 図形感覚（川寄；2001，p. 98）

（2）小中学校の図形感覚の指導の現状と課題

①小学校算数科の図形感覚の指導の現状と課題

平成 11 年学習指導要領解説算数編からみえる現状

図形についての感覚を全学年において豊かに育てることをねらっている。また，操作的な活動によって様々な図の見方を経験させ，図形感覚を豊かなものに行っているといえる。

平成 20 年学習指導要領解説算数編からみえる課題

身に付けた知識や技能を生活や学習に活用することが十分でない状況が見られるので，図形の意味と性質について実感的に理解すること，図形についての感覚を豊かにすること，図形の見方を生活や学習に活用できるようにすることを重視する必要がある。

②中学校数学科の図形感覚の指導の現状と課題

平成 11 年学習指導要領解説数学編からみえる現状

図形感覚の指導の現状は次のようにまとめられる。

- ・「図形に対する直観的な見方や考え方」，「図形の性質の根底にある本質的なものを見抜く直観力」，「図形に対する直観力や洞察力」といった図形感覚の育成をねらっている。
- ・図形感覚は，主に観察，操作や実験などの操作的な活動によって育成されている。
- ・「線対称・点対称」や「相似」など，新しい概念の習得によって図の見方が豊かになり，図形感覚が一層豊かになっている。
- ・直観や洞察は論理的な思考に裏打ちされていると同時に，論理的な思考を導く働きをしている。

平成 20 年学習指導要領解説数学編から見える課題

- ・身に付けた知識や技能を生活や学習に活用することが十分でない状況が見られる。よって身の回りにあるものを図形としてとらえてその性質や関係を明らかにしたり，「有効な性質を選択する，見通しをもつ，図の中に性質が使える図を見いだす」といった

図形感覚を育成したりする必要がある。つまり、「本質直観」や「価値判断」といった図形感覚を育成する必要がある。

2 価値判断をとらえる枠組みの構築

(1) 先行研究による価値判断のとらえ

河本(1999)は、「感覚」について論じるとき、「現象学が有力なアプローチである」(p.240)と述べている。現象学はそれぞれの人間が自らの経験を直視することから始まる。現象学的に認識について考察し、それに基づいて図形の問題解決における価値判断をとらえる。

①現象学における認識

現象学においては、「客観」は存在せず、それぞれの人間の「知覚直観」や「本質直観」によって認識の正当性が得られるとしているので、人によって認識は様々だといえる。

竹田(2009)は民族問題に言及し、意見の対立や考えの違いがあっても、意見の一致が見られる共通項を考えることで人々の共存が可能になると述べている。このように共通項を考えるという行為は、個人によって様々な様相を見せる図形感覚の育成を考えるときに応用できるであろう。

以上のような現象学における見解から、次のことがいえる。

- ・認識は「知覚直観」と「本質直観」を通して行われるものである。
- ・認識は人によって様々な様相を見せるものであるが、共通項を見いだすことによってその育成を考えていくことができる。

②価値判断

現象学における以上の見解を数学教育に置き換えてみると、次のことがいえる。

- ・図形を認識するときには「知覚直観」と「本質直観」が働くと考えることができる。
- ・問題を解くときに働く図形感覚は人によって様々であるが、共通して必要不可欠な図形感覚は検討していくことができる。

平成 20 年中学校学習指導要領からは、「本質直観」と「価値判断」の図形感覚を育成することが課題として求められていることが分かった。とりわけ「価値判断」は、中学校で初めて指導の対象になる感覚であるので、本研究では、「価値判断」の質を高めることに焦点を当てる。

川寄は(2001)、「価値判断」とは「図の中に多くの図形を見出し、多くの解法が考えられるが、その中から最もよいと感じる方法を感覚的に判断して選択する。つまり、外的感覚により気づいた図形情報の『よさ』を判定し、よい情報を選択する際に内的感覚が用いられる」(p.97)と述べている。しかし、「よさ」を判定するためには基準が必要であること、図形感覚は無意識的に働く側面をもっていること、知覚される図形情報及びその判定の仕方は人によって様々であることから、本研究では次のように「価値判断」を規定する。

価値判断：目的に合わせて図形情報がよいかどうかを判定すること。

また、価値判断は外的感覚が働き外的な対象をとらえたことによって働く感覚であるから、価値判断は知覚直観や本質直観の働きによって異なる様相を示すと考えられる。よって価値判断について考察において、知覚直観や本質直観の働きも考慮していく必要がある。

(2) 鋭い図形感覚

川寄(2001)は、『鋭い図形感覚』とは、価値判断において最も適切な図形の見方を判定し、選択できるという図形感覚の質的側面を表す言葉である。図の中に様々な図形が見える場合、あるいは様々な補助線が考えられる場合、それらの見方の中で最も目的に適する見方が選択できることは図形感覚の質が高いことを意味する。(p.98)と述べている。これは「最も適切な図形の見方を判定し、選択できる」という図形的側面を鋭い図形感覚として解釈できるが、図形の問題解決を考えた場合、「問題にある条件(言語的な図形情報)」から解決に有効な図形の性質を探り当てる場合も価値判断が行われるはずである。よって、本研究では言語的側面と図形的側面の両方から、鋭い図形感覚を次のように規定する。

鋭い図形感覚:「問題の解決に最も適切な図形的または言語的な図形情報を解決に有効な図形情報として選択できること」と、「有効だと判断した図形の性質を図に適用できること」。

この2つのことができたとき、「鋭い図形感覚が働いた」という。

価値判断は実際どのように行われるかについては、図形感覚が個人によって異なる様相を示すと考えられるため、調査をして明らかにする必要がある。

Polya(2007)は問題解決の過程を、4つの段階から構成されるとしている。そのうち、図形の問題解決の場合、この4つの段階の中で様々な図形情報の判断に重きが置かれるのは、主に(1)問題を理解すること、(2)計画をたてること、の2つの段階である。つまり、図形情報から見通しを立てる段階までに働く図形感覚に焦点を当てて調査を行う。その結果から鋭い図形感覚が働く要件を考察することで、その育成にはどのような学習が必要なのかが明らかになるであろう。

3 図形感覚の価値判断に関する調査研究

(1) 調査の概要

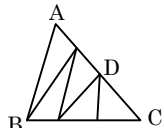
調査の目的: 価値判断の様相を明らかにする。

調査対象: N 大学教育人間科学部数学教育専修 4 年生 9 名, 3 年生 1 名

調査日時: 平成 21 年 7 月 20~22 日

調査方法: 1 人ずつ発話思考法によって図形の問題を解いてもらい、解答中、解答後にインタビューを実施した。解答時間とインタビューの時間は、それぞれ 30 分程度とした。記録用にビデオカメラ 2 台を使用し、1 台は被験者の手元、もう 1 台は被験者の全体像を映した。調査者によるインタビューは、被験者が解答しているときは 1 名が行い、解答後は 2 名で行った。

