新潟大学教育学部数学教室,『数学教育研究』, 第 45 巻, 第 1 号, 5-26, 2010.

数学の美しさを感得する教材の開発に関する研究
－文字式指導に焦点を当てて－

新潟大学大学院教育学研究科
教科教育専攻　数学教育専修
U08B115K　金子　春香

はじめに

我が国の生徒の学力は，国際的には上位に位置しているが，数学に対する関心・意欲は国際平均を大きく下回っていることが TIMSS 調査からいえる。今日，生徒の関心・意欲などの情意的側面の育成が課題となっている。

國本(2009)は，算数の美しさこそが学習の原動力であると述べている。数学は，美しさで多くの研究者を魅了し，それを原動力として研究がなされ，発展してきた学問であるといえる。

また，数学の美しさを感得させるような授業は，選択数学やトピック的に扱われることが多かった。しかしそれでは，数学が得意な生徒だけが数学の美しさを感得することになり，生徒の間で数学に対する情意的側面の格差が拡大することにつながってしまうと考えられる。すべての生徒が，普段の授業の中で数学の美しさを感得することができるよう，授業を構成することが必要である。

本研究では，数学の美しさに着目し，生徒の情意的側面と認知的側面の育成を促す教材を開発することを目的とする。教材を開発する単元については，算数と数学のギャップの一つである文字式指導に焦点を当てることとする。

1. 数学の美しさに関する考察

（1）数学の美しさを感得する教育的意義

①学習指導要領における数学の美しさ

昭和 26 年の中学校高等学校学習指導要領・数学科編(試案)において，数学科の一般目標に次のような記述がある。「数学の有用性と美しさを知って，真理を愛し，これを求めていく態度を養う」(下線は筆者)。この記述からわかるように数学の美しさを感得することが古くから目指されていたといえる。

その後の学習指導要領の改訂から「美しさ」についての記述は姿を消したが，平成 20 年改訂の学習指導要領に至るまで「数学のよさを実感し」という表現が目標に盛り込まれている。数学の美しさは数学のよさの一部であるため，この表現の中に美しさを感得するという意味が十分に含まれているといえる。

②白石(1996)の研究

白石は数学教育において審美感に視点をおいた研究を行っている。その中で，数学教育において審美感に視点をおく必要性を，情意的側面と認知的側面の二つの側面から考察している。審美感とは，美しいものと醜いものを見分ける感覚のことである。つまり，審美感を働かせることは，数学の美しさを感得させるということとほぼ同義であるといっても

よい。よって，白石の述べる「数学教育で審美感に視点をおく意義」は「数学の美しさを感得する意義」と言い換えることができる。以上のことをまとめると，表 1 のようになる。

表 1　数学の美しさを感得する意義

＜情意的側面＞
・数学の美しさを感得することにより，充実感，満足感を得ることができる。
・数学の美しさを感得することにより，数学に興味をもつことができ，それが数学に取り組む動機づけとなる。
＜認知的側面＞
・数学の美しさを感得することにより，数学の理解をより深める。
・数学の美しさを感得することが数学の見方考え方に影響を与える。

（２）先行研究における数学の美しさの捉え方

先行研究において，数学の事実の構造における対称性やバランスなどとともに，思考過程における簡潔・的確・明瞭などの美しさがあるとされている(松尾,1999)。また，米山(1968)は数学的な美を「形態的美」と「神秘的美」の二つに分けることができるとしている。形態的美とは，肉眼的に味わう美であり，神秘的美とは，異なっているもの同士の本質的一致など心眼的に味わう美であるとしている。つまり，先行研究において，数学の美しさを何に感じるかという対象には，「数学の事実の構造」，「思考過程」，「視覚的なもの」という 3 つがあるとされている。

また，様々な先行研究において，数学の美しさにはどのような性質があるのかが述べられている。本研究では，数学の美しさの性質を「数学の美しさの特徴」と呼ぶことにする。先行研究における数学の美しさの特徴をまとめると表 2 のようになる。

表 2　先行研究における数学の美しさ

・簡潔さ	・的確さ	・明瞭さ	・規則性	・調和
・対称性	・統一性	・論理性	・発展性	・双対性

また，斎藤(1990)，難波(1968)は数学の美しさを感得する授業のあり方や，指導法について言及している。両者の見解をまとめると数学の美しさを感得するための方法は，以下のようになる。

・発展・一般化が可能である問題を用い，生徒自らに発展させる。
・美しさを明確に捉えるため，振り返り，比較・検討する時間を設ける。
・多くの解決方法で解くことのできる問題を用い，自力解決の時間をとる。

（３）本研究における数学の美しさを捉える枠組み

本研究おける数学の美しさを捉える枠組みを，「美しさを感じる対象」，「美しさの特徴」という二つの観点から構築する。

①数学の美しさを感じる対象

一つの目の観点である数学の美しさを感じる対象を，本研究では「数学の事実の構造」とする。

前述したように，先行研究においては「数学の事実の構造」,「思考過程」,「視覚的なもの」に感じる美しさがあるとされている。しかし，視覚的なものに感じる美しさとは，数学的な美しさというよりは美術的な美しさであるといえるため，本研究では除外する。

また，思考過程を美しさを感じる対象として考えない理由は，本研究が数学の美しさを感得する教材開発を主眼としていることにある。思考は個人が行う主観的なものである。思考過程を，数学の美しさを感じる対象とした場合，その美しさを感得させるために，授業において生徒全員に同じ思考過程を辿らせることが必要となる。個人によって異なる思考を，教材を開発する時点で考慮するには無理が生じる。また，生徒が数学の事実の構造に美しさを感じるのか，あるいは，思考過程に美しさを感じるのかは，問題の文脈などによっても異なる。さらに言えば，思考過程における美しさは，数学の事実の構造に深く関係していると考えられる。

個人の主観や問題の文脈に依存する思考過程に着目して，美しさを内包した教材を開発するには無理が生じるとともに，美しさの捉え方が不明確になってしまう。生徒が数学の美しさを感得する教材を開発する際には，個人の主観や問題の文脈にとらわれない，数学の事実の構造に着目することが重要になってくる。

以上のような理由から，本研究では数学の美しさを感じる対象を「数学の事実の構造」とする。

数学の事実の構造には，表 3 のようにいくつかのタイプに分類ができる。それぞれのタイプについて，どのような数学の事実が該当するのか例を挙げていく。

Ⅰ：現実世界における数学の構造

美術作品の中に黄金比が潜んでいるような美術と数学との調和的な美しさのことをいう。また，現実世界での問題を数学的に解決できることなど，有用性といった数学の性格も一種の美しさであるといえる。

