新潟大学教育学部数学教室,『数学教育研究』，第 45 巻，第 1 号，1–4，2010.

分数について乗法・除法と似た性質をもつ演算

新潟大学 教育学部　高 野 道 夫

分数の乗法 $\times$ と除法 $\div$ について

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \qquad \text{および} \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$$

は成り立つが，加法 $+$ と減法 $-$ について

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d} \qquad \text{および} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a - c}{b - d}$$

はどちらも一般には成り立たない．

それでは，等式

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a * c}{b * d} \quad \cdots\cdots\cdots \ (\#)$$

を一般的に成り立たせる二項演算 $*$ は乗法 $\times$ と除法 $\div$ に限られるのだろうか．その疑問に答え，下の定理を証明するのが本稿の目的である．——簡単のため，本稿の本論にあたる第 1–2 節では演算の適用範囲を正の数に限定し，第 3 節で負の数も考慮に入れた考察を手短に行う．

定理 1 正の実数に関する連続な二項演算 $*$ について等式 (#) がつねに成り立てば，ある (正，負または 0 の) 実数 s, t が存在して $x * y = x^s y^t$ となる．

この定理を以下の第 1–2 節で証明する．

定理とは逆に，$x * y = x^s y^t$ のとき

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right)^s \left(\frac{c}{d}\right)^t = \frac{a^s c^t}{b^s d^t} = \frac{a * c}{b * d}$$

より，確かに (#) が成り立つ．乗法 $\times$ と除法 $\div$ はそれぞれ (s, t) が $(1, 1)$ および $(1, -1)$ の場合である．

1　定理 1 の証明

本節と次節では演算の適用範囲を正の数に限定する．すなわち，これらの節で扱う二項演算 $*$ および一項演算 f について，任意の正の実数 x, y に対して演算の結果である $x * y$ および $f(x)$ がそれぞれ一つに決まっており，しかもそれらもまた正の実数であるとする．

連続な二項演算 $*$ が与えられ，これについて等式 (#) がつねに成り立つと仮定する．ある (正，負または 0 の) 実数 s, t が存在して $x * y = x^s y^t$ となることを示したい．

補題 1.1 (1) $(xy) * 1 = (x * 1)(y * 1)$.

(2) $1 * (xy) = (1 * x)(1 * y)$.

(3) $x * y = (x * 1)(1 * y)$.

証　明　(#) より特に

$$\frac{xy}{y} * \frac{1}{1} = \frac{(xy) * 1}{y * 1}, \qquad \frac{1}{1} * \frac{xy}{y} = \frac{1 * (xy)}{1 * y}, \qquad \frac{x}{1} * \frac{y}{y} = \frac{x * y}{1 * y}$$

であり，これらより直ちに得られる．□

注　補題 1.1 の (1), (2), (3) から逆に，(#) を導くことができる：

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} \overset{(3)}{=} \left(\frac{a}{b} * 1\right)\left(1 * \frac{c}{d}\right) \overset{(1),(2)}{=} \frac{a*1}{b*1} \cdot \frac{1*c}{1*d} = \frac{(a*1)(1*c)}{(b*1)(1*d)} \overset{(3)}{=} \frac{a*c}{b*d}\,. \qquad \square$$

補題 1.1 の (1) と (2) は，$x*1$ および $1*x$ を $f(x)$ と見れば，等式

$$f(xy) = f(x)f(y) \ \cdots\cdots\cdots\ (\diamond)$$

が成り立つことを示している．この等式を満たす連続な演算 f は，次の補題によって特徴付けられる．

補題 1.2 正の実数に関する連続な一項演算 f について等式 $(\diamond)$ がつねに成り立てば，ある (正，負または 0 の) 実数 s が存在して $f(x) = x^s$ となる．

逆に $f(x) = x^s$ のとき，$f(xy) = (xy)^s = x^s y^s = f(x)f(y)$ より，確かに $(\diamond)$ が成り立つ．

上の補題は，関数方程式 $F(x+y) = F(x) + F(y)$ の連続解は $F(x) = F(1)x$ にかぎるというコーシーの結果 (たとえば小松 [1, 定理 26.15]) に帰着させることにより示すこともできるが，次節に直接証明を与える．ここでは取りあえず補題 1.2 を認めて定理 1 を証明する．

