新潟大学教育学部数学教室，『数学教育研究』，第 47 巻，第 1 号，206-242，2012.

算数と数学の接続に関する研究

―関数の指導に焦点を当てて―

和田・阿部ゼミナール

石田　勇弥　小野寺　悠　塩浦　康平

永井　努　　山田　梨恵　吉田　飛翔

第 1 章．はじめに

関数には実世界や数学の多くの場面を記述する点が多く存在し，関数観念は事象の考察や代数・幾何等の諸概念，諸現象と大きく関わっている。小倉(1973)は関数観念こそ数学教育の核心であり，関数の関係を徹底せしめてこそ，数学教育は初めて有意義であると述べている。

現行の指導において，小学校においては「関数の考えを生かしていく」(小学校学習指導要領解説，p50)，中学校においては「関数関係についての理解を深める」(中学校学習指導要領解説，p73)などの記述が見られ，関数観念を育成しようとする目標が小・中を通じて見られる。その目標の下，関数領域への足がかりとして，小学 5 年から中学 1 年にかけて繰り返し「比例」の単元を学習する。「比例」という単元は子どもたちが関数領域に本格的に足を踏みいれる重要な単元であると言える。繰り返し同じ内容を学習することで，子どもたちは本当に関数に対する理解を深めているのか。また小学校から中学校にかけての接続は円滑に行われているのだろうか。こういった疑問が私たちの中で生じた。

そういった課題意識の下，本稿においてはまず，「関数」と「関数の考え」の比較から，現状の関数指導における目標を設定する。次に，その目標を観点として，比例の単元における小学校と中学校の現状の指導を概観する。さらに，その指導について比較，分析を加えることで，小学校から中学校への接続に対する子どもたちの困難性を礒田の思考水準論(1985)と照らし合わせることで明らかにする。そして，その接続の困難を引き起こしている箇所を断定するために，より具体的な指導に焦点化していく。最後に，その焦点化した箇所を克服するための指導を提案することで，小・中間の接続をスムーズに行い，かつ関数観念の育成を目指す指導への示唆を述べる。

第２章　関数と関数の考えについて

第１節　関数について

先行研究を見ると，関数の定義は論者の考え方や，その時代によって様々であるが，その中でも一般的な定義として國本(2000)の定義を挙げる。

２つの集合 A，B があって，A の各要素 a に対して，B のただ１つの要素 b が対応するとき，この対応(一意対応)を A から B への関数といい， f ：A→B と表す

このことから関数とは「集合間の一意対応」であると定義づけられる。しかし，≪この定義は抽象的で静的な定義であるため，いろいろな事象から変化の様相を捉えたり，問題解決に役立てることがむずかしい≫(國本，2000)とあるように，数学教育においては現象から問題解決に役立てる際に困難を生むと考えられる。そこで現行の指導要領においては，「関数の考え」という言葉を用いて関数領域の学習の目標を掲げている。そこでまず「関数」と「関数の考え」の違いについて明らかにする必要があると考えた。

第２節　関数の考えについて

≪算数・数学教育では，関数の内容的側面(1 次関数や 2 次関数などの定義や性質)を扱うばかりでなく，方法的側面である「関数の見方・考え方」の指導も重視している。≫(國本,2000)とあるように，関数の考えとは関数の方法的側面を重視しているといえる。つまり関数の考えは“関数を用いる”ことを目的とした考え方である。

國本は，関数の考えを次の様々な考えを総合した見方・考え方だとしている。

〈表．１　関数の考え　(國本，2000)〉

(1)集合の意識を持つ：集合の考え
(2)2 つの数量の依存関係に着目する：関係づける考え
(3)数量を変化させる：変数の考え
(4)決めれば決まる：対応の考え
(5)対応の決まりや変化の特徴を見つける：帰納的な考え，一般化の考え
(6)対応の決まりや変化の特徴を利用する：応用の考え

これらの考えを用いて現実を捉えていくことが,関数指導に求められている。このとき,現実を全体としてみていなくても(3)変数の考えや(4)対応の考えなどを使うことで，断片的に現実を捉えることは可能である。しかし現実を全体としてまとめて捉えることができるようになると，より深く現実を捉えることができると考える。

ここで三輪(1985)は≪関数というときは，1つ1つの対応のことでないのは，関数の見方が事象の個々の切断面，数量の変動の個々の場面を考えるのでなく，事象を1つの系とみる，あるいは数量の変動を全体としてとらえるということを意味しているのである≫と述べ，これを系としての見方としている。このことからも全体として捉えることが，現象を深く理解することにつながると言える。ここで，系としての見方は関数を方法として現実を捉えるという点から,関数の考えの1つと解釈できる。つまり,関数の考えの中でも,全体としてみるという点で質の高い見方・考え方が系としての見方である。

第3節　系としての見方について

系としての見方というのは，数量の変動を全体として捉えることである。真野(2010)は系としての見方を≪集合Sのすべての要素についての「対応の仕方」を問題にしている≫(真野，2010)と換言している。つまり「数量の変動を全体として捉える」ためには，個々の数値だけ，つまり事象の断面のみに着目していてはいけない。数量を集合として捉え，その対応を意識することで初めて，全体を捉える事ができ，事象を1つの系として見ることができる。

ここで集合の考えについて中島(1991)は≪いわゆる集合づくりを通して特定の概念を作るということは，その概念を個々の具体的事物から抽象するということにほかならないともいえる≫と述べている。つまり，集合の考えは具体的事物から抽象して考えるために，数学の世界に依存した考えであると言える。したがって集合の考えを含む系としての見方というのもまた，現実事象から離れた見方であるといえる。しかし，２・２でも述べた通り,系としての見方には現実場面を理解するという目的も含蓄されているため,「数学を深めること」と「現実を理解すること」の両方を包含する見方であると解釈できる。

このことから,系としての見方を目標として指導を考えるにあたって,現実場面から徐々に数学の世界に乗せることを必要としつつも，一方で，完全に現実を捨象してはいけないと考える。

この系という見方を，私たちは中学校の関数指導の目標とし，小学校と中学校の指導の接続について考えていく。そのため数学の世界への移行をどのように行っていくかが問題となる。次章ではこの章でまとめた関数の考えの育成のために現状でどのような指導が行われているのかを考察していく。

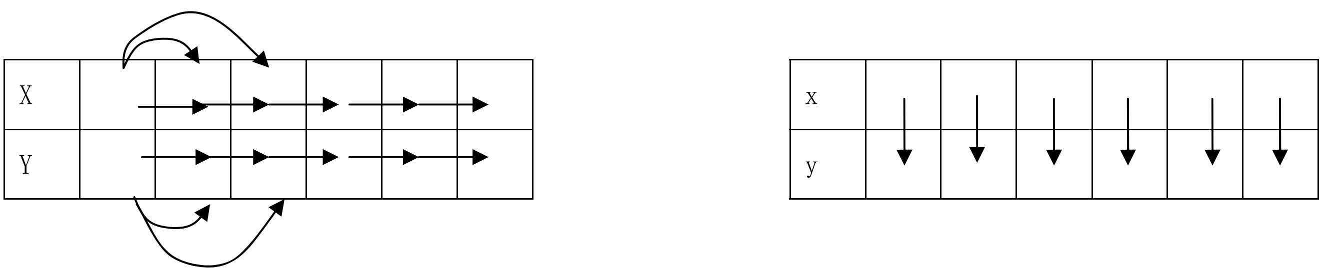
第 3 章．現状における指導の概観と接続における課題

第 1 節　小学校における指導

この節では学習指導要領や検定教科書を分析し，小学校における指導を概観していく。

> 関数の考えとは，数量や図形において取り扱う際に，それらの変化や対応の規則性に着目して問題を解決していく考えである。特に，伴って変わる二つの数量の関係を考察し，特徴や傾向を表したり読み取ったりできるようにすることが大切である。
>
> （小学校学習指導要領　p47）

小学校算数においては,「数量関係」という領域において比例の単元を学習する。≪関数の概念は，よく,“変化と対応”であるといわれている。≫(三輪，1974)とあるように，関数は 2 つの性質を特徴として持つ。“変化”とは「変われば変わる」,「増えれば増える」といったような，表でいうところの横の見方を意味する。一方,“対応”とは「決まれば決まる」といったような，表でいうところの縦の見方を意味する。



〈図．1　変化と対応の特徴（左：変化　右：対応)〉

したがって，小学校段階においてはこの 2 つの性質を使って，数量の関係を明らかにしようという目標が見てとれる。

先行研究において礒田(1999)は，van Hiele 夫妻の思考水準論を関数領域に当てはめ，水準設定を行っている。

〈表．２　関数の思考水準〉　　　礒田(1999)

第 0 水準	事象(対象)を，数量(方法)で考察できる。
第 1 水準	数量(対象)を，関係(方法)で考察できる。
第 2 水準	関係(対象)を，関数(方法)で考察できる。
第 3 水準	関数(対象)を，導関数・原始関数(方法)で考察できる。

先に述べた小学校における目標と第 1 水準の目標は,数量を関係(ここでは比例関係と解釈する)で考察するという点で整合すると考えられる。礒田(1999)も小学校段階を第 1 水準に当てはめて考えることができるとし，≪小学校では現象，具体物を語る言葉として算数を学びます。(第 1 水準へ)≫(礒田，1999)と述べている。つまり，第 1 水準は事象の問題解決を目的とした，極めて現実場面に沿った段階であると言える。