表 3　美しさを感じる対象の構造

数学の美しさを感じる対象の構造			タイプ
現実世界における数学の構造の美しさ			Ⅰ
数学世界における数学の構造の美しさ	一つの分野内での構造の美しさ	一つの内容	Ⅱ
		異なる内容	Ⅲ
	複数の分野が関連している構造の美しさ		Ⅳ

Ⅱ：一つの分野で一つの内容が関わる構造

多角形の外角の和は 360 度であるというように，図形の分野の話であり，外角という一つの内容が関わるというような構造のことをいう。

Ⅲ：一つの分野内で，異なる内容が関連する構造

ピックの定理のように格子点と面積という性質の異なるもの同士が関連するような構造のことをいう。

Ⅳ：複数の分野が関連する構造

数と式の分野の方程式と，関数という分野が表裏一体の関係であるというような構造のことをいう。

数学教育における教材についても，内容の構造によって 4 つの分類が可能となる。さらに，分類することはそれぞれのタイプごとに教材を特徴づけることにもなる。また，それぞれの構造のタイプによって，授業の展開も特徴づけられる(表 4)。そのため授業のねらいに即して，それぞれの構造を備えた教材を開発することができる。よって，この分類は教材開発の視点となり，構造の分類に沿って教材を開発することで表 4 のように，授業の構成に配慮する点も見えてくる。

表 4　構造のタイプ別の特徴

タイプ	教材の特徴	授業展開の特徴
Ⅰ 現実世界	・現実場面との関連から美しさを見出す。 ・数学の有用性を感じる。	・現実事象を数学的に考察する。 ・数学的に考察した結果を現実事象に戻し，さらに考察する。
Ⅱ 同じ内容	・単元の導入などで美しさを感得させる。	・一つの事象について条件を変えて，観察する。
Ⅲ 異なる内容	・単元の導入などで美しさを感得させる。 ・数学的事象のつながりを感じさせる。	・別の内容が絡むため，それぞれの事象を捉える。 ・それらの関連を探り結びつける。
Ⅳ 異なる領域	・数学の体系的な美しさを感じさせる。	・別の領域の内容が絡むため，まずはそれぞれの内容を整理する。 ・それらの関連を探り結びつける。

②数学の美しさの特徴

数学の美しさの特徴については，表 2 のように先行研究において様々な見解がある。本研究においては，数学の美しさを捉えやすくするためにも，先行研究で述べられたものを参考に，数学の美しさの特徴を 4 つに集約して捉えることにする(表 5)。

表 5　数学の美しさの特徴

●簡潔・的確・明瞭
　構造が簡潔・的確・明瞭である。または，簡潔・的確・明瞭に説明，解決できる。
●現実事象と数学の調和
　数学とは無関係に思える現実場面に潜んでいる数学的な構造。
●数学の構造に現れる規則性
　・対称性　　・リズム　　・双対性　　・調和　etc
●数学の内容同士の統合
　数学のいろいろな概念や表現をその意味や形式の共通性に基づいて一つにまとめていくこと。
　異なっているものの本質的一致。

また，教材に内包させる数学の美しさの特徴によっても，授業展開の特徴が異なる(表 6)。つまり，数学の美しさの特徴は授業構成の視点となる。

美しさを感じる対象の構造のタイプから導かれる授業展開の特徴と，美しさの特徴から導かれるそれとを考慮して授業を構成することが必要となる。

表 6　数学の美しさの特徴と授業展開

美しさの特徴	授業展開の特徴
簡潔・的確・明瞭の美しさ	・多様な考え方の中で，より簡潔・的確・明瞭な方法を考える。
数学の構造に現れる規則性の美しさ	・複数のものの比較を通して規則性を見出す。
数学の内容同士の統合の美しさ	・性質の異なるもの同士のつながりを考える。 ・視点を変えて数学的事象をみることで他の内容との関係づけを考える。
現実事象と数学の調和の美しさ	・現実場面から導入を図る。 ・日常場面を数学的に考察する。

以上，本研究では表 3，表 5 を数学の美しさを捉える枠組みとする。

2. 文字式指導に関する考察

（1）文字式指導の問題点

算数と数学の違いは「変数(文字)」と「論証」の有無であると指摘されている(平林,1986)。文字の扱いは数学において中核的な内容であるが，その指導には様々な課題がある。文字式の指導が困難である要因の一つに，数字の式と文字の式の間のギャップがあることが挙げられる。杜(1990)や藤井(2002)の研究をもとに，小学校と中学校における文字や記号の意味，役割などについて相違点をまとめると表 7，表 8 のようになる。

表 7　小学校と中学校での相違点

	小学校	中学校
式の意味	・計算の手続き（プロセス）の表現	・計算などの処理のプロセスを表すのと同時に，式そのものがある構造や結果を表している ・式自体を対象として扱う
記号・文字の意味	・□，△は数量や関係記号などを入れる場所（place holder） ・小学校で文字が導入される場合，□や△などの代わりとして文字が使われるので，文字の意味も place holder	・文字は数の代わりとして扱われる ・文字の意味として主に，未知数，一般的な数を表す定数，変数の三つの役割がある ・場面によって文字の意味が異なる

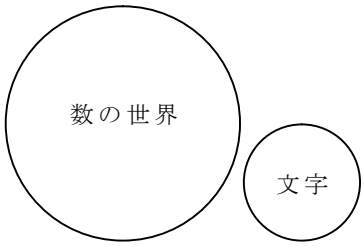
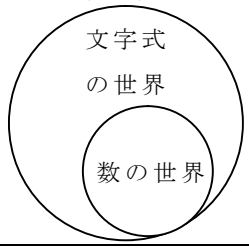
数の世界と文字式の認識	・数の世界と文字とのつながりができていない ・文字はまだ数と同じ性質をもっていない  	・数を特殊な文字式と認めることによって, 文字式で数の世界と文字の世界を一つの範疇にまとめることができる ・文字式は数と比べてより抽象的なもので, ある数量あるいは数量関係を表すものである 

表 8　数字の式と文字式の構文法について

数字の式の構文法をそのまま文字式に適用するもの	文字式の世界に入ってから新しく規定されるもの
・数の表し方 ・計算記号 ・関係記号及びかっこの使い方	・×は省略か・で代用 ・÷の代わりに分数の横棒 ・数と文字だったら数を前に書く ・係数の 1 は省略

これらのギャップから, 文字式の学習において大きく次の困難点があるといえる。

・文字の意味の理解, 特に変数の意味の理解の困難
・式が過程と結果を表すことの理解の困難
・数量や, 数量の関係を文字式に表現することの困難
・文字式の形式的操作の困難

