

空間認識力を育む教材に関する研究

新潟大学大学院教育学研究科

教科教育専攻 数学教育専修

比護智洋

はじめに

私たちの日常生活の中では、物の位置関係や距離、大きさを読み取ったり、模型や写真、設計図などから、もしくはそれらを組み合わせて実物を想起したりことがある。また、言葉での表現や身振り手振りから想起することもあるだろう。このとき、対象から必要な情報を得てイメージ像を形成し、それを念頭で操作をくわえ、紙に描きだしたり言葉で表現したりする。このように念頭でイメージ像を操作したり、思考したりする能力は私たちの生活に重要なものである。その中でも特に、本研究では対象の情報からイメージ像を形成しそれを基に空間における課題を解くために思考することを空間認識力と呼ぶこととする。

改訂された中学校学習指導要領から、空間図形の指導の充実を読み取ることができる。また、中学校数学科における図形指導の意義として、①図形の概念形成と性質を理解しそれを活用して考えたり判断したりする態度の育成、②論理的に考察し表現する能力の育成、という二つがあげられている。しかし空間図形の学習では、辺と辺の位置関係や、空間図形の性質、表面積や体積の計算といった学習が中心となっている。一方で OECD（経済協力開発機構）の PISA 調査などの調査から、生徒は思考力・判断力・表現力等を問う読解力や記述式問題、知識・技能を活用する問題に課題があることが指摘されている。筆者は空間認識力を育み、空間における課題でも論理的に考察し表現するような活動をさせることで、より生徒の思考力・判断力・表現力等を育成することができるのではないかと考える。そこで本研究では空間認識力を育む教材の開発を目指す。

本研究では、まず先行研究から空間認識力を概念規定する。次に空間認識力を育むにはどのような指導をしたらよいかを先行研究の指摘と学習指導要領からの教育課程を考察し、空間認識力を育むための指導、教材について記述する。次にその記述に基づき空間認識力を育むための教材を提示する。そしてその教材を用いて実践を行いその実際を分析する。そうすることで開発した教材の有用性を検証し空間認識力を育むことができたかどうかを検証していくこととした。

1 本研究の目的及び方法

本研究の目的は空間認識力を育む教材を開発し、その有用性を実践を通して検証することである。

まず空間認識力に関わる先行研究を概観、考察し、本研究における空間認識力を概念規定する。

空間思考、空間推論、空間観念といった様々な立場から研究がなされている。特にイメージ像の形成とそれを基に思考することに分けて考察をしていく。

次に空間認識力を育むためにはどのような指導や教材が必要であるかを、先行研究の指摘と学習指導要領から検討し、教材開発の視点を設ける。

次にその教材開発の視点を基に教材を開発する。

最後に開発した教材で授業をし、その実際を分析することで有用性を検証する。

2 空間認識力に関する基礎的考察

(1) 影山の研究

影山は空間的思考を、認知と思考の両面を意識して「認知処理的能力としての空間能力を働かせつつ幾何的思考を行う」思考活動と概括的に捉えている。

課題解決において働く空間的思考には、「対象をどのように見るか」という認知的側面と、「対象をどのように捉えるか」という幾何的にみる側面があることを述べ、認知に関わる側面を「空間能力」、幾何的に見る側面を「幾何的思考」と呼び、空間的思考は空間能力と幾何的思考の統合として捉えられることを示した。

影山は空間能力について先行研究から、空間能力とは課題を視覚的方略によって解決するときに関与する能力であると述べている。空間関係の認識、空間的な方向づけを行うこと、視覚化などの様々な下位能力を総称するものであり、これらが機能する能力であり、相互に関わり合ったり、交互に現れたりすると述べている。

幾何的思考を「数学的な考え方」についてその外延的定義を行っている片桐（1998）とHershkowitz（1990）を中心に検討した。片桐（1988）の数学の内容に関係した数学的な考え方から、図形学習に特にかかわりの深い考え方に着目している。Hershkowitz（1990）の高次の幾何的概念（線対称、測定、相似性）に加えて、影山は空間内の対象の位置関係、空間概念、対称性、合同性を補完して、幾何的思考を以下のように規定する。

幾何的思考

①図形・空間の学習内容と関連する数学的な考え方

- ・構成要素（単位）の大きさや関係に着目する（単位の考え）
- ・表現の基本原則に基づいて考えようとする（表現の考え）
- ・物や操作の意味を明らかにしたり、広げたりそれに基づいて考えようとする（操作の考え）
- ・物や操作の方法を大づかみにとらえ、その結果を用いようとする（概括的な把握の考え）
- ・基本的法則や性質に着目する考え（基本的性質の考え）

②高次の幾何的概念の認識

- ・空間内にある対象の垂直・平行関係、ねじれの位置の認識 [空間内の対象の位置関係の認識]
- ・三次元性や無限の広がり、連続性および緻密性の認識 [空間概念の認識]
- ・線対称及び点対称の認識 [対称性の認識]

- ・測定一量の保存、測定単位の認識—
- ・合同性および相似性の認識

以上から、影山は空間的思考を以下のようにとらえる。

空間的思考＝ 空間能力 ＋ [認知的側面] ・空間における関係の認識、 視覚化など様々な下位能力 の総称、もしくは統合	幾何的思考 [幾何的側面] ・図形、空間の学習内容と関連 する数学的な考え方 ・高次の幾何的概念の認識
---	---

(2) 國本の研究

國本は空間観念を一般に数学教育で概念規定されている「空間における物の位置を想像する力」や『空間観念』とは、目に見える具体的なものあるいは感覚的に捉えられる物を通してその背後にある空間として抽象的・理想的なものを感じることができる力」では一般的すぎるとして、心理学的な観点、数学教育的観点からの考察に基づき空間観念を概念規定している。