こういった段階において，現状ではどのような指導が行われているのかを考察する。

> 第 6 学年では，これまでに指導してきた数量の関係について整理する立場から考察し，(ア) のような特徴をもった数量の関係として比例をとらえられるようにする。その際，日常の事象における二つの伴って変わる数量の関係を表などに表し，<u>変化の特徴を調べることを通して</u>，比例関係を見出すような活動を取り入れることが大切である。
>
> (小学校学習指導要領　p177)

数量の関係から変化の特徴を調べることで比例関係を見出す活動の重要性を挙げている。

先にも述べたが，小学校段階は現実の場面に依存しているため，現実から見出しやすい「変化」の考察を優先していると解釈できる。検定教科書においては，比例について次のような定義をして指導が展開されている。

ともなって変わる2つの量xとyがあって，xの値が2倍，3倍，…になると，yの値も2倍，3倍，…になるとき，yはxに比例するといいます。(学校図書　小6下　p41)

この定義は，変化の性質を強調したものである。定義は子どもたちにとっての比例の判断基準になると同時に，授業の中心的な考えとなるものなので，小学校の指導自体が変化の性質が中心になっていると解釈できる。その変化の性質を子どもたちは数表から見出すわけであるが，≪関数関係を表すしかたとして，数表は最も基本的なものといえる。それは，対応や変化のようすが具体的な数値によって示されるからである。≫(三輪，1974)とあるように，式やグラフと違い，現実事象から変化の性質を見出しやすい表現であるからこそ小学校では主に数表が用いられていると考える。したがって，数表が指導の中心的な手段となっていることからも，小学校が変化の性質を中心に扱っていると考える。

以上より，小学校段階においては数量関係を変化の性質を中心として見ていくという学習内容が見て取れる。

第2節　中学校における指導

次に中学校の指導についても概観していく。

自然現象や社会現象などの考察においては，考察の対象とする事象の中にある対応関係や依存，因果などの関係に着目して，それらの諸関係を的確で簡潔な形で把握し，表現することが有効である。中学校数学科においても，いろいろな事象の中に潜む関係や法則を数理的にとらえ，数学的に考察し処理できるようにすることをねらいとする。 (中学校学習指導要領　p44)

この記述は，関数の考えというのが現象の中にある関係や法則に焦点を当て，数理的に考察することで，その事象をより深く理解することだと解釈できる。これは2章で述べた「系としての見方」と同様な考え方であり，現状における指導でも中学校段階においては系としての見方を目標としていると言える。系としての見方というのは，現実事象を深く理解するという目標の下，数学の世界に踏み込んで考察することである。ゆえに，中学校

1 年の比例において，小学校と同様に現実の世界に依存する内容ではなく，数学の世界に踏み込んだ内容を学習する必要がある。

> 中学校数学科において第 1 学年では，これらの学習の上に立って，関数関係についての内容を一層豊かにし，具体的な事象の中から伴って変わる二つの数量を取り出して，<u>その変化や対応の仕方に着目し</u>，関数関係の意味を理解できるようにする。
>
> （中学校学習指導要領　p73）

したがって，比例の性質(変化と対応の性質)自体に言及して考察していくことが目標として挙げられる。

ここで先と同様に礒田(1999)の思考水準との整合をはかる。

〈表．3　礒田の思考水準〉　　礒田(1999)

第 0 水準	事象(対象)を数量(方法)で考察できる。
第 1 水準	数量(対象)を関係(方法)で考察できる。
第 2 水準	関係(対象)を，関数(方法)で考察できる。
第 3 水準	関数(対象)を，導関数・原始関数(方法)で考察できる。

第 2 水準は関係を対象として，関数で考察していく段階であるため，現実事象とは離れた考察となる。これは先に述べた，性質を対象とするという学習内容と一致する。礒田(1999)も≪中学校ではその際学んだ比例関係を関数として表します(第 2 水準へ)≫と述べている。したがって現状における中学校の目標と，第 2 水準は整合すると考えられる。

その目標の下，どのような指導が展開されているのか考察する。検定教科書においては，比例を次のように定義して，指導を展開している。

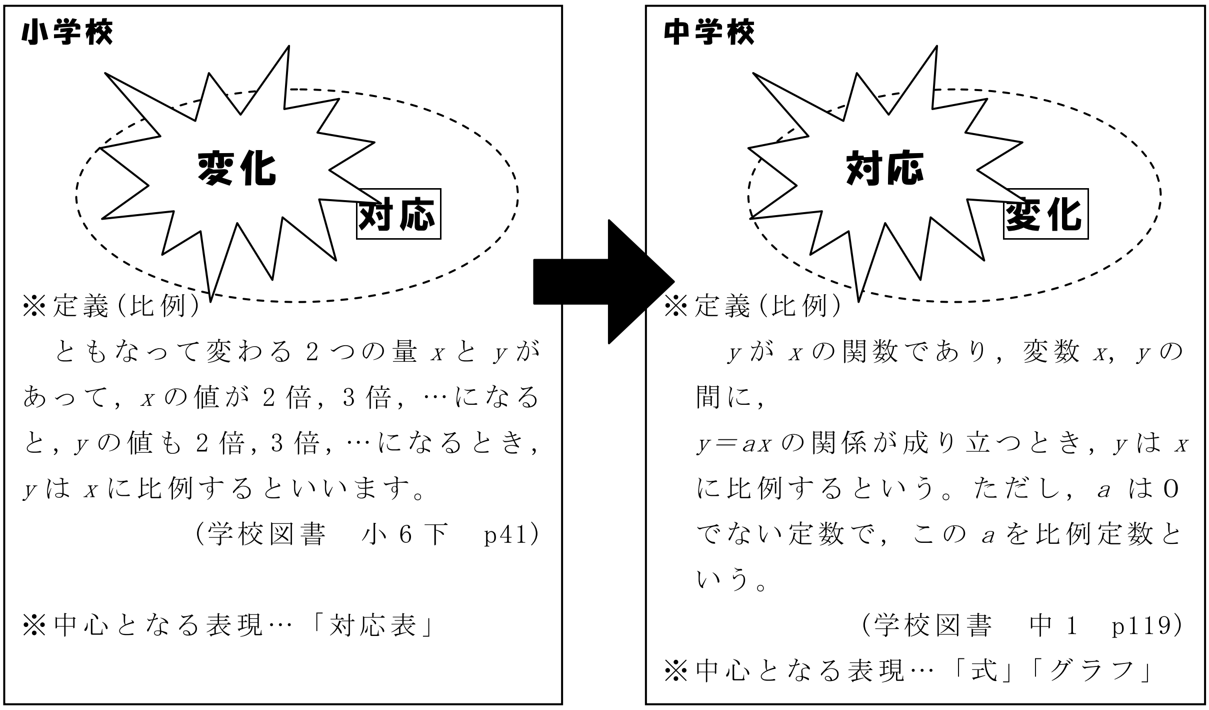
y が x の関数であり，変数 x，y の間に，　y＝ax　の関係が成り立つとき，y は x に比例するという。ただし，a は 0 でない定数で，この a を比例定数という。(学校図書　中 1 p119)

このように式で定義して指導を進めていく。式による表現は対応のしかた(規則)を一般的に表そうとするものである(三輪，1974)から，定義が対応を強調したものとなっていると解釈できる。先にも述べたことだが，系としての見方とは≪集合Sのすべての要素についての「対応の仕方」を問題にしている≫(真野，2010)と換言できるため，中学校において対応を学習することが必要となる。

したがって，中学校段階においては，現実場面から離れ，系としての見方を獲得することを目標とするために，「対応」を強調した指導が展開されていると言える。

第3節　接続に関する課題について

第3章1節，2節で述べたことを総括すると，どちらも変化と対応の性質を扱って指導を展開してはいるが,小学校では変化,中学校では対応の性質が学習の中心となっている。換言すると小学校では対応，中学校では変化が背景に隠れた形になっていると言える。

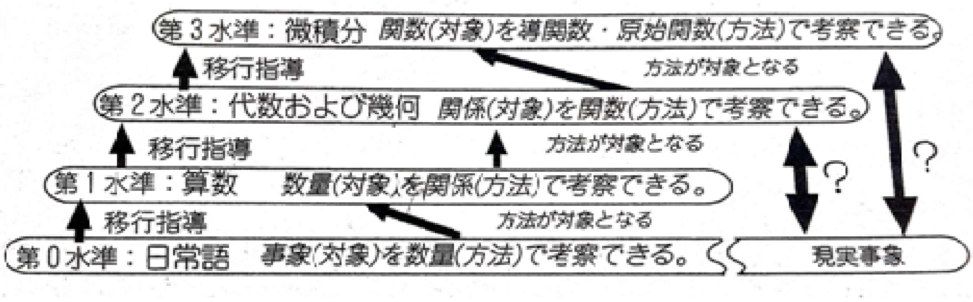


〈図．２　比例指導における小学校と中学校の指導の概観〉

こういった学習内容は，小学校・中学校それぞれの目標からすると至極当然な学習内容であると言える。

１．　現状の指導と思考水準論との関係

小学校と中学校における目標をそれぞれ思考水準の第 1，第 2 水準に当てはめて解釈した。思考水準論においては，水準移行の際に「方法」を「対象」として考察していくことで困難を生むことが説明されている（礒田，1985)。また礒田（1985）は，≪関数を学び始める（第 2 水準）と比例（第 1 水準）を具体事象（第 0 水準）で一時活用できなくなり，後になって改善されることを示したこの結果は，第 2 水準に向けての関数学習が，それ以前に学んだ具体を語る算数の考えと一時的に不協和を起こしていることを示唆しています。≫(礒田，1999)と述べている。つまり，第 1 水準と第 2 水準では水準間に飛躍があり，子どもたちにとって困難を生むと考えられる。