調査問題: 川寄(2001)を一部変更した問題を、1 問実施した。



図のように $AC=15$ cm の三角形 ABC を面積の等しい 5 つの三角形に分割するとき, CD の長さを求めよ。

鋭い図形感覚が働いたことを同定する基準：

次の 2 つの場面が現れたときに鋭い図形感覚が働いたとする。

- ①被験者が, 「高さが共通な三角形では, 面積の比が底辺の比に等しくなる」という性質を, 問題の解決に有効な図形情報として選択したとき
- ②被験者が「高さが共通な三角形では, 面積の比が底辺の比に等しくなる」という性質を図に適用できたとき

調査結果の分析の観点：

次の観点で各被験者の図形情報の判断の様相を明らかにした上で, 鋭い図形感覚が働く要件を調べる。なお, 分析に際しては, 言語的側面と図的側面の両方から行うこととする。

- ア. どのような目的をもっていたか。また, どのように目的が移り変わっていったか。
- イ. 何を手がかりにしてどのような見通しをもったか。
- ウ. どのような理由で見通しの有効性を判断していたか。

(2) 調査結果

被験者 10 人を A ~ J とし, 実際に解決することができたかどうかを表したのが表 1 である。調査時間内で解決できた被験者を○, 解決できなかった被験者を×で表している。

表 1 問題を解決できたかどうか

被験者	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
解決できたか	○	○	○	○	○	×	○	×	○	×

(3) 調査結果の分析

①各被験者の価値判断

以下に, 価値判断の様相を表す図を示す。図の見方は次の通りである。

- : そのときの被験者の目的を表す。主に分析の観点アに関わる部分である。
- , × : 被験者による図形情報の価値判断を表す。目的である を達成できたと被験者が判断した場合は○, 達成できなかったと判断した場合は×で示した。
- : どのような図形情報がきっかけとなって新しい図形情報が得られたかを示している。分析の観点イに関わる部分である。
- : 図形の性質を表す。分析の観点イに関わる部分である。

また, 時間とともに被験者は様々な判断の様相を見せるが, 思考が起こった順番は, 矢印にしたがって, 左から右, または上から下である。

なお, 図の左から中央までは言語的図形情報が選択される様相を表し, 図の中央から右までは, 選択された言語的図形情報が図に適用されている様相を表している。

鋭い図形感覚が働いた被験者 D の価値判断の様相

「面積が等しい」 → 全ての三角形で、**底辺×高さ×1/2**が等しい。

△ABC (D on AC) → CD は AC に含まれている。AC, AD, DC の比で出るのではないか。

△ABC (D on AC) → 3 個, 2 個なら 3 : 2

△ABC (D on AC) → **面積比と底辺の比 5 : 2**

相似な図形の性質

△ABC (D on AC) → この 2 つの三角形の面積の比で求めよう。

面積を式で表そう。 → △ABC (D on AC) $AC \cdot BP \cdot 1/2 = \triangle ABC$

△ABC (D on AC) → △ABC の高さに関わってこない

四角形と三角形で等式を作る。1 つの三角形の面積を S として $\text{○} = 3S$ のような式は、四角形の面積を出すのに公式が必要。

△ABC (D on AC) → **面積比と底辺の比**

面積比と底辺の比があてはある場所を探す

△ABC (D on AC) → 高さが等しい線がない。 ×

△ABC (D on AC) → 高さが等しい線があるが BC は数値が与えられていない。 ×

△ABC (D on AC) → 高さが等しい線があり AC は数値が与えられている。 ○

DC を求めるにはまずどこを出さなければいけないか

△ABC (D on AC) → 面積 2 : 1。しかも、△QCP に含まれていて、高さが一緒。底辺の比も 2 : 1。 ○

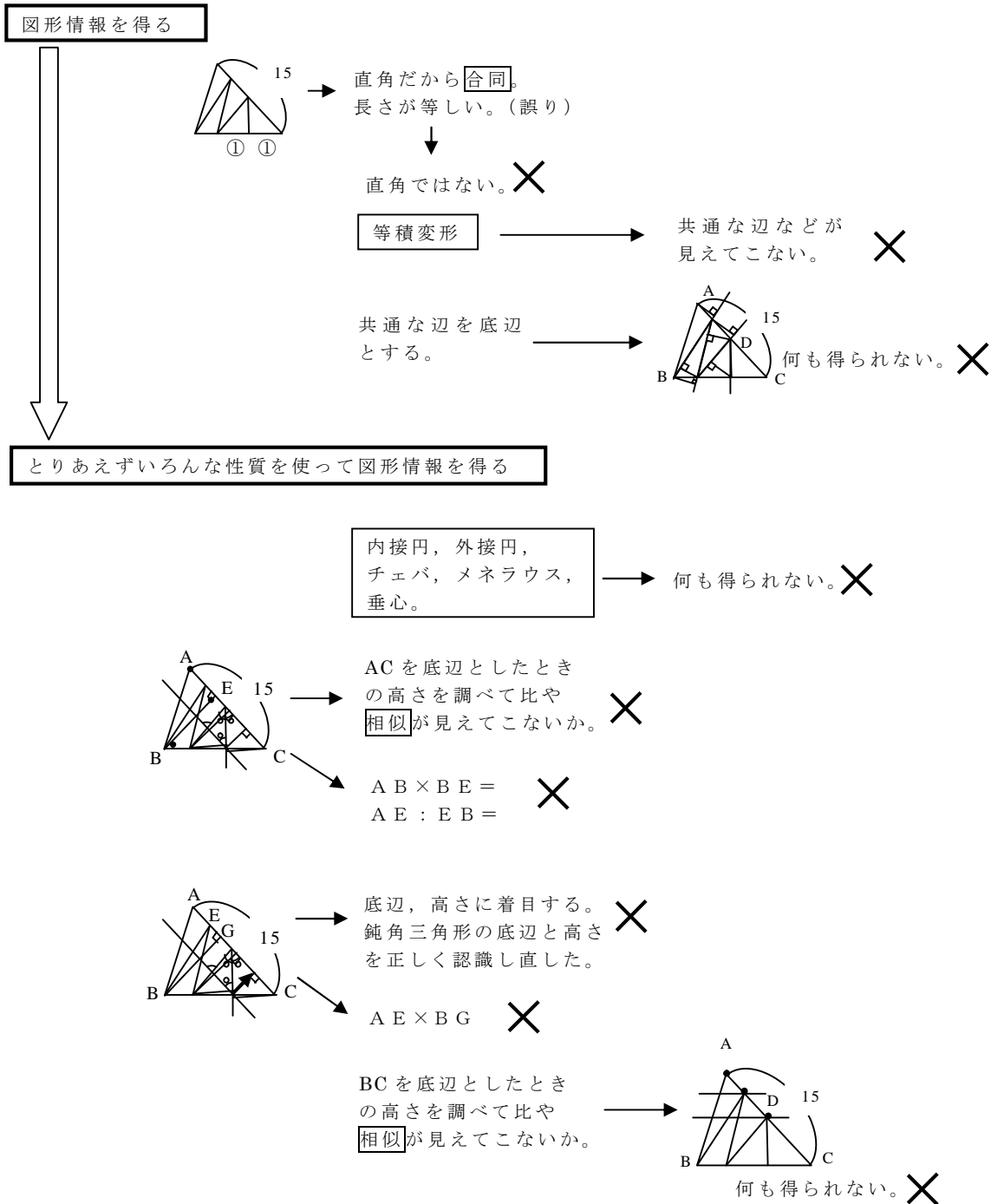
△ABC (D on AC) → 面積が 1 : 4。底辺の比も 1 : 4。この 2 つの三角形の辺の長さを出す。 ○

