新潟大学教育学部数学教室，『数学教育研究』，第 48 巻，第 1 号，452-501，2013.

数学的コミュニケーション活動に関する研究
―学習課程の展開における社会的相互作用に焦点をあてて―

阿部ゼミナール
三ヶ月　好

序章　本研究の目的と方法

本章では，本研究の目的と方法を述べ，論文全体の概要を示す。第 1 節では本研究の目的を，第 2 節では本研究の方法と構成を述べる。

第 1 節　研究の目的

数学教育は何にためにあるのだろうか。子どもたち，さらに教師といった多くの人が直面する疑問と思われる。「なぜ数学を学ぶのか」，数学教育の意義を考えることなく，受験のためといったように，特に中等教育の目的が議論されている（阿部，2010）。中学校における数学教育の目的は，教育的価値から，人間形成的目的，実用的目的，文化的目的の 3 つにまとめられ，人間形成的目的は，思考力，判断力，表現力，態度，価値観などを育成しようとするもの，実用的目的は，数学やその他社会・文化的な活動に必要な数学の知識や能力などを身に付けさせようとするもの，文化的目的は数学のよさを感得させようとするものと捉えられている（長崎，2009）。長崎（2009）は数学教育の目的には，子どもが中心にいることの重要性を述べている。さらに子どもが中心とはいえ，その子どもは個人ではなく，集団であると考える。そして，集団で相互に作用しながら数学教育の目的は達成されていく。また，学習は学習者，生徒，教材それぞれが関わり合いながらなされていく。数学における学習とは，真理としての数学を教師が生徒に教え込むことでは決してない。生徒同士が学び合い，数学を創りだしたり，生徒自身が主体的に活用する活動が重要視されるべきである。そこで，コミュニケーションが重要な役割を担っていると考える。

OECD・PISA では，生徒が数学的な内容に取り組むのに必要な技能のまとまりである数学化のプロセスには，思考と推論，論証，コミュニケーション，モデル化，問題設定と問題解決，表現，記号による式や公式を用いた演算，テクノロジーを含む道具を用いることの 8 つの能力が関わっているとしている（OECD，2006）。学習指導要領（2008）においても伝達，表現，話し合い，などの用語が用いられており，数学教育におけるコミュニケーションの重要性が強調されている。

しかし，重要性が強調される一方で，現行の指導では，なぜ数学教育においてコミュニケーションが必要なのか，どのようなコミュニケーションがよいものなのか，などが明らかになっていない。また，単に生徒同士が話をしていれば，コミュニケーションをしていると捉えられてしまっている。久保（2009）は，《考えを表現すること，考えを解釈することはなされていても，「～し合う」といった他者との関わりを深めていく活動は多くは見られない》（p.98）と述べているように，形骸化されたコミュニケーションが数学教育において多く見られる。

以上の課題意識の下，本研究では，数学的コミュニケーション活動を主題とし，他者と自己，自己内においてそれぞれ相互に関わり合う数学的コミュニケーション活動を明らかにしてく。また，数学的コミュニケーションがどのようなものなのかも明らかにする。

《本研究の目的》
数学教育におけるコミュニケーションの重要性，さらに数学的コミュニケーションとはどのようなものなのか明らかにするとともに，充実した数学的コミュニケーション活動を明確にすること。

第２節　研究の方法と構成

前節における研究目的を達成するために，次の３点を主要な研究課題とする。

（研究課題１）数学をコミュニケーションという視座から考察し，数学的コミュニケーションとはどのようなものなのか先行研究を基に概念を明確にすること。
（研究課題２）「課題１」をうけて，社会的相互作用と数学的コミュニケーションのつながりを明確にし，学習過程において重要となる様相を特定すること。
（研究課題３）「課題２」をうけて，充実した数学的コミュニケーション活動を明確にすること。

数学的コミュニケーション活動の充実という研究目的に対し，数学をコミュニケーションの視座から考察し，本研究における数学的コミュニケーションとは何かを明らかにする（研究課題１）。その後，数学学習の指導を考えていく際に重要となる社会的相互作用に焦点をあて，社会的相互作用と数学的コミュニケーションのつながりを明確にし，学習過程において重要となる様相を特定する（研究課題２）。そして，充実した数学的コミュニケーション活動を明確にする（研究課題３）。これらの研究課題は，研究課題１を受けて，研究課題２があり，同様に，研究課題２を受けて研究課題３がある。したがって，それぞれ相互に関わり合いながら本研究は進んでいく。

「第１章　コミュニーションの視座からの数学」では，はじめに「コミュニケーションとは何か」，「数学とは何か」を明らかにする。そして，数学教育におけるコミュニケーションの重要性を述べる。

「第２章　数学的コミュニケーションの概念規定」では，数学的コミュニケーション能力と過程に関する先行研究について，何をもって「数学的」と捉えているのかという視点から考察する。そして，第１章において捉えたコミュニケーションの視点である個人内・個人間，さらに数学の方法という視点で，本研究における数学的コミュニケーションの概念規定を述べる。

「第３章　数学学習過程における社会的相互作用」では，社会的相互作用に着目し，数学的コミュニケーションと社会的相互作用のつながりを明らかにし，活動内のどの様相に

焦点をあてるか述べる。
「第４章　充実した数学的コミュニケーション活動の明確化」では，先行研究を基に，認知面を強調した学習過程と認識面を強調した学習過程を補完し，両方の視点を取り入れた個人内の学習過程を考察する。また，個人内の学習過程を基に，集団における個人間の学習過程として数学的コミュニケーション活動を明確化する。
「終章　本研究の総括と今後の展望」では，本研究で得られた成果を述べ，残された課題も示す。
最後に，各章の関連と研究課題との対応は図０のように示すことができる。

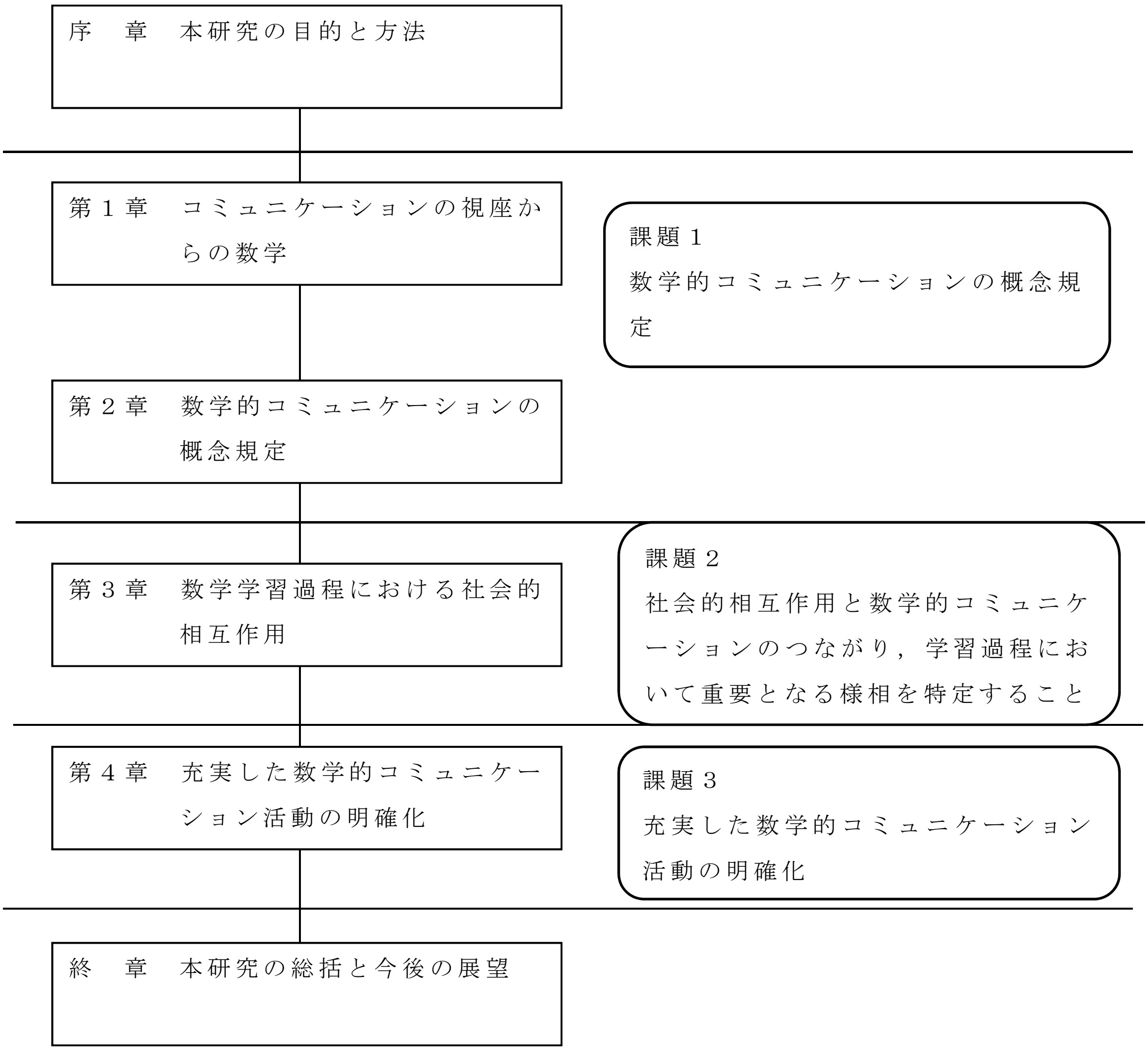


図 0　本論文の構成

第１章　コミュニケーションの視座からの数学

第 1 章では,「数学とは何か」をコミュニケーションという視座から明確にすることが目的である。第１節では,先行研究を基にコミュニケーションの定義を行い,第２節では,第１節でのコミュニケーションの定義を基に，コミュニケーションの視座から数学を考察した。第３節では，第２節の考察から，コミュニケーションの視座からの数学とは何かを明確にする。

第１節　コミュニケーションの定義

コミュニケーションとは広辞苑によると,《社会生活を営む人間の間に行われる知覚・感情・思考の伝達。言語・文字の他視覚・聴覚に訴える各種のものの媒介とする》（新村，1998）とある。つまり，言葉で表現したものだけではなく，ジェスチャーなどもコミュニケーションに分類される。

コミュニケーションのプロセスは，人間の生活すべてを包括しており，様々な局面があり，それら全部をひっくるめて１つの定義を与えることは非常に難しい。実際，アメリカのコミュニケーション学会でフランク・ダンスとカール・ラーソンが，現存する 126 種類のコミュニケーションの定義を挙げている。このように，学者たちの間でも様々な議論が展開され，学問の発展に伴って定義そのものについても変化が起きている。

広辞苑によるコミュニケーションとは別の視点で，八代（2001）は,《コミュニケーションとは，私たち人間が自分自身の内部体験や外界からのさまざまな刺激に対して，自分なりの意味を見出そうとする創造的なプロセスであり，個人内（自己内）コミュニケーションと個人間（対人）コミュニケーションがある。》（p.29）と定義している。これは，コミュニケーションを個人内と個人間で捉えている。本研究では，八代（2001）が述べたコミュニケーションの定義をまとめた以下のものを本研究によるコミュニケーションの定義とする。

【コミュニケーションの定義】 コミュニケーションとは，私たち人間が自分自身の内部体験や外界からのさまざまな刺激に対して，自分なりの意味を見出そうとする創造的なプロセスであり，個人内（自己内）コミュニケーションと個人間（対人）コミュニケーションがある。

第２節　数学とコミュニケーション

「数学」において,コミュニケーションはどのように位置づけられているのか考察する。そのために，キース・デブリンの「パターンの科学」という数学観に基づき，今日的な数学観を捉え，その後，科学技術の智プロジェクトをもとに「数学とは何か」についてまとめる。

2.1. パターンの科学としての数学

キース・デブリン（1995）は，《ある特定の研究が数学に分類されるのは，それが何を研究しているかではなく，どう研究されているかによるところが多い。つまり，使われている方法論が問題なのである。》（p.10）と述べている。つまり，数学を従来の公理が前提として存在し，その中で数学的構造を議論する学問ではなく，パターンによる探求を行う学問であると主張し，「数学はパターンの科学である」と捉えている。

また，デブリン（1995）は，これまでの偉大な数学者は，抽象的なものの特性や規則性をパターンとして捉え，科学することで，それらを数学とした，と捉えている。そして，パターンは日常的な世界の中にある，と述べている。実際に，計算のパターン，推論と伝達のパターン，形のパターン，運動と変化のパターン，対象性と規則性のパターン，位置のパターンといった「抽象的なパターン」の研究がなされてきており，《抽象的なパターンというのは，思考，通信，計算，社会，そして生命そのものの本質》（p.16）と捉えられている。そして，このように数学をパターンの科学として探求することで，形式的な表象や言語による表現を用いることも可能になることもデブリン（1995）は言及している。

デブリンの数学観は「数学は思考，通信，計算，社会，そして生命そのものの本質であるパターンを捉えていくものである」と言える。これは，作り上げられた系統的な数学ではなく，パターンの探求といった原初的なものとして数学を捉え，近年強調され始めている。よって，デブリンの数学観は今日的な数学観であると考えられる。

2.2. 科学技術の智プロジェクトにおける数学

科学技術の智プロジェクト（2008）『専門部会報告書』（以下報告書）における数学の本質，数学の内容，数学の方法を表 1.1 のようにまとめることができる。

表 1.1　数学の本質，内容と方法

	科学技術の智プロジェクト（2008）『専門部会報告書』
数学の本質	◆　数学の基礎は数と図形である ◆　数学は抽象化した概念を論理によって体系化する ◆　数学は抽象と論理を重視する記述言語である ◆　数学は普遍的な構造（数理モデル）の学として諸科学に開かれている
数学の内容	◆　数と量 ◆　図形 ◆　変化と関係 ◆　データと確からしさ
数学の方法	◆　言語としての数学 ・コミュニケーションの手段，考える手段として「言語」の機能 普遍的な言葉として独自の考える方法をもっている。 ・数学語の特徴

自然言語以上に抽象的，論理的。自然言語との違いとして，基本的に記述言語で，用語の意味の曖昧さがない。思考・コミュニケーションの手段としての図形（特にグラフ）の使用。