また, 中学校数学では第 1 学年において, 文字と式, 一次方程式, 比例・反比例という順で文字式の学習が行われる。単元ごとに, 一般数, 未知数, 変数と文字の意味が変化していく。そのことも踏まえ, 文字式指導についての課題をまとめると以下のようになる。

【文字式指導についての課題】

・式がプロセスだけでなく結果も表していることを捉えさせる。
・文字は, 小学校での place holder としての役割ではなく, 数の代わりであることを捉えさせる。
・数の世界での性質と文字の世界での性質, 何が共通で何が異なるのかを捉えさせる。特に数字の式の構文法や, 記号や言葉とのちがいを捉えさせる。
・特に文字の変数としての意味の理解を図る。
・また, それぞれの場面で式を使う目的が異なることも考慮しなければならない。

（2）文字式の導入における指導のあり方と数学の美しさ

前節で述べたように文字や式について，小学校と中学校では様々なギャップが存在する。このギャップに出会う場面でどのような指導を行うかが重要となってくる。

藤井(1999)は「『数字の式』から『文字の式』へと発展するためには『数字の式』の中に一般性を読み取ることが必要となる。『数字の式』における『準一般的』側面を『よむ』ことができるとき『数字の式』から『文字の式』へと発展することが期待できる」と述べている。谷沢(2001)も事象と文字式がつながる過程において数字の式が重要な役割をしていると指摘している。

また，三輪(2001)は生徒が文字式の使用が適切である状況であっても，その使用に消極的であるということを指摘している。文字式の操作という技能の面で巧みになるだけではなく，何を，どんな目的でコミュニケーションし，思考するかが大切であると述べている。三輪はそれを踏まえ，導入段階の文字式の教授は言語的な面とその使用を組織的に融合させるのが望ましいと述べている。文字式の言語的な面とは，「表わされるもの」と「表わすもの，文字式」の関係であり，「表す」，「変形する」，「読む」のサイクルのことを示す。

以上のことより，文字式の導入における指導のあり方として，以下の 2 点にまとめることができる。

【指導のあり方 1】

数字の式のパターンから一般性を読み取り，数の代表である文字を導入する。

【指導のあり方 2】

表す，変形する，読むという過程を組織的に融合する。

しかし，これらの指導のあり方にも以下のような課題がある。

【課題】

1. どのように式を考察の対象として見るという見方に変換するか。
2. 文字式使用の 3 つの過程を促す場面や手段をどのように授業に取り入れるか。
3. どのように思考の手段として文字式の使用を捉えさせるか。

これらの課題に対して，数学の美しさという観点から考察する。数学の美しさを学習に取り入れることが，文字式の導入における指導のあり方の課題を解決することにどのようにつながるのであろうか。

＜課題 1 に対して＞

規則性など，美しいパターンを含む教材であった場合，規則性を見つけるための観点の一つとして式の形に着目させることができる。数字の式を計算の対象ではなく，パターンを探す対象として扱うことができ，式の見方の変換を促すことができる。

＜課題 2，課題 3 に対して＞

三輪(2001)は文字式の使用のよい例として，パターン発見と一般化，問題解決などがあるとしている。パターン発見の問題に美しい規則性を含ませるならば，学習の動機付けに

なるといえる。さらに，美しさを感得することは同時に「なぜこうなるのだろう」と問題意識をもつことにもつながる。問題意識をもち，その問題を解決するという目的を明確にすることで，問題場面における思考の手段としての文字式の使用について意識させることができる。

3. 数学の美しさの枠組みに基づいた文字式指導に関する教材の開発

数学の事実の構造の分類(Ⅰ：現実世界における数学の構造，Ⅱ：一つの分野内で，一つの内容が関わる構造，Ⅲ：一つの分野内で，異なる内容が関連する構造，Ⅳ：複数の分野が関連する構造)に沿って，数学の美しさを内包する教材を開発する。その際，以下のことに留意する。

教材に内包する美しさの特徴

4 つの美しさの特徴(簡潔・的確・明瞭の美しさ，数学の構造に現れる規則性の美しさ，数学の内容同士の統合の美しさ，現実事象と数学の調和の美しさ)のいずれかを内包させる。

単元

文字を学習し始める，中学校第 1 学年の文字と式，一次方程式，比例・反比例の 3 つの単元について教材を開発する。

文字式指導の課題

前節において文字式指導の問題点と課題を整理した。その課題に即して，問題点を改善する教材を開発する。

（1）教材の提示

①タイプⅠ(現実事象)の教材

教材案：天秤で反比例

単元　：比例・反比例

教材の内容：

天秤において支点からおもりを吊るす位置までの距離を x，吊るすおもりの重さを y とすると，天秤がつり合うときの y は x に反比例する。x は支点を原点として右側が正の向き，y は下向きを正の向きとする。

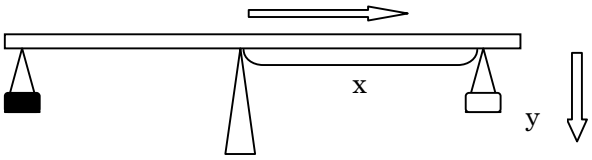


図 1 天秤の正の向き

比例・反比例は実験や具体物を使った操作では負の数が表せないという問題点がある。しかし，この教材では次のように負の数を表すことが可能である。

図 1 のように傾いている天秤に対して支点より右側におもりを吊るしてつり合いをとることを正とすると，支点よりも左側に力を加えることを負の数量を表すこととみなすことができる(図 2)。

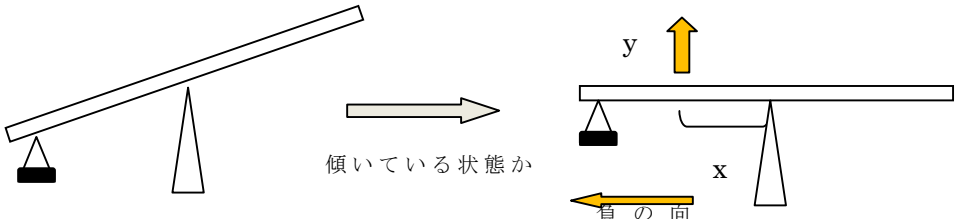


図 2 天秤の負の向き

本教材の構造：

実際の実験から得られた数値が反比例の関係になっているという構造であり，現実世界の事象と数学が関係しているため，Ⅰのタイプに属する。

本教材の美しさの特徴：

・実験という現実事象から得られた数値の積が常に一定になるという規則性。

・現実事象から数学的な構造を見出すことができる，現実事象と数学の調和。

文字式の指導：

比例定数はあらかじめ吊るしておくおもりの重さによって決まる。よって吊るしておくおもりによって比例定数が変化するということを捉えることが可能となる。変数である支点からの距離や，つり合いを保つために吊るすおもりの重さとの違いを捉え，変数と比例定数の違いを明確に捉えさせることができる。