比の合成をする

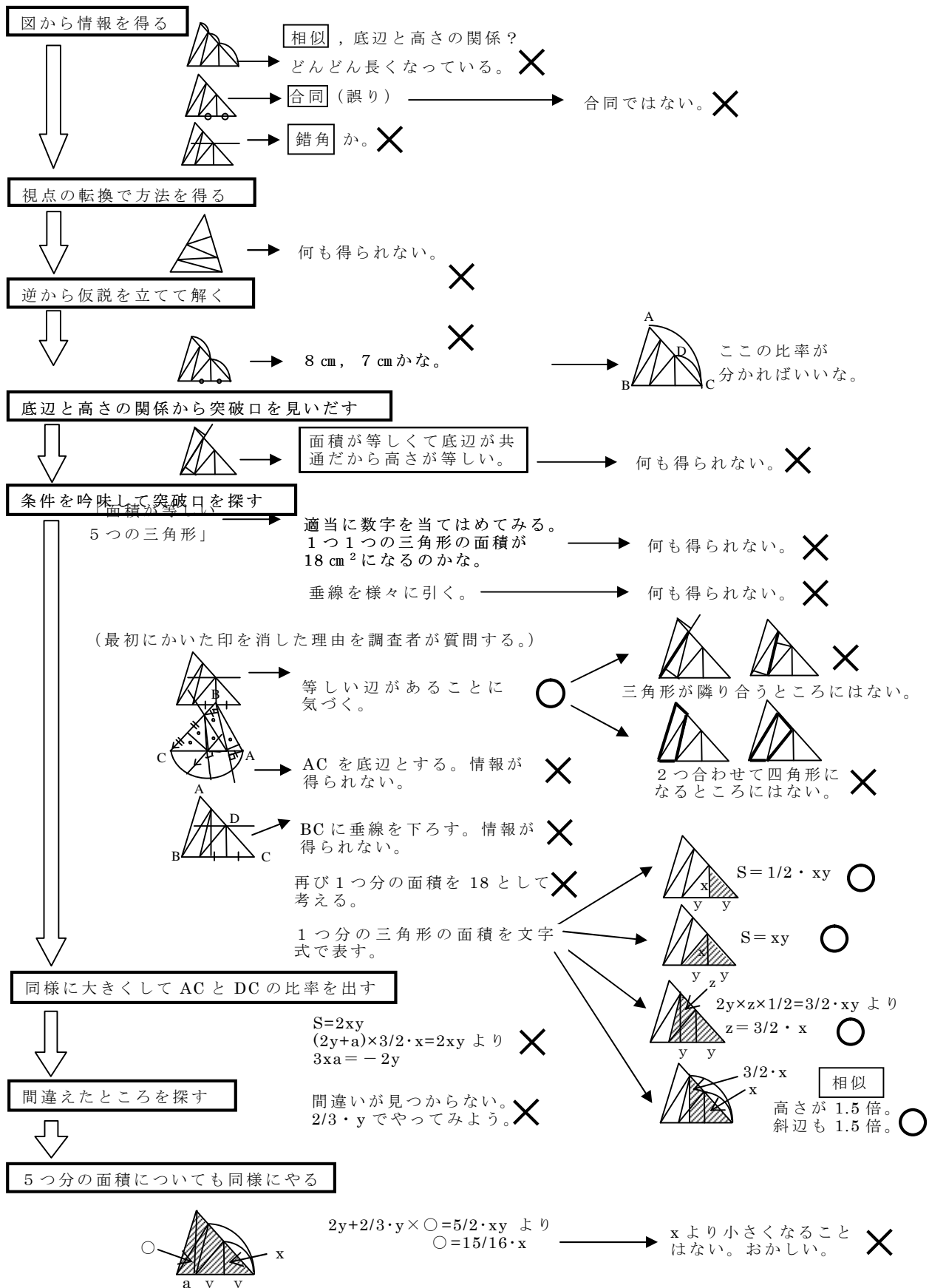
$$15 \times 4 / (4 + 1) = 15 \times 4 / 5 = 12, \quad 12 \times 2 / (1 + 2) = 12 \times 2 / 3 = 8$$

図形感覚が豊かではなく, なおかつ

鋭い図形感覚が働かなかった被験者 H の価値判断の様相



図形感覚が豊かであったが
鋭い図形感覚が働かなかった被験者 J の価値判断の様相



②鋭い図形感覚に関する分析

分析の観点ア, イから, 鋭い図形感覚が働いたかどうかを見る。表 2 は, 各被験者は鋭い図形感覚が働いたかどうかを表している。

表 2 鋭い図形感覚が働いたか

被験者	A	B	C	D	E	F	G	H	I
鋭い図形感覚が働いたか	×	×	×	○	×	×	×	×	○

表中の○は鋭い図形感覚が働いた, ×は働かなかったことを表している。なお, 半数の被験者が途中から式を用いて関係を表し, 形式的な処理による解決方法をとった。形式的に式を操作するのも問題を解決する方法の 1 つではあるが, 本研究は初等幾何の範囲に限定して図形感覚の育成を図ることをねらいとしているので, 対象としないことにする。

(i) 鋭い図形感覚が働くときの価値判断の様相

まず, 性質の選択という場面を分析する。被験者 D は, 問題の条件と図の状況から直観的に「面積比と底辺の比」の性質を想起し, 三角形の底辺の比を求めることを目的とした。しかし面積を式で表しているとき, 自分が性質に対して抱いているイメージに誤りにあることに気づいた。そしてイメージが修正されたことで「面積比と底辺の比」の性質が解決に有効であると確信した。よって鋭い図形感覚が働いたといえる。

次に, 性質を図に適用する場面を分析する。被験者 D は「面積比と底辺の比」の性質を図に適用するとき, $\triangle ABC$ の 3 辺のうちどの辺を底辺にしたらよいかを検討してから, 底辺を AC 側に決めている。よって, 性質を図に適用するときにおいても被験者 D は鋭い図形感覚が働いていたと見ることができる。