・計算とアルゴリズム

数式を用いた文章，計算手順を実行することは論理的な推論を行っている。

・図表現

直観的・総合的表現としての図表現。

◆　問題解決・知識体系の構築としての数学の方法

・数学問題解決サイクル

１）問題を数学の言葉で言い表す（数学化）

２）数学の問題として解決する（定式化）

３）数学で得られた解を本来の問題に適合する形で表現する

４）本来の問題の解として適当かチェックし，更なる進展を検討する

以上のようなサイクルで問題解決が行われる。これは，単に自己の既存知識を応用するだけではなく，同時に自らの知的体系を更新し，構築していくことでもある。

キース・デブリン（1995）の「パターンの科学」という数学観は，報告書における数学の本質の中の「数学は普遍的な構造（数理モデル）の学として諸科学に開かれている」にあたると考える。

「数学は普遍的な構造(数理モデル)の学として諸科学に開かれている」を報告書(2008)では，以下のように述べられている。数学の《理論は普遍的で，それゆえ自然や社会を記述するモデル》(p.3）になり,《その有用性は，数学理論自身が強力なサブルーチンとして物事の理解，問題の解決につかえる。つまり，ある現象が数学理論の要求する諸前提（ある種の基本的法則）をみたりすることが分かれば，その理論を数理モデルとして，その結果を用いることにより現象についての様々の帰結（より高度の法則性など）が直ちに得られる》(p.3)。すなわち，数学それ自身を探求するというよりも，数学を使い，現象をひも解いていくことに焦点があたる。パターンとしての科学での捉えである「数学は思考，通信，計算，社会，そして生命そのものの本質であるパターンを捉えていくものである」と，整合的であると考える。

また，キース・デブリン（1995）が,《使われている方法論が問題なのである》(p.10）と述べているように，報告書における数学の方法に着目する。また，コミュニケーションを「個人内（自己内）コミュニケーションと個人間（対人）コミュニケーションがある」と捉えことから，数学も同様に個人内（自己内）と個人間（対人）という視点から捉える。

（1）言語としての数学

報告書（2008）では，《「言葉」は他者とのコミュニケーションに用いると共に，自らの中で「考える」ときにも用いられる。数学は「普遍的な言葉」として，独自の「考える」方法（他者とコミュニケーションする方法）を持っている。数学の方法を一言で言えば，「数学の言葉を用いて考える」こと》（p.31）であり，さらに《思考力とコミュニケーション能力とは表裏一体のものなのである》（p.82）と述べられている。

数学は，数学の方法として，独自の考える方法をもっている。つまり，「数学をすることは，思考すること」と捉えることができる。また，思考はコミュニケーションと表裏一体であることから，個人内で言語としての数学をすることは，コミュニケーションをすることであると言える。

数学は，数学の方法として，他者とコミュニケーションする方法をもっている。ゆえに，個人間で言語としての数学をするということは，他者とコミュニケーションをすることと言える。

つまり，個人内・個人間ともに，「数学をすることはコミュニケーションをすることである」と言える。

（2）問題解決・知識体系の構築としての数学の方法

報告書（2008）によると，《一般的にものを考えるプロセスは「認識（理解）する」（recognize，understand）→「（狭い意味で）考え（consider，contemplate），処理する（carry out）」→「表現する（伝える）」（represent，communicate）ことになる》（p.42）。そして，数学を用いた問題解決の過程は表 1 .1 に示した通りになる。
また，《問題解決という「外的な」行為は，必ず自己の「内的な」知識体系の更新を伴う。これが，問題解決の持つ教育上の意味》（p.43）であるように，数学教育において，数学の問題解決を行うことは知識体系の構築に重要な数学の方法を有していることがわかる。こうした数学問題解決サイクルにおいて，個人内・個人間において数学がどのようになされているかそれぞれ捉える。

数学問題解決サイクルは，数学を使って，問題の解決を図るものである。数学の問題を解決していくにあたり，言語としての数学独自の考える方法を使用していると捉えることができる。つまり，数学問題解決サイクルを個人内で捉える際，個人内の言語としての数学の捉えが根底にある。よって，個人内で問題解決の数学の方法として数学をすることは，コミュニケーションをすることと言える。

数学問題解決サイクルの「１）問題を数学の言葉で言い表す（数学化）」という場面で，問題を数学という言語によって言語化している。言語は他者とのコミュニケーションによって生じる。ゆえに，個人間で問題解決の数学の方法として数学をすることは，コミュニケーションをすることであると言える。

つまり，問題解決・知識体系の構築としての数学の方法は，個人内・個人間ともに，「数学をすることはコミュニケーションをすることである」と言える。

以上より，報告書（2008）で挙げられている数学の方法の「言語としての数学」と「問題解決・知識体系の構築としての数学の方法」は，それぞれ異なる数学の方法であるが，数学をすることはコミュニケーションをすることであると言えよう。

2.2.（1）では,「数学をすることは思考すること」であり,「思考することとコミュニケーションは表裏一体」であることから,「数学をすることはコミュニケーションをすることである」と述べたが，そもそも思考とはどのようなことを指すのか次に述べる。

2.3. 思考するとは

前節で個人において「数学をすることは思考すること」と捉えることができる，と述べた。しかし,「思考する」について不明瞭であった。ゆえに,「思考する」とはどのようなものなのか明確にする。

新しい学習指導要領では，思考力・判断力・表現力の育成が全教科通して重要視されている。しかし，高等学校国語科の学習指導要領において思考力というワードが早くから述べられていた。ゆえに高等学校学習指導要領解説国語編（2010）を見ると,《「思考力」とは，言語を手掛かりとしながら物事を筋道立てて考える能力》（p.9）と捉えられている。しかし，国語科のみがこのように思考力を捉えるのではなく，言語として数学が扱われるように，数学科においても思考力を捉えることができる。よって，数学科において思考していくことは,「数学という言語を手掛かりとしながら物事を筋道立てて考えていくこと」と言えよう。

さらに，長崎（2009）によると，思考とは《新しい問題場面において，事態を分析し，問題の核心をつかみ，既有の知識・原理を関連付けてこれを解決したり，解釈したりする》（p.27）ことと述べられている。

本研究では思考とは両者を統合し,「数学という言語を手掛かりとしながら，新しい問題場面において，事態を分析し，問題の核心をつかみ，物事を筋道立てて既有の知識・原理を関連付けて，これを解決したり，解釈すること」と捉える。

《思考力とコミュニケーション能力とは表裏一体のものなのである》（報告書，2008，p.82）ことから，思考とコミュニケーションは表裏一体であり，コミュニケーションも思考同様に捉えることができる。また，江森(2000)は《コミュニケーションは人間の思考そのもの》(p.28)と述べていることからも,コミュニケーションが思考そのものだと言える。

第３節　コミュニケーションの視座からの数学

本章では，コミュニケーションの定義をし，その後，コミュニケーションの定義における個人内・個人間という視点から，科学技術の智プロジェクトの数学の方法に着目し「数学とは何か」をまとめた。その際,「言語として数学をすることは思考することである」,「思考することとコミュニケーションをすることは表裏一体である」という視座に立ち，結果の以下のことを導出することができた。

言語としての数学，問題解決・知識体系の構築としての数学の方法は，個人内・個人間どちらともにおいて,「数学をすることはコミュニケーションをすることである」と言える。

以上より，「数学をすることはコミュニケーションをすること」と同定することができる。ゆえに，課題意識で述べた，数学教育において形骸化されたコミュニケーションが多く見られるということは，数学が十分に指導されていないと言えよう。よって，数学教育において十分な数学の指導を行っていくためにはコミュニケーションという視点が重要となると考えられる。

また，思考するとは「数学という言語を手掛かりとしながら，新しい問題場面において，事態を分析し，問題の核心をつかみ，物事を筋道立てて既有の知識・原理を関連付けて，これを解決したり，解釈すること」と捉えた。思考することとコミュニケーションをすることは表裏一体であることから，コミュニケーションをすることも思考することと同様に捉えることができた。では，数学教育という視点から，コミュニケーションを先行研究ではどのように捉えているのか，数学的コミュニケーションとして次章でまとめる。

第２章　数学的コミュニケーションの概念規定

本章では，数学的コミュニケーションの概念規定をすることを目的とする。そのために，第１節では，金本（1998）による数学的コミュニケーション能力，江森（1998，2012）による数学的コミュニケーション過程に関する先行研究を，「個人内」，「個人間」，数学における「言語としての数学」，「問題解決・知識体系の構築としての数学の方法」という視点から考察し，それぞれの研究において，何をもって「数学的」と規定しているのか考察する。そして，第２節では，第１節をふまえ，本研究における数学的コミュニケーションの概念規定を行う。

第１節　数学的コミュニケーションに関する先行研究の基礎的考察

金本（1998）によると，《算数・数学教育におけるコミュニケーション研究は，コミュニケーション能力の研究とコミュニケーション過程の研究に大きく区分することがきる。また，学級というコミュニケーションの場についての研究を見ることもできる》（p.88）と述べられており，数学教育におけるコミュニケーションの研究は様々な視点から行われている。これらの研究は，まずコミュニケーション過程に関する研究，その過程に参画するための能力に関する研究がなされ，その後，これらが達成させるためのコミュニケーションの場に関する研究がなされる。ゆえに，本研究では，金本による数学的コミュニケーション能力と江森による数学的コミュニケーション過程に関する研究に焦点をあてる。

1.1. 数学的コミュニケーション能力における「数学的」に関する考察

数学的コミュニケーション能力に関する先行研究として，金本（1998）の研究がある。金本による数学的コミュニケーション能力の研究概要を述べた後，金本が何をもって「数学的」と捉えているのかを述べる。

（1）数学的コミュニケーション能力に関する研究

金本（1998）は，《話し合い活動を学習に取り入れることは，指導の一方法ということを越えて，そのことによる教育価値の捉え直しと，あわせて子どもたちの情意形成への捉え直しを含んだ学習のあり方の検討》（p.17）の重要性を述べている。そして，話し合い活動を成立させるものとして，《交流のための能力の習得，いわば，コミュニケーションの能力であり，算数（数学）の特徴を兼ね備えた「数学的コミュニケーション能力」の育成が大切である》（金本，1998，p.18，括弧内筆者加筆）と述べ，数学的コミュニケーション能力を捉える視点として以下の４点があげられる。

①算数・数学の多様な表現・表記が使える
②考えの伝達や討議などの交流ができる
③数学的表現のよさを理解することができる
④話し合いや議論の大切さへの適切な態度が形成される

具体的に4つの視点をみる。

①算数・数学の多様な表現・表記が使える

①の視点は《数学的なコミュニケーションを成立させるにあたっての，その媒体である表現そのものの「よみかき」について》（金本，1998，p.33）である。数学的内容に関する多様な表現のよみかきができ，それらを結びつけて活用することができるというものである。

②考えの伝達や討議などの交流ができる

②の視点は，《数学的コミュニケーション活動そのもの》（金本，1998，P.33）についてであり，討論や議論を通して，数学的内容の意見を述べると同時に，意見の違いなどを理解し，自分たちの考えをつくり上げて，《社会的相互作用としての相互交流ができることである》（金本，1998，p33）。

③数学的表現のよさを理解することができる

③の視点は，《数学的コミュニケーション活動の内容である数学にかかわるもの》（金本，1998，p.33）であり，数学的表現や数学的説明のそれぞれのよさ，それらの重要性にかかわるものである。

④話し合いや議論の大切さへの適切な態度が形成される

④の視点は，《数学的コミュニケーション活動をすすめる子どもたちの態度にかかわるもの》（金本，1998，p.33）であり，話し合いの場において，根拠や合理性などを問うという意識を育む必要がある。

①と②は表現・表記や伝達・討議のどにおける理解や技能的なものであり，③と④は①②の活動に対する態度や信念に関わるものとなっている。また，①と③が数学的コミュニケーションの媒体である表現・表記についてのものであり，②と④は数学的コミュニケーション活動についてのものである。金本（1998）の数学的コミュニケーション能力を捉える視点における④は，①から③の視点を支えるものとなっていると捉える。その関係を図示すると，図2.1のようになる。

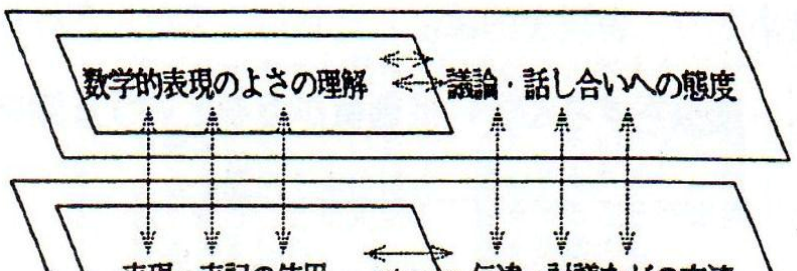


図 2.1　数学的コミュニケーション能力を捉える視点（金本，1998，p.33）

金本（1998）による数学的コミュニケーション能力に関する研究より，数学的コミュニケーションを第１章で捉えたコミュニケーションの「個人内」,「個人間」, 数学における「言語としての数学」,「問題解決・知識体系の構築としての数学の方法」という視点から考察する。

・言語としての数学

個人内では，金本（1998）の数学的コミュニケーション能力を捉える視点における，①と③に着目する。ここでは，数学的表現・表記を使うことができ，それらのよさがわかることが重要になる。「言語としての数学」は，数学的表現・表記にあたる。数学的表現・表記を使ったり，よさがわかるというのは，最終的には個人の中で行われるものであると考えられる。よって，個人内の「言語としての数学」は,「数学的表現・表記のよさに気付き，それらを使うこと」と捉えることができる。

個人間では，金本（1998）の数学的コミュニケーション能力を捉える視点における，②に着目する。ここでは，討論や議論を通して，数学的内容に対する意見を述べ，さらに意見の違いから集団において自分たちの考えをつくることが重要視される。ゆえに，個人間討論や議論を行う際，言語を使うことから，言語としての数学が重要になる。つまり，個人間の「言語としての数学」は,「討論や議論を通して，数学的内容に対する意見を述べ，さらに意見の違いから集団において自分たちの考えをつくること」と捉えることができる。この場合，討論や議論をする，ということに強調点が置かれていると考える。