〈図．３　関数の水準〉　　　　　　　　礒田(1999)

図．３でいう第 1 水準から，第 2 水準への移行指導が現状でいうと比例の指導に当たると考えられるが，具体的にどのような水準間の飛躍があるのかを考察する。

礒田(1985)は思考水準論における「関係」について,「変化と対応の性質」と置き換えている。したがって，第 1 から第 2 水準への移行の際には，方法として捉えていた「変化や対応の性質」を，対象として捉えなおさなければいけないということである。

ここで現状と照らし合わせて考察すると，現状の比例学習においては，小学校で変化，中学校で対応を中心とした学習が展開されている。したがって，第 1 水準と第 2 水準間における「関係」には質の違いが生じていると考えられる。この質の違いこそが，水準間の飛躍を生み出している。

以上から第 1 から第 2 への水準移行は，小学校と中学校の接続として置き換えることができ，それぞれにおける学習活動自体が，子どもたちの思考の飛躍を生み出すものとなっ

ている。そういった理由から小学校と中学校の比例指導における接続には課題が存在する。

２．　接続に対する課題を克服するには

先に述べたように，接続の課題を生み出しているのは，「関係」の質の違いであり，それは現状において「変化」と「対応」のどちらの性質を中心とするかという相違によって顕在化されている。つまり，同じ比例の学習でも，指導の中心が変わってしまうため，接続という点で断続的なものになっているということである。

ここで三輪は変化と対応の性質について≪変化と対応というのは，おたがいがおたがいを予想していると考えられ，一つのことがらの分かつべからざる二つの側面といえるでしょう。≫(三輪，1985)と説明している。つまり，変化と対応の性質は表裏一体のものである。この表裏一体性を感得させながら，指導を展開することで，変化中心から対応中心の指導へとうまく接続できるのではないだろうか。変化の性質から対応の性質を見出すような，連続性のある指導を行うことで，小・中の接続がなだらかになり，子どもたちの思考の飛躍が軽減すると考える。そういったことに留意して，4 章，5 章においてそれぞれ，小学校と中学校におけるアプローチを提案していく。

第４章．小学校における課題とアプローチ

第１節　現状の指導における課題の焦点化

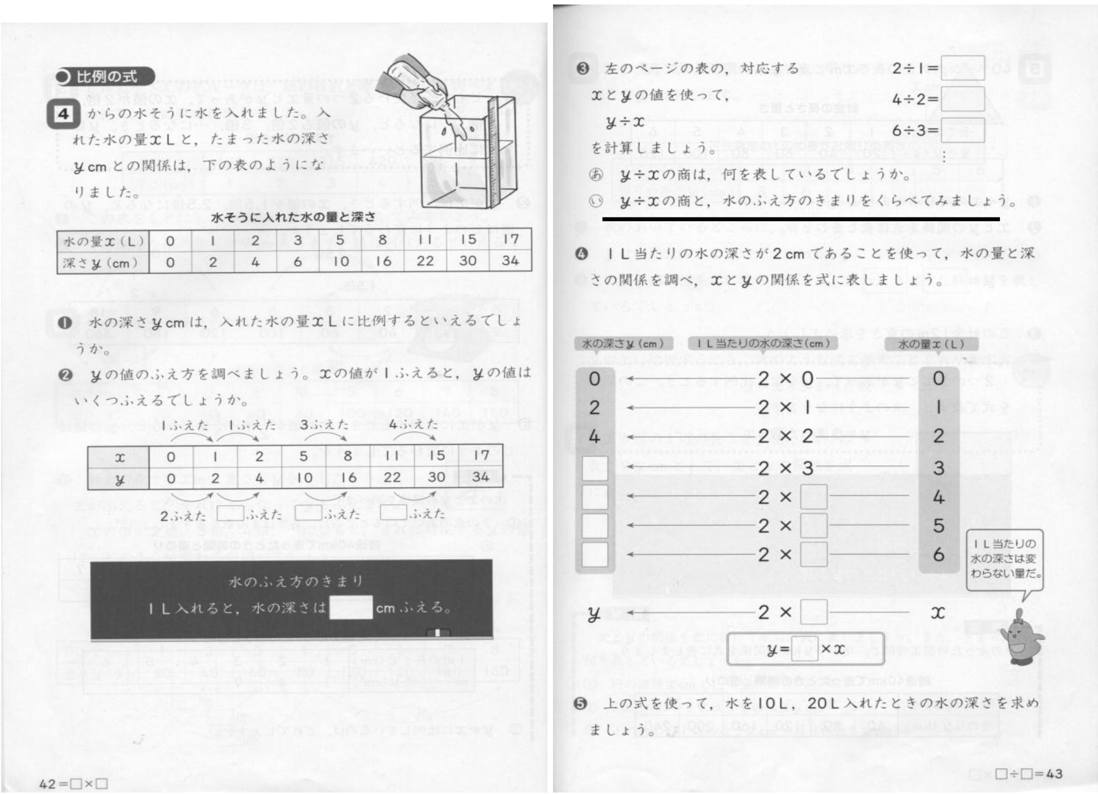
3 章では，小学校段階で，第 1 水準の活動を充実させる，つまり背景に隠れた対応を変化から見出すことで，第 2 水準への移行に効果的に働くという可能性について述べた。これを受け，現状の具体的な指導に焦点化することで接続に関する課題をより明確化していく。

〈表．４　現状の単元構成(学校図書)〉

	時	項目	学習内容
比例	1	実験	・実際に重さを量って表にまとめ，枚数を重さから求める方法を考える。
	2・3	比例	・数直線，表，比を用いて求め方を説明する。 ・表を見て，変化の特徴を用いて紙の枚数を求める。 ・変化の特徴で比例を定義する。
	4・5・6	比例の式	・表から，増え方のきまりを「x が 1 増えた時，y は□ずつ増える」といったように見出す。 ・y÷x の値を計算し，増え方のきまりと比較する。 ・y＝□×x を確認し，様々な場合の数値を調べる。 ・比例する時，「y＝決まった数×x」が成り立つことを特徴として位置付ける。
	7・8	比例のグラフ	・表を見て，座標上に点を打つ。 ・小数点の場合にも注目して点を打つ。 ・傾きの異なるグラフを観察し，様々な特徴をみる。
	9	比例性質を使って	・様々な事象の関係を表やグラフにあらわす。 ・地球環境の未来を予測する問題を解決する。

3 章において，小学校では比例を学習する際に，変化の性質を中心的に扱って指導がされていることを説明した。しかし，現状の指導でも対応を見出す場面が存在する。それは現行の単元構成における表 3 の　　の部分である。

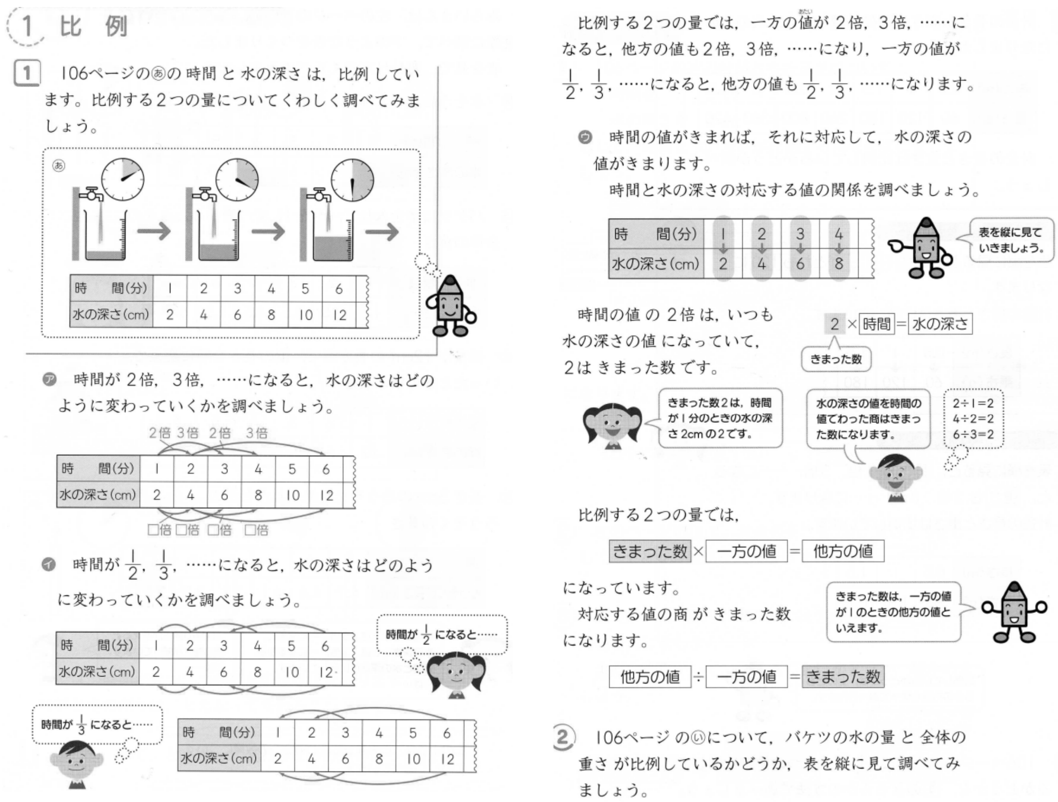
では，　　において，具体的にどのような指導が展開されているのか，学校図書と啓林館の 2 社の教科書を用いて考察していく。