(ii) 鋭い図形感覚が働かないときの価値判断の様相

被験者 A は, 「新しい情報を集める」ことを目的として平行線を引き, 図がきっかけとなって「高さが共通な三角形では, 面積が等しければ底辺も等しい」こと, 「高さが共通な三角形では, 面積の比と底辺の比が等しい」ことに気づいた (図 2)。しかしその後は他の

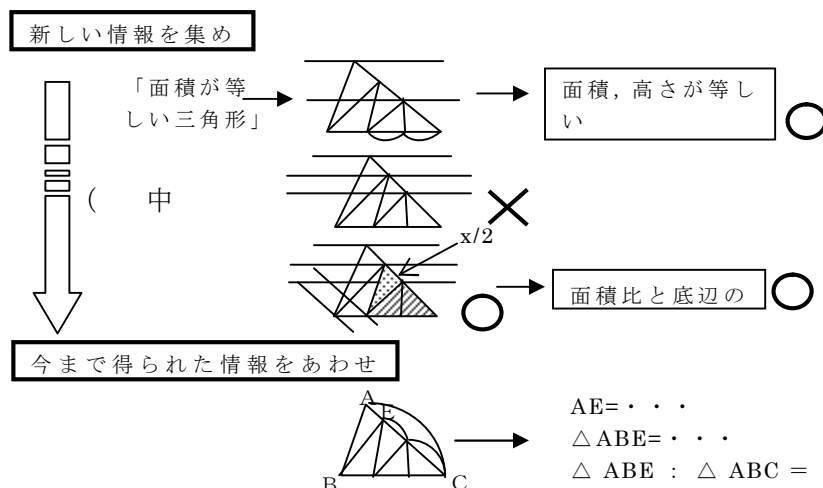


図 2 被験者 A の価値判断の様相 (一部)

部分にも適用することなく, 関係式を使って解決に至った。これは, 被験者 A は「面積比と底辺の比」の性質が解決に有効な性質だというとらえ方が弱いといえる。よって鋭い図形感覚が働いたと

はいえない。

この問題は，図3で示した部分に着目することによって，「高さが共通な三角形では，面積が等しければ底辺も等しい」という性質の想起が促され，それをさらに発展させることによって「面積比と底辺の比」の性質に気づくことができる。

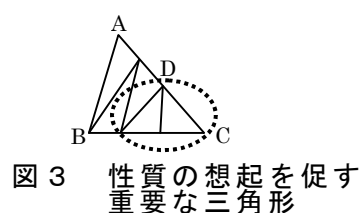


図3 性質の想起を促す重要な三角形

被験者Jは，「高さが共通な三角形では，面積が等しければ底辺も等しい」という性質が解決に有効だという手応えを感じたが，適用できる部分を図中に見つけることができず，別の図形情報を探した。結局「面積比と底辺の比」に気づくことができなかつたので，鋭い図形感覚は働かなかつたといえる。

被験者G，H，Bは，面積が等しく高さが共通な三角形に着目したが，結局，解決に必要な性質の想起には至らなかつた。よつて鋭い図形感覚が働かなかつたといえる。

③ 図形の性質の想起に関する分析

鋭い図形感覚が働くためには，本質直観を働かせ，まず問題の解決に必要な図形の性質を想起しなければならない。分析の観点イ，ウに基づいて，各被験者は何をきっかけとして図形の性質を想起したかを分析する。

(i) 「面積比と底辺の比」の性質を想起できた被験者の分析

「面積比と底辺の比」の性質を想起できた被験者D，Aを分析する。

被験者Dは，数値が与えられている線分と長さを求めたい線分を整理した図を見て，「比を使う」と直観的に思った。そして「面積が等しい」という条件を「すべての三角形で底辺×高さ×1/2が等しい」のように，諸要素で条件をとらえた。すなわち，与えられた条件を要素でとらえ直した上で図を見たことが「面積比と底辺の比」の性質の想起に影響したと考えられる。よつて被験者Dは，言語的側面と図的側面の両方から「面積比と底辺の比」の性質を直観的に想起したといえる。また，相似な図形の性質も思い浮かんだが，自分のイメージしている図が問題の図の中に無かつたので結局使わずに終わった。

被験者Aにとっては「面積が等しくて高さが等しいなら底辺が等しい」という性質を想起できるかどうか問題が解く上で重要で，「面積比と底辺の比」はその応用であつた。被験者Aが性質を想起したきっかけは，「面積が等しい三角形」という条件と，平行線を引いた図である(図2)。三角形の面積を式に表すことによつて「底辺」，「高さ」という要素で条件がとらえ直され，その後図がきっかけで性質の想起に至つた。

以上のことから，被験者D，Aは「面積比と底辺の比」の性質の想起に至るまでには知覚直観と本質直観が影響していたといふことができる。そして共通していることは，次の2点である。

- ・問題の条件を分解し，要素で条件をとらえ直したこと。
- ・要素に注目して図を見ていたこと。

(ii) 「面積比と底辺の比」の性質を想起できなかつた被験者の分析

(a) 「面積が等しく高さが共通な三角形は底辺も等しい」という性質を想起した被験者

被験者Jは、はじめは主に図をきっかけとして「底辺と高さの関係」、「相似」、「合同」、「錯角」といった性質を想起したが、条件を見直すことによって「合同」が誤りであることに自分で気づいた。つまり、はじめは条件をあまり意識せずに図を見たことによって誤った認識がなされたが、条件の見直しを契機に正しい図形が認識されたと見ることができる。その後被験者Jはいろいろな発想で解決を試みてうまくいかなかったが、「底辺と高さの関係」から有力な情報を得ようとして図を見たことにより、「面積が等しく底辺が共通ならば高さが等しい」ことに気づいた。つまり被験者Jは言語的な図形情報「底辺と高さの関係」を意識して図を見たことによって新しい図形情報が得られたということであるから、図的な情報と言語的な情報が互いに影響し合って新しい性質の想起がなされたといえる。またしばらくすると、調査者がなぜ合同ではないと修正したかを尋ねたことをきっかけに、「面積が等しく高さが共通だから底辺が等しい」ことに気づいた。つまり、調査者の質問を契機に条件を見直して図を見たことによって、新たな正しい認識が得られたといえる。

また、被験者Jは結局「面積比と底辺の比」の性質が想起できなかつたので、想起するためにはさらに何らかの手だてが必要であることが示唆される。

以上のことから、性質の想起に関して次のことがいえる。

- ・ 図が誤って認識されているとき、条件を正しくとらえ直すことは図を正しく認識する契機となる。
- ・ 条件を要素でとらえ直すことは、新たな性質の発見につながる。
- ・ 想起した性質を発展させて考える手だてを考える必要がある。