・問題解決・知識体系の構築としての数学の方法

個人内では，金本（1998）の数学的コミュニケーション能力を捉える視点における，①に着目すると，ここでは，数学的な表現・表記を理解した上で，活用することが求められている。理解は最終的に個人内によるものであるため，ここで数学を活用することは個人内でなされる。つまり，個人内の「問題解決・知識体系の構築としての数学の方法」として,「数学を活用すること」と，捉えることができる。

個人間では，金本（1998）の数学的コミュニケーション能力を捉える視点における，②に着目すると，ここでは，討論や議論を通して，数学的内容に対する意見を述べ，さらに意見の違いから集団において自分たちの考えをつくる。個人間の「言語としての数学」と同様に,「討論や議論を通して，数学的内容に対する意見を述べ，さらに意見の違いから集団において自分たちの考えをつくること」と捉えることができる。しかし，意見の違いから集団において自分たちの考えをつくることが強調され，さらに，つくったもの①の視点から活用することが求められる。ゆえに，個人間の「問題解決・知識体系の構築としての数学の方法」は,「討論や議論を通して，数学的内容に対する意見を述べ，さらに意見の違いから集団において自分たちの考えをつくり，それらを活用すること」と捉えることができる。

以上より，表 2.1 のようにまとめることができる。

表 2.1 数学的コミュニケーション能力研究における数学的コミュニケーションの捉え

	言語としての数学	問題解決・知識体系の構築としての数学の方法
個人内	数学的表現・表記のよさに気付き，それらを使うこと	数学を活用すること
個人間	討論や議論を通して，数学的内容に対する意見を述べ，さらに意見の違いから集団において自分たちの考えをつくること	討論や議論を通して，数学的内容に対する意見を述べ，さらに意見の違いから集団において自分たちの考えをつくり，それらを活用すること

(2) 数学的コミュニケーション能力における「数学的」に関する考察

金本（1998）の「数学的コミュニケーション能力」における「数学的」を捉える。表現や表記の使用は，使用される文脈（コンテクスト）に依存し，コンテクストを把握する上で使用される。このことは，コミュニケーションがコンテクストなしには成立しないとも言え，言葉の使用，多様な表現・表記の使用は，その意味を構成するコンテクストの存在と同時である。したがって,《コミュニケーションが成立している場合におけるコンテクストの中の重要な部分として「数理的な事象について考えている」というのが存在しているのである。そのことと「算数（数学）の多様な表現・表記が使える」》(金本，1998，p.36）ことで，単なるコミュニケーション能力ではなく,「数学的コミュニケーション能力」として金本（1998）は,「数学的」を捉えている。よって，コミュニケーションの仕方が数学的であるかどうかということで数学的コミュニケーションとして規定しているのではない。つまり，コミュニケーションの仕方が論理的であるからといって，数学的コミュニケーションになるかどうかは異なるということである。このことは,《数学的の豊かさをなくしてしまう》(金本，1998，p.36）恐れがある。ゆえに，コミュニケーションにおけるコンテクストの一部に数学のコンテクストを含んでいることで「数学的」と規定している。

1.2. 数学的コミュニケーションの過程における「数学的」に関する考察

数学的コミュニケーション能力に関する先行研究として，江森（1998，2012）の研究がある。江森による数学的コミュニケーション過程の研究概要を述べた後，江森が何をもって「数学的」と捉えているのかを述べる。

（1）数学的コミュニケーション過程に関する研究

江森（2012）は「メッセージ」と「メッセージの解釈」という視点で，メッセージの受け手と送り手の相互作用によって意味が創発される過程をコミュニケーションとして捉えている。そして,《数学学習におけるコミュニケーションを理解するには，コミュニケーションを連鎖として捉え，その連続体を理解する必要がある》(p.48）と述べている。

江森（1998）は,《数学的コミュニケーションとは，対象の数量形に関する構造（論理構造も含む）を他者と交換することである》(p.69）と述べ，単にメーセッジを送信するだけ，フィードバックを受けるだけという，刺激反応ではなく,「交換する」という概念でコ

ミュニケーションを捉えている。「交換する」とは，メッセージだけではなく思考の交換も含まれる。《メッセージの発信が継続的に行われ，参画者の思考に結びつきが見られ，個々人の思考が既有の知識と結束性を保ちながら進行するとき，数学学習で展開されるコミュニケーション（数学的コミュニケーション）は連鎖している》（江森，2012，p.48，括弧内筆者加筆）ことから，他者と思考の「交換」がさなれ，その後，個々人の思考の変容が見られていく。そして，数学が抽象的なものであるという捉えから，より抽象化が進んだコミュニケーションの一形式として「数学的コミュニケーション」を述べている。また，数学的コミュニケーションは《問題解決，推論，情報伝達，ならびに数学的知識を関連付ける数学学習の場で展開されている諸活動を統合する》（江森，2012，p.46）。つまり，数学的コミュニケーションをすることは，数学をすることそのものであると言えよう。

江森による数学的コミュニケーション過程に関する研究より，数学的コミュニケーションを第１章で捉えたコミュニケーションの「個人内」,「個人間」，数学における「言語としての数学」,「問題解決・知識体系の構築としての数学の方法」という視点から考察する。

・言語としての数学

個人内では，江森はコミュニケーション連鎖という視点から，メッセージ，思考の連続性が，数学学習で展開されるコミュニケーションであると述べている。数学学習においてメッセージは言語として数学の役割を果たしていると考える。そのメッセージを認識することが個人内でなされる。また，メッセージを基に思考がなされていくと考える。ゆえに，個人内の「言語としての数学」は,「メッセージを認識すること，思考すること」である捉えることができる。

個人間では，個人内のときと同様，コミュニケーション連鎖という視点から，メッセージ，思考について考察する。江森は数学的コミュニケーションを他者とメッセージ，さらには思考の「交換」という概念で捉えている。また，数学学習においてメッセージは言語として数学の役割を果たしており，学習者はメッセージを基に思考することから，個人間の「言語としての数学」は,「メッセージや思考を交換すること」である捉えることができる。

・問題解決・知識体系の構築としての数学の方法

江森の数学的コミュニケーションを《問題解決，推論，情報伝達，ならびに数学的知識を関連付ける数学学習の場で展開されている諸活動を統合する》（江森，2012，p.46），つまり，数学的コミュニケーションをすることは，数学をすることそのものだと捉えた。よって,「問題解決・知識体系の構築」は，数学的コミュニケーションに他ならない。「問題解決・知識体系の構築」にあたり，コミュニケーション連鎖という視点に立つと，メッセージ，思考の連続性に帰着し,「言語としての数学」と同様に個人内・個人間の「問題解決・知識体系の構築としての数学の方法」を捉えることができると考える。

以上より，表 2.2 のようにまとめることができる。

表 2.2　数学的コミュニケーションの過程研究における

数学的コミュニケーションの捉え

	言語としての数学	問題解決・知識体系の構築としての数学の方法
個人内	メッセージの認識，思考すること	メッセージの認識，思考すること
個人間	メッセージ・思考の交換	メッセージ・思考の交換

(2) 数学的コミュニケーション過程における「数学的」に関する考察

江森（1998）は，《「数学的」か否かの判定は，2つ以上の事例間で参画者の思考の質を数学の特性である自由性，経済性（効率性と生産性），厳密性の観点から比較することによって行われる》（p.62）と述べている。自由性，経済性，厳密性について言及する。

江森（2012）は，《数学の厳密性と自由性は，厳密な思考によって結論の妥当性が常に保証され，再度の検証を必要としないという思考の効率性と，自由な思考が新しい数学的発見をもたらすという生産性に，深く関わりをもつ数学の特性》（p.38）と述べている。厳密性と自由性という相反するものが数学の特徴と位置づけられる。そして，厳密性と自由性によって効率性や生産性といった経済性が支えられている。厳密性と自由性を数学的表現におけるものとして捉えた場合，矛盾が生じてしまう。また，自由性を数学の特徴として捉えた場合，数学的コミュニケーションが数学的な表現の使用を前提とする定義では，自由性の特性を犠牲にし，対象の豊かさを損なうとしている。よって厳密性，自由性とは数学的な表現に関してではなく，思考そのものに関して述べている。また，数学的な表現が使用されていても，思考が数学として正しくないものは，厳密性に反すると江森は述べている。

数学の自由性そのものは否定しないが，数学において数学的表現を使用しない厳密性は存在するのか疑問である。現状の数学教育の課題は，数学的な表現を使用しても，数学的に厳密でなければ数学的コミュニケーションができていないということであり，数学的コミュニケーションにおいて，数学的表現の使用を前提とすることで，自由性を犠牲にし，豊かさを損なうとは考えられない。

第2節　数学的コミュニケーションの概念規定

金本（1998）による数学的コミュニケーション過程に関する研究，江森（1998，2012）による数学的コミュニケーション能力に関する研究は，言語としての数学・問題解決・知識体系の構築としての数学の方法，個人内・個人間という視点で捉えることができた。

また「数学的」について，金本による能力に関する研究と江森による過程に関する研究の大きな違いは，数学的表現の使用にある。金本は，コミュニケーションの一部に数学のコンテクストが含まれるとき，「数学的」であると述べている。さらに，コミュニケーションが成立している際のコンテクストの重要部分は,「数理的な事象について考えていること」と「数学の多様な表現・表記が使えること」である。つまり，数学的コミュニケーションが成立しているのは，数理的な事象を考え，数学的表現を使用していることとなる。しかし金本は，数学的表現が厳密か否かについては言及していない。数学の厳密性を見ない限り，本研究の課題意識である「数学教育において形骸化されたコミュニケーションが多く

見られる」に対するアプローチは困難である。

対して江森は，自由性という観点から数学的表現がなくても，数学的な思考の厳密性や経済性があれば,「数学的」であると言及している。数学の自由性そのものは否定しないが，数学において数学的表現を使用しない厳密性は存在するのか疑問である。現状の数学教育における課題は，数学的な表現を使用しても，数学的に厳密でなければ数学的コミュニケーションができていないという点である。数学的コミュニケーションにおいて，数学的表現の使用を前提とすることで，自由性を犠牲にし，豊かさを損なうとは考えられない。また，江森による「数学的」は，数学的表現を使用していても，数学の厳密性が保たれなければ,「数学的」にコミュニケーションはできていないと解釈される。

以上をふまえ，両者の考えを統合し,「数学的」について言及する。本研究では，金本の数学のコンテクストが含まれるという視点と，江森の数学の厳密性という視点から,「数学的」という観点を捉える。ゆえに,「数学的」とは,「コンテクストの一部に数学のコンテクストを含んでおり，数学的な事象について，厳密に数学の表現・表記を使い，考えること」であると，本研究では捉える。

「数学的コミュニケーション」を捉える視点や,「数学的」と何かという考察を基に，本研究では，数学的コミュニケーションを以下のように，概念規定する。

【数学的コミュニケーションの概念規定】
数学のコンテクストを含んでおり，数学的な事象について，厳密に言語としての数学を使用し，問題解決・知識体系の構築をすること。また，個人内・個人間においてそれぞれ相互に行われること。

本研究では，数学的コミュニケーションを上記のように捉え，そのような活動を数学的コミュニケーション活動とし考察する。

数学的コミュニケーション活動を見ると,他者の存在が認められ,討論や議論を通して，数学的内容の意見を述べると同時に，意見の違いなどを理解し，自分たちの考えをつくり上げることや,他者とのメッセージや思考の交換といった,社会的相互作用が挙げられる。また，数学的コミュニケーションを考える際に,《コミュニケーションへの参画によって学習者の思考がいかに変容するかという社会的相互作用そのもののメカニズムを究明》(江森, 2006, p.29）することが必要になる。以上より，次章では，社会的相互作用に着目し，数学的コミュニケーション活動の考察をする。

第３章　数学学習過程における社会的相互作用

本章では，数学的コミュニケーションを考える際に，《コミュニケーションへの参画によって学習者の思考がいかに変容するかという社会的相互作用そのもののメカニズムを究明》（江森，2006，p.29）することが必要になることから，社会的相互作用と数学的コミュニケーションのつながりを明らかにする。さらに，数学学習における社会的相互作用に焦点をあて，数学学習過程と社会的相互作用がどのようにかかわるのか明確にすることが目的である。そのために，第１節では，中原（2001）による３つの認識論に基づく多世界パラダイムに関する研究，飯田（1997）・中原（1997）による３つの認識論における社会的相互作用の研究を基に，数学的コミュニケーションと社会的相互作用の関係を考察する。第２節では，社会的相互作用が実際の学習過程ではどの様相で特に作用し，重要になるのかを考察し，数学学習の指導過程と社会的相互作用がどのようにかかわるのか明確にする。

第１節　数学的コミュニケーションと社会的相互作用の関係

中原（2001）は，子どもたち主体の数学の学習の基盤となり得る有力な認識論として，急進的構成主義，相互作用主義，社会文化主義の３つをあげている。これら３つの認識論は，それぞれ類似点，相違点があるが，その中で，社会的相互作用が３つの主義すべてにおいて重要視されている。中原（2001）は，表 3.1 のように３つの認識論を比較した。

表 3.1　急進的構成主義，相互作用主義，社会文化主義の比較
（中原，2001，p.8，太枠筆者加筆）

		急進的構成主義	相互作用主義	社会文化主義
認識論	知識の本性	個人による構成	共同体による構成	共同体における文化化
	認識の向かう方向	生存可能性	共通な認識	共同体の文化づくり
	知識の主観・客観性	主観的	間主観的	社会的
学習観	学習の本性	個人による意味づくり	相互作用的な意味づくり	文化化，文化づくり
	学習の主な契機	認知的葛藤	社会的相互作用	文化的実践への参加
	重要な方法論	社会的相互作用 反省的思考	仲間との社会的相互作用	有能な者との社会的相互作用，道具の活用
	最も影響するもの	個人の認知構造	学習する仲間	共同体の文化状況
言語観	機能・役割	思考の表現手段 思考交流の手段	社会性はあるが解釈の過程を含む	文化伝達の手段 思考発達の道具
	内言・外言	内言から外言へ	活動と一体のもの	外言から内言へ
教師の役割		学習の支援者	個人的意味と社会的な意味の仲介者	共同体の文化の熟達者 学習内容の指導者