〈図． 3　学校図書「比例 - 比例の式 - p42，p43」〉

図． 3 を見ると，水の量と深さの問題において，「x(水の量)が 1ℓ増えたとき，y(水の深さ)は何cm増えるでしょう。」(p. 42)という考察の後に，「y÷x」をすることで，「増え方のきまりと y÷x が一致する」ことを強調している。この実践は，増え方という変化に着目した考察をした後に，「y÷x」という対応の考察をすることで，対応の性質を理解させるものと解釈できる。しかし，この実践についての問題点は，対応を見る上で児童の思考の流れとは関係なく「y÷x」によって，故意にその見方を促し，その後，「y÷x の商と，水のふえ方のきまりをくらべてみましょう。」(p. 43)という質問によって，変化の性質と対応の性質を結びつけようとする意図が感じられるが，「y÷x」という計算が教師側から提示されているため，どうしても強引に対応を見せる形になってしまっている。

続いて啓林館の検定教科書を用いて考察していく。(図． 4 参照)



〈図．４　啓林館「比例・p108，p109」〉

まずは時間と水の深さの事象についての表を見て，変化の特徴を見ることから始まる。そのあとに「時間と水の深さの対応する値の関係を調べましょう。」という問いから，表の縦の見方を促している。「他方の値」「一方の値」「決まった数」のような言葉の式を用いて式のような形を導いており，後の比例の式の単元では数量を表す言葉を用いて式をたて，文字での立式につなげている。決まった数になることを強調し，比例の特徴の一つとして位置付けているが，学校図書の場合と同様に，表を縦に見て対応に注目する場面では，子どもの思考の流れとは関係なく，指導者側からその見方を提示しており，強引に対応の見方を促す形になってしまっている。

以上のことからどちらの教科書からも強引に対応を見せる形になってしまっており，この強引な展開が子どもたちの困難を生み出している。子ども自らが変化の見方から対応の見方へと自然に移行できるような指導をするべきである。

第２節　課題に対するアプローチ

４章１節で述べた通り，現状では変化の考察を通して自然に対応に目を向ける場面が設定されておらず，教師主導によって突然対応に注目させられているような指導が行われていることを指摘した。この問題点へのアプローチとして，私たちは「変動から対応を見出す」ことが有効であると考える。この考えのもと，「変動」を子どもたちに認識させることで，対応に自然に目がいくような指導展開を提案していく。そこでまず，「変化」と「変動」の考え方の違いについて述べ，次に「対応」を見出すことへの関係について考察する。そのうえで「変動」がどのように指導上具体的に現れるのかについて述べていく。

１．　「変化」と「変動」の違いについて

「変化」と「変動」の意味については以下のとおりである。

変化：ある物事がそれまでとは違う状態・性質になること。変わること。 **変動：物事が変わり動くこと。　　　　　　　　　　　　（大辞林より）**

これを関数領域に当てはめて解釈すると，「変化」の考察はある数 a からある数 b への断片的な変化を捉えることであり，a と b の間の数値の考察には及んでいないと言える。一方で「変動」は動的に変化させることであり，a から b までの間の考察や，b 以降の数値の考察まで及ぶ。つまり，変動の考察はその変わりゆく事象の断片だけでなく，過程にも注目した全体に渡った考察であると解釈でき，動的な変化であると捉えることができる。

２．　変動から対応を見出すことについて

能田(1991)は，≪動的に変化させることによって，変わるものと変わらないものとが区別でき，それらを比較することによって，考察の対象に内在する本質的な性質，つまり，きまりや法則等が明確になってくる。≫と述べている。つまり，動的に変化させて考察することで，事象の中にあるきまり，規則に目を向けやすくなるということである。これは，先に述べた変化の考察から対応を見出すとことと解釈できる。

以上を具体的な指導のレベルで考える。小学校は現象に依存して考察を進める段階なの

で，現象との関連を強く持たせることで，動的な変化つまり「変動」を捉えさせたい。例としては，実際の現象や映像等の観察から変化の考察を進める方法が挙げられる。

この現象に依存した状態で変化の考察を進めていく際に，比例・反比例の単元では，数表やグラフ等の数学的な表現にかき出すことでその性質を明らかにしていく活動が展開されている。つまり，現象の観察から感覚的に変動を認識することに加えて，数学的な表現においても変動を認識することが必要である。そのために，現象の変化を記述していく過程を持たせたり，小数を用いたりして，表やグラフなどの表現を連続的に考察することが必要である。このように変動とは，事象との関連をもったうえで連続的に変化の考察を深めていくことであると指導の上では位置づけることができる。

先に変動の認識によって対応が見やすくなることについて述べたが，これについても指導のレベルで再考すると，変化の考察では解決することが困難な課題を提示することで，対応の仕組みに目を向けさせるような指導が考えられる。つまり，現象にあるきまりを見出すような課題を提示し，始めは変化の考察から増え方のきまりに着目させる。そこで現象との関連から連続的に考察する必要性を持たせ，増え方のきまりを見いだすことに困難性を与えることで対応のきまりに目を向けさせる指導である。増え方のきまりは，「x が 1 増えた時の」といった条件が子どもたちの中にも暗黙的に位置づいている。しかし小数によって考察した時，この暗黙的に捉えていた条件が表に出てくることとなり，2 量の関係を表すには対応のしくみが有効であることに気づくことにつながると考える。

３． 具体的な指導

〈表．６　提案する単元構成(小学校)〉

	時	項目	学習内容
比例	1	実験	・実際に重さを量って表にまとめ，枚数を重さから求める方法を考える。
	2・3	比例	・数直線，表，比を用いて求め方を説明する。 ・表を見て，変化の特徴を用いて紙の枚数を求める。 ・変化の特徴で比例を定義する。
	4・5	比例の式	・現実の問題解決場面から数値と数値の間を考察する。 ・変化の見方で解決しづらい課題を提示し，対応の見方を促す。 ・4 時の活動を立式することを通してまとめる。
	6・7	比例のグラフ	・表を見て，座標上に点を打つ。 ・小数点の場合にも注目して点を打つ。 ・傾きの異なるグラフを観察し，様々な特徴をみる。
	8	比例性質を使って	・様々な事象の関係を表やグラフにあらわす。 ・地球環境の未来を予測する問題を解決する。

先に述べた問題点を克服するため，　　の部分の指導を提案し算数・数学の接続を視野に入れた指導への示唆としたい。以下に提案する指導を指導案として示す。

（１）4/8 時間目

ねらい：ジューサーの調子を調べるために表に書き出し連続的に考察する活動を通して，増え方のきまりや対応のきまりに気づくことができる。

学習活動・内容	教師の働きかけと児童の反応	指導上の留意点(★)と評価(☆)
導入 変動を捉えやすくするため，実際の映像を見せる。 5 分	T:りんごを絞ってりんごジュースを作ろう。 （T:ジュースが出なくなる様子を見ることができる映像を見せる。) C:ジューサーが壊れてしまったのかな。 C:ずっと使ってると果肉が詰まったから出なくなったんだよ。	
展開 1 表に書き出	**【課題】** **どのくらいのリンゴを絞ると果肉が詰まってしまうのでしょうか？** **果肉が詰まってしまうところと判断した理由をワークシートに書いてみ**	

<table>
<tr>
<td>す活動をすることで，変化の特徴に注目させる。

10 分（15 分）</td>
<td>T: どうすれば調べられますか？
C:もう一度映像を見よう。
C:表にすると変わり方が見やすかったよね。
<table>
<tr><td>個</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>ml</td><td>0</td><td>40</td><td>80</td><td>120</td><td>160</td><td>190</td><td>210</td><td>200</td></tr>
</table>
T:どこで詰まったでしょうか。
C:表では 5 個目入れた時に詰まっていると思う。

T:理由は何でしょうか。
C:4 個まではジュースが 40ml ずつ増えていたのに，5 個目から少しずつしか増えなくなっているから。
C:できた表を見ると比例していて，5 個目の時は比例の特徴(2 倍すれば 2 倍)が成り立たなくなるから（既習）</td>
<td>★プリントを配布
（個数は示されているが ml は示されていない。）

☆表を見て,詰まったところを判断し,変化の特徴からその理由を説明できる。</td>
</tr>
<tr>
<td>展開 2
連続的な見方を促すため，発問①を問いかける。

対応の見方を促すために，変化では見えにくい，小数の</td>
<td>≪発問①≫
5 個目を入れた瞬間に詰まってしまうということでいいかな？
C:5 個目のはじめのほうはしっかりジュースができていたよ。5 個目の途中から少しずつしかできなくなってしまった。
<table>
<tr><td>個</td><td>4</td><td>4.1</td><td>4.2</td><td>4.3</td><td>4.4</td><td>4.5</td><td>4.6</td><td>4.7</td><td>4.8</td><td>4.9</td></tr>
<tr><td>ml</td><td>160</td><td>164</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
C:4 個と 5 個の間を詳しく見なければいけないね
C:小数を使うことはできないかな？
T:個数は小数にしてもいいのかな？
C:実際にはありえないかもしれないけど，調べる時には考え方として使ってもいいと思う。
T:では，小数の値もみんなでみていきましょう。
≪発問②≫
この時点で詰まっているでしょうか？いないでしょうか。
C:4ml だから大丈夫。
C:40ml ずつだったのに 4ml になってるよ？どうして大丈夫なの？</td>
<td>☆実際の映像を想起し,数値と数値の間に注目できる。

★前時の表の間に示す。
★4.1 個時のみのジュース
と示</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>部分に着目させる。