① 心理学的観点から

サーストンの「知能の群因子説」で基本的知能と呼ばれるもののうち、特に「空間」について取り上げている。「空間」とは対象を2次元または3次元で思考する能力で、物体の空間における関係を理解する能力のことである。この空間能力とはさらに次の3つの下位能力に分けられると述べる。

a) 視覚化

ある形態の（内的）部分を動かしたり、移動したりしたときに、その形態を視覚化する能力。視覚化の能力に関する問題を解決する場合、動的な思考過程が必要になる。

b) 空間的關係

異なった視点から見たときでも対象の同一性を認識する能力、あるいは異なった位置に動かしたとき、元の形態（配置）を視覚化する能力。対象やその部分の空間的關係を正しく把握し、表象する能力である。視覚化と比較すると図形自体を合成・分解することなく、図形は全体として動かされる。

c) 空間的方向付け

空間内に自分自身を正しく組み入れる能力。上下、前後、左右の意味を理解できたり、ある位置から見えた図形の配置が理解できたりする能力。

② 数学教育的観点から

数学教育観点からは、新数学教育研究会の空間観念の捉えを用いている。

a) 直観的に図形を認める力

具体物から立体図形を抽象したり抽象的な立体図形から具体物を想起したりすることができる

力。

b)立体を構成する力

糸や粘土、厚紙などを使って立体を構成することができる力。

c)立体を図で表現する力

立体図形を「見取り図」「展開図」「立面図・平面図」で表したり、そういった図から立体図形を想起することができたりする力。

d)立体の広がりをも量的にとらえる力

立体図形の表面積や体積の広がりをも量的にとらえることができる力。

e)位置をとらえる力

平面や空間における点・辺・面の位置を表したり、位置関係を捉えたりすることができる力。

③心理学的観点と数学教育的観点の比較から

心理学的観点	数学教育的観点
・視覚化	・直観的に図形を認める力 ・立体を構成する力 ・立体を図で表現する力
・空間的關係	
・空間的方向付け	・位置を捉える力
	・立体の広がりをも量的に捉える力

両者の空間観念の捉え方には重なるところも見られるが、対応しないところも見られる。國本は空間観念をできるだけ包括的にとらえたいという思いから、以下のような能力の総体を「空間観念」と概念規定する。

a)図形を認める力 b)図形を見抜く力 c)図形を構成する力 d)操作を見通す力 e)図形を図で表現する力 f)図形の空間の広がりをもとらえる力 g)位置をとらえる力 h)空間を移動する力

(3)狭間らの研究

狭間らはヤキマンスカヤの考えから空間思考を「実在的空間および抽象的空間に関わる課題遂行場面で、いろいろな直観的支えをもとに空間的心象を作り心的操作をする知的活動」としてとらえている。

直観的支えとは、事物・模型（写真、コンピューターの画像など）といった具体的モデル、規約的な図（見取り図、展開図、投影図）規約的モデル、言語・文字・記号・式といった記号的モデルがあるとしている。空間的心象とは素朴な形象から、最も発達した形式では空間的關係と構造とが心象に反映しシンボル化したものを指す。

以上の先行研究の概観から、空間に関する課題を解くときに働く様々な思考をする力を空間認

識力としてとらえられることが分かる。また、それらが相互に関わり合ったり、交互に現れたりする。

(4) 図や文章からイメージ像を形成すること

影山の研究 (2003)

影山は、内的表象のうち、特に心的モデルに焦点をあて、その構成について Battista らの一連の研究から考察した。「心的モデル」を「何らかの対象に対する二次元ないし三次元の心的構造物で、表象する対象と構造的に類似するという特性を持つ。この特性によって、心的モデルは、概念形成や課題解決において対象の“代用物”としての働きをする」としている。心的モデルの構成は、空間構造化、協応・統合活動、構造の精緻化・再構造化という一連の活動を通してなされると考えられるとしている。

空間構造化について影山は Battista らの研究から、「1つの対象物を空間的に構造化するということは、その空間的構成要素を認め、構成要素を空間的に合成し構成要素とそれらからなる合成要素との間の内的関係を確立することによってその性質や形を決定する。正方形や立方体のまともりに対して及ぼす行為を組織化することによって生じる。対象から構造を読み取るのではなく、対象に働きかけることによって構成的に構造を作り出すのである」と引用している。

心的モデルの構成プロセスをその一時的構成、発達の構成と区別している。一時的構成とは日常生活や学習活動におけるある瞬間に一時的に心的モデルを構成することである。発達の構成とは認知的な発達や学習経験によって心的モデルを発達的に構成することで、主に図形概念の形成に関わる。

一時的構成のプロセスには、対象のいろいろな方向からの見え方や、対象を表す二次元表現か以前知覚したか想像のしたことのあるものを想起するプロセス。これを心的モデルの候補として持っておき、実物と比較することで修正を加えていく。想起のプロセスにおいて適切な心的モデルが構成されるためには、適切な対象のイメージを引き出してそれらを協応させなければならないと指摘している。

想起すべきモデルとして適切なものが無い場合には、図表現あるいは表現中の一部分から役に立つ対象をイメージ的に変形して別の新しい対象を構成していくイメージの変形がある。想起のプロセスが成功的に進むには対象の具体的、心的な操作活動の先行経験が必要である。互いの見え方やイメージが協応され、全体として一貫とした形にそれらを結合して蓄えられていなければならないと指摘する。

このようにして構成された心的モデルがうまく機能しない場合には、大局的な構造はそのままにして新たな関係を探していく構造の精緻化、対象に新たな構造を与える再構造化があると述べる。以上から影山は、空間構造化、協応・統合活動、構造の精緻化・再構造化という一連の活動を通して心的モデルは形成されると述べている。

3 本研究における空間認識

以上の先行研究からの諸能力を、本研究の空間認識力におけるイメージする側面と思考する側面に対応させることで本研究における空間認識力を規定する。

本研究における空間認識力	
イメージ像を形成する側面	<ul style="list-style-type: none"> ・ 図形を認める ・ 図から立体図形（空間図形）を想起する（同じものが無い場合には今までの経験から似たものを想起する） ・ 立体図形の位置、位置関係をとらえる
思考する側面	<ul style="list-style-type: none"> ・ 変形、切断、回転などの操作の結果を見通す ・ 立体図形を構成する（役に立つ構成要素を変形し、修正する） ・ 立体図形を図で表現する（実物と比較をして修正する） ・ 空間を移動する ・ 図形の空間の広がりをとらえる ・ 対称性、合同性、相似性を認識する ・ 基本的法則や性質に着目する

以上の能力の総体を本研究における空間認識力とする。

4 空間認識力を育む教材開発

空間認識力を育むための指導について先行研究の指摘、空間に関する領域の指導についての考察から、空間認識力を育む教材開発の視点を設ける。その視点に基づき教材の開発を目指す。