(b) 「面積が等しく高さが共通な三角形は底辺も等しい」という性質も想起できなかつた被験者

被験者B, G, Hは図3で示した重要な2つの三角形に着目していながら、図の影響を受けて合同な図形であるという誤った認識をした。この3人は、いずれも「面積」を「底辺」と「高さ」という要素で条件をとらえ直さずに図を見ていたことから、条件を意識せずに図を見ると、図の影響を大きく受けやすいといえる。その後、被験者G, Hは図形情報を得ようとしている途中で、合同だと早合点していたことに気づいた。さらに、被験者Gについては、はじめは三角形の面積に着目し、その後辺へと図の見方が分析的に変化していることが認められ、その過程の中で自分の認識の誤りに気づいていることから、分析的に図を見たことが正しい認識への契機となっているといえる。一方、被験者Hは、2つの辺にかいた印の意味を調査者が問うたとき、説明する途中で直角が図中になことに気づいた。つまり、説明のために「高さ」を意識したことによって、直角があるかないかという分析的な図の見方につながったと考えられる。

ここまでをふり返ってみると、結局被験者Bは誤った認識を修正しないまま調査を終え、被験者G, Hは誤った認識を修正できたが解決に必要な性質の発見に至らなかつた。よって、誤って図を認識しない手だてと、性質の想起が困難な場合に備えて解決に必要な性質を発見する手だてを講ずる必要があることが示唆される。

被験者Cは、重要な2つの三角形に着目し、かつ合同ではないことを見抜いていたが、図形の性質を想起することなく形式的な式の操作で解決に至り、想起した性質が最も少なかつた。被験者Hは途中でたくさんの図形の性質を列挙したので一見豊かな図形感覚をも

っているように見えるが, 知識としてもっている図形の性質を並べているだけであり, 本質直観が働いたからではない。また, 解答後のインタビューで被験者 H は図を分析的に見ることを苦手としていることが明らかになった。また, 被験者 F も重要な 2 つの三角形の関係に着目することなく調査を終えた被験者で, 本質直観が十分働いていなかった。これらの被験者からは, 図形感覚の育成という点からすると図から性質を想起する感覚を伸ばすことが望まれる。

また, 被験者 F は「等積変形」に固執していたことから, うまくいかないときは条件を見直すことが必要であるといえる。

以上のことから, 次のことがいえる。

- ・条件を意識せずに図を見ると, 図の影響を大きく受けやすい。
- ・分析的に図を見ることが正しい認識への契機となる。
- ・条件を要素でとらえることが, 図を分析的に見ることにつながる。
- ・性質の想起が困難な場合に備えて図から性質を想起する手だてが必要である。
- ・想起した性質を図に適用し, うまくいかない場合は条件を見直すことが必要である。

④見通しと有効性の判断に関する分析

表 3 は, 分析の観点イ, ウにしたがって, どのような見通しをもったか, どのような理由で選んだ性質の有効性を判断していたかをまとめたものである。なお, 個人によって見通しのとらえ方に違いがあったが, 表には本人の表現で載せてある。

表 3 見通しと有効性の判断

	被験者がもった見通し	見通しの有効性の判断
A	面積の公式を使う。「面積の等しい5つ…」の条件を使う。まず情報を集めてから次を考える。面積が等しく高さが等しいなら底辺が等しい。	そんなにうまくいくとは思っていなかったが, やってみたらうまくいった。
B	sinの公式。面積を関係式で表す。	1つ関係式で解けたので, 同様に角が共通しているところを見つけたとき, 解けそうだった。
C	関係式。	半信半疑。
D	比で出る。3個, 2個なら3:2。面積比と底辺の比。相似。	面積比と底辺の比のイメージが見えたらこれしかないと思った。
E	高さが共通で面積が等しければ底辺が等しい。	使えるかと思ったが, うまくいかなかった。
F	等積変形。相似。	解ける手応えは感じていなかった。うまくいかなかった。
G	sinの公式。	sinの公式で関係式を作って線分の長さをいくつか求められたとき, 同様にしていけば求められると思った。
H	合同。等積変形。	とりあえずやってるうちに見えてこないか。
I	高さが同じ三角形で面積比と底辺の比。	面積比と底辺の比が適用できる図を見つけたとき, 解けると感じた。
J	相似。公式。	(手探りで考えていた。)

表 3 から, 見通しの有効性を確信していたのは被験者 D と I で, 「面積比と底辺の比」の性質が適用できる部分が図中に認められたときに確信していた。なぜ直観的に「面積比と底辺の比」の性質が思い浮かんだかについては, インタビューで過去に同様の問題を経験していたことを理由に挙げていたことから, 経験が性質の想起といった図形感覚に関係していることが示唆される。

(4) 考察

図形の問題解決における価値判断の様相を分析することで、言語的な図形情報と図的な図形情報の両方が互いに作用し合って価値判断が行われていることが分かった。

よって、価値判断には様々な様相があることと、知覚直観と本質直観が価値判断の前提となっていることを考慮しつつ、図形感覚を鋭くするための指導への示唆を以下に示す。

①解決に有効な性質を想起するために必要な図形感覚

(i) 解決に有効な性質を想起するための要件

「面積比と底辺の比」の性質を想起できた被験者A, D, Iは、条件を要素でとらえ直し、その条件を踏まえた上で図を見ていた。「面積が等しく高さが等しい三角形は底辺も等しい」という性質を想起した被験者E, Jについても、条件を見直したことが性質の想起に結びついた。よって、解決に必要な性質を想起するためには、条件を要素でとらえ直した上で図を見ること、うまくいかない場合は条件を見直すことが必要であるといえる。

(ii) 誤った図形情報を正しく認識し直す手だて

重要な図形に着目した被験者について考察する。被験者Gは分析的に図を見たことが、被験者Hは条件を要素でとらえたことによって分析的な図の見方につながったことが、被験者Jは条件を見直すことが誤った認識の修正に結びついた。これらのことから、図を見誤った場合、再び条件を要素でとらえ直すことによって図を分析的に見ることができ、正しい認識を得ることができるといえる。また、被験者B, G, H, Jが図を誤って認識したのは、はじめに条件を要素でとらえていなかったり条件をあまり意識せずに図を見たりしたことが原因であった。よって、図を正しく認識するためには、条件を要素でとらえ、条件を意識しながら図を見ることが必要であるといえる。

(iii) 解決に有効な性質を得るために考えを発展させる発想

被験者Jは、「面積が等しく高さが共通な三角形は底辺が等しい」という性質に気づいていながらも、「面積比と底辺の比」にまで気づかなかった。被験者Jは、面積や底辺が「等しい」ことを「1:1」という比の表現へ変換すること、そしてそれを「2:1」、「3:1」・・・と発展させることが必要であったといえる。つまり、得られた図形情報を違う表現に変換すること、そしてそれをさらに発展させる発想が必要だということである。