12 分（27 分）</td><td>C:1 個で 40ml だから，0.1 個の時は 4ml になると思う。
C:なるほど</td><td>☆40 ずつ増えるという判断基準を用いて，詰まっているかどうか判断できる。</td></tr>
<tr><td>展開 3
1 あたりの量を求めさせることで，対応の見方(y÷x)を促す。

12 分（39 分）</td><td>T:1 個で 40ml が分かれば詰まっているかいないかは調べることができるね。

≪発問③≫
表から「1 個で 40ml」を求める方法を考えよう。

C:上も下も×10 をして，1 個増えた時を求める。
C: 1 個当たりを求めればいいから，(ジュースの量）÷（個数）をすればいい。</td><td>★個人やグループで考える。

☆1 個あたりの量を表の縦の見方で求めることができる。</td></tr>
<tr><td>まとめ
対応の見方で判断させることで，対応の見方の有用性を感得させる。

6 分(45 分)</td><td>T:これらの方法で調べられそうだ。続きも見てみましょう。

<table><tr><td>個</td><td>4.1</td><td>4.2</td><td>4.3</td><td>4.4</td><td>4.5</td><td>4.6</td><td>4.7</td><td>4.8</td><td>4.9</td></tr><tr><td>ml</td><td>164</td><td>168</td><td>172</td><td>176</td><td>180</td><td>183</td><td>186</td><td>188</td><td>189</td></tr></table>
C:0.1 だから 10 倍して，1 個の時のジュースの量を確かめられたよ。
C:（ジュースの量）÷（個数）を計算して，1 個の時のジュースの量を確かめられたよ
C:だから，4.5 個までは詰まっていなくて，4.6 個の時から詰まっていることが分かります。</td><td>★4.2 以降の数値も示す。
★順番に表の値を見て，みつけた方法を使って全体で確かめていく。

☆対応の見方で詰まっているかどうかを判断できる。</td></tr>
</table>

（２）5/8 時間目

ねらい：様々な事象で式を導きだし，それを比較することを通して，比例の式として一般化する。

学習活動・内容	教師の働きかけと児童の反応	指導上の留意点(★)と評価(☆)
導入 前時の復習 5 分	T:前回は「1 個の時のジュースの量」を求めることで，どこで詰まるのかを確認していきました。 C:4.5 個までは大丈夫で，4.6 個から詰まっていることが分かったんだよね。 C:1 個あたりのジュースの量を求めるために，(ジュースの量) ÷ (個数) をしたよ。	★全体で確認する。
展開 1 様々なリンゴの個数を選択し，出来るジュースの量を求めさせることで，対応の見方がどこでも成り立つことに気付かせる。	**【課題①】** **ジューサーを使ってリンゴジュースをつくりましょう。** **いくつのリンゴを使って，リンゴジュースをつくりますか？** C:私はリンゴ 6 個を使ってジュースを作ろうかな。 C:僕はたくさん飲みたいからリンゴを 15 個使って作りたいな。 C:私はそんなにいらないから 2 個だけ使ってジュースを作ろう。 C:4.5 個にしてみたいな。 C:100 個で作ろうかな。 T:みんなリンゴの個数を決めましたね。そのリンゴで作れるジュースの量を求めましょう。	★前時のジューサーを修理して，途中でつまらなくなったことを説明する。 ★代表者に個数を挙げさせて，他の児童には代表者の誰かと同じ個数でジュースを作る場合を考えさせる。

りんごの個数 x （個）	0	2	4.5	6	15	100
ジュースの量 y （ml）	0	80	90	120	600	4000

	（T:表を埋めさせ，計算式も板書させる） T:みんなの作った式を見て何か気付いたことはありますか？ C:40 が同じだ！ C:40 に個数をかけるとジュースの量がでる。 C:40×(個数)＝(ジュースの量)になる。 （T:子どもから言葉の式が出てこなかっ	☆ジュースができる量を，対応の性質を使って求めること出来る。 ★子どもの意見と表を対応させて理解を促す。

<table>
<tr>
<td>言葉や文字の式で表すことで，リンゴの個数とジュースの量の関係を明らかにする。

20分（25分）</td>
<td>た場合は，考えをまとめるといった意味で提示する。）C:x，yを使っても表せるよ。40×x=y</td>
<td>☆計算式の共通点から言葉の式に表すことができる。</td>
</tr>
<tr>
<td>展開2
異なった事象の問題を対応の性質を用いて解決させることで，言葉の式・文字の式を導かせる。

10分（35分）</td>
<td>【課題②】水の量と深さは比例しています。下の空欄を埋めましょう。
<table>
<tr><td>水の量 x　(ml)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>深さ　y　(cm)</td><td>0</td><td></td><td>4</td><td></td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
</table>
C: まず1あたりを求めなきゃいけないよね。
・4÷2＝2
・10÷5＝2
C:1ml あたり2㎝深くなる。
C:3ml の時は2(cm)×3(ml)＝6(cm)
C: 4ml の時は2(cm)×4(ml)＝8(cm)
C: 6ml の時は2(cm)×6(ml)＝12(cm)
T:リンゴジュースの時のように言葉の式や文字の式で表してみよう。
C:2×(水の量)＝(深さ)
C:2×x=y</td>
<td>☆計算式の共通点から言葉の式に表すことができる。</td>
</tr>
<tr>
<td>まとめ
言葉の式，文字の式を比較することを通して，比例の式として一般化する

10分（45分）</td>
<td>≪発問≫
2つの式を比べて気付いたことはありませんか？

C:どれも文字の式だと 40×x＝y と 2×x＝y ですごく似ているけど数字の部分だけ違うよ。
T:なんで数字が違うのかな？
C:問題が違うからだよ。
C:y÷x の値が違うからだよ。
C:1 あたり量が違うからだよ。
T:問題ごとに決まった数と言えるね。
T:まとめ
比例の式
(決まった数)×x＝y　　　y＝(決まった数)</td>
<td>★表と照らし合わせて説明していく。

☆2つの式を比べて，比例の式として一般化できる</td>
</tr>
</table>

第５章．中学校における課題とアプローチ

第１節　現状における課題の焦点化

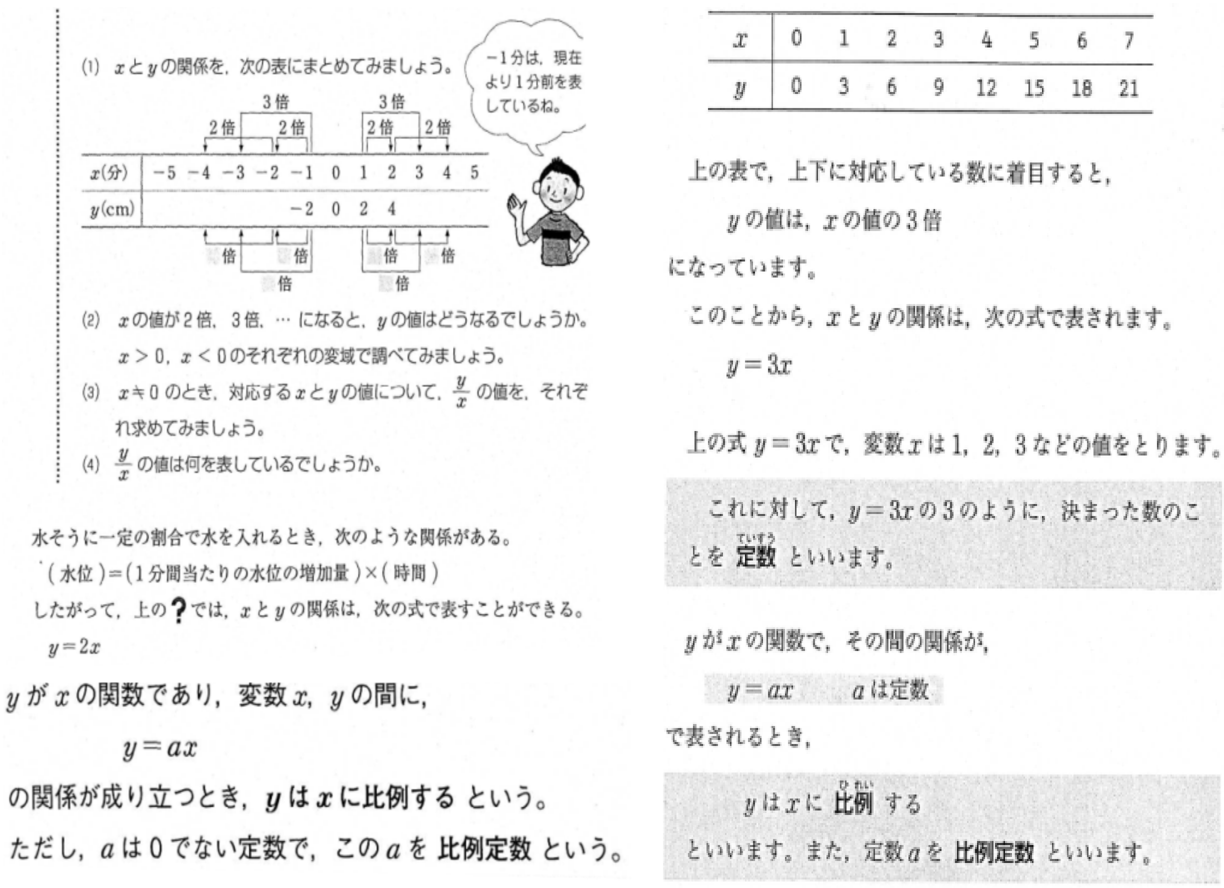
中学校においては，系としての見方を目標とするため，対応中心の学習に移行して，数学の世界にのせることが必要であると３章で述べた。またその際に，対応中心の学習に急に移行してしまうことが子どもたちの思考の飛躍を生み出し，課題となっていることを説明した。では，対応中心の学習へと切り替わるところはどこなのだろうか。現状の単元構成や検定教科書を分析し,その切り替わるポイントとその問題点について明らかにしたい。