数学学習は複雑であり，学習を単位一の原理で説明することには無理があり，限界が生じる。ゆえに３つの認識論を，学習活動を構成する基本要素と捉え，それぞれ協応させ，

補完し,《子どもの複雑多岐で多様な学習活動を明確にするためには，こうした柔軟で常識を超えるパラダイムが求められる》（中原，2001，p.14)。

中原（2001）は《急進的構成主義，相互作用主義，社会文化主義の３つの世界をそれぞれ設定し，それらを基盤とする互いに相いれない原理あるいは相補的な原理を協応させ，補完して，学習活動を捉え，それを基に学習を解釈したり，構成したりする立場を，多くの世界からなるパラダイムという意味で,数学学習の多世界パラダイム》(p.14)と呼んだ。数学の学習は，この多世界パラダイムで捉えることができる。多世界パラダイムは，急進的構成主義，相互作用主義，社会文化主義から構成されているが，表 3.1 より，それぞれの学習観において重要な方法論となっている社会的相互作用に着目する。

それぞれの認識論における社会的相互作用を捉えていく。急進的構成主義は，Piaget 理論に基づいた認識論である。ここでは,《社会的相互作用は同化・調節に関連し，個人的な内的構成を練り上げ修正するもの》（飯田，1997，p.86）と考えられている。

社会文化主義は，Vygotsky 理論に基づいた認識論である。ここでは，参画者との関わりを通して,《社会的相互作用は内化・専有に関連し，それ自体が個人的な内的構成に先行する極めて重要な役割を担う》（飯田，1997，p.86 ）と特徴づけられる。

相互作用主義は，シボリック相互作用論の基本原理に基づく認識論である。ここでは，社会的相互作用が非シンボリック相互作用とシンボリック相互作用の２つに分類される。中原（1997）は，Blumer の考えを次のようにまとめている。《非シンボリック相互作用は，個人が他者の行為に対して，その行為を解釈することなく直接に反応するときに生じるもの。シンボリック相互作用は有意味なシンボルの使用による相互作用。個人がそのシンボルを解釈することを含んだもの。この場合の有意味なシンボルは，言語的な記号だけでなく行為も含めて，解釈がなされるものすべてを含んでいる》（p.92)。

それぞれ３つの認識論において，なされる社会的相互作用は大きく異なる。《急進的構成主義では構成や葛藤の解消を促進する触媒の役割に位置づけられている。したがって，社会的相互作用によって，構成される知識の中身が変わることはない》（中原，2001，p.10)。相互作用主義や社会文化主義では，《社会的相互作用は単なる触媒の役割としてではなく，それによって獲得される知識の質が異なる》（中原，2001，p.10)。急進的構成主義は個人で内的構成がなされ，その後社会的相互作用によって練り上げ修正がなされるため，知識の中身は変わらない。それに対し，相互作用主義や社会文化主義は，社会的構成主義によって内的構成そのものがなされる。

３つの認識論で社会的相互作用の捉えは異なるが，他者との交流により成立し，数学の学習において重要な役割を果たすと捉えることができよう。また，数学的コミュニケーションを本研究では「数学のコンテクストを含んでおり，数学的な事象について，厳密に言語としての数学や問題解決・知識体系の構築をしていくこと」と捉えており，数学的コミュニケーションをすることは，数学を学習していくことに他ならない。つまり，数学の学習において社会的相互作用が重要な役割を担うということは，数学的コミュニケーションにおいても社会的相互作用が重要になると言えよう。

次節では，数学の学習過程において重要な社会的相互作用が，顕著にあらわれる様相が学習過程どこにあたるのか考察する。

第２節　学習過程における社会的相互作用の考察

溝口（2006）は《子どもは「学習」しようとして学習するわけではない。ある活動を経たとき，結果としてそれが，教師の視点から見れば「学習」であると映るのである。このとき子どもが行うことは，ある場面に直面して何か問題を意識し，それを解決しようとすることである》（p.2）と述べ，問題解決における活動を通して，学習が行われていくと考えている。ゆえに，問題解決における子どもの活動が重要になるのである。問題解決過程を数学的コミュニケーション活動の視点から捉え，数学の学習過程において重要な社会的相互作用が顕著にあらわれる様相が学習過程のどこにあたるのか考察する。

2.1. 数学的問題解決の授業

溝口（2006）によると，一般に数学の授業としての数学的問題解決は「問題の提示 → 自力解決 → 解決の練り上げ → 振り返り／評価問題」のような基本的な流れをふむ。ここに，数学的コミュニケーション活動を位置づけることで，授業の充実が図られると考える。数学的問題解決の様相はどのようなものなのか，溝口（2006）による先行研究を基に明確にする。

（1）問題の提示

問題の提示の様相において，問題が単に提示されるだけではなく，真の意味で子どもの問題として，子ども自身が問題意識を持てるようにすることが重要になる。また，真の意味で問題となるためには，多くの場合で見積もりを行うことが有効になる。

（2）自力解決

自力解決にあたり，教師は生徒個々の反応を予想する。しかし，《個人差に応じた指導（解決予想）の根拠は，学習者の可能な解決パターンにあるのではなく，教授上いかなる指導（支援）が要請されるかにある》（溝口，2006，p.8）。すなわち，解決予想は生徒個々で捉えていくのではなく，教室全体のものとして捉えていくことが重要になる。また，生徒の活動は教師の支援により，徐々に目標の達成に向けたものになっていく（図 3. 1 参照）。では，どのような「支援」をしていけばよいのか，「支援」に関する議論に移る。

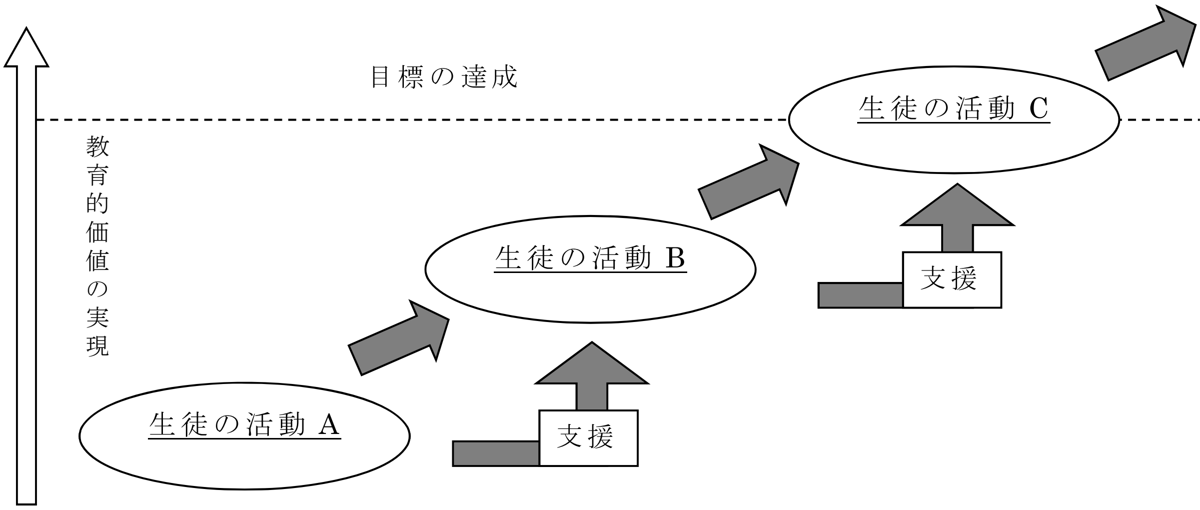


図 3.1　目標の達成に向けた生徒の活動と教師の支援
（溝口，2006，p.8，下線部筆者が変更）

「支援」といっても，問題の解決を直接的に教え込むものではない。また，《個々の活動は，どれかひとつを子どもが経験すればよいとされるものではなく，授業全体を通して全ての子どもがこれらの活動を経験することに値打ちがある。そのため，「支援」は，そうした個々の活動の橋渡しとして子どもの水準を適切に高めていくものでなければならない》（溝口，2006，pp.8-9）。つまり，生徒の個々の活動は教師による支援によって，連続的なものとなり，目標の達成へと向かっていくのである。このような自力解決過程をふむことで，次の練り上げの場において，真の意味での練り上げの様相が一人一人の学習に表れる。

（3）練り上げ

《練り上げは,数学的知識や概念についての社会的構成を意図して行われるもの》(溝口，2006，p.9）であり，《学習指導の過程における個々人の子どもの個人的な知識の変容を教授学上の問題として，自力解決の場に置くのである。この意味で，自力解決のための練り上げではなく，練り上げのための自力解決である》（溝口，2006，p.9）と言える。こういった点で，すべての子どもたちが練り上げの場に参加できることが必要不可欠になる。

また，練り上げにいて示される「課題」は，基本的には自力解決の「支援」にあたる。《個々の「支援」は，活動の促進を意図するものとして置かれたものであり，それゆえそれらは一つ一つが子どもにとって重要な意味をもつことになる》（溝口，2006，p.9）。例えば図 3.1 で，活動Ｂに着手したばかりの生徒は，活動Ｂから活動Ｃへの「支援」はまだ経験しておらず，生徒は，まだ経験していない「支援」が「課題」となり，そこから教室全体で協同的に問題解決活動を遂行していくことになる。また，目標の達成がなされる活動を遂行した生徒は，２つの可能性がある。１つ目は，教師の支援を受け，自力解決をしていた生徒に対してのものである。練り上げにおいて協同で問題解決を図ることで，自らの問題解決活動を振り返る場を提供することになる。２つ目として，初めから自力で目標の達成がなされる活動を遂行した生徒に対してのものである。練り上げの場において，自力解決でなされていなかった自身が遂行した活動の価値を，教師による「課題」を基に経

験し，把握するのである。

また，目標の達成がなされる活動に続いて，《「拡張」「一般化」「体系化」へと遂行して初めて，問題解決を通して数学的な知識や概念を構成したと見なされる》（溝口，2006，p.10）のである。

（4）振り返り／評価問題

本時の問題の解決を通して構成された数学的知識や概念の確認をする相である。評価問題を通して，本時の学習を振り返る。そして，次にいかなることが問題になりそうか見通しを生徒に与える。これは，問題解決が単元全体を通して行われる上で重要な授業設計の観点となる。

数学的問題解決の授業におけるそれぞれの段階において，重要箇所をまとめると以下のようになる。

表 3.2 数学的問題解決のそれぞれの段階における重要箇所

問題の提示	・真の意味で子どもの問題として，子ども自身が問題意識を持てるようにすること ・真の意味で問題となるためには，多くの場合で見積もりを行うことが有効になるということ
自力解決	・解決予想は生徒個々で捉えていくのではなく，教室全体のものとして捉えていくこと ・生徒の個々の活動は教師による「支援」によって，連続的なものとなり，目標の達成へと向かっていくこと ・すべての子どもたちが練り上げの場に参加できるようにすること
解決の練り上げ	・自力解決における「支援」が，練り上げで「課題」となり，生徒の個々の活動は教師による「課題」によって，連続的なものとなり，目標の達成へと向かっていくこと ・練り上げにおいて協同で問題解決を図ること
振り返り／評価問題	・評価問題を通して，本時の学習を振り返ること ・次にいかなることが問題になりそうか見通しを生徒に与えること

2.2. 数学的問題解決における数学的コミュニケーションの違い

数学的問題解決における子どもたちの活動を数学的コミュニケーション活動として捉えるにあたり，本研究での数学的コミュニケーション，「数学のコンテクストを含んでおり，数学的な事象について，厳密に言語としての数学を使用し，問題解決・知識体系の構築をすること。また，個人内・個人間においてそれぞれ相互に行われること。」という視点から，問題解決のそれぞれの様相における数学的コミュニケーションの違いを明確にする。

問題提示，自力解決，振り返り／評価問題では，数学的コミュニケーションは主に個人内で行われる。解決の練り上げでは，数学的コミュニケーションは主に個人間で協同的なされる。

2.3. 数学的問題解決における重要な様相と社会的相互作用の関係の考察

数学的問題解決の様相はどのようなものなのか，それぞれの様相における数学的コミュニケーションの違いを溝口（2006）による先行研究を基に捉えた。問題提示では，問題解決の最初の相として,生徒個人が問題意識を持てるようにすることが重要となる。そして，生徒は練り上げのための自力解決を個人内で行う。自力解決では，真の意味で数学的知識や概念を練り上げていくために,教師の支援を受けながら,活動を連続的に行っていく。その後，練り上げでは，単に教室で一部の生徒によって，数学的知識や概念が練り上げられていくのではなく，自力解決を基に，一人一人の生徒が練り上がっていく様相を経験していくことが重要になる。この際，教室全体で協同的な，つまり社会的相互作用がなされることで，問題が解決していき，さらに解決活動がより深化していく。最後に評価問題を通して，本時の学習の振り返りを行い，問題解決が単元全体を通して行われるためにも，次にいかなることが問題になりそうかという見通しを生徒に与える。

また,数学的問題解決の授業では,《問題解決（の過程）を通して,数学的な概念,知識,技能，等をつくり上げていくことがねらい》（溝口，2006，p.10）となり，練り上げがまさに，数学的な概念，知識，技能，等をつくり上げていく相となる。ゆえに，数学的問題解決の授業において重要様相にあたるのは，練り上げの相であると言えよう。また，数学的な概念，知識，技能，等は，社会的相互作用によって教室全体で協同的につくり上げられ，社会的相互作用は，数学的コミュニケーション活動において重要な役割を果たす。よって，問題解決過程を数学的コミュニケーション活動の視点からみた際，練り上げにおける社会的相互作用が重要になる。

「問題の提示 → 自力解決 → 解決の練り上げ → 振り返り／評価問題」の中の，自力解決，練り上げの相で，数学的コミュニケーション活動が主になされている。また，実際の授業過程では，問題解決過程は一方向に進むとは限らず，自力解決をし，練り上げた後にまた自力解決という流れになる場合も多々あるように思える。ゆえに，充実した数学的コミュニケーション活動を明確にしていくにあたり，問題提示を導入，自力解決・練り上げを展開，最後に振り返り／評価問題をまとめという過程で捉える。よって,「導入 → 展開 → まとめ」の学習過程の中の展開を重視する。