(1) 先行研究の指摘と考察

ここではまず空間認識力の育むための指導について先行研究の指摘をまとめ、考察していく。

國本（1995、1997）は具体的な対象から離れて表象上だけで図形のイメージを自由に合成・分解し、変形し、処理することが空間観念の育成には必要であると述べている。そのためには表象像を操作する学習、念頭操作をする学習が必要であるとしている。影山（2003）は心的モデルを成功的に構成することは空間的思考には重要であるから、心的モデルが成功的に構成されることが重要であるとしている。そのためには対象の具体的、心的な操作活動の先行経験が必要であると指摘している。このように國本（1995、1997）や影山（2003）によると、空間認識力を育むには心的な操作、念頭で行う操作が重要とされている。また國本は具体物から徐々に離れて念頭で操作をするよう指導することを強調している。

狭間ら（2004）は空間思考を育成する算数・数学的活動として以下のものが重要であると指摘

している。

①対象と、事象・事物、図及び概念や関係を表す記号・言語とをつなぐ活動。②空間的イメージの形成と操作をする活動。③表現とその活用。身振り手振りによる表現、子どもの言葉による表現、及びフリーハンドによる自分なりの表現を活かす活動。④空間的推論とその根拠。3次元モデルを用いた具体的操作による推論から、空間的イメージの操作、図表現及び幾何的知識を相補的に結び付ける推論へと向かう活動である。狭間ら（2004）では、①対象と、事物・事象、図及び概念や関係を表す記号・言語とをつなぐ活動では、具体物やそれを表現した図や写真を用いて操作したり観察をしたりして、言葉や式、記号で説明する活動を行う。操作や観察、説明を通して立体図形の構成、性質、特徴を学ぶ。こういった活動は心的モデルの形成に重要なものであり、②空間的イメージの形成の活動のためにも重要なものである。心的モデルや空間的イメージの形成は様々な場面でなされており、狭間らの指摘の中でも①の活動と②の活動、どちらでもなされていると考えられるが、その操作に重点を置いているのが②の活動と考えられる。また、①の活動では具体物やそれを写した写真や絵、図を用いており、②の活動ではその内容から図は用いられると考えられるが、具体物そのものは用いられないと考えられる。③表現とその活用と④空間的推論とその根拠の活動では生徒たちが考えたことを表現し、説明することに重点を置いている。③の活動では説明のために具体物である三次元モデルを具体的に操作すると述べているが、④の活動においては三次元モデルを用いずに空間的イメージを操作すると述べられている。以上から、狭間ら（2004）の空間思考を育成する算数・数学的活動の指摘においても具体物から徐々に離れていき、念頭操作ができるようになることが求められているとわかる。

国宗（2007）は、図形の指導内容の改善に関する提言の中で特に空間図形に関して5つ以下のように指摘している。①展開したり展開図や見取り図で表現したりする活動を重視して、直方体、立方体の概念を理解する。②図形の計量を通して、図形に関する理解を深め、興味関心を高める。③見取り図を描いたり読んだりする活動を重視する。④投影する、切断する、展開するという操作を積極的に取り上げる。⑤三平方の定理の立体への応用では、空間概念育成のための的確な「問題」を用意する。国宗（2007）においては、①展開したり展開図や見取り図で表現したりする活動で具体物を切り開くなどの操作、観察をしたり、見取り図で表現したりして直方体、立方体の概念の理解を目指す。ここでの活動では具体物を用いて活動することもあるだろう。②図形の計量の活動では、具体物を用いて計量の方法を学ぶ際には具体物が用いられることもあるかもしれないが、それを学んだあとは図や文章から計量を行う活動が行われるだろう。③見取り図を描いたり読んだりする活動では、具体物を見て見取り図を描く活動から、文章などから見取り図を描く活動になると考えられる。次に描かれた見取り図を読み取る活動へと移行するだろう。④投影する、切断する展開するという作業を積極的に取り入れる活動⑤三平方の定理の立体への応用への空間概念形成のための的確な問題を用意することが必要であると述べている。以上のように国宗（2007）の指摘においても、具体物を操作したり観察したりするといった、具体物を用いての活動から、具体物を用いずに思考をするように示されており、その中で念頭操作が行われる。

以上から、具体物を用いた活動から徐々に離れていき、念頭操作で課題を解決する活動が空間

認識力を育むために必要であると考えられる。

(2)空間の指導について

ここでは小学校算数科と中学校数学科の空間とそれに関わるものの、学習指導要領における指導内容をまとめる。

①小学校算数科

小学校算数科における図形領域の指導の主なねらいは、物の形を認める感覚や形の特徴をとらえたり性質を見つめたりする感覚といった図形に関する感覚を豊かにするとともに、図形の性質を見いだしたり説明したりする過程で数学的に考える力を表現する力を育てることとしている。

次に各学年における空間に関わる指導についてまとめる。

第1学年では身の回りにある具体物など様々なものを観察や構成などの活動を行い、物の形を認めたり形の特徴をとらえたりすることを指導する。積み木や立体を用いて身の回りにある具体物を作ることを指導する。第2学年では、箱の形をしたものについて指導し、頂点、辺、面という用語も指導する。紙を折ったり色板をならべたりする活動を通して図形を構成する。箱を切り開いたり、切り開いた形から箱を組み立てたりして、立体図形は平面図形によって構成されていることや面と面とのつながり方に着目できるよう指導する。第3学年で球の指導を行う。第4学年で立方体、直方体について指導する。直方体に関連して直線や平面の平行やこれらの立体の観察を通して、見取り図をもとに頂点、辺、面やそれらの位置関係に着目したり、立体図形の頂点、辺、面と展開図との対応関係正しくとらえられたりするようにする。このとき、見取り図や展開図を描く活動を取り入れ、立体図形を平面上に表現することのよさがわかるように指導する。第5学年で角柱や円柱について指導する。見取り図や展開図を用いて、立体図形の性質についての理解を深めるように指導する。第6学年では、角柱円柱の体積の求め方を指導する。図形を実際に構成する具体的な活動には、紙を折ったり、切ったり、図形を移動させたり、切り離したり、変形したり、敷き詰めたり、定規やコンパス用いて作図したりするなどの活動がある。こうした活動を行うことで、図形の性質を発見したり、確かめたり、表現したりすることができる。また、図形を考察する観点や方法を習得することができるようになる。

このように、小学校算数科における図形の学習は具体物を用いた操作的な活動や直観的な取り扱いが中心であり、そういった活動を通して図形を構成する要素や位置関係などが取り扱われる。