〈表．７　現状の単元構成(中学校)〉

	次	項目	学習内容
比例	1	関数	・伴って変わる 2 つの数量を取り出す ・変数・変域を理解し，変域を不等号を使って表す。 ・「～は…の関数である」ということの意味を知る。
	2	比例の式	・比例定数の意味を知り，比例の意味を式で定義する。 ・比例定数や x の変域が負になる場合があることを理解する。 ・x と y の値から比例の式を求める。
	3	座標	・平面上の点の表し方を知る。 ・平面上の点の座標の意味を考える。 ・いろいろな点の座標を求める。
	4	比例のグラフ	・比例のグラフを書く ・比例のグラフの特徴を考える。
反比例	5	反比例の式	・事象の中から反比例する 2 つの量を見出し，式で表す。 ・反比例，比例定数の意味を知る。
	6	反比例のグラフ	・反比例のグラフを書く。 ・反比例のグラフの特徴を考える。
利用	7	比例・反比例の利用	・比例の利用 ・反比例の利用

中学校段階においては，小学校において現象に依存して数量間の関係を見ることから，数学の世界に依存した，比例の性質に対する考察へと移り変わる。その移り変わるポイントとして私たちは,　　　の式によって比例を定義する部分を挙げたいと思う。それは≪式による表現は対応のしかた(規則)を一般的に表そうとするものである≫(三輪，1974)とあるように，小学校における変化を強調した言葉による定義から，対応を強調した式の定義へと移り変わることで，指導の中心が対応へと移行すると考えるからである。また変数

x と変数 y の関係という数学的な式の構造に着目するわけだが，これは数学の世界へと踏み出すポイントであると考える。この式で定義する場面が具体的にどのように指導されているのか，学校図書と啓林館の教科書における比例の式の指導場面を参照し，考察する。



(1) xとyの関係を，次の表にまとめてみましょう。

x(分)	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y(cm)					−2	0	2	4			

(2) xの値が2倍，3倍，… になると，yの値はどうなるでしょうか。$x > 0$，$x < 0$のそれぞれの変域で調べてみましょう。

(3) $x \neq 0$のとき，対応するxとyの値について，$\frac{y}{x}$の値を，それぞれ求めてみましょう。

(4) $\frac{y}{x}$の値は何を表しているでしょうか。

水そうに一定の割合で水を入れるとき，次のような関係がある。

(水位)=(1分間当たりの水位の増加量)×(時間)

したがって，上の？では，xとyの関係は，次の式で表すことができる。

$y=2x$

yがxの関数であり，変数x，yの間に，

$y=ax$

の関係が成り立つとき，yはxに比例する という。

ただし，aは0でない定数で，このaを 比例定数 という。

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	0	3	6	9	12	15	18	21

上の表で，上下に対応している数に着目すると，

yの値は，xの値の3倍

になっています。

このことから，xとyの関係は，次の式で表されます。

$y=3x$

上の式$y=3x$で，変数xは1，2，3などの値をとります。

これに対して，$y=3x$の3のように，決まった数のことを **定数**（ていすう） といいます。

yがxの関数で，その間の関係が，

$y=ax$　　aは定数

で表されるとき，

yはxに **比例**（ひれい） する

といいます。また，定数aを **比例定数** といいます。

〈図．５　比例の式の指導場面(右：啓林館，左：学校図書)〉

啓林館の教科書においては表から「x を２倍，３倍，…すると，y も２倍，３倍，…になる」という変化の性質を見出し，その後 y÷x の値を求めさせることで式の定義へ移行している。学校図書の教科書では今までの小学校での変化の見方から離れ，始めから対応の見方に着目し，比例を式で定義している。この流れでの指導では，表から対応の性質を見出して式にしているだけであり，式によって定義し直すことのよさについて学習されていない。そのため，比例を式によって定義し直すときに生徒は，「なぜ定義し直さなければならないのか」という疑問が生まれるだろう。生徒が比例を式で定義し直す必要性を感じ取るための指導が定義の前になされておらず，急に定義を変えている点が，現状の指導における課題として挙げられる。

また中学校において，比例の学習を始めた段階の子どもたちは，小学校での現実事象に依存した変化中心の学習を引きずっていると考えらえる。そういった子どもたちに対して，急に対応の性質で定義をして学習を進めることは，子どもたちにとって困難を生む結果となるだろう。

この式で定義する場面，つまり対応中心へと移り変わる場面を，小学校との接続を考え，変化から徐々に移行することで切り替えられるような指導を行う必要がある。

第2節　課題に対するアプローチ

１．アプローチの概観

小学校と中学校の接続は礒田の思考水準でいうところの第1水準から第2水準への移行の段階であり，その移行に問題があると述べた。つまり，関係が方法から対象になることが子どもたちにとっての困難となる。したがってその移行をなだらかにしていくことが必要だと考える。

「関係」を対象として関数で考察する中学校では，その「関係」が対応を中心としたものとなっている。それは，中学校段階においては「関係」を関数(ここでいう系としての見方)で考察する段階であり，より抽象化された数学の世界に踏み込まなければならないため，数学の世界に依存した対応の性質が中心となるからである。これが，小学校と中学校との接続の大きな困難点であり，中学校においてはその困難を克服する必要がある。

そういった第1水準から第2水準への移行に対する困難を克服するためには，変化の性質に依存してしまいがちな第1水準にいる子どもたちを，徐々に対応の性質中心の指導に引き込むことが必要だと考える。現状の指導を見ると，表・式・グラフの順で表現を扱う単元構成になっていて，変化についての考察をほとんどしないまま始めから対応へ移行しているといえる。このことが，接続がうまくいかない原因になる。ここで，三輪(1974)はグラフの長所の1つとして≪値の変化の様相を直観しうる≫と述べていることから，グラフは変化を読み取りやすい表現であると言える。一方で座標の点はxとyの対応を表している。つまりグラフは，変化を中心としながらも対応の見方も意識させることができる表現だといえる。そのため私たちは，表・グラフ・式の順で扱っていく単元構成を提案する。

まずはグラフで変化を考察しながら，徐々に対応の見方へ移行していくのである。

２．統計グラフから関数グラフへの移行

グラフについては，小学校の指導においてもグラフの指導は行われている。しかし小学校段階におけるグラフは，ただ表のデータをグラフに表したものであり，いわば統計グラフのような捉えになっていると考える。「原点を通る直線」という特徴を見出す場面は存在するが，なぜそのような形になるのかまでは言及されない。

そういった小学校の指導をうけて中学校では，関係を対象としていかなければならないため，単なるデータを表すグラフではなく，関数の関係を表すグラフへと捉え直さなければならない。つまり「原点を通る直線」という幾何的な特徴から，「変化の割合が一定」などの x と y の関係を読み取れるようにならなければならない。そのためには，グラフにおいて性質に着目して考察していくことが必要になる。ここで子どもたちは，数値ではなく性質に目を向け始めるだろう。

性質について考察することで，原点を通る直線という特徴から，一定の割合で増えるという性質を読み取ることができるようになる。また，この性質と y÷x=(決まった数)の性質との関連を考えることで，より深く x と y の関係をグラフから考察できるようになる。

３．　グラフから式への移行

グラフの指導において y÷x=(決まった数)を変化の割合として捉えた上で，y の値について考察することを通して，y=(決まった数)×x の式が x による y の決まり方，つまり関係を表していることを捉える。このことを複数の比例のグラフについて行い，比例の中でも様々な関係があること，そしてその違いを表すものが決まった数であることを気付かせる。そして決まった数を一般化して比例定数ととらえることで，y=ax の式で比例を定義する。

以上のように，グラフで変化を見た後に式に移行することで，対応を中心に関係を見ていく学習に移行していく。

４．　具体的な指導

〈表．９　提案する単元構成（全 16 時間)〉

	時	項目	学習内容
比例	1 2	関数	・現実をもとに様々な関数を考察し，関数を定義する。 ・変数，変域について理解し，変域が負の場合についても考察する。
	3	座標	・座標，x 軸，y 軸などの用語を理解し，座標に点を取れるようになる。
	4	比例	・比例の性質を確認し，比例定数が負のときの比例があることを学ぶ。
	5 6	比例のグラフ	・表からグラフを書き，減少する比例のグラフについて理解する。 ・直線という特徴が「一定の割合で増える」という性質を表すことを理解し，y÷x が変化の割合を表すことを捉える。(指導案 1)
	7 8 9	比例の式	・比例定数によってどのような比例かが決まることを理解すし，y=ax の式が関係を表すことを理解し，式で比例を定義する。(指導案 2) ・式によって比例であるかを判断したり，x と y の値の組から式を求めたりする。 ・x の変域から y の変域を求める。
反比例	10	反比例	・反比例の性質を確認し，比例定数が負の反比例があることを学ぶ。
	11 12	反比例のグラフ	・「決まった数」によって，x と y の変わり方が決まることを理解する。 ・「決まった数」が x と y の対応関係を表すことを理解する。
	13 14	反比例の式	・式が関係を表すことを理解し，式で反比例を定義する。 ・式によって反比例であるかを判断したり，x と y の値の組から，式を求めたりする。
利用	15 16	比例・反比例の利用	・比例の利用 ・反比例の利用