第３節　数学学習過程における社会的相互作用

第１節では，中原（2001）が急進的構成主義，相互作用主義，社会文化主義の３つの認識論を基に，協応，補完した多世界パラダイムとして数学学習を捉え，３つの認識論すべてにおいて，社会的相互作用が重要な方法論とされた。中原（1997)，飯田（1997）の先行研究を基に，それぞれの認識論における社会的相互作用の特徴をまとめ，社会的相互作用の捉えは異なるものの，数学学習において社会的相互作用が重要になると述べた。さらに，数学学習は数学的コミュニケーションをすることにと言え，数学的コミュニケーションにおいても社会的相互作用が重要になると述べた。

第２節では，溝口（2006）による数学的問題解決の授業を基に，それぞれの様相につい

て明確にし，数学的コミュニケーションの違いについて言及した。その結果，数学的問題解決の授業において重要様相にあたるのは，練り上げの相であると述べた。また，数学的な概念，知識，技能，等は，社会的相互作用によって教室全体で協同的につくり上げられ，社会的相互作用は，数学的コミュニケーション活動において重要な役割を果たした。問題解決過程を数学的コミュニケーション活動の視点からみた際，練り上げにおける社会的相互作用が重要になると結論づけた。また，問題提示を導入，自力解決・練り上げを展開，振り返り／評価問題をまとめとし，学習過程を捉え，展開が重要な様相になるとした。

その上で，展開を重視した数学的コミュニケーション活動を明確にしていくことで，本研究課題である充実した数学的コミュニケーション活動の明確化がなされると考える。次章では，学習過程モデルの先行研究を基に，充実した数学的コミュニケーション活動の明確化を行う。

第４章　充実した数学的コミュニケーション活動の明確化

本章では，充実した数学的コミュニケーション活動とはどのような活動なのか明確にすることが目的である。そのため，第１節では，江森（2012）によるコミュニケーションの視点から，子どもの視座を強調した認知論，真野（2008，2010）による数学の視座を強調した認識論の学習過程モデルの先行研究を考察する。

第２節では，第１節における考察より，認識論に認知論を補完した学習過程を個人内，個人内を基に個人間も含めた，数学的コミュニケーション活動の明確化を行う。

第１節　学習過程モデルの先行研究の考察

江森（2012）は，コミュニケーションという視点から数学の授業における学習者の認知過程を述べており，認知論から数学の授業過程を捉えている。認知論は《認知構造の変換や再構成によって学習が生起するという考え》であり，《子どもたちの理解を大事にする》（中原，2007，p.30）ものである。

真野（2008，2010）は，認識論的視座から数学的概念変容過程について研究している。認識論は《特に「数学的知識」とは何かを解明すること》（川嵜，2004，p.277）を強調している。

しかし，子どもたちの理解や数学的知識のどちらの視点も重要になる。ゆえに，本節では，江森（2012）と真野（2008，2010）をそれぞれ補完し合い，子どもたちの理解・数学的知識の視点から本研究の研究課題である充実した数学的コミュニケーション活動とはどのようなものなのか明らかにする。

1.1. 認知論からみる学習過程

江森（2012）は，コミュニケーション連鎖という視点から，Skemp の理解研究をもとに，認識・同化・調節という枠組みで認知過程を捉えている。さらに，調節には，拡張，分化，再構築の過程があると捉え，認識・同化・拡張・分化・再構築の５つの相を経て，数学的概念が形成されると考える。

コミュニケーションが連鎖することで，生徒の内的な構成に関与し，高位な数学的概念の形成をもたらしている。メッセージは，私たちがコミュニケーション行為を遂行するために意識を集中させる対象であり，メッセージを生み出す過程で，どのような方法で自分の意図を他者に伝えるかという内省がおこる。その後，受け手は，コミュニケーションの対象としてメッセージを受信し，自分の思考過程にその情報を加味し，反省的思考をもたす。《私たちは，一度受信したメッセージを記憶し．必要に応じて想起することで，コミュニケーションの対象と反省的思考の対象という２つの用途のもと，同一のメッセージを繰り返し活用する。コミュニケーションの対象は瞬時に移り変わるが，私たちの記憶というメカニズムは，コミュニケーションの対象を反省的思考の対象として繰り返し読み返しさせる》（江森，2012，p.116）。つまり，問題解決において，メッセージは，コミュニケーションの対象として認識され，反省的思考の対象として，必要に応じて再解釈される。ゆえに，メッセージに着目し，認知過程を捉えていくことは，コミュニケーション連鎖を捉

えていくことと同義である。先に述べた，認知過程の５つの相を具体的にみる。

(1)　認識

他者から送られた物理的刺激であるメッセージを人為的にある意図を持って作られた記号であることを認識することが必要になる。ゆえに，コミュニケーションという視点からみた際，数学的概念形成過程の第１段階として「認識」がある。認識とは，学習者がコミュニケーションのはじまりに気付くこと，つまり，学習者が他者から送られてきたメッセージを認識することである。

(2)　同化

表記法の同化と思考法の同化があり，思考の同化は表記の同化なしにはなされない。

<u>表記法の同化</u>

表記の同化には，①模倣と，②コミュニケーション手段の選択，という２つのタイプがある。①模倣は，自己固有の表記をもたない受け手が他者の表記を借用する場合にみられる。この場合，受け手は，自己の表記と他者の表記との差異を調整，いずれかを採用するという調節を行う必要がない。②コミュニケーション手段の選択，として他者の表記へ同化することは，自己の表記と他者の表記を比較検討し，自己の表記を棄却して他者の表記を採用するという調節が含まれる。自己の表記を固持することで，他者とのコミュニケーションが阻害されると判断した場合，受け手は，送り手の表記に同化することでコミュニケーションを成立させようと努力する。

いずれにせよ学習者は，コミュニケーションを成立させ，さらに高次の目的を達成させるために，互いに表記の使用について同化し合うことになる。

<u>思考法の同化</u>

表記の同化には調節という認知活動が伴うと考えると，表記の選択には思考の選択という概念が必然的に含まれる。よって，表記の同化には思考の同化が含まれる。思考の同化には，①他者の思考を無反省に借用する場合，②他者の思考に同化し，そのアイデアをもとに自分の思考を発展させる場合，の２つのタイプがある。

①他者の思考を無反省に借用する場合は，自己の考えをもたずに他者の思考を借用するため，自己の思考との調節が必要なく，無反省な同化が行われる。そのため，他者の思考を誤解した形で模倣することとなる。

<u>同化が起こらない場合</u>

コミュニケーションは認識から始まるが，他者からのメッセージを音声刺激や視覚的な刺激として受け入れるだけでは不十分で，それぞれ価値観が異なる私たちが互いに調整し合い，同一の枠組みを持とうとする努力がなければならない。コミュニケーションに参画しようとする意欲や態度が十分でなければならない。また，他者との話し合いを可能とする同一の思考法や表記法が必要になるという意識的な自己変容を受容する認識が必要になる。ゆえに同化が起こらない場合として次の３つがあげられる。

第１に，自分の優位性を保持し，受け手の中で発生した不安定性である認知的不協和を

無視することによって解消する場合である。第２に，自分と他者の優位性が不明なため，自身の思考法，表記法を固持し，認知的不協和を拒絶によって解消する場合である。第３に，自分と他者の差異が認識できていない未分化の状態になる場合，の以上３つがある。

以上より，次の相へと進むためになされるべき同化は，表記をコミュニケーションの手段として，他者のアイデアをもとに自分の思考を発展させる相と言える。

(3)　拡張

拡張は，送り手の思考と受け手の思考の差異が表れる相である。送り手は，メッセージを送信することで，メッセージを反省的思考の対象として捉え，重視し，思考を深化させる。一方，受け手は，送り手からのメッセージを受け取ることで，自分の思考を調整する必要があり，他者とのずれが生じる。拡張には，①誤った方法による拡張，②具体的操作による拡張，③抽象化・一般化を伴う拡張，という３つのタイプがある。

つまり，拡張は，学習者がメッセージを反省的思考の対象として捉え，送り手の思考と受け手の思考の差異が表れる相と言える。

(4)　分化

拡張の相で，個人がもつ知識や経験，個々人がもつ同一メッセージに対する解釈の差異を認識させられる。私たちは，個々人の思考が異なることで，個人では変容させることが難しい自己の思考を変容させる契機をつかむことができる。拡張された思考の差異をいかに認識するかということで，コミュニケーションの意味づけが異なる。こうした拡張の仕方によって生じる差異を認識する相を，分化という。他者との思考の違いを認識する分化という相には，他者との差異を，①具体的操作の差異としてのみ認識する場合，②抽象化・一般化された思考の差異として認識する場合，の 2 つのタイプがある。

分化はコミュニケーションに参画する学習者間の思考の差異の表出であり，集団思考における分化は，個人にとって未知の表記や思考が出現する契機である。しかし，分化した表記や思考を再構成するためには，それらを統合するための高位の概念と新たな表記法が必要になり，分化から再構成への移行は容易ではない。

つまり，分化は学習者が他者との解釈の差異を認識し，自己の思考を変容させる契機をつかむ相と言える。

(5)　再構成

分化された数学的アイデアは高位のアイデアの出現により再構成される。再構成の様相では，具体的な操作において必要とされていた文脈への配慮が薄らぎ，数式など形式化された対象そのものの扱いが重視される。その意味では，脱文脈化，すなわち，本質を捉えるという見方が，再構成の相では重要となる。そして，高位の数学的概念の習得が表記と思考の両面からコミュニケーションの質を一段と高いものへと変容させている。

つまり，再構成は，分化された数学的アイデアが高位のアイデアへと統合され，その際，脱文脈化がなされる相と言える。

また江森（2012）は，「Reflective Thinking」，一般的に「反省的思考」と呼ばれてい

た思考を，「反省的思考[1]」と「反照的思考[2]」の２つの枠組みで捉えている。「反省」は既存の枠組みの範囲でのみで，既存の枠組みを超えることは困難であると捉え，アイデアの創発には，「反省的思考」と「反照的思考」の２つの枠組みで捉える必要があると述べている。そして，《アイデアの創発には，自分の意識の限界に気付くという反省的思考が必要になり，例示された表現を観照する反照的思考により自分自身の思考の枠組みを超越することが必要になる》（江森，2012，p.154）と述べている。つまり，反省的思考により，自分の意識の限界に気付き，元の表現から，新たな表現さらには新たな思考へと変容し，反照的思考により，本質を見極め，自身が所有していた思考の枠組みを超えて，アイデアが創発されていくことである。こうしたアイデアの創発は，認知過程の中で表れ，江森（2012）は，拡張において反省的思考が重要になると述べていることから，特に，思考が深化する拡張の相でなされる。

1.2. 認識論からみる学習過程

（1）概念化の過程

真野（2008）は，概念変容の３つの相として，「外延の拡大・内包の変更・内包の統合」を提示している。ここで用いる「外延」とは当初概念の論議領域を指し，「内包」とは当該概念が有する微表（定義，意味，性質）の全体を指している。また，外延の拡大は同化，内包の変更・内包の統合は調節に該当する。真野（2008）は，以下のように概念変容の３つの相を捉えた。

外延の拡大：	内包Ｉが外延Ｅにおいて成立しているとき，外延Ｅがそれを含む外延Ｅ’へ拡大する相
内包の変更：	内包Ｉが外延Ｅ’において成立しないとき，外延Ｅ’において成立する内包Ｉ’を定立させる相
内包の統合：	外延Ｅ’を外延Ｅに制限するとき，内包Ｉが内包Ｉ’と整合し，内包Ｉを内包Ｉ’にとりこむ相

また，概念変容場面における学習者の認識過程を「概念化の過程（process of conception)」と呼び，以下の４つの認識活動に分節化した。

①内包Ｉの適応可能性
②内包Ｉの限界の意識化
③内包Ｉと内包Ｉ’の分化
④内包Ｉの見直し

[1] 反省的思考とは，《思考の対象を表すという表現活動に対する思考で，前表現活動の一部に何らかの改良が施され》（江森，2012，p.146），第２，第３の反省的思考，第２，第３の表現活動として行われる思考。

[2] 反照的思考とは，《それまでの試行錯誤によって精緻化されてきた表現を観照することにより，例示された表現に新たな解釈を与える思考》（江森，2012，p.146）。

概念変容場面と概念化の過程をまとめると以下の様になる。

表 4.1　概念変容場面と概念化の過程

概念変容場面	概念化の過程
外延の拡大	内包Ｉの適応可能性の把握
外延の拡大 → 内包の変更	内包Ｉの限界の意識化
内包の変更	内包Ｉと内包Ｉ’の分化
内包の変更 → 内包の統合	内包Ｉの見直し

（2）弁証法論的観点

真野(2010)は,「認識論的観点」と「弁証法的観点」から数学的概念変容のモデル化を提案している。「認識論的観点」とは,数学的知識に固有な概念変容を特徴づける観点であり,真野(2010)は，各領域特有の観点から考察している。

「弁証法的観点」は，概念変容場面における学習者の認識過程を，Hashweh による概念変容のプロセスを認知的次元とし，Ernest によるものを社会的次元とし，それらを統合的に把握する観点として，表 4.2 のような諸相を設定し，これを「弁証法的観点」と呼んでいる。表 4.2 を具体化したものが，表 4.3 にあたる。また Confrey の考えから,「認知」と「社会」の問題を「個人」と「集団」の問題に換言して捉えている。

本研究では，全領域で共通して捉えることができる数学的概念変容モデルの構築を行うため，真野(2010)の「弁証法的観点」に焦点をあてる。

真野（2010）は，認知的次元・社会的次元で弁証法論的観点を抑えているものの，これらは概念変容場面における学習者の認識過程であることに注意したい。

表 4.2　概念変容過程を捉える弁証法的観点（真野，2010，p.193，括弧内は筆者の加筆）

	認知的次元（個人）	社会的次元（集団）
様相Ｉ	プリコンセプション（既有の知識）への固着	ある問題状況における，先行知識（推測，証明，問題の解法，理論）に基づく提案：テーゼ
様相Ⅱ	新しいコンセプション（知識）の獲得	提案に対する受容的対応（提案の受容，提案の拡張）：テーゼ， 批判的対応（反例，反論，提案の批判）：アンチテーゼ
様相Ⅲ	認知的再構造化	提案（局所的）や問題状況（大局的）の再構成：ジンテーゼ