②中学校数学科

中学校数学科での図形領域の指導の主なねらいは、次の二つである。

- ・平面図形や空間図形についての基礎的な概念や性質についての理解を深め、それを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てることである。
- ・論理的に考察し表現する能力を伸ばすことである。

次に各学年の空間に関わる指導についてまとめる。

第1学年では、空間における直線や平面の位置関係を知ったり、直線や平面図形の運動によって空間図形を構成したり、空間図形を平面上に表したり、平面上の表現から空間図形の性質を読み取ったりすることを学習する。また、扇形の弧の長さや面積、基本的な柱体、錐体、球の表面積、体積を扱う。第2学年では空間は取り上げられず、基本的な平面図形の性質を見だし、平行線の性質を基にしてそれらを確認したり、図形の合同についての見方を深めたり、図形の性質を三角形の合同条件などを基にして確認し、論理的に考察し表現する能力を養う。第3学年でも、空間を直接的に扱うことはないが、三平方の定理を立方体や直方体で用いる場面で空間が取り上げられる。

中学校数学科においては、観察や操作を通して見通しをもって結果を予想すること、論理的に考察し、表現する能力を求められるが、その題材として取り上げられているのは平面図形が主となり、空間図形を用いて論理的に考察、表現する能力を伸ばす活動はあまりなされていない。また、対象の図形を念頭操作する活動が、平面図を回転させるとどのような空間図形になるのかを考えたり、投影図を組み合わせると空間図形を想起したりするといった場面であるが、これでは空間認識力を育むには十分ではないと考えられる。

(3) 教材開発の視点

本研究の目的は、空間認識力を育む教材を開発することにある。空間認識力を育むためには生徒の発達の段階に合わせて、具体物を取り扱った操作や観察の活動から、具体物を用いずに念頭操作を行う活動へと発達させることが重要であると先行研究の指摘からあげられる。また、徐々に具体物から離れて念頭操作をすることが必要であると國本（1995, 1997）は強調している。学習指導要領における空間に関する領域でも、小学校算数科では具体物を用いて操作、観察、構成といった活動をしており、中学校数学科においては具体物から離れて活動をしていくように構成するよう述べられている。

しかし実際には、空間を取り扱う小学校算数科や、中学校第1学年では、空間に対する念頭操作を必要とする課題設定の場面は少ない。辺や面の位置関係、展開図といった空間図形の知識に関する課題設定が多く、念頭操作を行う活動は十分ではないと考えられる。また、学習指導要領から、具体物を用いた活動から具体物を用いないで念頭操作をする活動の接続が不十分であると読み取れる。

以上から空間認識力を育むためには現在の指導内容に加えて、具体物を用いながら念頭操作を必要とする活動が必要であると考えられる。よって、本研究では生徒らが具体物を操作、観察しながらも念頭操作を行う教材であるということに焦点を当てて教材を開発していく。

5 空間認識力を育む教材

本節では空間認識力を育む教材として折り紙建築を取り上げる。まず折り紙建築の教材としての特徴を述べる。次に折り紙建築を開いたときの角度で分類し、それぞれの製作方法を分析する。

そして教材開発の視点から考察し、どの折り紙建築に着目して実践するかを述べる。

(1) 折り紙建築とは

折り紙建築とは、茶谷正洋氏（1981）によって開発されたもので、ポップアップカードの一つである。ポップアップカードとは二つ折りの紙を開くと三次元形状が立ちあがるものである。ポップアップカードでは紙を足していった三次元形状を作り上げるが、折り紙建築では一枚の紙から切り起こし、切りこみと折り曲げ、接着のみで形を形成するものである。

(2) 折り紙建築の教材としての用いることの意義

折り紙建築の教材として用いることの意義は、以下のものがあげられる。

1 つ目に、念頭操作を必要とする教材であることである。折り紙建築が折り畳まれたり立ちあがったりするには、設計するときには数学的な条件（以下設計の条件と呼ぶ）を満たしていなければならない。折り紙建築を操作、観察しながら生徒たちが設計の条件を見出す活動や、その条件に基づいて設定し製作する活動の中に念頭操作があり、空間認識力を育むことができると考えられる。

2 つ目に構成する面の数によって発展させることができるということである。面の数が増えていっても二つ折にできるという基本的な考えは同じであるから、同じ条件を基にして発展させることができる。面を増やすことで、新たな設計の条件が生まれる。

3 つ目に、三次元形状が折り畳まれたり立ちあがったりするところを実際に見ることで、子ども们的な好奇心をくすぐり、なぜ折り畳まれたり立ちあがったりするのかを不思議に思ったり、明らかにしたいと思ったりするといった、動機づけに繋がり、算数・数学に対する情意的な側面を育成することができる。

(3) 折り紙建築の分類

折り紙建築は開く角度によって以下の4つに分類される。

- ・ 90度型：90度を開いたときに形状が立ちあがり、二つ折りで折り畳むことができる。
- ・ 180度型：180度を開いたときに形状が立ちあがり、二つ折りで折り畳むことができる。
- ・ 360度型：360度を開いたときに形状が立ちあがり、二つ折りで折り畳むことができる。
- ・ 0度型：紙の重なりで立体感を表現する。

(4) 本研究で取り上げた折り紙建築

分類したそれぞれの折り紙建築の製作の手順を分析し、教材開発の視点から考察することから本研究で取り上げる折り紙建築を決定する。

① 90度型折り紙建築について

90度型のもは、切り込みと折り曲げで三次元形状を表現するものである。設計の条件を満た

さなければ、折り畳まれたり起ちあがったりしない。その条件を考える活動は、製作された折り紙建築が折りたたまれたり起ちあがったりするところを操作、観察することを通して行ったり、折り畳まれる映像を見たりして行うことができる。自らの手で自由に回転や折り畳んだり開いたりという操作を加えつつ、切り起こされた面、切り込み、折れ線の長さについて着目して観察していく。そこでどのような条件があるのかを考えていく。

折り畳まれたり起ちあがったりする条件に基づいて設計をする活動では、まず製作したい立体図形や三次元の形状を分析する。どの向きに設定するのがよいのか、切り込みをどのように入れたらよいのかなどを考える。設計図から出来上がった形状を念頭で構成し、それを折り畳んだり起ちあがったりするような操作を行うと考えられる。それによって条件に基づきながらも正確な設計図を描くことができ、折り紙建築を製作することができると考えられる。