また、被験者C, G, Hは重要な2つの三角形に着目していたが、底辺が等しいというところまでたどり着かなかった。この場合、合同という特殊な状況から頂点を動かす見方をすることによって、変化するものの中に変わらない本質的なものを見取ることができよう。よって図の条件を一部変える発想が必要であるといえる。

よって、図形情報が言語的であっても図的であっても、条件を違う表現に変換することや条件を変えて一般的な状況から対象を見る発想が、性質の想起に有効に働くといえる。

(iv) 様々な性質を想起できる豊かな図形感覚

被験者Jは図形の性質を最も多く想起した被験者で、想起した性質が解決に有効に働かないと判断したときは別の性質を次々に試したり、一度試してあきらめた性質を再度試していたことから、図形感覚が豊かであるといえる。しかも発想も豊かで、結果の見通しを立てたり、面積を具体的な数値で仮に設定したりして、試行錯誤しながら解いていた。結果的に「面積比と底辺の比」の性質には気づかなかつたが、いろいろな性質を繰り返し試す中で誤った認識があることに気づいたり、それを修正したり、重要な性質に気づいたりする様子が見られた。よって図形感覚が豊かであることは問題解決において重要な要素であるといえるが、鋭い図形感覚の育成という観点からすると、よりの確な性質の選択ができる図形感覚を身に付けさせたい。

反対に被験者Cは、最も想起した性質が少なかったのも、図形感覚が豊かであるとは言いがたい。また、被験者Cが形式的な式の操作に移ったのは、図から性質を想起できなかったことが原因の1つであるとも見られる。よって被験者Cは本質直観を一層働かせることが必要で、そのためには図から様々な図を取り出し、意識的に図から性質を想起しようとするのが有効であると考えられる。

被験者Fは唯一、重要な三角形に着目することもなく、等積変形に固執したという特徴がある被験者で、重要な性質に気づかないまま調査を終えた。被験者Fは、問題の図から様々な図を見いだすことができたにもかかわらず、「面積が等しい」ことから「等積変形」を想起し、それに固執していた。よって条件のみではなく図からも性質を想起すること、うまくいかない場合は条件を見直すことが必要であるといえる。

被験者Hは図を分析的に見ることが困難であったため図から想起できた性質が少なく、図形感覚が豊かであるとは言いがたい。被験者Hは、意識的に問題の図から様々な図を見出すことによって想起される性質の種類が増えると考えられる。

以上のことから、想起できる性質が少ないと、適切な性質を想起できなかった場合、解決の糸口がなくなる可能性がある。よって、図形感覚が豊かであることは問題の解決に行き詰まった場合を考えると、新しい図形情報を得るために重要な要素であるといえる。また同様の理由で、選択した性質を試してもうまくいかないときは条件を見直すことが有効であるといえる。

②解決に有効な性質を選択する図形感覚

被験者Dは「面積比と底辺の比」の性質が解決に有効であると判断をした。それに対して被験者Aは、「面積比と底辺の比」の性質を図に一部適用したとき有力な情報だと感じていたが、他の部分には適用しなかった。被験者Dについては同様の問題を以前に解いた経験があり、「面積比と底辺の比」の性質を使うのではないかとという予想のもとで図を見ていたが、被験者Aは予想をもたないまま図形情報を探していた。

よって、図形情報の有効性を確信をもって判断できるかどうかは、予想を立てて図を見ているかということが関係し、予想は過去の経験が影響していると考えられる。過去の経験がない場合もあるので、解決に必要な性質を想起する手だてが一層重要になる。

③解決に有効な性質を図に適用するために必要な図形感覚

鋭い図形感覚が働いた被験者Dは、どのような見方をすれば「面積比と底辺の比」の性

質が図に適用できるかを検討し，判断していた。

一方，被験者Aは性質が適用できる図を見つける様子が見られたが顕著ではなく，しかも性質が適用できる部分が図中にまだ残っていたにも関わらず，関係式による解法へと切り替えた。被験者Aが性質を適用できる部分を図中に見いだせなかったのは，「面積比と底辺の比」の性質の有効性を感じた程度が弱かったことも要因としてあげられる。

以上のことから，性質を図に適用するためには，図から様々な図を見出したり適切な見方を検討するなど，図を分析的に見る必要があるといえる。そしてうまく性質を図の一部に適用できた場合は，さらに適用できる部分を探すことが必要であるといえる。

(5) 授業への示唆

①解決に有効な性質の想起・選択ができるための授業構成

解決に有効な性質の想起は，図4のように行われるので，図形の問題解決を行う場合は，問題の図から図形情報を得る前に，条件を整理して要素でとらえなおすことが重要となる。

また，図の認識を修正したい場合，新しい図形情報を得たい場合においても，条件を見直したり図を分析的に見ることが有効である。なお，図形感覚が豊かではなく性質の想起が困難である場合においては，意識的にこのサイクルをたどらせる指導が必要である。

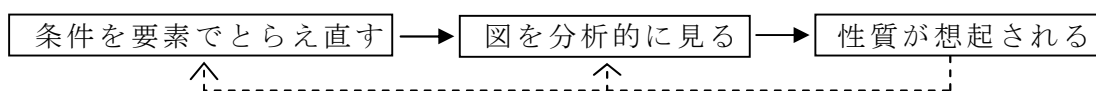


図4 解決に必要な性質の想起

次に，解決に有効な性質の有効性の判断は，過去の経験をもとに行われるが，初めて出会う問題については有効性を感じる事が困難なので，ある性質を図に適用することにより図形情報が得られたら，続けて他の部分に適用していくようにさせたい。

以上のことから，授業においては生徒にはじめに条件を整理させ，要素でとらえ直してから図を見させるような授業構成が望ましい。そして生徒が次の性質を想起したい場合やうまくいかない場合は，条件の見直しをさせることが有効である。

②重要な図形情報に着目している場合における性質の想起のための手立て

言語的な図形情報を発展させる場合は，図形情報を違う表現に変換すること，そしてそれを発展させていくことが有効で，図的な図形情報を発展させる場合は，頂点や辺などの動かせるところを動かしてみて，変化するものの中に変わらない本質的なものを見取る方法が考えられる。

以上のことから，授業において生徒が重要な図形情報に着目できている場合は，条件の一部を変え，一般化させることが有効である。

③解決に有効な性質を図に適用させるための手立て

性質を図に適用するためには，問題の図から様々な図を見出したり，適切な見方を検討したりするなど，図を分析的に見る必要がある。

しかしこのような視覚的な活動には個人差があるので、授業においては、問題の図の中に含まれる図を1つ1つ確認させる活動や、図の向きを変えるなどして生徒が性質に対してもっているイメージと近づけるといった工夫が必要である。