表 4.3　「×小数」において期待される概念変容の諸相の具体化（真野，2010，p.238）

	認知的次元（個人）	社会的次元（集団）
様相Ⅰ	離散量の世界（「×整数」）におけるかけ算のプリコンセプションへ固着する	「１mが 80 円のリボンがあります。リボン 2.4m買うときの値段はいくらでしょう」という問題場面において「80×2.4」という立式を提案する
様相Ⅱ	プリコンセプションと新しい問題解決のコンフリクトを解消するために，２量の比例関係に基づく新しいコンセプションを獲得する	「×整数」から類推による受容的対応として「80×2.4」を受け入れる。「80×2.4＝80+80+??」のように同数累加では表せないことから否定的対応として「80×2.4」を拒否する
様相Ⅲ	プリコンセプションを新しいコンセプションへ統合し，認知的再構造化を達成する	２量の比例関係に基づく「×小数」の意味によって，様相Ⅰにおける提案（「80×2.4」としての立式）及び問題場面を再構成する

認知的次元と社会的次元は互いに他方の存在を必要とする反射的関係にある。また，様相Ⅰと様相Ⅱは必ずしも明確に区分されるものではない。様相Ⅱにおいてテーゼを肯定する受容的対応と，それを否定する批判的対応の双方の対立が強調され，様相Ⅲでは，受容的対応と批判的対応の両面を止揚する形でジンテーゼが想定されている。

《こうした弁証法的観点から，教室における概念変容の過程は，新しいコンセプションをプリコンセプションに同化させる活動（すなわち先行知識を肯定する主張）とともに，その限界を認識する活動（すなわち先行知識を否定する主張）を数学的な議論として捉えることができる。このとき学習者においては，プリコンセプションの適用可能性とその限界を意識化することが期待され，教師においては社会的相互作用を通して学習者の概念変容を推進することが重要になる》（真野，2010，p.194）。つまり，生徒は先行知識を肯定する活動，先行知識の限界の意識化により，先行知識を否定する活動がなされ，社会的相互作用を通して，概念変容がなされていくと考えられる。

（3）認識論からみた授業過程

弁証法論的観点に概念化の過程を統合する。概念化の過程は個人内において述べられているものなので，弁証法論的観点の認知的次元にあたる。また，内包Ⅰがプリコンセプション，内包I'が新しいコンセプションにあたる。すると，「内包Ⅰの適応可能性の把握」は「プリコンセプションの適応可能性の把握」，「内包Ⅰの限界の意識化」は「プリコンセプションの限界の意識化」，「内包Ⅰと内包Ⅰ’の分化」は「プリコンセプションと新しいコンセプションの分化」，「内包Ⅰの見直し」は「プリコンセプションの見直し」と置きかえることができる。そして，様相Ⅰがプリコンセプションの適応可能性の把握，様相Ⅱがプリコンセプションの限界の意識化・プリコンセプションと新しいコンセプションの分化，様相Ⅲがプリコンセプションの見直しにあたると考える。

様相Ⅰでは，プリコンセプションを肯定する主張がなされる。肯定するということは，プリコンセプションが現在の問題状況において，適応すると捉え，プリコンセプションに固着する。よって，様相Ⅰでは，新しいコンセプションの適応可能性の把握がなされる，と捉えることができる。

様相Ⅱでは，プリコンセプションを否定する主張がなされる。否定するということは，プリコンセプションが現在の問題状況において，適応せず，プリコンセプションの限界が表れ，そこから新しいコンセプションの獲得がなされる。また，様相Ⅱでは述べられていないが，様相Ⅲで認知的再構造化がなされることから，様相Ⅱでプリコンセプションと新しいコンセプションの分化もなされると考える。よって，様相Ⅱでは，プリコンセプションの限界の意識化・プリコンセプションと新しいコンセプションの分化がなされる，と捉えることができる。

様相Ⅲでは，プリコンセプションの見直しをすることで，認知的再構造化がなされると捉えることができる。

以上のように，弁証法論的観点に概念化の過程を統合したものを認識論からみた授業過程と捉える。

第２節　充実した数学的コミュニケーション活動の明確化

2.1. 認知論と認識論を補完した学習過程

認知論と認識論を補完した授業過程を考察する。その際，認知論に認識論を補完する形で行う。コミュニケーションによって数学の認識がどのように高まっていくのかを考察する。そこで，まず認知論における「認識，同化，拡張，分化，再構成」の過程を認識論でも捉え，その後それぞれの相を比較し，認知論に認識論を補完する形で充実した数学的コミュニケーション活動のあり方を探る。

真野による認識論では認識の段階については言及していない。同化は概念変容場面の「外延の拡大」にあたる。個人内では「内包Ｉ（プリコンセプション）の適応可能性の把握」がなされ，個人間での集団では，「問題状況における，先行知識に基づく提案（テーゼ）」にあたり，個人と集団で相互になされる。

拡張は概念変容場面の「外延の拡大 → 内包の変更」にあたると考える。《領域 D で意味 M が成り立つ。D を含むより広い領域 D’において成り立つ意味 M’が，D に限定したとき M と同値であるとき，M’は M の拡張である》（溝口，2006，p.11）と捉えると，つまり，D が外延にあたり，M が内包にあたる。D が D’へと拡大し，そのとき D において本質的な意味をもつ M が，D’においても意味を保つために，M は M’へと変更している。ゆえに，「外延の拡大 → 内包の変更」は拡張場面にあたる。また，真野（2004）は《拡張は，数学学習においてその契機の獲得によって子どもの活動に本質的に反映される》と述べていることから，概念化の過程において拡張場面が重要な教育的価値を有することになる。個人内では，「内包Ｉ（プリコンセプション）の限界の意識化」がなされ，個人間での集団では，「受容的対応（テーゼ）」または「否定的対応（アンチテーゼ）」がなされ，テーゼとアンチテーゼが対立する。個人と集団で相互になされる。

分化は，概念変容場面の「内包の変更」にあたると考える。真野自身，分化という言葉は，ここの相を捉えている。しかし，江森と分化の捉えが異なる。詳しくは後ほど述べる。個人内で「内包Ｉ（プリコンセプション）と内包Ｉ’（プリコンセプション）の分化」がなされ，集団では，テーゼとアンチテーゼの分化，そして，比較・検討がなされると捉える。

再構成は，概念変容場面の「内包の変更 → 内包の統合」にあたると考える。個人内で「内包Ｉ（プリコンセプション）の見直し」をし，「認知的再構造化」がなされ，集団では，集団における「提案（局所的）や問題状況（大局的）の再構成（ジンテーゼ）」なされると捉える。

以上をまとめたものが以下の表 4.4 になる。

また，拡張に関して，「外延の拡大 → 内包の変更 → 内包の統合」までを通して拡張と捉える広義の意味での拡張もあるが，本研究では，「外延の拡大 → 内包の変更」を拡張とし，狭義の意味での拡張として捉えていく。

表 4.4　認知論と認識論の比較

	認知論的視点（江森）	認識論的視点（真野）
認識	学習者がコミュニケーションのはじまりに気付く相	
同化	表記をコミュニケーションの手段として，他者の思考をもとに自分の思考を発展させる相	外延の拡大において，個人で行われる「プリコンセプション（内包Ｉ）の適応可能性の把握」と，集団で行われる「問題状況における，先行知識に基づく提案（テーゼ）」が相互になされる。
拡張	学習者がメッセージを反省的思考の対象として捉え，送り手の思考と受け手の思考の差異が表れる相	集団で提案に対して「受容的対応（テーゼ）」または「否定的対応（アンチテーゼ）」がなされ，個人では，プリコンセプションの適応の限界が意識化され，新しいコンセプションを獲得する。個人と集団で相互に，テーゼとアンチテーゼが対立する。
分化	学習者が他者との解釈の差異を認識し，自己の思考を変容させる契機をつかむ相	個人でプリコンセプション（先行知識）と新たなコンセプション（新しい知識）の分化，集団でテーゼとアンチテーゼの分化，個人と集団で相互になされ，比較・検討される。
再構成	分化された数学的アイデアが高位のアイデアへと統合され，その際，脱文脈化がなされる相	個人において，プリコンセプション（先行知識）の見直しをし，「認知的再構造化」とし，集団において「提案（局所的）や問題状況（大局的）の再構成（ジンテーゼ）」することが相互になされる。

認知論と認識論の比較を通して，認知論に認識論を補完する。また，真野（2010）は，プリコンセプションや新しいコンセプションは個人において，テーゼ，アンチテーゼ，ジンテーゼは集団においてなされていくと捉えていたが，それぞれ個人だけ，集団だけでな

されていくのではなく，個人，集団どちらともにおいて相互になされると考える。ゆえに，本研究では，個人でもテーゼやアンチテーゼ，ジンテーゼが起こり，集団でもプリコンセプションや新しいコンセプションは発生しうるという立場で研究を進める。

2.2. 個人内の学習過程

「認識」を学習過程の最初の相に位置づける。コミュニケーションの視点に立った場合，「認識」の段階は必要なものに思える。「認識」なしには，コミュンケーションはなされないと考える。ゆえに，「認識」を位置づける。「認識」も個人と集団が相互に作用する。認知論では，学習者がコミュニケーションのはじまりに気付く相として捉えられているが，ここでのコミュニケーションの始まりとは，課題における問題状況を把握することにあたると考える。数学的コミュニケーションを「数学のコンテクストを含んでおり，数学的な事象について，厳密に言語としての数学を使用し，問題解決・知識体系の構築をすること」と捉え，これらの始まりに気付くことは，問題状況の把握が必要になるからである。

「同化」は，認知論では，自己と他者の思考の同化に重きが置かれているが，認識論においては，問題状況とプリコンセプションに基づく自己の思考の同化が問題となっている。個人内で捉えた際，ここでは認識論における同化の考えを基にしていく。ゆえに，「同化」は，問題状況において，表記をコミュニケーション手段として選択し，プリコンセプションに基づく提案（テーゼ）をすること，とする。

「拡張」は，認知論では反省的思考によって，自己と他者との思考の差異が生じる相として捉え，認識論では，プリコンセプションの限界を意識化し，テーゼの批判的提案（アンチテーゼ）がなされ，テーゼとアンチテーゼの対立が生じる相として捉えられている。また，反省的思考によって，限界の意識化がなされる（江森，2012)。「拡張」では，反省的思考によって，プリコンセプションの限界の意識化がなされ，アンチテーゼが出現する。また，テーゼとアンチテーゼだけでなく，アンチテーゼにおける考え方の違いといった，自己と他者との思考の差異が対立することで，新しいコンセプションが提案される，と言える。

「分化」で，認知論では，自己と他者の差異の分化と捉え，認識論では，自己内のプリコンセプションと新しいコンセプションの分化と捉えており，認知論と認識論の間で「分化」の捉えが大きく違う。個人内では，認識論の分化の捉えの基，本研究を進める。「分化」は，プリコンセプションと新しいコンセプションの比較，分析とする。

「再構成」は，認知論では，高位の数学的アイデアが提案され，認識論では，拡張・分化では提案であった新しいコンセプションが，プリコンセプションと統合し，真の新たなコンセプションとなる。また，ジンテーゼを得るために《テーゼとアンチテーゼの対立を止揚する考え自体の再構成がなされる》（笠，磯田，2006，p.143)。ジンテーゼとして，新しいコンセプションによる提案（局所的）や，問題状況（大局的）の再構成がなされる。既有の知識と新たな知識が再構成される点で，認知論と認識論における再構成は共通と言える。ゆえに，「再構成」は，プリコンセプションを新しいコンセプションへ統合し，テーゼ，問題状況の見直し（ジンテーゼ）をする相，と言える。

真野（2010）は，社会的次元を Ernest を基に考察している。Ernest の考えはヘーゲル

の弁証法を基にされている。《弁証法は正，反，合の三段階で一般的に捉えられているが，これは厳密には正しくない。ヘーゲルの弁証法の基底にあるのは，実は二つの対立項が分離対立する以前の状態,そこに含まれている対立項が相反する二つの側面に分裂する段階，分裂した二つの側面が統合される段階という構造》（城戸，2003，p.98）で捉えることができる。これら３つの段階に，認識，同化，拡張，分化，再構成をあてはめると，拡張の段階で，対立項が相反する二つの側面に分裂する段階になり，再構成で，分裂した二つの側面が統合される，と考える。ゆえに，二つの対立項が分離対立する以前の状態を認識・同化の相,そこに含まれている対立項が相反する二つの側面に分裂する段階を拡張･分化，分裂した二つの側面が統合される段階を再構成の相，と考える。

以上を図 4.1 のようにまとめる。

<table>
<tr><th>段階</th><th>学習過程</th><th colspan="2">相</th><th>認知的次元（個人）</th></tr>
<tr><td rowspan="2">対立項が分離対立する以前の段階</td><td>導入</td><td colspan="2">認識</td><td>課題における問題状況を把握すること</td></tr>
<tr><td rowspan="3">展開</td><td colspan="2">同化</td><td>問題状況において，表記をコミュニケーション手段として選択し，プリコンセプションに基づく提案（テーゼ）をすること</td></tr>
<tr><td rowspan="2">対立項が分裂する段階</td><td rowspan="3">調節</td><td>拡張</td><td>反省的思考によって，プリコンセプションの限界の意識化がなされ，テーゼの批判的提案（アンチテーゼ）がなされる
自己と他者との思考の差異の対立
↓
新しいコンセプションの提案</td></tr>
<tr><td>分化</td><td>プリコンセプションと新しいコンセプションの比較，分析</td></tr>
<tr><td>統合される段階</td><td>まとめ</td><td>再構成</td><td>プリコンセプションを新しいコンセプションへ統合し，テーゼや問題状況の見直し（ジンテーゼ）をする</td></tr>
</table>

図 4.1 認識論に認知論を補完した個人内の学習過程

2.3. 個人間の学習過程

数学的問題解決の授業においては，練り上げが重要となり，練り上げは，数学学習において重要な方法論である社会的相互作用によってなされる。よって，数学学習には他者が前提として存在すると言える。個人内の学習過程を基に，個人間の学習過程を捉える。ま

た，先に述べた個人内における「認識，同化，拡張，分化，再構成」といった様相がそれぞれ数学的コミュニケーション活動によってなされ，それが集団においてどのようになされていくか考察する。