②タイプⅡ(同じ内容)の教材

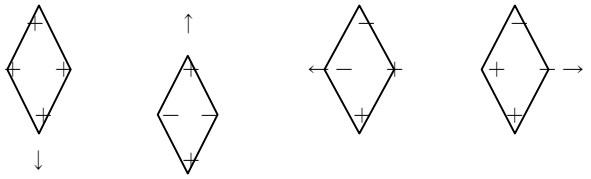
教材案：フィボナッチ三角

**単元　**：一次方程式

教材の内容：

フィボナッチ三角とはダイヤモンド型に 4 つ 1 をおき，右下がりと左下がりに並んだ 2 数の和をそれぞれの下に並べてできた数字の三角形である(細矢,1999)。

フィボナッチ三角には様々な規則が隠れている。たとえば，三角中のダイヤモンド型に位置する数に以下のような符号をつけて計算すると，矢印の先の数と等しい。細矢はこの性質をマジックダイヤモンドと呼んでいる。



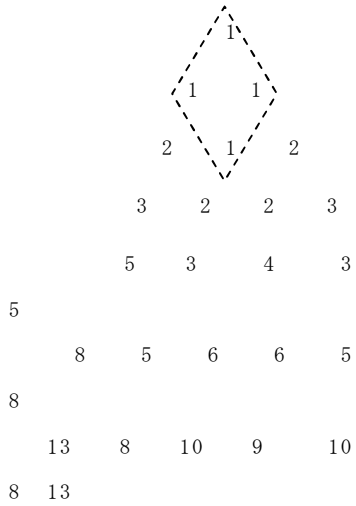


図 3 フィボナッチ三角

フィボナッチ三角を用いて一次方程式の教材を開発するため，まずはフィボナッチ三角の性質についてさらに考察する。

フィボナッチ三角の数や演算の条件を変更することでも，おもしろい規則が現れる。

図 4 は，ダイヤモンド型におく 4 つの数を 1 ではない他の数として作成した三角形である。

このようにして作成した三角形であっても，前述したマジックダイヤモンドの規則が成り立っている。

また，図 5 はダイヤモンド型におく 4 つの数を 1 ではなく他の数とし，さらに右下がりと左下がりに並んだ 2 数の積をそれぞれ下に並べて作った三角形である。

このように数や演算の条件を変更した三角形については,前述したマジックダイヤモンドなどの符号を＋を×,－を÷に変換することで成立する。

フィボナッチ三角そのものを観察することで様々な規則性の発見ができるとともに，数や演算の条件を変更することでそこからまた新たな性質が浮かび上がってくる。生徒に観察させることで美しさの感得が図れるであろう。

このフィボナッチ三角の構造を活用した一次方程式の学習を促す問題例を挙げる。

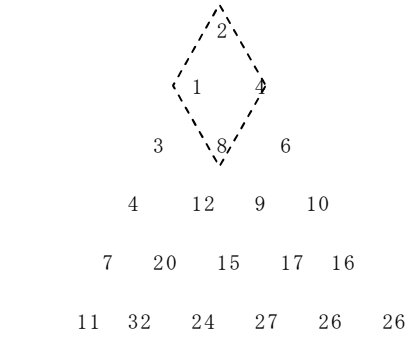


図 4　数の条件を変更した三角

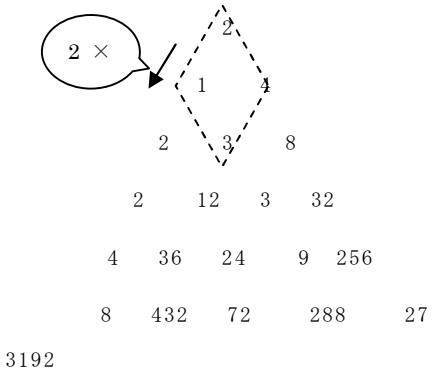
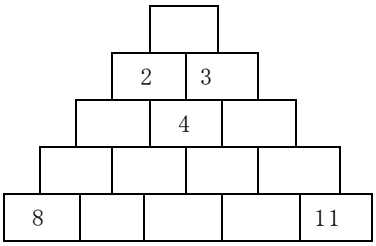


図 5 数と演算の条件を変更した三角

【フィボナッチ三角の構造を用いた一次方程式の問題例】

課題　フィボナッチ三角の作り方を用いて空いているマスを埋めましょう。



この課題のとおり,フィボナッチ三角の作り方(右下がりと左下がりに並んだ 2 数の和をそれぞれの下に並べる)から次のようにマスを埋めることができる。

しかし，与えられた数を用いてマスを埋めたとしても，残りの 6 ヵ所は右下がりや左下がりに 2 数が並ばないため数をあてはめることができない(図 6)。

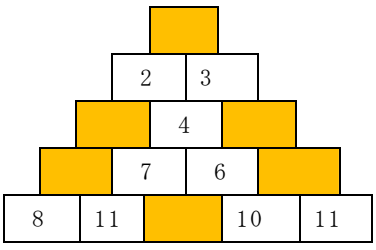


図 6　マスを埋めた状態

そこで，この課題の解決方法の続きであるが，頂上のマス(頂上以外の空いているマスでもかまわない)に当てはまる数を x とする。未知数 x を 1 ヵ所設定することで，他のマスも x を用いた式で表すことができる。図 7 は頂上の数を x と