また、性質を図に適用することによって図形情報が得られた場合は、さらに適用できる部分を探すように働きかけることも重要である。

4 図形感覚を鋭くするための授業構成の観点

(1) 図形感覚を鋭くするための授業構成の観点

①問題の条件を整理し要素でとらえる場面を設定する

条件を要素に分割してとらえ直したり分かることと求めたいことをはっきりさせた上で図を見ることにより、条件を意識して図を分析的に見ることができ条件と関係する図形の性質を想起しやすくなるとともに、図の影響による誤った図形情報の認識も抑えられる。

このような理由によって、図が与えられている問題に取り組ませる場合は、図から図形情報を探す前に条件を整理し要素でとらえさせることが望ましいといえる。

②問題の図を分析的に見る場面を設定する

図から様々な図を見出す感覚が十分働かなかつたら、図から想起できる性質が限られたり、解決に有効な性質に気づいていてもその性質を図に適用することができなかつたりする。よって、授業においては図を分析的に見る活動を入れる必要がある。なお、図を分析的に見る活動は問題の条件を整理した後に入れることが望ましい。

③条件と図の状況から

解決に有効だと思われる図形の性質を予想する活動を行う

問題の解決に有効な性質を想起するためには様々な性質を図から想起できること、すなわち図形感覚が豊かであることが望ましい。それを前提とした上で、中学校数学科における図形指導では目的や問題状況に合った図形の性質を選択できる力を育成する必要がある、またそのような活動を経験していくことが図形感覚を鋭くしていくことにつながる。そしてその際に重要となるのが、どのようにすれば解決に必要な図形の性質の想起と選択ができるかということである。

図形感覚には個人差があることから、使えそうな性質の候補をあげる活動は、全体指導で行うことが望ましい。さらに、生徒が授業中に自分の考えを述べるときは言語的な表現によることが多いが、候補としてあげられた性質は図で示しておくことが望ましい。それは、性質を図で示しておくことによって問題の図を分析的に見たり比較がしやすくなったりするので、性質の選択も行いやすくなるからである。

また、性質の想起と選択はほぼ同時に行われると見ることもできるが、授業のねらいを設定するときに分けて考え、どちらかに重点化して授業を構成することができる。条件や図の状況から連想できる性質を考えさせたり、反対に性質をあらかじめ提示して問題の条件や図の状況からどの性質が最も適切かを考えさせたりするなど、生徒の実態等を考慮し

て授業を構成することができる。よってどのような活動を経験させたいのかをはっきりさせておくことが重要である。

④得られた図形情報の表現や条件の一部を変えて発展させる活動を必要に応じて行う

問題の解決に有効な図形の性質が想起できなかった場合、得られている図形情報を発展させて有効な図形の性質を想起することが必要である。図形情報が言語の場合は違う表現に変換したり、条件の一部を変えたりすることによって、新たな性質の想起につながる。また、得られた図形情報が図の場合は、構成要素の条件を一部変化させることによって本質的なものが見えてくる場合がある。

⑤性質の適用の可否により次にどうするべきかを指導する

性質を図に適用するのがうまくいった場合は違う場所にも適用するように、うまくいかなかった場合は目的自体を見直すように意識させる指導が必要である。うまくいかなかった場合は次の候補である性質を試すことができ、うまくいった場合はその性質が解決に有効な性質であるかもしれないからである。このように、性質を図に適用し、有効性の判断をしていくことは、価値判断の感覚を働かせていることである。判断していた場面を生徒自身にふり返らせ、なぜ目的を見直したか、どのように図を見ていたかななどをクラスで共有していくことによって、価値判断の質の高まりが期待できるであろう。

(2) 図形感覚を鋭くする授業の例

①中学校第3学年における授業の例

1. 単元名 相似な図形
2. ねらい

どの性質を使うと図形の証明が最も簡潔にできるか、図形情報を整理し分析的に判断することができる。

3. 指導の構想

教科書で扱われている例題を教材として、図形感覚を鋭くすることをねらいとした授業を行う。使用する教材は次のようなものである。

<p>例題 1 四角形 $ABCD$ の 4 辺 AB, BC, CD, DA の中点を、それぞれ P, Q, R, S とすると、四角形 $PQRS$ は平行四辺形であることを証明しなさい。 (岡本他, 2005, 楽しさひろがる数学 3, pp.118-119)</p>	
---	--

この問題を解くには、次のようにいくつかの価値判断が要求される場面がある。

- ①問題の条件「中点」と、図の状況から、中点連結定理を使えばいいことを予想する。(性質の想起・選択)
- ②中点連結定理を使えるような補助線を引く。(性質の適用)

③いくつかある平行四辺形になるための条件のうち, どの条件を使って証明するかを決める。(性質の選択, 性質の適用)

①, ②については実際はほぼ同時に行われると考えられるので, 授業において価値判断が行われるのは大きく分けると, 2つの場面, すなわち中点連結定理を想起し補助線を引く場面と, どの平行四辺形になるための条件を使えばよいか予想する場面である。これらのうち, 授業でどの場面の価値判断を経験させるかは, 生徒の実態を考慮して決定すればよい。ここでは③の性質(この場面では平行四辺形になるための条件)の選択・適用を経験させることをねらった授業例を示す。

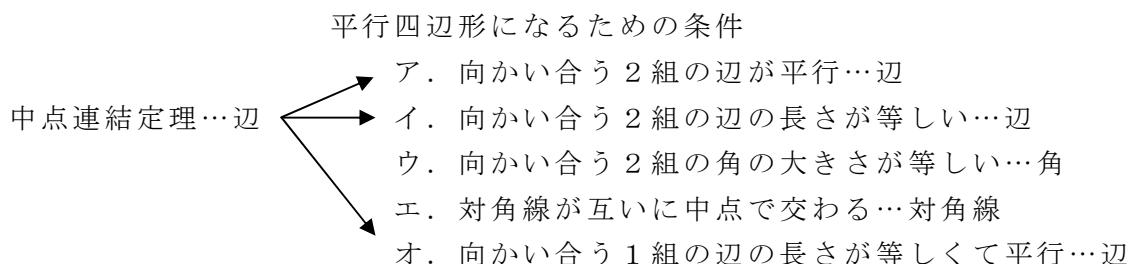
価値判断は知覚直観と本質直観の働きが前提としてあるので, 1つ目の価値判断においては条件を図にかき込み, 中点連結定理を想起させる。

次に, 2つ目の価値判断の場面では, それらの情報を整理し判断しやすくするために, 図的にも言語的にもそれらの情報を一覧できるように提示し, 最も適切であると思われるものを絞り込んでいく。