教師による「支援」や「課題」は，生徒の個々の活動の橋渡しとなり，目標の達成に向けた水準が高まっていく（溝口，2006）。つまり，「認識，同化，拡張，分化，再構成」といったそれぞれの様相が個々の数学的コミュニケーション活動であると考えた際，それらの活動は教師の「支援」や「課題」によって連続的な活動となる。また「支援」は，教師が一方的に問題の解決を直接的に教え込むものではない。そして，教室という集団で学習していく際に，他者とのかかわり合いによって，問題が解決することがある。生徒の他者との関わり，つまり社会的相互作用は，問題解決をする際，生徒にとって重要な方法であり，支援になるのである。ゆえに，本研究における「支援」は，単に教師が生徒に問題解決を直接的に教え込むものではなく，社会的相互作用を含めた生徒の思考を深化させる働きのことを指す。また，「認識，同化，拡張，分化，再構成」といったそれぞれの様相における数学的コミュニケーション活動を以下のように位置づけ，拡張は２つに活動によって構成されるとする。そして，それぞれの活動は括弧内で示したように今後は呼ぶ。

表 4.5　それぞれの様相における数学的コミュニケーション活動

導入	認識における数学的コミュニケーション活動（問題把握をする活動）	課題における問題状況を把握する活動
展開	同化における数学的コミュニケーション活動（テーゼが出現する活動）	問題状況において，表記をコミュニケーション手段として選択し，プリコンセプションに基づく提案（テーゼ）をする活動
	拡張１における数学的コミュニケーション活動（アンチテーゼが出現する活動）	プリコンセプションの限界の意識化をし，テーゼの批判的提案（アンチテーゼ）をする活動
	拡張２における数学的コミュニケーション活動（新しい提案をする活動）	新しいコンセプションの提案をする活動
	分化における数学的コミュニケーション活動（比較，分析する活動）	プリコンセプションと新しいコンセプションの比較，分析をする活動
まとめ	再構成における数学的コミュニケーション活動（ジンテーゼが出現する活動）	プリコンセプションを新しいコンセプションへ統合し，テーゼや問題状況の見直し（ジンテーゼ）をする活動

《練り上げのための自力解決》（溝口，2006）となるように，練り上げの場にすべての生徒が参加できるような自力解決が必要になる。また，新しいコンセプションを提案する活動が練り上げによる活動にあたるため，自力解決でできるだけすべての生徒がアンチテーゼをすることができればよいと言える。そして，練り上げで新しいコンセプションを提案するために，社会的相互作用がなされていく。集団で，テーゼをどのように乗り越えていくかが授業のねらいとなる。それぞれの活動がどのような「支援」や「課題」によって連続的になって行くのか具体的に考察する。また，再構成して終わりではなく，統合した

知識や概念が次にいかなる問題になりそうか見通しを立てることが大切になる（溝口，2006）ことから，再構成の後，次の課題の見通しを立てる活動に関しても言及する。

（1）問題把握する活動からテーゼが出現する活動へ（認識から同化へ）

テーゼの出現には，生徒が問題状況を把握し，問題にプリコンセプションをあてはめようとすることが求められる。この際，生徒がもつプリコンセプションが個々に異なってはならない。ゆえに，プリコンセプションを集団で共有し，問題状況において，プリコンセプションが妥当そうだと生徒が感じることが必要になる。この際，問題状況の把握の前に，プリコンセプションの復習をし，それを基に問題を解いていくという流れではなく，問題状況の中で，プリコンセプションを全体で共有することができるようにする。また，テーゼの出現に際に，考えを数学的に表記することが必要になる。生徒はプリコンセプションを基に考え，表記するため，プリコンセプションの把握が重要になる。つまり，問題把握する活動からテーゼが出現する活動へは，教師は生徒が問題状況の把握の中でプリコンセプションを全体で共有する支援が必要になる。

（2）テーゼが出現する活動からアンチテーゼが出現する活動へ（同化から拡張１へ）

反省的思考によって，限界の意識化がなされる（江森，2012）ことから，アンチテーゼが出現するには，テーゼによる表記を反省的に生徒が捉えることが必要になる。江森（2012）は一般的に呼ばれる反省的思考を「反省的思考」と「反照的思考」の２つで捉えた。反省的思考とは，《思考の対象を表すという表現活動に対する思考で，前表現活動の一部に何らかの改良が施され》（江森，2012，p.146），第２，第３の反省的思考，第２，第３の表現活動として行われる思考を指し，反照的思考とは，《それまでの試行錯誤によって精緻化されてきた表現を観照することにより，例示された表現に新たな解釈を与える思考》（江森，2012，p.146）のことを指す。反省的思考と反照的思考はこれまでの表記を振り返るという点では同じであると言えるが，大きな違いとして，振り返り後の表記の改善の有無がある。反省的思考は，表記を振り返ることで，前表記の一部分で改善がなされるが，反照的思考では，表記の改善がなされず，表現の本質を見極めていくことで，新たな解釈を加えるというものである。今後指す「反省的思考」は，江森が述べる反省的思考を示すこととする。

今までの表記では限界があり，新たな表記法が必要になる場合，反省的思考がなされると考える。例えば，数概念の整数から負の数へと拡張する場合，「＋（プラス）」では，表しきれない数がありそうだという考えから，「－（マイナス）」という考えや表記が出てくる。この場合，反省的思考によって表記の改善がなされていくと考える。また，テーゼでは，プリコンセプションを基に単に表記したに過ぎず，仮にその表記が正しいとしても本質的な意味の理解はされていない場合がある。例えば，真野（2010）が例で挙げていた，「×小数」で，「×整数」同様に「80×2.4」と表記していても，「×小数」の本質的な意味を子どもたちは理解していない。ゆえに，アンチテーゼが出現するには，表記の本質を見ていこうとする反照的思考が必要になる。こうして，「80×2.4＝80＋80＋??」とこれまでの同数累加で考えられないことに気付き，「80×2.4」を批判的に捉えようとするのである。

テーゼが出現する活動からアンチテーゼが出現する活動へは，表記による反省的思考，

反照的思考が必要になる。しかし，ここでの活動では，反省的思考における前表記を批判的に捉える段階までで，この活動以降に，表記の改善がなされると考える。

（3）アンチテーゼが出現する活動から新しい提案をする活動へ（拡張１から拡張２へ）

数学的問題解決の授業は，《問題解決（の過程）を通して，数学的な概念，知識，技能，等をつくり上げていくことがねらい》（溝口，2006，p.10）とあることからも，この活動間が，数学の授業の核心部分になる。また，アンチテーゼが出現する活動までは，自力解決で行われてきたが，自力解決したものを基に，集団で練り上げがなされる。全生徒が自力解決でアンチテーゼが出現することが理想となるが，アンチテーゼを自力で出現させることが厳しい生徒もいるだろう。アンチテーゼが出現することができなかった生徒は，練り上げにおいて，テーゼにおける限界を意識することが最初の課題となる。他者との社会的相互作用によって，課題が解決されていくと考える。その際，アンチテーゼが出現することができなかった生徒は，アンチテーゼを出現させた生徒の考えを解釈しようとする。また，アンチテーゼを出現させた生徒も，他者に自身の考えを説明することで，曖昧だった箇所を修正することも可能になる。

そして，アンチテーゼを出現させた生徒同士で，前表記を批判的に捉えたといっても，理由をもって理論的に批判している生徒や，感覚的に批判している生徒など，生徒によって同じ批判的に捉えるにしても，差異が生じる。そういった差異が対立していくことで，自力解決では及んでいなかった考えが出現し，思考がより深化していく。他者との社会的相互作用を通して，プリコンセプションのどういったところに限界があり，その限界を超えていくにはどのように考えればよいのかがより明確になっていく。

また，新しいプリコンセプションを提案する際に，岩崎（2002）は，《生徒たちの既有の方法（教師からみるとかなり直観的な方法）が十分に許されており，これに基づいて活動が推奨され，展開され》（p.26）ることが大切になると述べている。これは，公理や定義として，本当に正しいか否かわからないことでも，授業内で一時的に許され，そこから，新しいコンセプションが生じるというものである。つまり，直観的なアイディアや，まだ教室内で真になっていないアイディアも許容していくことが教師だけでなく，生徒内で，つまり教室内で求められる。また，岩崎（2007）が，《直観で見通しを立てて，論理で整理し確認する》（p.52）と述べていることからも，議論の中で直観的であったものが，論理的になっていく。と言える。

以上より，アンチテーゼを出現させていなかった生徒は，他者との社会的相互作用によって，アンチテーゼが出現することができ，アンチテーゼを出現させてた生徒は，社会的相互作用を通して，批判的に捉えた理由の差異から，どのような観点で限界が生じているのか明確になり，限界を乗り越えるための新しいコンセプションが提案される。新しいコンセプションは，直観的なアイディアを許容する教室内で生じる。提案された新たなコンセプションが直観で見通しを立て，論理で整理される。よって，生徒たちが自身のもつ理由を基に，考えの根拠がより明確になる社会的相互作用をし，直観的なアイディアが許容されることが必要になる。

（4）新しい提案をする活動からジンテーゼが出現する活動へ（拡張２から再構成へ）

個人内の様相において，拡張２から分化を経て再構成へと移り変わっている。しかし，分化は，拡張２すなわち新しい提案をする活動から再構成すなわちジンテーゼが出現する活動をする際へと活動が移り変わっていく際の橋渡しにあたると考える。ゆえに，個人間で数学学習を捉えるにあたり，分化すなわち比較・分析する活動は，支援として取り扱うこととする。

新しいコンセプションを提案したが，これがどのようなものなのか既存の知識（プリコンセプション）とどこが同じでどこが異なるのか明確にし，これらを統合させる。また，テーゼや問題状況の見直しといったジンテーゼが出現する活動が行われる。概念変容はプリコンセプションを用いていたときの生徒の様相と新しいコンセプションを提案したときの様相を質的に区別し，そこから再構成が始まる。ゆえに，比較・分析する活動は，概念変容において重要な活動のひとつと言えよう。重要な活動のひとつだからこそ，教師の指示で活動が進んでいくのではなく，生徒が自ら新しいコンセプションとプリコンセプションを比較・分析し，提案した新しいプリコンセプションを明確にしていくことが求められる。以上より，新しい提案をする活動からジンテーゼが出現する活動の際，教師は生徒が主体となって新しいコンセプションとプリコンセプションを比較・分析するような支援を行う必要がある。

（5）ジンテーゼが出現する活動から次の課題へ（再構成から次の課題へ）

プリコンセプションと新しいコンセプションを統合し，テーゼや問題状況の見直しといったジンテーゼが行われて授業は終わりではない。統合した知識や概念が次にいかなる問題になりそうか見通しを立てることが大切になる（溝口，2006）。その際，統合した知識や概念の見通しを立てるには，反照的思考が必要になると考える。反照的思考とは，《それまでの試行錯誤によって精緻化されてきた表現を観照することにより，例示された表現に新たな解釈を与える思考》（江森，2012，p.146），すなわち表現の本質を見極めて，新たな解釈を加えるといった思考であり，一般的に言われる反省的思考にあたる。反照的思考によって，知識や概念などの本質を捉え，次の課題へ見通しを立てることができると考える。

それぞれの活動を，個人内の様相における数学的コミュニケーション活動と捉えた。そして，本研究において数学的コミュニケーションを「数学的コミュニケーションとは，数学のコンテクストを含んでおり，数学的な事象について，厳密に言語としての数学や問題解決・知識体系の構築をしていく活動。また，個人内・個人間においてそれぞれ相互に行われる。」と規定し，これらをする活動が数学的コミュニケーション活動であるとした。しかし，個人内における様相を捉えたものを数学的コミュニケーション活動とし，本研究における数学的コミュニケーション活動で規定した，個人内・個人間で相互に行われるという点で不整合である。ゆえに数学的コミュニケーション活動は，単に授業内におけるそれぞれの活動を指すのではなく，ひとつひとつの活動が集団とかかわり合いながら，個人内・個人間で相互になされていく活動であると考える。よって，問題を把握する活動から，次の見通しを立てる活動まで，個人内・個人間で相互にかかわり合い一連の活動が数学的コミュニケーション活動であると考える。

子どもたちが数学的コミュニケーション活動をすることで，子どもたちの数学の認識の高まりがどのように起こるのか以下の図のようにまとめられる。また，それぞれの活動を繋ぐ矢印は，支援や課題にあたり，矢印に示すことを生徒がすることで，次の活動への橋渡しとなっている。