定理 1 の証明　演算 $*$ の連続性と補題 1.1 の (1) および (2) より，一項演算 $x*1$ および $1*y$ がともに補題 1.2 の条件を満たすから，ある (正，負または 0 の) 実数 s, t が存在して $x*1 = x^s$，$1*y = y^t$ となる．よって，補題 1.1 の (3) より $x*y = x^s y^t$ を得る．　$\square$

2　補題 1.2 の証明

連続な一項演算 f が与えられ，これについて等式 $(\diamond)$ がつねに成り立つと仮定する．ある (正，負または 0 の) 実数 s が存在して $f(x) = x^s$ となることを証明したい．

まず，$(\diamond)$ を繰り返し適用することにより $f(x_1 x_2 \cdots x_n) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$，とくに

$$f(x^n) = \bigl\{f(x)\bigr\}^n \quad \cdots\cdots\cdots\ (\diamond)'$$

を得る．

実数 s について $f(x) = x^s$ が成り立つとすれば，とくに $f(2) = 2^s$ より $s = \log_2 f(2)$ である．この見通しのもとに

$$r = f(2), \qquad s = \log_2 r = \log_2 f(2)$$

とおく．r は正であり，s は $0 < r < 1$，$r = 1$ または $r > 1$ に応じてそれぞれ負，0 または正となる．

以下に，(正，負または 0 の) 任意の実数 a に対して $f(2^a) = r^a$ となることを，a が 0 および自然数の場合 (補題 2.1, 2.2)，(正，負または 0 の) 整数の場合 (補題 2.3)，(正，負または 0 の) 有理数の場合 (補題 2.4)，そして最後に (正，負または 0 の) 実数の場合 (補題 2.5) と，適用範囲を次々に広げていくことにより，証明する．

補題 2.1 $f(1) = 1$.

証　明　$(\diamond)$ または $(\diamond)'$ より $\bigl\{f(1)\bigr\}^2 = f(1)$．よって $f(1) = 1$.　$\square$

補題 2.2 任意の自然数 n に対し $f(2^n) = r^n$.

証　明　$(\diamond)'$ より $f(2^n) = \bigl\{f(2)\bigr\}^n = r^n$.　$\square$

補題 2.3 (正, 負または 0 の) 任意の整数 m に対し $f(2^m) = r^m$.

証　明　$m \geqq 0$ のときは補題 2.1 および 2.2 で証明済みであるから, $m < 0$ とする.

(◇) より $f(2^{|m|})f(2^m) = f(1)$. この式に補題 2.1, 2.2 を適用すると $r^{|m|}f(2^m) = 1$ を得る. よって $f(2^m) = r^{-|m|} = r^m$. □

補題 2.4 (正, 負または 0 の) 任意の有理数 q に対し $f(2^q) = r^q$.

証　明　$q = m/n$ (m は整数, n は自然数) とする.

(◇)′ より $f(2^m) = f\bigl((2^q)^n\bigr) = \bigl\{f(2^q)\bigr\}^n$. この式に補題 2.3 を適用すると $r^m = \bigl\{f(2^q)\bigr\}^n$ を得る. よって $f(2^q) = r^{m/n} = r^q$. □

補題 2.5 (正, 負または 0 の) 任意の実数 a に対し $f(2^a) = r^a$.

証　明　$\{q_n\}$ を a に収束する有理数列とする.

補題 2.4 より $f(2^{q_n}) = r^{q_n}$ であるから, f の連続性および x の関数 2^x, r^x の連続性より

$$f(2^a) = \lim_{n\to\infty} f(2^{q_n}) = \lim_{n\to\infty} r^{q_n} = r^a.$$ □

これで補題 1.2 を証明する準備が整った.

補題 1.2 の証明　$x = 2^{\log_2 x}$ であるから補題 2.5 より $f(x) = r^{\log_2 x}$ を得る. さらに $r = 2^s$ であるから $r^{\log_2 x} = (2^s)^{\log_2 x} = (2^{\log_2 x})^s = x^s$. よって $f(x) = x^s$. □

3　負の数も考慮に入れた場合

ここまで演算の適用範囲を正の実数に限定してきたが, この節では負の実数も考慮に入れ, 演算の適用範囲を 0 以外の実数とする. すなわち, 本節で扱う二項演算 $*$ および一項演算 f について, 正の実数のみでなく 0 以外の任意の実数 x, y に対して演算の結果である $x * y$ および $f(x)$ がそれぞれ一つに決まっており, しかもそれらもまた 0 以外の実数であるとする.