また 90 度型の特徴として形状物を横からみると空洞になっており、筒のような形状になることがあげられる。この横からみたときの空洞は、折り紙建築を開いたり畳んだりするときの動きを観察しやすくなると考えられる。加えて、90 度型の折り紙建築は空洞の形が柱になるもの、錐になるものにさらに分類される。それぞれ折り畳まれたり起ちあがったりするための条件が異なるということも、90 度型折り紙建築の特徴である。

②180 度型について

180 度型のもは、まず紙の中心折れ線の左右両面に切り込みと折り曲げを加え、面を構成する。次にそれを接着することで三次元形状を製作する。90 度型と同じように折り畳まれたり起ちあがったりように製作するためには数学的な条件を満たさなければならない。その条件を考える活動では 90 度型における条件の見つげるときの方と同様に、製作された折り紙建築を操作、観察をする活動が考えられる。90 度型とは異なり、折り畳まれたり起ちあがったりするための条件が複数あるので、条件を考える活動は複雑なものになるだろう。製作された折り紙建築の操作、観察以外にも、設計図の実測や製作されたものを分解して設計図にしていく活動なども有効であると考えられる。

設計図を描いて折り紙建築を構成する活動でも、基本的な考えは 90 度型と同じく、まず製作したい立体図形や三次元形状を分析する。次に底面の設定の仕方や、折れ線の設定、接着する辺や切り離す辺の設定などを行う。90 度型の場合よりも折り畳まれたり起ちあがったりする条件が多いので設計の条件も多い。そのため折り畳まれたり起ちあがったりするための条件を整理していかなければならない。

③360 度型について

360 型も、180 度型と同じく、紙の中心折れ線の左右両面に切り込みと折り曲げを加え、面を構成し、それを接着することで三次元の形状を表現するものである。しかし、360 度型のもは設計の条件が多く製作が困難なため、本研究では話題にしない。

④0 度型折り紙建築について

0 度型のもは切り起こした面を接着したり、折り曲げたりして三次元形状を表現する。折り畳まれたり起ちあがったりする必要が無いので、設計や製作を自由にできる。一枚の紙から切り起こして三次元形状を製作する活動は、空間図形の構成をしており、空間認識力を育むには重要な活動ではあるが、現行の教育課程の中で既に展開図から空間図形を構成するといった、ほぼ同じ内容の活動が行われている。また製作された折り紙建築の操作や観察から、折り畳まれたり起き上がったりのための設計の条件を見いだす活動をする事が無い。

以上から空間認識力を育む教材として 90 度型、180 度型、360 度型の折り紙建築が適していると考えられるが、180 度型や 360 度型は製作や設計図の描き方が 90 度型の考え方を基にしており、90 度型の発展したものと捉えられる。よって本研究では 90 度型で実践をする。

6 実践研究

(1) 授業実践の目的

90 度型の折り紙建築の設計図を描き、製作する活動で生徒が念頭操作をしているかどうかを検証することである。

(2) 実践授業の対象と時期

実践の対象：新潟市内の中学校第 1 学年 2 組 31 名

時期：平成 24 年 1 月 20 日

(3) 分析方法

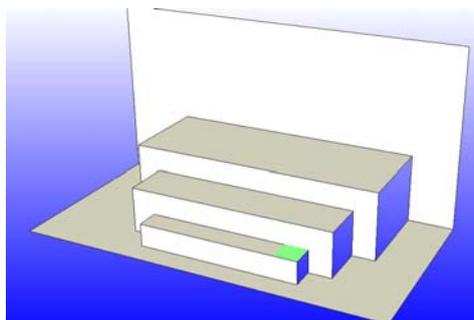
本授業研究の分析は、授業中の生徒の様子と生徒の設計図、授業アンケートから行ったが、特に設計図の完成度に注目して行った。

(4) 実践の構想

本実践では、授業時間が一時間であることと、このような教材を今まで取り扱ったことのない生徒であるという実態を踏まえ、横から見たときの切り口の形が正方形であるものを取り上げる。簡単な構造である立方体の設計の仕方から、直方体の設計の仕方を見出す。そしてそれを組み合わせて面を増やして発展させていく活動を行う。その段階の組みを増やしていくときには同じ考え方に基づいているものである。一つの視点からの段階の見え方の図を生徒にみせて設計図を描く活動を行う。

導入の場面では折り紙建築について基本的な理解をするための紹介を行う。製作された折り紙建築と三谷純氏により開発されたポップアップカードデザイナーというソフトウェアを用いて行う。製作された折り紙建築の操作や観察では実際に折り畳まれることを自らの手の動きにともなっていることが実感させることができる。ソフトウェアを用いることで、折り畳まれていく動き

を一時停止したり、いろいろな角度から見たりできるので、折り畳めるための設計を見出す助け



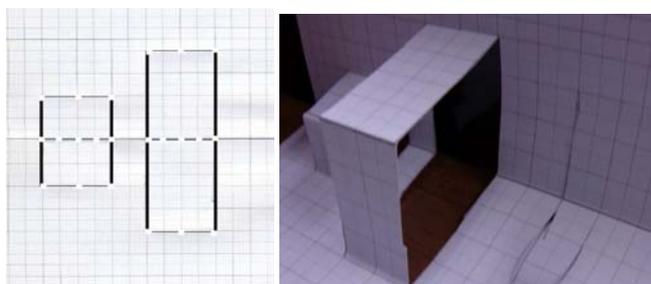
となること、折り畳みの動きのイメージの形成がなされるだろう。ここで立方体の折り紙建築の設計図の書き方を考え、立方体の設計図のどこを変えれば直方体を作ることができるかを考える。そして立方体、直方体の設計図の書き方を組み合わせることで左の階段の設計図の完成を目指す。

(5) 授業の実際

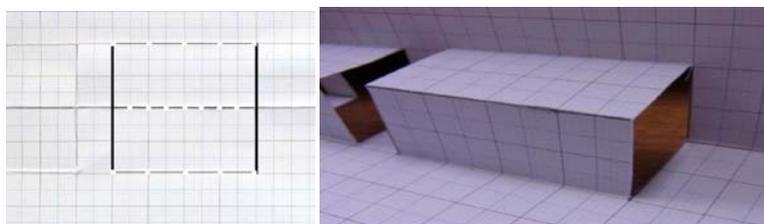
設計図では未提出者が3人おり28人、アンケートは31人となった。以下では設計図の代表例や、設計図がうまくいかなかった例を挙げる「——」を切り線、「----」を谷折り線、「-----」が山折り線を表す。