したとき，それに従って左下に並ぶ 2 数をその下に書き足していった様子である。

すると，左側の下 3 段はそれぞれ x+2，x+4，8 となる。ここで，フィボナッチ三角の作り方から，

$$(x+2)+(x+4)=8$$

という一次方程式を立てることができる。あとは，x について解くことで未知数を求めることができ，空いているマスのすべてを埋めることができる。

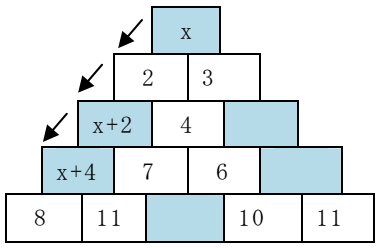


図 7　頂上の数を x とした場合

本教材の構造：

フィボナッチ三角を利用した数同士の関係。数の領域内での内容であり，他の内容との関連はないためⅡに属する。

本教材の美しさの特徴：

・フィボナッチ三角に現れる数同士の規則性。

・方程式を立てて解決する簡潔さ。

文字式の指導：

・未知数という文字の意味を捉えやすい。

・x とおく箇所を変えることで，数量関係を表す練習ができる。

・未知数を x とおいて方程式を用いることで解決が簡潔になり，方程式のよさを味わうことができる。

③タイプⅢ(異なる内容)の教材

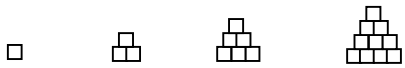
教材案：三角数と四角数

単元　：文字と式

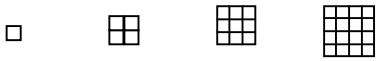
教材の内容：

三角数，四角数とは，下のように図形の形にブロックを並べたときのブロックの数を書き並べた数列のことである(その他，五角数，六角数など総称して図形数という)。

三角数　　1　3　6　10　15　21　・・・



四角数　　1　4　9　16　25　36　・・・



三角数と四角数の規則性を用いて教材を開発する。

三角数と四角数には次のような規則がある。

隣り合っている二つの三角数の和は四角数になる

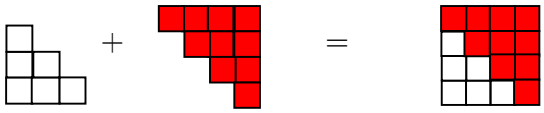
三角数　1　3　6　10　15　21　28　36　45　・・・

四角数　1　4　9　16　25　36　49　64　81　・・・

この規則が成り立つことを説明するには少なくとも二通りのやり方がある。

【図を用いた説明】

隣り合う三角数をブロックでそれぞれ表す(図は 3 番目の三角数と 4 番目の三角数)。二つをつなげると，正方形ができ上がることから，隣り合う二つの三角数の和が四角数になるということが説明できる。



【文字式を用いた説明】

三角数，四角数をそれぞれ一般化すると次のようになる。

n 番目の三角数 $\frac{n(n+1)}{2}$　　n 番目の四角数 n^2

ちなみに，三角数の一般化は図を用いて考えることができる。

n 番目は n×(n+1)÷2

n-1 番目の三角数と n 番目の三角数の和を求めると n 番目の四角数となる。

$$\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n-1)n+n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n^2-n+n^2+n}{2}$$
$$= \frac{2n^2}{2}$$
$$= n^2$$

本教材の構造：

三角数，四角数はともに数の領域の内容である。三角数，四角数という異なる性質をもつ内容同士が関連しているのでⅢに属する。

本教材の美しさの特徴：

・隣り合っている二つの三角数の和は四角数となる規則性。

・文字式を用いることで簡潔・的確・明瞭に説明，表現できる美しさ。

・三角数と四角数という性質の異なるものに関連が見出せる，統合という美しさ。

文字式の指導：

・n 番目の三角数，四角数を文字式で表すことで，式が結果も表すことができること，構造を表すものであることを捉えさせる。

・文字が数の代わりを表すということを捉えることで，文字の一般性の学習につながる。

④タイプⅣ(異なる領域)の教材

教材案：長方形で比例

単元　：比例・反比例

教材の内容：

A4 や B4 などの国際規格で定められている紙の寸法は 1：$\sqrt{2}$というアスペクト比をもっている。紙を 2 等分に切っていっても，紙の長い方の長さと短い方の長さの比は一定に保たれる。つまり，長方形の長い辺を y，短い辺を x とすると $y=\sqrt{2}x$ という比例関係になる。

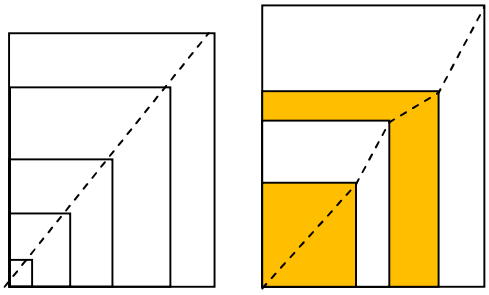


図 8　紙の寸法の違い

紙を 2 等分に切っていき，図 8 の左のように一つの角を合わせて重ねると，頂点が同一直線上にあることがわかる。

紙の寸法が国際規格のものでなくなった場合はどうなるであろう。辺の長さの比が 3：2 の縦 36 ㎝，横 24 ㎝の紙を用意し，面積を半分になるように合同な長方形に分割する。2 等分された一方の長方形を同じように 2 等分していく。分割された長方形を，一つの角を合わせて重ねると，頂点は一直線上には並ばないことがわかる(図 8 右)。

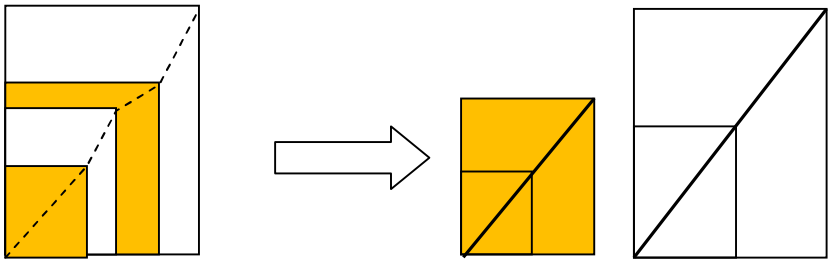


図 9　長方形から現れる比例関係

ところが，図 9 のように一枚ずつ交互に取り出して，再度重ね合わせるとそれらの頂点は対角線で一直線上に並ぶ。辺の長さの変化と辺の比は図 10 のようになり，半分に切っていった長方形には，比例定数が 3/2 と 4/3 となる二種類の比例関係が現れる。

長い辺 y	36	24	18	12	9	6	9/2
短い辺 x	24	18	12	9	6	9/2	3
y/x	3/2	4/3	3/2	4/3	3/2	4/3	3/2

長い辺 y	36	18	9	9/2
短い辺 x	24	12	6	3
y/x	3/2	3/2	3/2	3/2

長い辺 y	24	12	6
短い辺 x	18	9	9/2
y/x	4/3	4/3	4/3

図 10　長方形の辺の長さの変化

長方形の辺の長さの比が，頂点が一直線上に並ぶそれぞれのグループを特徴づけていることに着目させることで,比例定数と x や y などの変数との違いについて捉えやすくなる。