の部分の指導を提案し算数・数学の接続を視野に入れた指導への示唆としたい。以下に提案する指導を指導案として示す。

（１）6/16 時間目

ねらい：

比例のグラフが直線となることを，変化の仕方が一定になることを根拠に理解することができる。グラフの傾きが変化の仕方を表していることを理解する。

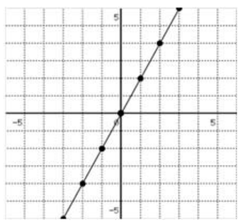
<table>
<tr><th>学習活動・内容</th><th>教師の働きかけと生徒の反応</th><th>指導上の留意点(★)と
評価(☆)</th></tr>
<tr><td>導入

表をもとにグラフをかき，直線になることを予測する。

8 分</td><td>課題を提示する。

【課題 1】
下の表は，水槽に水をためていったときの時間 x(分)と水位 y(cm)の関係を表しています。この関係をグラフにしてみよう。

x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4
y | -6 | -4 | -2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8

※表を見て数値と数値の間の座標も書き出しながらグラフをつくるように働きかける。
S：グラフにする。

前時から，比例のグラフが直線になるという予想ができることを振り返る。</td><td>★前時で座標を取ってグラフをかいていることから，全員ができるように働きかける。</td></tr>
<tr><td>展開 1

表をもとに直線になるのはなぜかを考える

10 分(18 分)</td><td>≪発問①≫
比例をグラフに表すと，どれも直線に並ぶのはどうしてだろうか。

S
増えているから。
S2：グラフの x：y＝1：2 になっているから。

S3：表では，2 ずつ増えているから(2 ずつ増えているから)。
S4：いつでも 2 増えると 4 増える(1 増えると 2 増える)から。</td><td>も考えるように働きかける。

☆変化の仕方が一定になっていることを根拠に，グラフが直線になっていることを理解している。</td></tr>
</table>

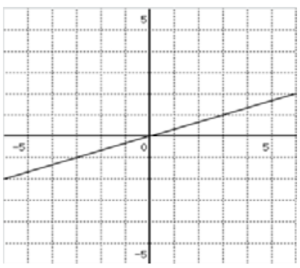
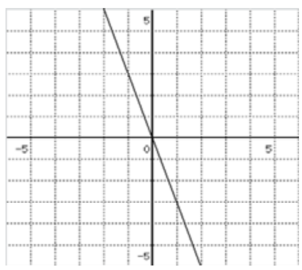
<table>
<tr>
<td rowspan="3">展開 2

増え方が分かりにくい場面で，比例が直線になる理由を考える。

12 分(30 分)</td>
<td colspan="2">【課題 2】
下の表も，水槽に水をためていったときの時間 x(分)と水位 y(cm)の関係を表しています。

x | -2.8 | -2.6 | -1.1 | 0 | 1.7 | 2.5 | 3.1
y | -5.6 | -5.2 | -2.2 | 0 | 3.4 | 5.0 | 6.2</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">≪発問②≫
この表の座標も直線に並ぶと言えるでしょうか。</td>
</tr>
<tr>
<td>S1：座標が分からないからわからない。
S2：増え方がバラバラだから違う。
S3：y÷x が一定になっているから直線になる。</td>
<td>★増え方の見方では座標が取れないことから，別の見方をしていくことを促す。

☆変化の仕方が一定になっていることを根拠に，グラフが直線になっていることを理解している。</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3">展開 3

10 分(40 分)</td>
<td>T：他のグラフでも同じことが言えるか確かめてみよう。
課題を提示する。</td>
<td>★比例定数が負の数のグラフと分数になるグラフを扱う。</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">(1)

(2)
</td>
</tr>
<tr>
<td>S：(1)は y÷x がいつも$\frac{2}{3}$になっているから，どの点も直線に並ぶ。
S：(1)は y÷x がいつも-3 になっているから，どの点も直線に並ぶ。</td>
<td>★課題 1，2 の考え方をもとに理由を考えるように働きかける。

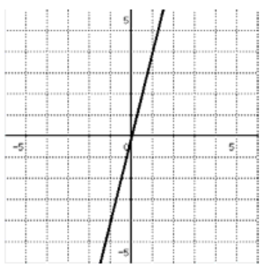
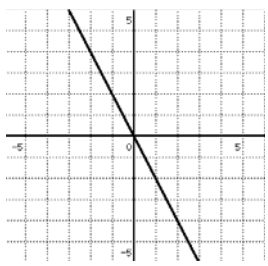
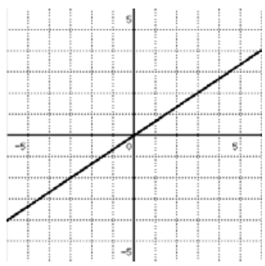
☆変化の仕方が一定になっていることを根拠に，グラフが直線になっていることを理解している。</td>
</tr>
</table>

展開 3	≪発問③≫ 今日調べてきたこれらのグラフの違いはなんだろうか。	
10 分(50 分)	S：傾き S：y÷x の数値 傾きと y÷x の値(比例定数)が同じものを表していることをまとめる。	★傾きと y÷x の関係を考えるように働きかける。 ☆グラフの傾きが変化の仕方を表していることを理解する。

（２）7/16 時間目

ねらい：

傾き(変化の割合)の異なるグラフの違いを考察することを通して，変化の割合が比例の式 y=ax においては，関係を決めるものであることを理解することができる。

学習活動・内容	教師の働きかけと生徒の反応	指導上の留意点(★)と評価(☆)
導入 前時ではグラフが直線であることから，傾きや変化の割合について着目したが，ここではその違いについて考察していく。	T：課題が書かれた紙を配る。 **【課題】** 次の(1)～(3)はプールの深さの中央の線を基準として，水を入れたり抜いたりしている様子を表したものです。 (1)プールに水道いっぱいに開いて水を入れています。 (2)プールの栓を抜いて水を抜いています。 (3)プールに水道を少し開いて水を入れています。 ①  ②  ③ 	★ノートを開いて，前時の比例のグラフの特徴について確認する。

    5 分	T：(1)～(3)は，①～③のどのグラフを表しているでしょうか。選んだ理由も書きなさい。	★プールの水と時間の関係は比例であることを確認する。 ★それぞれのグラフの相違点を見ていくことで,関係の違いに着目させる。
展開 1 現象とグラフを結びつけた視点について触れ，グラフのどこの違いに着目したのか確認する。 13 分(18 分)	T：まずは答えから聞いていきます。 S：(1)が①，(2)が③，(3)が②を表しています。 T：理由を聞いていきます。 S1：グラフを見ると，①は 1 時間で 4cm ずつ増えています。②は 3 時間で 2cm ずつ増えていきます。③は 1 時間で 2cm ずつ減っていきます。 これらを(1)～(3)に当てはめると，(1)は水道をいっぱいに開いているので，増えている量が多い①が当てはまります。 (2)は水を抜いているので,水が減っている③が当てはまります。 (3)は水道を少し開いているので,増えている量が少ない②が当てはまります。 S2：前の時間に学習したグラフの増え方に着目して，①は y÷x=4，②は y÷x=2／3，③は y÷x=-2 と表せます。 これらを(1)～(3)に当てはめると，(1)は水道をいっぱいに開いているので，増えている量が多い①が当てはまります。(2)は水を抜いているので，水が減っている③が当てはまります。(3)は水道を少し開いているので，増えている量が少ない②が当てはまります。 T：S1 と S2 の生徒の意見は，どちらも y÷x の増え方が違うとまとめる。	 ★S1 のような x と y の増加量に注目している生徒や，S2 のような増加量を割合としている生徒の意見を取り上げる。 ☆それぞれのグラフの違う所を述べることができるか。
展開 2	T：ではそれぞれの増え方の違いが，プールの深さにどのように関わっているかを見ていきましょう。	

$y \div x$ の値の違いがグラフの違いであることを捉え，その違いをもとにプールの深さにどのように関わっているか考察する。 10 分(28 分)	【追加課題】 問 1：①～③のグラフにおいて，6 時間後はプールの水の深さはどうなっているでしょうか？ 問 2：①～③のグラフにおいて，24 時間後はプールの水の深さはどうなっているでしょうか？ T：では問題を解いていきます。 問 1 S：①$y=4\times 6$ $=24$　②$y=2/3\times 6$ $=4$　③$y=(-2)\times 6$ $=-12$ 問 2 S：①$y=4\times 24$ $=96$　②$y=2/3\times 24$ $=16$　③$y=(-2)\times 24$ $=-48$ T：2 つの問題とも①$y=4x$　②$y=2/3x$　③$y=-2x$ という同じ式を使って表しましたね。 同じ x の値を用いて問題を解きましたが，①～③でそれぞれ y の値が違いますね。	★問題の答えを聞くだけでなく，どのように解いたかも生徒に聞く。 ☆それぞれのグラフの変化の仕方に着目して，式に表し，問題を解いているか。
展開 3 グラフを式に表してみて，式が計算式ではなく，関係を表していることを捉えさせる。 12 分(40 分)	≪発問≫ それぞれのグラフを式に表してみて，気付いたことはありませんか？ S1：グラフの変化の仕方によって，同じ x の値でも y の値が違うことが分かった。 S2：y の値は，グラフの変化の仕方によって変わる。 S3：グラフの違いを式に直すことで表すことができる。 T：S1～S3 の生徒の意見をまとめると，それぞれの式が **$y=$(変化の仕方)$\times x$** で表せます。 つまり，(変化の仕方)によって，y が決まります。 この(変化の仕方)を a とすると $y=ax$ で関係を表せます。	★グラフと式を見比べて，どのように特徴が表れているか考察させる。
まとめ 式の定義をする。 5 分(45 分)	T：比例を式で定義すると以下のようになりま y が x の関数であり，変数 x，y の間に　$y=ax$　の関係が成り立つとき，**y は x に比例する**という。 ただし，a は 0 でない定数で，この a を**比例定数**という。	