①立方体と直方体の設計図

立方体が折り畳まれていく動きをソフトウェアで見せ、次に実際に出来上がったらどういった形になるかを見せてから、一辺が2センチメートルの設計図を描かせた。ここでの活動は提出した28名全員が一辺2センチメートルの折り畳まれる立方体の設計図を描き、製作することができていた。出来上がった立方体の設計図のどこを変えたら直方体の設計図ができるかと問いかけ、設計図を描かせた。ここでも28名が直方体の設計図を描き、製作することができていた。19名が立方体の設計図の正方形を縦に長くする長方形を描いて作る考え方で、9名が設計図の正方形を横に長くして長方形を描き製作していた（下図参照）。



(図 1. 立方体と縦長の直方体の設計図) (図 2. 縦長の立方体)

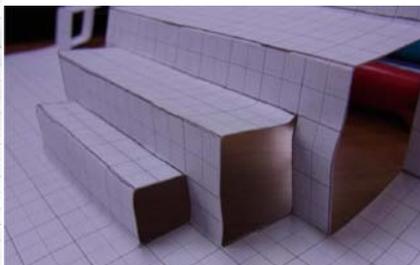
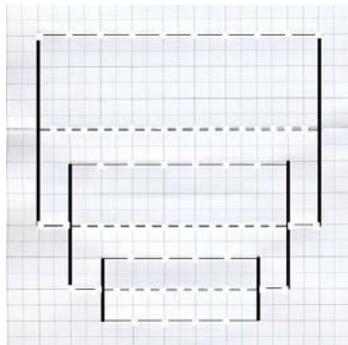


(図 3. 横長の立方体の設計図) (図 4. 横長の立方体)

②階段の設計図

以上の立方体、直方体の設計図の書き方を用いて、階段の設計図を描くことができるかどうか問いかけ、設計図の描き方を一人で考えた後にグループ内での質問の時間を設け製作を目指した。飛び出た形状からさらに飛び出すにはどうしたらよいかは生徒自身に考えさせ、途中で折り畳み

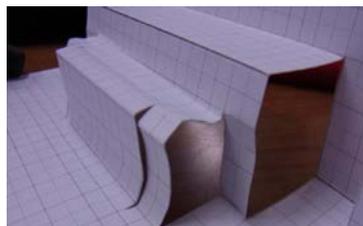
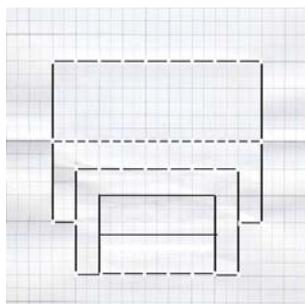
の動きをソフトウェアで見せることとした。また一段一段切って作っていくのではなく、設計図が完成してから切ったり折ったりして製作するよう指示した。階段の製作を設計図も含め行えたのは19名で、9名は設計図に欠陥があったり（8名）切り込みの長さを誤ったりして（1名）製作を行えていなかった。



(図4. 設計図が成功したもの)

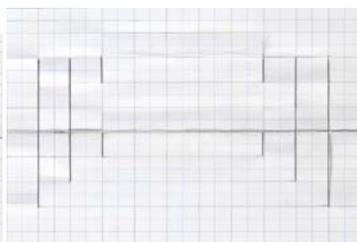
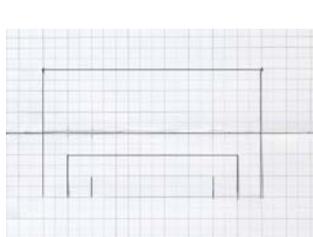
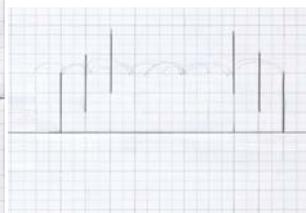
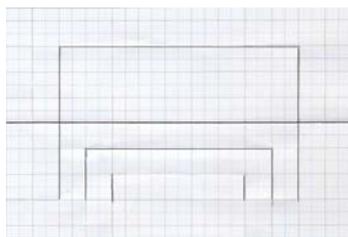
(図5. 階段の製作が成功したもの)

このような設計図をソフトウェアでの動きを見せる前に、画像だけから描いていた生徒の姿も見られた。生徒の設計図の失敗例を以下に示す。



(図6. 設計図の失敗例1)

(図7. 図6から製作されたもの)



7 実践の分析

(1) 授業分析の視点1から

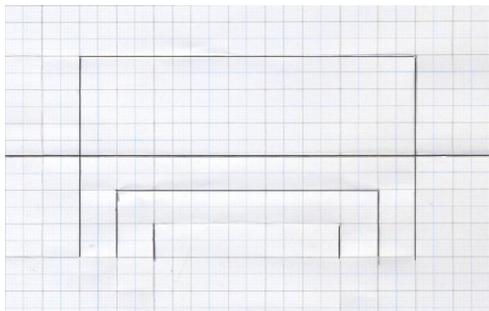
本研究における分析の視点1は、階段の折り紙建築のイメージ像を形成することができたかど

うかである。念頭操作に必要なイメージを得るために、本実践では階段の画像をスクリーンに映し出し、それを見せてから設計の活動を行った。生徒は立方体と直方体の設計図を描く活動を通して、折れ線の上下に立面図と平面図を接するように作図することで設計図になることを体感している。そのため設計図を描くことはできる。

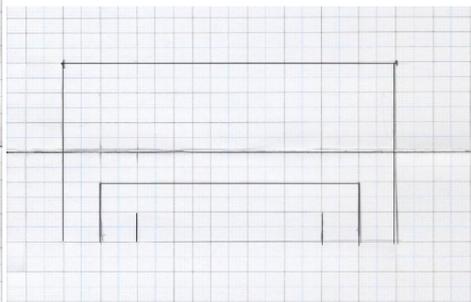
階段のイメージを形成することができたがどうかは、設計図から判断する。折線の上下に長方形をかけているか、段組みを作ろうとしているかで判断する。