本教材の構造：

長方形の面積を 2 等分していくことで，辺の長さの関係に必ず比例の関係が現れるという，図形と関数の領域の内容が関連しているため，Ⅳに属する。

本教材の美しさの特徴：

・長方形を 2 等分していくという単純な作業の中で，比例の関係が現れるという規則性。

・長方形という図形と比例という関数が関連するという統合という美しさ。

文字式の指導：

・比例定数と変数との違いを捉える。

・二つの比例関係を式で表現し，違いを捉えることで，数量関係を式に表現することのよさを実感できる。

（２）教材を用いた授業構成の視点とその構想

前節で開発した教材を用いた,数学の美しさを感得する文字式指導の授業構成の視点と,その構想を提示する。ここでは，タイプⅢ(異なる内容)の教材「三角数と四角数」を用いる。

授業を構成する視点として,「授業の展開」,「指導方法」に分けて次のような視点を設ける。

①授業の展開についての視点

授業の展開については，タイプⅢ(異なる内容)の教材「三角数と四角数」の構造，教材に内包される美しさの特徴，教材の文字式指導に関係する部分という 3 つの視点からそれぞれ述べる。

【教材に内包される美しさの構造】

「三角数と四角数」という教材は,数学の美しさを捉える枠組みのタイプⅢ(異なる内容)にあたる。授業においては，異なる性質をもつ三角数と四角数という二つの事象それぞれについて捉えさせること，さらにそれらの結びつきを見出す活動を重視することが必要となる。

【教材の美しさの特徴】

数学の構造に現れる規則性：三角数と四角数を比較し，その間にある規則性を発見する場を設ける。

簡潔・的確・明瞭　：具体的な数を用いた方法と比較させ，美しさをより強調することが必要である。

数学の内容同士の統合　：規則性とも関わるが，異なるもの同士の間にある規則性を探り,それらの結びつきを実感させる場面を設定する。

【文字式指導の内容】

本教材は, 文字式の学習という点では,「文字が数の代わりであること」,「文字を用いて説明することの一般性や簡潔さなどのよさ」について捉えさせることを主眼としている。そのため,文字に数を代入して数値を求める活動や,文字を用いて説明することの意義を,具体的な数による帰納的な説明との比較から文字の一般性について捉える場面を設定することが必要となる。

②指導方法についての視点

「数学の美しさを感得する指導・授業のあり方」と「文字式指導のあり方」という二つの視点からの見解を総合し, 数学の美しさを感得する文字式指導の授業構成において, 以下のような指導方法が重要になってくる。

a. 数字の式や文字の式に表す, 読むといった言語的側面と使用を組織的に融合しまとめる。
b. 結果だけに着目するのではなく, その解決の過程を振り返る活動を行う。
c. 発展・一般化可能な問題を用い, 生徒自身の手で一般化を図る。
d. 比較し, 発見する場を設定し, 数学の美しさや文字で表現することのよさの実感を促す。
e. 多くの解決方法で解くことのできる問題を用い, 自力解決を図る。

4. 数学の美しさを感得する文字式指導の実践研究

（1）授業実践の枠組み

①目的

本授業実践の目的は, 本研究において開発した教材が子どもの情意的側面, 認知的側面の育成に有効に働くかどうかを検証するとともに, 授業実践を行うことで数学の美しさを感得する授業のあり方について更なる示唆を得ることである。

②授業実践の対象及び時期

対象：新潟県内国立小学校第 6 学年　児童 38 名
実施時期：平成 21 年 10 月 19 日, 20 日, 23 日

開発した教材が文字式の導入を想定したものであるため, 実施時期に文字をまだ学習していない小学校第 6 学年を対象とした。

③分析方法

本授業実践は, 事前調査, 授業, 事後調査という流れで行った。

事前調査では児童に普段の算数の授業に対する情意的側面について質問紙調査を行い, 事後調査では本授業における意欲などの情意的側面に関する質問事項とともに, 学習内容である文字についての認知的側面に関する質問事項を設けて調査を行った。事前・事後調査の結果を比較し, 分析を行う。

また，授業は VTR により記録し，授業場面からの分析を行う。

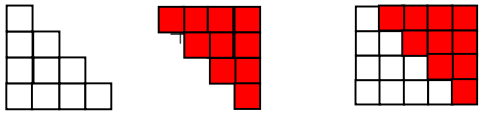
（２）授業の実際

①第 1 時　10 月 19 日（月）　3 限

ブロックの並べ方のパターンから，四角数を導入した。児童がパターンを見つけようと活発に発言する姿が見られた。「○段目の四角数は○×○である」ことを全体で確認した後，算数で数の代わりに扱われてきた○や□といった記号から，新しく数の代わりとして文字 n の導入を行った。

その後，三角数を導入した。四角数と同様にブロックのパターンから三角数のパターン発見を試みた。三角数の一般化を図る前段階として，三角数の構造を明らかにするために，4 段目，15 段目の三角数の求め方について児童で議論した。このとき，児童から出てきた三角数の求め方は次の 3 通りであった。

求め方 1



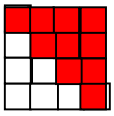
4 段目	4×5÷2＝10
15 段目	15×16÷2＝120

求め方 2

1 ＋ 2 ＋ 3 ＋ 4
4 ＋ 3 ＋ 2 ＋ 1
5　5　5　5

4 段目	5×4÷2＝10
15 段目	16×15÷2＝120

求め方 3



4 段目	（4×4－4）÷2＋4＝10
15 段目	（15×15－15）÷2＋15＝120

⇒

4 段目	4×4÷2＋2＝10
15 段目	15×15÷2＋7.5＝120

求め方 1 及び 2 については全体で納得されたが，求め方 3 については多くの児童が納得しきれない様子であった。

②第 2 時　10 月 20 日（火）　2 限

第 2 時では，第 1 時で発表された三角数の求め方 3 について議論がなされた。第 2 時の内容は本授業のねらいから逸脱してしまったため，詳細については割愛する。

③第 3 時　10 月 23 日（金）　1 限

三角数の求め方について，全体で納得されていた求め方 1 及び 2 の方法から，n 段目の三角数をどのように表せるか一般化を行った。

n 段目の三角数，四角数がどのように表せるかを確認した後，5 段目の三角数，四角数を求めるやり方として，n に 5 を代入して求めるという方法を児童に説明し，実際に文字

に数を代入して求めさせる活動を行った。この活動から，文字に様々な数が入るという変数的な意味を捉えることにつながったといえる。また，その他にも三角数と四角数の表から，規則性を読み取って 5 段目の数を求めるというやり方を見出す児童が見られた。それに対して，他の児童から拍手が起こるという場面があった。児童は規則性を見出すことに積極的であるとともに，発見した規則を共有することで情意的側面に影響を与えるということがいえる。