本時の感想を感想用紙に記入する。 5分(50分)	T：感想用紙を配る。 S：感想を記入する。	☆「グラフの増え方の違いが，式が表している関係の違いを表している」や「増え方を表していたものが，きまりを表している」のような感想がある。

第 6 章．おわりに

本研究においては，算数と数学の接続ということで，小・中間の接続をスムーズに行い，かつ関数観念の育成を目指す指導への示唆を得ることを目的とした。そのために先行研究，学習指導要領，検定教科書を比較，分析し，小学校から中学校への接続における困難点を比例指導の現状から明らかにした。そして，その困難点を克服するための具体的な指導案を示した。

第 1 節　本研究の成果

本研究の成果として以下の 3 点が挙げられる。

研究成果 1：小学校・中学校における関数指導の意義の明確化

「関数」と「関数の考え」の違いを明確にして，関数の考えが問題解決を目的とした，数学教育に根ざしたものであることを説明した。また，その関数の考えの 1 つとして，系としての見方を挙げ，中学校の関数指導の目標として位置付くことを，現状の指導要領から明らかにした。系としての見方を育むことを視点とすることで，小学校・中学校における関数指導の意義が明確になった。

研究成果 2：関数領域における小・中間の接続の困難点の導出

現状の小学校，中学校における指導を学習指導要領，検定教科書から概観し，礒田の思考水準論と照らし合わせて考察した。そして，小学校段階が第 1 水準，中学校段階が第 2 水準として当てはめることができ，方法としての「関係」と対象としての「関係」に質の違いがあることを明らかにした。その質の違いとは具体的に，小学校では変化の性質，中学校では対応の性質がそれぞれ強調されているということである。その相違によって接続における困難を生んでいると導きだした。

研究成果 3：具体的指導の提案

接続の困難点の導出から，その困難を克服するアプローチとして，現実事象に依存した変化の見方から，数学に依存した対応の見方へ，徐々に移行していくことの必要性を挙げた。その観点から，現状の具体的な指導において，変化の見方から対応の見方へ移行する箇所を困難点として焦点化した。その箇所に対するアプローチとして，具体的指導案を示

すことで，接続に有効に働く指導の示唆を得た。

第２節　今後の展望

本研究においては，具体的な指導案を示すことで，接続に有効に働く指導への示唆とした。しかし，この提案した指導案は，まだ実践しておらず，その有効性については検証されていない。今後，実践することでその有効性について，接続という観点から考察し，検証する必要がある。そして，理論と実践を往還することで，どちらも再構築していきたい。

また関数指導における目標として，系としての見方を挙げたが，本研究においては，系としての見方への第１ステップとして接続を位置づけているため，どのような道筋で系としての見方へ至るかまでは考察されていない。中学校２年における一次関数や中学校３年における $y=ax^2$ での指導との関連も含めて，系としての見方への道筋を明らかにする必要がある。

謝辞

本研究をこのような形にまとめることができたのは，たくさんの方の支えがあったからに他なりません。ここに感謝の意を表します。

特に指導教員である鹿児島大学教育学部の和田信哉准教授，新潟大学教育学部の阿部好貴准教授には，毎週長い時間をかけてご指導いただき，たくさんのことを学ばせていただきました。研究について方法も何も分からなかった私たちが，「接続」というテーマに対してじっくりと研究に取り組むことができたのは，和田先生と阿部先生の温かいご指導・ご支援があったからです。

和田先生はいつも，私たちが自分で考えるための時間を作ってくださり，じっくりと考えられるように温かく見守ってくださいました。特に昨年の 4 月に鹿児島大学にご栄転されてからも，パソコン越しではありましたが，それまでと変わらない手厚いご指導をいただくことができ本当に感謝の気持ちでいっぱいです。研究課題を決める際には，私たちが教育実習で感じた課題意識をもとに決めさせてくださいましたし，研究を進めるにあたっても，私たちの足りない部分を指摘してくださったり，方向性を示してくださったりと，私たちが考えるための支援をしてくださいました。また先生からは研究内容だけではなく，研究に対する姿勢や，教育に対する考え方など非常に多くのことを勉強させていただきました。先生のご指導なしに，本研究は存在し得ません。本当にありがとうございました。

阿部先生は，私たちがどうしようもなく困ったときに，いつも的確なアドバイスをくださいました。私たちの研究が進まないとゼミの日数を増やして熱くご指導くださったり，ときには休日にもかかわらず私たちの質問に答えてくださったりと，常に私たちに寄り添って見守ってくださいました。また卒業研究だけでなく，より理論について考えるための院生の方々との合同ゼミや，具体的な実践を考える授業研究ゼミを設けてくださり，私たち一人ひとりのために必要な多くのことを取り入れてくださいました。本当に毎日が研究漬けの日々で，一回りも二回りも成長することができました。またゼミ以外の時間においても，合宿などを提案してくださり，先生をはじめ学部生・院生との絆が深まり，さらに

ゼミの時間が濃いものとなっていきました。先生のご指導なしに，本研究は存在し得ません。本当にありがとうございました。

和田・阿部ゼミナールの学部生・院生の皆さんには，本研究に関わり疑問点や提案など，私たちだけでは気付くことができなかった多くの助言をいただきました。ゼミにおいては，私たちの分かりにくい説明に対して，最後まで真剣に考えてくださいました。学部生・院生の皆さんのご指導なしに，本研究は存在し得ませんでした。また，研究の時間以外にも多くの時間を共に過ごし，非常に充実した1年間を過ごすことができました。大学生活の中でも最も濃い時間となりました。ありがとうございました。

以上のように，私たちは2人の先生をはじめとする多くの方々に支えられ，恵まれた時間を過ごし，本稿をまとめるまでに至りました。和田・阿部ゼミナールで学んだ日々を糧とし，今後もさらに精進していく所存です。皆様の温かいご支援に心から感謝いたします。

平成24年1月末

石田勇弥・小野寺悠・塩浦康平

永井努・山田梨恵・吉田飛翔

【引用・参考文献】

阿部浩一(1977).『新・中学校数学指導講座　4　関数』，金子書房.

礒田正美(1987).「関数の思考水準とその指導についての研究」『日本数学教育学会誌』69(3)，pp. 82-92.

礒田正美(1998).「関数領域のカリキュラム開発の課題と展望」，産業図書，pp. 203-217.

大谷実・中村雅恵(2002).「中学校との接続性を配慮した比例の学習指導：文化―歴史的動理論に基づく教授実験のデザイン」『日本数学教育学会誌』84(6)，pp11-22.

大谷実・中村雅恵(2004).「比例の指導における数表・グラフ・式のシンボル化過程―教授実験における教師と児童の談話の質的分析―」『日本数学教育学会誌』86(4)，pp. 3-13.

國本景亀(2000).『算数・数学科重要用語 300 の基礎知識』pp. 226

真野祐輔(2010).「関数領域における変数性の認識に関する一考察：擬変数の機能の可能性と限界」『全国数学教育学会第 32 回研究発表会発表資料』pp. 1-12.

真野祐輔(2011).「変数性に関する概念変容を捉える枠組みの設定：式の構文と意味に着目して」『第 43 回数学教育論文発表会論文集　論文発表の部』pp. 627-632.

新夕義典(1982).「伴って変わる数量に着目しそれらの間の関係を考察する能力を伸ばす指導」『７　関数概念の発展と利用Ｉ』，算数・数学教育実践講座刊行会，pp. 47-49.

中村光一(2011).「整数の乗法，除法の問題場面での 4 年生の子どもの比例的推論の実態」『日本数学教育学会誌』93(6)，pp. 2-10.

布川和彦(2010).「数量関係の学習と背後の現象や共変性の意識化」『上越数学教育研究　第 25 号　上越教育大学数学教室』pp. 1-10.

能田伸彦・中島健三(1991).「第 2 章　数量関係の指導の問題点とその考察」『新・算数指導実例講座　9 数量関係』，金子書房，pp. 48-49.

日野圭子(2008).「発達の途上にある生徒の関数的見方・考え方を大切に」『日本数学教育学会誌　第 90 巻　第 9 号』pp. 39-45.

日野圭子(2011).「生徒が作り出した数量の関係を表すグラフ」『第 44 回数学教育論文発表会論文集　論文発表の部』pp. 681-686.

峯村利治(1970).「これからの関数指導のあり方」『7　関数概念の発展と利用Ⅰ』pp.10-17.

溝口達也，山本靖，他6名(2011)『改訂関数と方程式Ⅰ　比例・反比例と方程式』鳥取大学　数学教育学研究室(代表：溝口達也)

三輪辰郎(1974).「関数的思考」『Ⅴ　数学における思考と教育』pp.210-225.

文部科学省(2008)『小学校学習指導要領解説　算数編』，東洋館出版社.

文部科学省(2008)『中学校学習指導要領解説　数学編』，東洋館出版社.

学校図書(2010)『小学校算数4年上下，5年下，6年下』(教科用図書).

学校図書(2010)『中学校数学1』(教科用図書).