①イメージが形成できていない生徒について

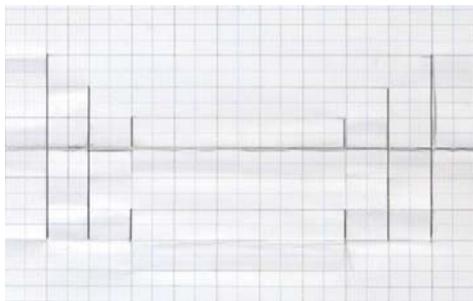
階段の図から、イメージを形成できていないと考えられる生徒は3名であった。



(図 8)



(図 9)



(図 10)

図 8、9 の設計図は、階段の一番大きな段は設計できているが、立面図をそのまま書いてしまっている。これは階段の飛び出す部分の形状のイメージができていないため、なぜ飛び出るのか、飛び出すにはどのように設計するのかを見いだせなかったものと考えられる。

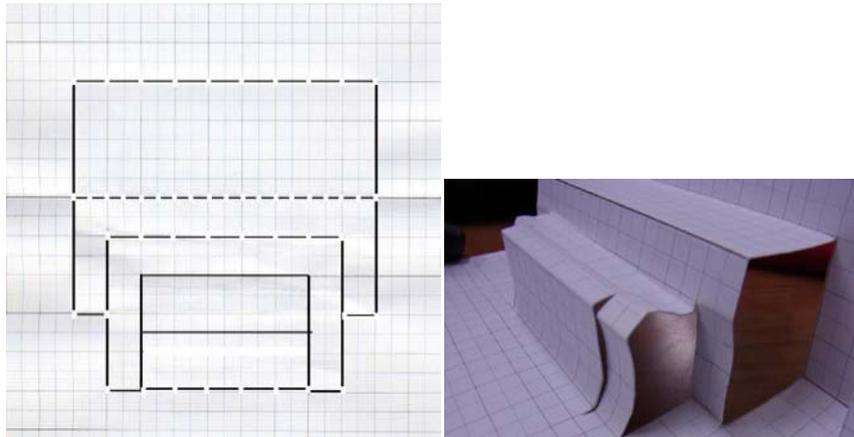
図 10 の設計図は、平面図を描くところに立面図をそのまま書いてしまっている。またその線が平面図の部分にまでまたがってきている。これは階段のイメージの形成ができていないことが原因と考えられる。また、出来上がりのイメージもできないため設計図の誤りに気がつかないだろう。

このような生徒にはイメージの形成を促すため、ある一つの視点からの見え方だけでなくさらにいろいろな角度から見せることが必要であると考えられる。

②イメージ形成ができていた生徒について

イメージが形成できていた生徒は設計図も完成して製作もできるものが多かったが、1名切り込みの長さを誤ってしまい、製作できていなかった。設計図から出来上がりを念頭操作で組み立

てられれば、切り込みの長さの誤りに気がついたらと考えられる。



(2)授業分析の視点 2 から

本研究における分析の観点 2 は生徒が念頭操作を成功的に行うことができたかどうかである。これは設計図とアンケートの記述を基に行う。本実践では、まずスクリーンの映像を見て一人一人で考えて設計図を描く段階、次にグループで質問をしてその結果を活かして設計図を描く段階、最後にスクリーンの階段が折り畳まれていく映像を見て設計図を描く段階と設定した。

念頭操作を成功的に行えている生徒とは、階段をスクリーンの画像から設計図をかけたものとする。一つの視点からの見え方からイメージを形成し、それを折り紙建築の設計図になるように分解、変形、移動、組み合わせといったいくつかの念頭操作が成功的に行われていないと設計図は完成しない。

念頭操作を成功的に行えていないと判断される生徒とは、ソフトウェアでの動きの観察やグループでの話し合いの活動を通して、設計図が描けなかった生徒である。他者との会話や設計図の比較の中で違いを見いだせないということは、設計図から出来上がりを念頭操作することや、設計図の違いから出来上がりの形状の違いをイメージすることができていないと考えられるからである。

設計図を描き、製作できていた 24 名のうち、スクリーンの画像から設計図をかけていたものは 11 名おり、13 名はその後の話し合いから修正したり折り畳まれていく動きをみて設計図を修正したりしていた。

①念頭操作を成功的に行っていた生徒について

グループでの話し合いの場面でも、質問に答え教える立場であり、奥行き長さや、段組みの大きさを 1 センチずつ小さくすることなど、スクリーンから様々な情報を読み取ることもできていた。また、授業アンケートにおいても、折り紙建築の対称性について書いていたり、出来上がりをイメージすることが重要であると記述したりしていた。

念頭操作を成功的に行っていた生徒は、立方体、直方体を作る活動でも他の生徒よりも早く進んでおり、スクリーンからイメージを形成し、一つの見え方から情報を得ることに優れていた。

そのため奥行きの高さや高さを見いだしたり、飛び出すためには折り目をずらすことを見いだしたりしていた。

②念頭操作を成功的に行えていなかった生徒について

スクリーンの一つの見え方だけでは、飛び出す部分の設計ができなかったり、長さがわからなかったりする生徒がいたが、グループで質問をすることや折り畳まれていく動きを見ることで設計ができていた。特に折り畳まれ動きを見ることは階段の構造をとらえるといった、設計図を描く手がかりになったと考えられる。また様々な角度からの見え方を見せることも有効であると考えられる。

8 総合的考察

(1)折り紙建築の設計図を描き製作すること

本実践では、具体物の操作や観察をしながらも念頭操作をするような活動をさせたかったので、スクリーンから設計図を作る活動を取り入れた。まず一つの視点からの見え方を写したスクリーンの映像を見て一人一人考えて設計図を描く段階、次にグループで質問をしてその結果を活かして設計図を描く段階、最後にスクリーンの階段が折り畳まれていく映像を見て設計図を描く段階と設定した。念頭操作するためのイメージ像の形のために、スクリーンで階段の一つの視点からの見え方の画像を見せた。一つの視点からの見え方だけでは設計図を描くことができない生徒も見られたが、話し合い活動、いろいろな角度から見せたり折り畳みの動きを見せたりすることで製作をできるようになっていた。立方体や直方体の設計図については全員が完成させることができていた。このことから折り紙建築の設計図を描かせることは簡単ではないが、作らせる題材や作る過程を細かくするとといったような工夫をすることでどの生徒にも設計図を描き製作させることができるのではないかと考える。

(2)折り紙建築に関わる念頭操作と空間認識力

本研究では空間認識力をイメージする側面と思考する側面とについて述べてきた。特に念頭操作は思考する側面に関わりを持つ。画像からイメージ像を作りそれを念頭操作して折り紙建築の設計図を描き製作する活動は、本研究の空間認識力と以下のようにかかわりを持つだろう。