三角数と四角数に現れる規則性のうち,「隣り合う二つの三角数の和が四角数になる」という関係に着目し，この規則性が「6 段，7 段，100 段，1000 段，1 万段でもずっと成り立ってるかな？」と授業者が問題を提示した。この規則性がどの段でも成り立つということを確かめるために，実際に 100 段までの三角数と四角数を求めるような煩雑なやり方ではなく，n に着目することで説明できると授業者が解説し，その後文字式の式変形を用いたやり方で「n－1 段目の三角数＋n 段目の三角数＝n 段目の四角数」となることを確認した。この直前に，文字がいろいろな数をとることを確認していたことで，文字で説明することの意義の理解につながったといえる。

授業のまとめでは，最初 1 から 5 段まで提示していた三角数と四角数の表を 15 段まで延長して提示した(図 11)。表を延長しても規則が崩れないことを直観的にイメージさせることで，改めて規則性の美しさの実感を図った。

段数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	…
三角数	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	…
四角数	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	…

n－1	n
(n－1)×n/2	n×(n+1)/2
	n×n

図 11　第 3 時まとめの板書

（３）調査結果の分析

事前調査，事後調査の結果を比較し，分析する。

①意欲の変化

事前調査と事後調査を比較すると，児童の意欲については，普段の算数の授業に対する意欲に比べて，本授業における意欲が少し低下しているという結果であった。

意欲の変化の様相，要因を探るためさらに細かく分析する。

ｉ）もともと算数に消極的であった 3 名の児童

3 名のうち，2 名は意欲が向上し，1 名は変化なしという結果であった。向上した 2 名については，文字式の変形に対して興味・関心を抱いていた。変化がなかった児童は，話し合いや発言の機会が少なかったことが要因で，意欲の向上が見られなかったといえる。

ⅱ）本授業において意欲が向上していた児童 6 名の児童

特に三角数の求め方，三角数と四角数の規則性におもしろさを感じていたこと，文字式の変形について興味・関心を抱いていたことが特徴的であった。

ⅲ）本授業において特に意欲が低下していた児童

文字を使うよさを感じていない（文字を使うほうが面倒で，ごちゃごちゃするといった感想をもっている）という特徴があった。

以上のことから，文字を用いることで，式変形や文字を用いて説明することに対してよさを実感できているかいないかで，意欲の変化に違いがあったということがわかる。

②どのようなことに興味・関心を抱くか

事前調査の結果からもわかるが，本授業実践の対象学級は，普段から話し合いの活動が盛んであり，多くの児童が話し合いの活動におもしろさを感じている。

事後調査においては，話し合い活動についての記述をした児童は少なく，三角数と四角数の規則の多様性に好意的な回答をした児童が多かった。本授業においては児童に算数の内容自体に関心を向けさせることができたといえる。

③となり合う二つの三角数の和が四角数になる規則性に関して

どんな大きい数でも規則が崩れないこと，計算で規則性が確かめられたことなどに興味・関心を示した児童は全体の約 6 割であった。本教材は，児童に関心をもたせるには適した題材であったといえる。

④文字を用いて説明することのよさの指摘

文字を使って説明することについて，いいと思ったところがあったと回答したのは全体の 79.4%であった。その中で文字の数学的な特性について指摘できていたのは 64.7%であった。

指摘された文字のよさについて，児童の回答が多かったもの

・文字を使うことの簡潔さ　　・文字にはどんな数も当てはめられる

・n で説明できればすべての数で正しい

一方，文字を使って説明することについて，いいと思ったところがなかったと回答した児童(20.6%)で，なかったと回答した理由には次のようなものがあった。

・文字の方が面倒　　・わかりにくい　　・数の方が楽

児童は様々な文字のよさを実感していたといえるが，文字式の変形が困難であることなどが影響し，かえって文字を用いて説明することが面倒であると感じた児童もいた。

⑤文字の変数的な意味の理解

文字の変数的な意味の理解に関する調査問題は國宗(1997)の調査をもとにしている。國宗の調査結果では，正答率はそれぞれ中学校第 1 学年で 49%，第 2 学年で 65%，第 3 学年で 73%であった。本調査結果の正答率は 61.8%であり，國宗の調査結果と比較すると中学校第 1 学年の正答率より高い数値となっている。本授業において児童に文字の変数的な意

味の理解を促せたといえる。

⑥美しさの感得

数学の美しさを感得できていたかどうかというのは，筆者が捉える規則性や統合，簡潔さなどを実感し，それに対して何かしら興味・関心を示すなど，情意的側面に変化が表れていたかどうかである。調査結果を総合すると，本教材は数学的事象の規則性の美しさについて感得を促せる教材であるということがいえる。

（４）考察

①教材の有効性に関する考察

本授業実践で用いた「三角数と四角数」の教材の有効性について，情意的側面，認知的側面の育成に有効であった点，問題点をまとめると以下のようになる。

＜有効であった点＞

1) 普段算数に消極的な児童にも意欲の向上が図れる可能性が見出せた。
2) 数学の内容自体に興味・関心を抱かせることにつながる。
3) 規則の多様性を見出すことができ，情意的側面の育成につながる。
4) 本教材の本題である三角数と四角数の規則性は，児童に好意的に受け止められた。
5) 規則性，統合，簡潔・的確・明瞭などの美しさの感得がなされた。
6) 文字を用いることのよさの実感につながった。
7) 文字の変数的な意味の理解を促した。

＜問題点＞

8) 文字の変形などが困難であるため，逆に意欲の低下をまねくおそれがあり，文字の導入に用いるには不向きである。

以上のことから，本教材は美しさの感得，文字の理解を促せる教材ではあるが，文字の導入段階では困難な内容もあり，ある程度文字に慣れた頃に活用することが適切であるといえる。

②タイプⅢ(異なる内容)の教材を用いた授業のあり方についての考察

授業の実際から次の 5 つのことが指摘できる。

１．それぞれの事象を捉える

今回の授業で言うならば，三角数と四角数とは何かを捉えなければ，それらの関連性を見出すことにつながらない。

２．比較，発見，共有を大切にする

異なる内容が関連するので様々な観点からの比較ができ，その中で規則性や簡潔さなどの発見がなされる。個々の発見を全体で共有する時間を設けることで，それぞれの子どもの中で新たな発見が起こり，美しさの感得，情意的側面の育成につながる。また，多様な見方・考え方を比較することで，よりよい方法を追究する姿勢につなげることができる。

３．比較，発見がしやすいように表現を工夫する

上記の１を満たすためにも，子どもが比較，発見できるような資料を提示することが必要となる。今回は表にまとめることで児童が様々な観点から三角数と四角数の規則を見出すことにつながった。