連続な一項演算 f が与えられ, これについて等式 (◇) がつねに成り立つとする. このとき, $x > 0$ ならば $f(x) = \bigl\{f(\sqrt{x})\bigr\}^2 > 0$ であるから正の数の範囲では前節の議論が通用して, $s = \log_2 f(2)$ とするとき $f(x) = x^s$ $(x > 0)$ となる. そして $x < 0$ のときは $f(x) = f(-1)f(|x|) = f(-1)|x|^s$ である. 一方, $\bigl\{f(-1)\bigr\}^2 = f(1) = 1$ より $f(-1) = 1$ または -1 である.

したがって, $f(-1) = 1$ または -1 に応じ, 補題 1.2 に対応する命題は下の補題 3.1 のようになる. ただし, 0 以外の実数 x に対して “x の符号”$\mathrm{sgn}(x)$ を, x の正・負に応じてそれぞれ $\mathrm{sgn}(x) = 1$ または -1 と定義する. 明らかに $x = \mathrm{sgn}(x)|x|$, また $\mathrm{sgn}(xy) = \mathrm{sgn}(x/y) = \mathrm{sgn}(x)\mathrm{sgn}(y)$ である.

補題 3.1 0 以外の実数に関する連続な一項演算 f について等式 (◇) がつねに成り立てば, ある (正, 負または 0 の) 実数 s が存在して $f(x) = |x|^s$ または $f(x) = \mathrm{sgn}(x)|x|^s$ となる. □

逆に, $f(x) = |x|^s$ であっても $f(x) = \mathrm{sgn}(x)|x|^s$ であっても, (◇) は確かに成り立つ.

また, x の正・負にかかわらず, s が “偶数/奇数” の形の有理数のときは $x^s = |x|^s$, “奇数/奇数” の形の有理数のときは $x^s = \mathrm{sgn}(x)|x|^s$ である. よって, s が奇数を分母とする分数で表される有理数——とくに整数——のとき, $f(x) = x^s$ は (◇) を満たす.

二項演算 $*$ について等式 (#) がつねに成り立てば，補題 1.1 はそのまま成り立つ．これと補題 3.1 より，定理 1 に対応する命題は次の定理 2 のようになる．

定理 2 0 以外の実数に関する連続な二項演算 $*$ について等式 (#) がつねに成り立てば，ある (正，負または 0 の) 実数 s, t が存在して次の (i)–(iv) のいずれかとなる：

(i) $x * y = |x|^s|y|^t$，(ii) $x * y = \mathrm{sgn}(x)|x|^s|y|^t$，(iii) $x * y = \mathrm{sgn}(y)|x|^s|y|^t$，(iv) $x * y = \mathrm{sgn}(xy)|x|^s|y|^t$.

□

逆に，$x * y$ が (i)–(iv) のどのタイプであっても，(#) は確かに成り立つ．たとえば (iv) のタイプのとき

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \mathrm{sgn}\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)\left|\frac{a}{b}\right|^s\left|\frac{c}{d}\right|^t = \frac{\mathrm{sgn}(ac)|a|^s|c|^t}{\mathrm{sgn}(bd)|b|^s|d|^t} = \frac{a * c}{b * d}.$$

乗法 $\times$ と除法 $\div$ はそれぞれ (s, t) が $(1, 1)$ および $(1, -1)$ の場合のタイプ (iv) である．すなわち

$$x \times y = \mathrm{sgn}(xy)|xy| = \mathrm{sgn}(xy)|x|^1|y|^1, \qquad x \div y = \mathrm{sgn}(x/y)|x/y| = \mathrm{sgn}(xy)|x|^1|y|^{-1}.$$

また，s, t がどちらも奇数を分母にもつ分数で表される有理数——とくに整数——のとき，$x * y = x^s y^t$ は (#) を満たす.

参考文献

[1] 小松勇作，解析概論 [I] (数学双書 1)，広川書店，1964.