	本研究における空間認識力	製作に関わる念頭操作
--	--------------	------------

イメージする側面	<ul style="list-style-type: none"> ・図形を認める ・図から立体図形を想起する ・立体図形の位置、位置関係をとらえる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・イメージ像を形成する ・イメージ像を形成する ・階段の段組みをとらえる（飛び出す面はどこからとびだしてきているのか）
思考する側面	<ul style="list-style-type: none"> ・変形、切断、回転などの操作の結果を見通す ・立体図形を構成する ・立体図形を図で表現する ・空間を移動する ・対称性、合同性、相似性を認識する ・基本的法則や性質に着目する 	<ul style="list-style-type: none"> ・折り畳まれるという操作の結果を見通す ・切り起こしを用いて製作する ・設計図を描く ・他の視点からの見え方を形成する ・折り畳まれるということは線対称であることを認識する ・折り畳まれる形状の作り方、段組みをずらして作るには折り線をずらしていくことを活用する

以上のように折り紙建築の設計図を描き、製作する活動は具体物を用いながらも念頭操作をしているものであり、空間認識力を育む活動として有効であると考えられる。

(3)折り紙建築をどのように扱うか

折り紙建築を製作する活動は立体を構成したり変形させたりする活動をさせることができ、その理由や性質を説明させることもできる。また、面を増やしていくことや開いたときの角度を180度にすることで発展させていくことができたり、設計図を描き製作したときには生徒に達成感を感じさせることができたりする。折り紙建築には数学的な性質が隠れているものであるので、設計図を描き製作することが必要である。

おわりに

本研究の成果は以下の3点である。

(1)空間認識力について概念規定をしたこと

空間の課題に対する思考内容についての研究は様々なものがあるが、先行研究の概観から空間認識力を概念規定することで、空間における課題を解く際の生徒の内的な活動を示すことができた。イメージする側面、思考する側面と分けて考察し、空間に関する課題を解くときに関わると考えられる様々な能力を記述した。そうすることで生徒がどこでつまづいたのかを明らかにすることに役立つと考えられる。

(2)空間認識力を育む教材とその用い方を開発したこと

空間認識力を育むにはイメージ像を念頭で操作する活動が必要であることを示し、その活動をさせるために折り紙建築を取り上げた。設計図を描き製作する活動や、三谷純氏のソフトウェア「ポップアップカードデザイナー」を使うことで様々な活動が可能であることを示した。折り紙建築は段階を設定し発展させていくことができるものであり、見取り図から設計したり言語による表現から設計したりすることができ、様々な念頭操作を行う教材である。

(3)実践により教材の有用性を検証したこと

実践では階段の形状の設計図を作り製作を目指した。そのなかでイメージ像が形成できていない生徒や、念頭操作を成功的に行えていない生徒など様々であったが、念頭操作を成功的に行えている生徒は設計図を完成させて製作することができていた。また設計図から出来上がりをイメージするといった念頭操作を行っている生徒いた。折り紙建築の設計図を描いてから製作する活動には念頭操作が必要であり、空間認識力を育む教材として有効であることが分かった。

本研究の今後の課題は以下の3点である。

(1)イメージ像を作ることについての支援の開発

本実践ではイメージ像を作るための支援として画像を見せることだけで、生徒のこれまでの知識や能力に任せてしまった。そのためイメージ像を形成できずに設計図を描くことができない生徒が見られた。こういった認知的側面は生徒の生活経験やこれまでの学習に依存するところが大きいだろうが、イメージ像を形成できなければ念頭操作を行うことはできないと考えるので、どんな生徒でもイメージ像を形成できるような支援を開発する必要がある。

(2)空間認識力を測定するテストの開発

空間認識力を開発するテストとしては、メンタルカッティングテストという空間図形の切断面を考えるテストがあげられるが、より生徒の学力や学習内容に合わせたテストが必要であると考ええる。また本研究における空間認識力は、イメージ像を形成しそれを念頭操作するという思考活動であるということにも留意し、何をイメージしてどのように考えて解いたということを記述させることが必要であると考ええる。

(3)念頭操作の見取り方の開発

本研究では、主に折り紙建築の設計図を基に分析した。その完成度や、活動のどの段階で達成させることができたかどうかで、念頭操作を行えたかどうか、行っていたかどうかを分析した。このほかに、折り紙建築をつくる過程で何をイメージしながら設計図を描いたり製作したりしたのかを記述させることやインタビューをすることで、より念頭操作について明らかになり、念頭

操作を見取ることに繋がっていくのではないかと考えている。

参考・引用文献

文部科学省(2008)、「学習指導要領解説、算数編」、東洋館

文部科学省(2008)、「学習指導要領解説 数学編」、教育出版

影山和也 (2003)、「数学教育における空間思考の水準に関する研究」

國本景亀 (1995)、「空間直感力育成のための一提案——暗(念頭)幾何の提案——」第 28 回数学教育論文発表会論文集、p413 - 418

國本景亀 (1997)、「空間観念を育成するための方法論に関する研究」高知大学教育学部研究報告 第 1 部 第 53 号、p11 - 27

狭間ら「ヤキマンスカヤの空間思考について」数学教育論文発表会発表要項 20 巻, 129-133,
「空間思考育成の視座からの図形・空間カリキュラム開発研究構想」大阪教育大学教科教育学論
集 2004 p67-70

「児童・生徒の空間思考に関する調査研究(2) - 空間思考の発達の指標についての一考察 - 」2000
第 33 回数学教育論文発表会論文集 p373-378

近藤、国宗ら (2010)

「空間図形についての理解に関する研究—1つの平面に着目して考えることを中心に—」第 43 回
数学教育論文発表会論文集 p163 - 168

国宗ら(2008)

「空間図形についての理解に関する研究—小中高を見通した空間図形カリキュラム—」第 41 回
数学教育論文発表会論文集 p381 - 386

木原隆明 折り紙建築養成講座 2008 建築ジャーナル 第 1, 2, 6 回目

藤原大三郎 (2005) 切り起こし 180 度型折り紙建築の設計支援に関する研究

三谷純 (2004) 平面多角形の集合による「折り紙建築」モデルの表現と計算機による設計支援 情
報処理学会論文誌、p969 - 976