４．直観的に子どもがイメージしやすいような工夫をする

具体物によって事象を捉えやすくする，表を活用するなど，抽象的な内容を扱う場合には子どもがそれを直観的に捉えやすいようにすることが新たな学習内容の習得には必要となる。

５．子どもに予想させることを大切にする

今回は，規則性が他の段でも，段数をどんなに大きくしても成り立つのかどうかを直観的に予想させることで,「自分の予想は正しいのかどうか」を確かめようという意欲につなげることができたと考えられる。

③数学の美しさと文字式指導とのつながりについての考察

文字式指導と数学の美しさのつながりという観点で本授業を考察したとき，以下のような反省点が導かれる。

【数学の美しさと文字のよさの実感】

規則性についての美しさを感得した児童は約 6 割いたが,その中でさらに文字のよさ(文字の本質的なよさ）を感得できた児童が少なかった。これは，文字式の導入の教材にしては内容が難しかったことが原因と考えられる。

【数学の美しさと文字の変数的な意味の理解】

文字の変数的な意味の理解と美しさの感得については，直接的な結びつきが授業中に現れなかった。これは，授業構想の段階で，それらの結びつきをについて重点がおかれていなかったためである。

今回は授業構想の段階で,「数学の美しさ」,「文字式指導」という 2 つの観点に重点をおいて考えてきた。しかし,「数学の美しさと文字式指導との関連」という 3 つ目の観点を考慮するべきであり，そのことによって情意的側面，認知的側面の育成がさらに図られたのではないか。

おわりに

本研究の主な成果は，以下の 3 点である。

１．数学の美しさを捉える枠組みを構築することで，数学の美しさについての捉え方の一例を示すとともに，その枠組みから数学の美しさを内包した教材開発の視点を提案したこと

美しさという抽象的なものについて，その捉え方は人によって様々である。先行研究においてどのようなものが数学の美しさとして捉えられているのかを整理し，また筆者の見

解も加味して数学の美しさを整理することができた。

先行研究では教材開発に結びつけて数学の美しさについて述べているものはほとんどないため，数学の美しさの新たな捉え方を提案できたといえる。

２．数学の美しさを捉える枠組みから，中学校数学の大きな困難点の一つである文字式に焦点をあてて数学の美しさを実感させる教材を開発したこと

すべての生徒が数学の美しさを感得できるような指導がなされるべきである。そのためには，それを可能にする教材，つまり，数学の美しさを感得できるだけではなく，普段の学習の中で用い，生徒の認知的側面を育成することができる教材が必要となる。

そのような教材を開発するため，数学の美しさを捉える枠組みを構築し，数学の美しさを内包する教材の開発の視点を見出した。さらに文字式指導の問題点を整理し課題を明確にすることで，それを踏まえて数学の美しさを感得する教材を開発することができた。

３．開発した教材を用いた授業実践を行い，教材の有効性を実践的に検証するとともに，授業のあり方について明らかにしたこと

開発した教材「三角数と四角数」を用いた授業実践を分析し，その教材の有効性，教材を用いた授業のあり方を明確にした。

教材は，文字の導入において，式変形の困難性という問題が残るが，認知的側面，情意的側面の育成への可能性が見出せる結果となった。

今後の課題として，以下の 2 点が挙げられる。

１．授業の構想の視点の見直し

授業構成の際，主に「数学の美しさ」と「文字式指導」という 2 つの視点に重点をおいていた。しかし，この 2 つの視点だけではなく，「数学の美しさと文字式の指導との関連」という 3 つ目の視点を設ける必要があった。それらを授業場面にいかすことで，さらに情意的側面，認知的側面の育成を図ることができると考えられる。授業構成の視点について再度検討する必要がある。

２．開発した教材を用いた実践

本研究では開発した教材のうち 1 つを用いて授業実践を行った。今後は，開発したその他の教材を用いた実践的検証を行う必要がある。実践を行うことで，それぞれの教材の有効性を検証するとともに，枠組みにおけるタイプ別の授業のあり方をさらに明確にしていくことが必要である。

主な引用参考文献

國宗進(1997),『中学校数学科・新しい授業づくり 5　確かな理解を目指した文字式の学習指導』, 明治図書

國本景亀(2009),「子どもの美的感性を育む！」,『新しい算数研究』, No.459,東洋館出版社, pp.44~48

国立教育政策研究所(2007),「中学校高等学校学習指導要領・数学科編(試案)」, http://www.nier.go.jp/yoshioka/cofs_news/s26jhm/chap1.htm

斎藤範雄(1990),「数学の美しさを感得できる授業のあり方」, 日本数学教育学会誌,Vol.72,No.9,pp.11~20

白石利夫(1996),「学校数学における審美感に視点をおいた教材開発についての研究―表現の道具としてのテクノロジーを利用して―」,『筑波数学教育研究』, Vol.15,pp.129~130

谷沢浩明(2001),「文字式の学習過程に関する研究―事象と文字式の関連に焦点を当てて―」, 上越教育大学,『上越数学教育研究』, Vol.16,pp.69~80

杜威(1991),『学校数学における文字式の学習に関する研究　数の世界から文字の世界へ』, 東洋館出版社

難波常作(1968),「“数学の美しさ”について」, 新潟大学教育学部長岡分校研究紀要, Vol.13,pp.63~68

平林一栄(1986),「数学教育の有効性のために」, 奈良教育大学紀要, Vol.35, No.2, pp.1~17

藤井斉亮(1999),「『数字の式』から『文字の式』に至る指導―擬変数について―」,『新しい算数・数学教育の実践を目指して』, 東洋館出版社, pp.153~162

藤井斉亮(2002),「数と計算・代数における先行研究の整理と課題」, 日本数学教育学会,『数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録』, Vol.35,pp.74~83

細矢治夫(1999),『数学 100 の問題　数学史を彩る発見と挑戦のドラマ』, 数学セミナー編集部編著, 日本評論社, pp.90~92

松尾七重(1999),「算数数学の美しさを感得するための方法」, 千葉教育学部研究紀要第 47 巻 Ⅰ:教育科学編, pp.71~79

三輪辰郎(2001),「文字式の指導に関する重要な諸問題」, 筑波数学教育研究, 第 20 号,pp.23~38

文部科学省(2005),『小学校算数・中学校数学・高等学校数学　指導資料　PISA2003(数学的リテラシー)及び TIMSS2003(算数・数学)結果の分析と指導改善の方向』

米山國蔵(1968),『数学の精神・思想・方法』, 東海大学出版社, pp.105~106