4. 指導の手だて

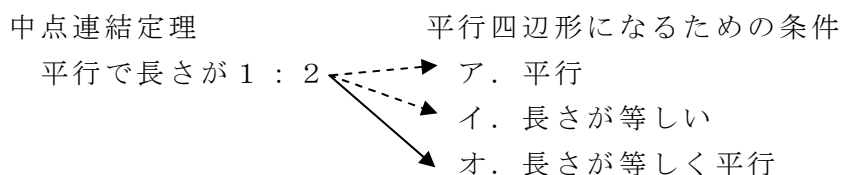
この授業でねらっている鋭い図形感覚は, 次のような分析的な判断を行うことができる図形感覚である。

◎どのような構成要素についての定理か



次に, 候補として残ったア, イ, オの中から最も解決のために有効だと思われる平行四辺形になるための条件を選ぶために, さらに分析的に見ていく。

◎辺がどのような関係なのか



これらの活動を経験させるために, まず, 定理を言語的, 図的に表したカードを提示するなど, 図形情報を一覧できるように工夫をし, 中点連結定理から得られる図形情報と, 平行四辺形になるための条件を満たすのに必要な図形情報の照合を行いやすくする。

また, 図形情報の有効性を判断する視点を生徒にもたせるために, 構成要素に着目するという視点が生徒から出てこない場合は, 授業者が指示をして活動を促す必要がある。図形情報を分析的に見ることができるよう, ワークシートの工夫も有効な手だてとなる。

②中学校第 1 学年における授業例

1. 単元名 空間図形

2. ねらい

円錐の頂点から底面までの距離に着目することによって、円錐の側面は扇形であることに気づく。

3. 指導の構想

本時では、円錐を教材として円錐の性質を明らかにする。紙で作った円錐と円錐の模型を見比べることによって、円錐の構成要素である母線の存在に気づかせたい。そしてさらに円錐の母線は展開図にしたときの扇形の半径になることにも気づかせたい。このように立体を分析的に観察する活動を行うことによって、母線の存在の気づき及び円錐の構造の理解を促す。

前述したように、「条件を要素でとらえ直す」→「図を分析的に見る」→「性質が想起される」というサイクルをたどることで問題の解決に必要な性質が想起される。しかし本時は観察によって頂点から底面までの距離が等しいという性質を想起させるため、「図を分析的に見る」ことが「条件を要素でとらえ直す」ことにもなる。

第1段階として、円錐の模型を生徒に提示し、紙で円錐を作るという課題を与える。生徒はA4の紙を丸めて円錐の側面を形作って固定し、下の部分をはさみで切るのので、切り口がいびつであったり、頂点が一方に傾いていたりすることが予想される。

第2段階として、円錐の模型と自分で作った円錐の投影図をかかせ、比較させる。この活動によって生徒は立体を分析的に見ることになるであろう。そして円錐の模型の立面図は二等辺三角形であるのに対し、頂点が一方に偏っている円錐の立面図はそうではないこと、模型の平面図は頂点が円の中心にきているのに対し、紙の円錐の方は偏っていることに生徒は気づく。このような観察の結果から円錐の頂点から底面までの距離は一定であるという性質の発見につながり、母線が円錐の構成要素であることに気づく。この母線の存在への気づきが性質の想起である。

第3段階として、頂点から底面まで引いた1本の線分にそって円錐を切り開き、観察によって得られた性質に基づいて側面を修正する。生徒は頂点から底面までの距離が一定であることからコンパスを使って円をかけばよいことや、実際に切り開いた紙を見て円錐の側面はおうぎ形であることに気付くであろう。展開図の側面の修正において、頂点から底面までの距離が一定であるという性質を利用するとき、性質を適用しているといえる。

以上のような活動を通し、構成要素に着目することによって図形の様々な性質が明らかになっていくことを経験させることができる。

4. 指導の手だて

本時で最も重要な部分は、紙で作った円錐と円錐の模型を比較・観察することによって円錐の側面の構造に気づけるかという所である。観察の視点となる母線にあたる長さや頂点の位置に着目させるための手だてとして、投影図を事前に指導しておく。2つの立体の立面図や平面図をかかせることによって円錐の性質に気づかせたい。

おわりに

(1) 本研究の成果

本研究の成果は、以下の 4 点である。

- 1 先行研究から図形感覚とは何かをとらえる視点を得た上で、図形感覚の指導の現状と課題を明らかにしたこと
- 2 中学校の指導に求められている「価値判断」について焦点を当て、現象学的見地から「価値判断」と「鋭い図形感覚」とは何かを明らかにしたこと
- 3 調査研究を行い、価値判断が働く様相を明らかにしたこと
- 4 指導への示唆に基づき、図形感覚を鋭くするための授業構成の観点を得て、授業例を示したこと

(2) 今後の課題

①他の問題で調査を行い、価値判断の様相や鋭い図形感覚が働く要件を一層明確にしていくこと

本研究の実証的研究では、図形の問題 1 問について調査を行ったが、他の問題でも同様な結果が得られるのかについては検証が必要である。よって、他の問題でも調査を実施して価値判断が働く様相を調べ、鋭い図形感覚が働く要件の信頼性を高めていく必要がある。

②授業を実践し、授業構成の有効性を検証していくこと

本研究では、図形感覚を鋭くする指導の示唆を得て、それに基づいた授業例を示したが、実際にこのような指導によって図形感覚が鋭くなるかについて検証したわけではない。よって、授業実践を行った結果、生徒の内面にどのような変化が起きるかを調査する必要がある。

主な引用及び参考文献

川寄道広 (2001), 「図形指導における「図形感覚」の意味について」, 全国数学教育学会誌『数学教育研究』, 第 7 卷, pp.93-103.

河本英夫・佐藤康邦編 (1999), 『感覚—世界の境界線』, 白菁社〈叢書 現象学と解釈学〉.

国立教育政策研究所 (2008), 平成 20 年度全国学力・学習状況調査【中学校】調査結果概要 (http://www.nier.go.jp/08chousakekka/03chuu_chousakekka_gaiyou.htm).

竹田青嗣, 西研 (2009), 「現象学研究会ホームページ開設記念対談「現象学の刷新」をめざして」, 『現象学研究会ホームページ』, (<http://www.phenomenology-Japan.com/>), (2009 年 12 月の記述).

文部科学省 (2008), 『小学校学習指導要領解説 算数編』, 東洋館出版社.

文部科学省 (2008), 『中学校学習指導要領解説 数学編』, 教育出版.

文部省 (1999), 『小学校学習指導要領解説 算数編』, 東洋館出版社.

文部省 (1999), 『中学校学習指導要領解説—数学編—』, 大阪書籍.

岡本和夫他 (2005), 『楽しさひろがる数学 3』, 啓林館.

新潟大学教育学部数学教室, 『数学教育研究』, 第 45 卷, 第 1 号, 27-47, 2010.

G.ポリア, 柿内賢信訳 (2007), 『いかにして問題をとくか』, 丸善株式会社.