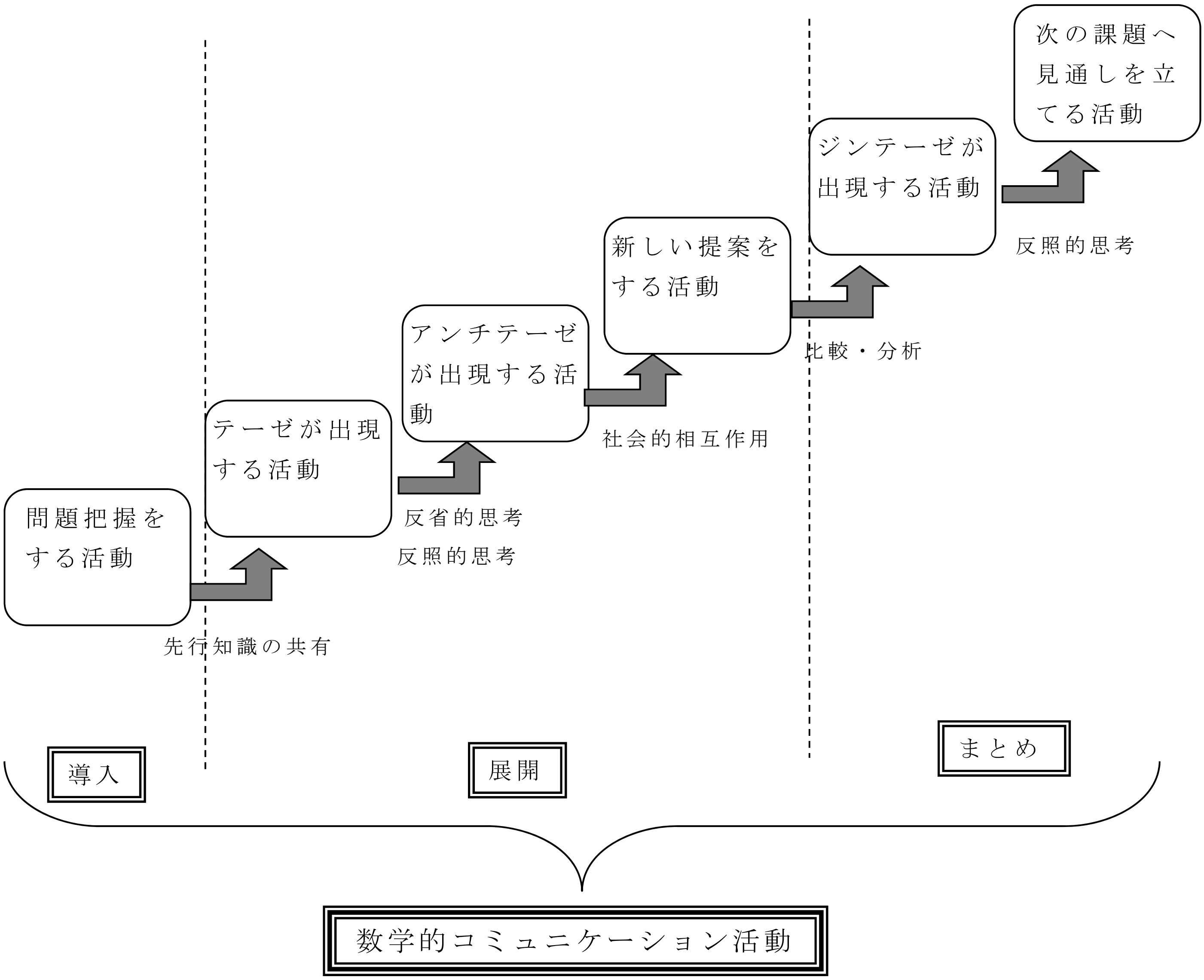


図 4.2　本研究における数学的コミュニケーション活動

第３節　数学的コミュニケーション活動の具体化

本節では，前節で捉えた数学的コミュニケーション活動を具体的に述べる。平林（1986）は，《「変数」と「論証」が数学の本質的な部分を象徴しており，その取り扱いの有無が，「算数」と「数学」のちがいになっている》（p.11）ことを述べている。また，《変数にしても，論証にしても，日常的･生活的関連性をあまりもたない点で，算数内容とは大きく異なっている。したがって，専ら日常的有用性を強調し，身のまわりの事象との関連づけを考える算

数教育の方法は，中学校以上の数学ではそれほど通用しなくなる》（平林 p.12）。つまり，生徒にとって，「変数」と「論証」は，算数と数学の方法の違いによって中学校数学の躓きの要因となってしまっているのである。ゆえに本研究では，充実した数学的コミュニケーション活動を行うことで，中学校数学の躓きの要因のひとつである「変数」と「論証」に着目し，前節における数学的コミュニケーション活動について具体的に述べる。また，「変数」は「代数」，「論証」は「幾何」の領域にあたる。

岩崎（2007）は，算数から数学への移行を，算術から代数，図形から幾何と捉え，その際の移行教材を以下の図のように示した。また，真野（2010）は，岩崎の考えを《「移行前期」とは，小学校算数側から算数を数学に「押し上げる」教材で，「移行後期」とは，中学校数学側から算数を数学に「引っ張り上げる」教材である》（p.28）と捉えた。移行後期の数学教材である，正負の数の減法の問題を基に具体的に述べる。

表 4.6 算数から数学への移行教材の位置づけ（岩崎，2007，p.174）

	移行前期（算数教材）	移行後期（数学教材）
算術から代数	分数の除法	正負の数の減法
図形から幾何	図形の相互関係	図形の作図

岡崎・黒田（2002）によるトランプカードを使用した，正負の加減に関する実践を参考に，本研究における数学的コミュニケーション活動を具体的に述べる。また，負の数の拡張，正負の数を量で表すこと，絶対値及び数の大小関係，加法は既習であり数直線で表す活動も授業の中で行われた上で今回の課題がある。以上をふまえて，課題は次の通りである。

> トランプのカードで，黒のカードに書かれている数字を正の点数，赤のカードに書かれている数字を負の数の点数とします。次のようなゲームを２人でします。
> カードを最初に２枚持っていて，相手からカードを１枚取られたり，もらったりします。２人交互に繰り返し行い，ストップという掛け声がかかったときの手持ちカードの点数合計を出し，合計点数が高い方が勝ちというゲームです。

（1）問題把握をする活動（認識）

教師は，生徒に課題がどのような状況なのか問う。それに対し生徒は，「ゲームをしている」，「トランプの黒は正の点数で赤は負の点数」，「カードの合計点数が高い方が勝ち」など，課題から読み取れることを認識する。

（2）問題把握をする活動からテーゼが出現する活動へ（認識から同化へ）

教師は，「＋10 点から＋４点になりたとき，何が起こったのでしょうか」と生徒に問う。

生徒は「６点取られた」,「－６点もらった」と発言し，そこから式化する。式は，次の 2 本が挙げられる。

・＋10－６＝＋４　　　…①

・＋10＋（－６）＝＋４　…②

小学校で学習した正の数同士の減法（①），正の数と負の数の加法（②）をクラス全体で共有する。ここでのプリコンセプション（先行知識）は，正の数同士の減法（①），正の数と負の数の加法（②），ならびに＋10 点から＋４点の変化を「６点取られた」と「－６点もらった」の２通りで捉えたこと，と考える。また，正の数同士の減法（①）において,「減法はある数からある数をひくと，数が減少する」と捉え，減法の本質的な意味を生徒はまだ理解していない。

（3）テーゼが出現する活動（同化）

教師は「＋７点から＋９点になったとき，何が起こったのでしょうか。先ほどと同じく式化してみましょう。」と生徒に問う。生徒は自力で「２点もらった」,「－２点取られた」と考え，そこから式化する。式は，次の２本が挙げられる。

・＋７＋２＝＋９　　　…③

・＋７－（－２）＝＋９　…④

①，②のときと同じように，生徒は③，④のように式化する。④式がテーゼにあたる。

（4）テーゼが出現する活動からアンチテーゼが出現する活動へ（同化から拡張１へ）

④式を反照的思考で捉えると，数を取り除いたにもかかわらず，数が減るのではなく増えていることに気付き，生徒は④式に違和感を覚える。今まで「減法とは，ある数からある数をひくと，数が減少すること」と捉えていたものが，今回は通用せず，今までの減法の考え，つまりプリコンセプションに限界を感じ，④式を批判的に捉えるようになる。

（5）アンチテーゼが出現する活動（拡張１）

生徒は今までの減法の考えである「ある数量からある数量をひくと，数量が減少すること」というプリコンセプションを批判的に捉え,「④式は存在しないのではないか」,「減法は，数を取り除き，減少するとは限らない」などの提案をする。ここでのアンチテーゼは「減法は，数をひいても，減少するとは限らない」にあたる。

（6）アンチテーゼが出現する活動から新しい提案をする活動（拡張１から拡張２へ），および新しい提案をする活動（拡張２）

④式はプリコンセプションが適応せず,減法の新たな考え方が必要になる。そのために，④式はどのようなことを指しているのか，生徒はまず自力で考え，数直線を用いたり，具体的にカードで説明しようとする。練り上げでは自力解決を基に，考えを補完し合いながら減法への理解を深め，新しい提案をしようとする。カードで考えた生徒と数直線で考えた生徒では，カードで感覚的に理解し，数直線で④式の意味が視覚的に捉えられ，減法の理解を深化させることができる。減法の理解が深まることで，今回の課題で言える新たなコンセプションを提案することができる。ここでの新しい提案とは「減法は，負の数をひ

くと増加する」になるにあたる。

(7) 新しい提案をする活動からジンテーゼが出現する活動へ（拡張２から再構成へ）

プリコンセプションと新しいコンセプションの比較・分析を行うことで，共通点や相違点が捉えられ，減法の性質を取り出すことができる。プリコンセプションの「減法とは，ある数からある数をひくと，数が減少すること」と，新しいコンセプションの「減法は，負の数をひくと，増加する」の相違点として，正の数と負の数が出てくる。取り除く数が正の数と負の数のそれぞれの場合で，減少するか，増加するかが変わることとがわかる。

(8) ジンテーゼが出現する活動（再構成）

プリコンセプションと新しいコンセプションの比較・分析から，取り除く数が正の数と負の数のそれぞれの場合で，減少するか，増加するかが変わることとがわかった。このことから，取り除く数の符号を変えた数を加えればよいことに気付くことができる。ジンテーゼは「正の数・負の数をひくことは，符号を変えた数をたすこと」と減法の意味が再構成される。

(9) ジンテーゼが出現する活動から次の課題へ（再構成から次の課題へ）

ジンテーゼを反照的に捉えると，加法と減法の関連を想起し，さらに加法と減法が混じった場合はどうなるのかといった見通しを立てられる。また，今回の活動では整数のみだったが，小数や分数のときはどうなるのだろうか，という疑問も生じうる。

正負の数における減法の学習過程での，プリコンセプション，新しいコンセプション，テーゼ，ジンテーゼ，アンチテーゼをまとめと次のようになる。

表 4.7　正負の数の減法における学習のまとめ

プリコンセプション	正の数同士の減法（減法とは，ある数量からある数量をひくと，数量が減少すること），正の数と負の数の加法，ならびに＋10 点から＋４点の変化を「６点取られた」と「－６点もらった」の２通りで捉えたこと
テーゼ	＋７－（－２）＝＋９（式の本質的な意味は理解していない）
アンチテーゼ	減法は，数量をひいても，減少するとは限らない
新しいコンセプション	減法は，負の数をひくと，増加する
ジンテーゼ	正の数・負の数をひくことは，符号を変えた数をたすこと

第４節　充実した数学的コミュニケーション活動の明確化

本章は第１節では，江森（2012）による認知論，真野（2008，2010）による認識論から，数学学習過程をそれぞれ捉えた。第２節では，第１節をふまえ，認知論に認識論を補完することで，充実した数学的コミュニケーション活動を行うことができると述べた。子どもたちが数学的コミュニケーション活動をすることで，子どもたちの数学の認識の高まりがどのように起こるのか図示し，まとめた。個人内における学習過程を捉え，個人内に

ける活動を社会的相互作用などの個人間による活動によってなされる一連の活動を本研究における数学的コミュニケーション活動として捉えた。第３節で，岡崎・黒田（2002）によるトランプカードを使用した中学校第１学年の正負の数の減法問題で，具体的に数学的コミュニケーション活動を説明した。

終　章　本研究の総括と今後の展望

本研究の主題である「数学的コミュニケーション活動の充実」に関するこれまでの議論を振り返り，得られた知見を整理する。

第１節　研究の総括

本研究における研究目的は，以下の通りであった。

《本研究の目的》 数学教育におけるコミュニケーションの重要性，さらに数学的コミュニケーションとはどのようなものなんのか明らかにするとともに，充実した数学的コミュニケーション活動を明確にすること。

この目的に対し，本研究では以下の３つの研究課題を設定した。

（研究課題１）	数学をコミュニケーションという視座から考察し，数学的コミュニケーションとはどのようなものなのか先行研究を基に概念を明確にすること。
（研究課題２）	「課題１」をうけて，社会的相互作用と数学的コミュニケーションのつながりを明確にし，学習過程において重要となる様相を特定すること。
（研究課題３）	「課題２」をうけて，充実した数学的コミュニケーション活動を明確にすること。

これらの課題に対しての取り組み，その成果を各章ごとにまとめる。

1.1. コミュンケーションの視座からの数学

第１章では，コミュニケーションという視座から数学を考察し，「数学とは何か」を明確にすることが目的であった。第１節では，先行研究を基にコミュニケーションの定義を行い，個人内・個人間という視点からコミュニケーションを以下のように定義した。

【コミュニケーション定義】 コミュニケーションとは，私たち人間が自分自身の内部体験や外界からのさまざまな刺激に対して，自分なりの意味を見出そうとする創造的なプロセスであり，個人内（自己内）コミュニケーションと個人間（対人）コミュニケーションがある。

第２節では，第１節で定義したコミュニケーションの定義における個人内・個人間という視点から，科学技術の智プロジェクトにおける数学の方法の，言語としての数学，問題解決・知識体系の構築としての数学の方法をそれぞれ考察した。また，思考することとは

数学においてどのようなことを指すのか述べた。

第３節では，第２節での考察から,「言語としての数学をすることは思考すること」,「問題解決・知識体系の構築としての数学をすることは思考すること」であり,「思考することとコミュニケーションをすることは表裏一体であるである」という考察から,「数学をすることはコミュニケーションをすること」であると論じた。

1.2. 数学的コミュニケーションの概念規定

第２章では，数学的コミュニケーションの概念規定をすることがねらいであった。そのために，第１節では，金本（1998）による数学的コミュニケーション能力，江森（1998, 2012）による数学的コミュニケーション過程に関する先行研究を,「個人内」,「個人間」,数学における「言語としての数学」,「問題解決・知識体系の構築としての数学の方法」という視点から捉え，それぞれの研究において，何をもって「数学的」と規定しているのか考察した。

第２節では，第１節をふまえ，本研究における数学的コミュニケーションの概念規定を行った。その結果以下のように数学的コミュニケーションを概念規定した。

【数学的コミュニケーションの概念規定】
数学のコンテクストを含んでおり，数学的な事象について，厳密に言語としての数学を使用し，問題解決・知識体系の構築をすること。また，個人内・個人間においてそれぞれ相互に行われること。

1.3. 数学学習過程における社会的相互作用

第３章では，数学学習における社会的相互作用に焦点をあて，社会的相互作用と数学的コミュニケーションのつながりを明らかにし，数学学習過程と社会的相互作用がどのようにかかわるのか明確にすることがねらいであった。そのために，第１節では，数学的コミュニケーションと先行研究を基に捉えた社会的相互作用との関係を考察し，数学的コミュニケーションをすることは，数学を学習していくことに他ならず，数学の学習において社会的相互作用が重要な役割を担うということは，数学的コミュニケーションにおいても社会的相互作用が重要になると論じた。

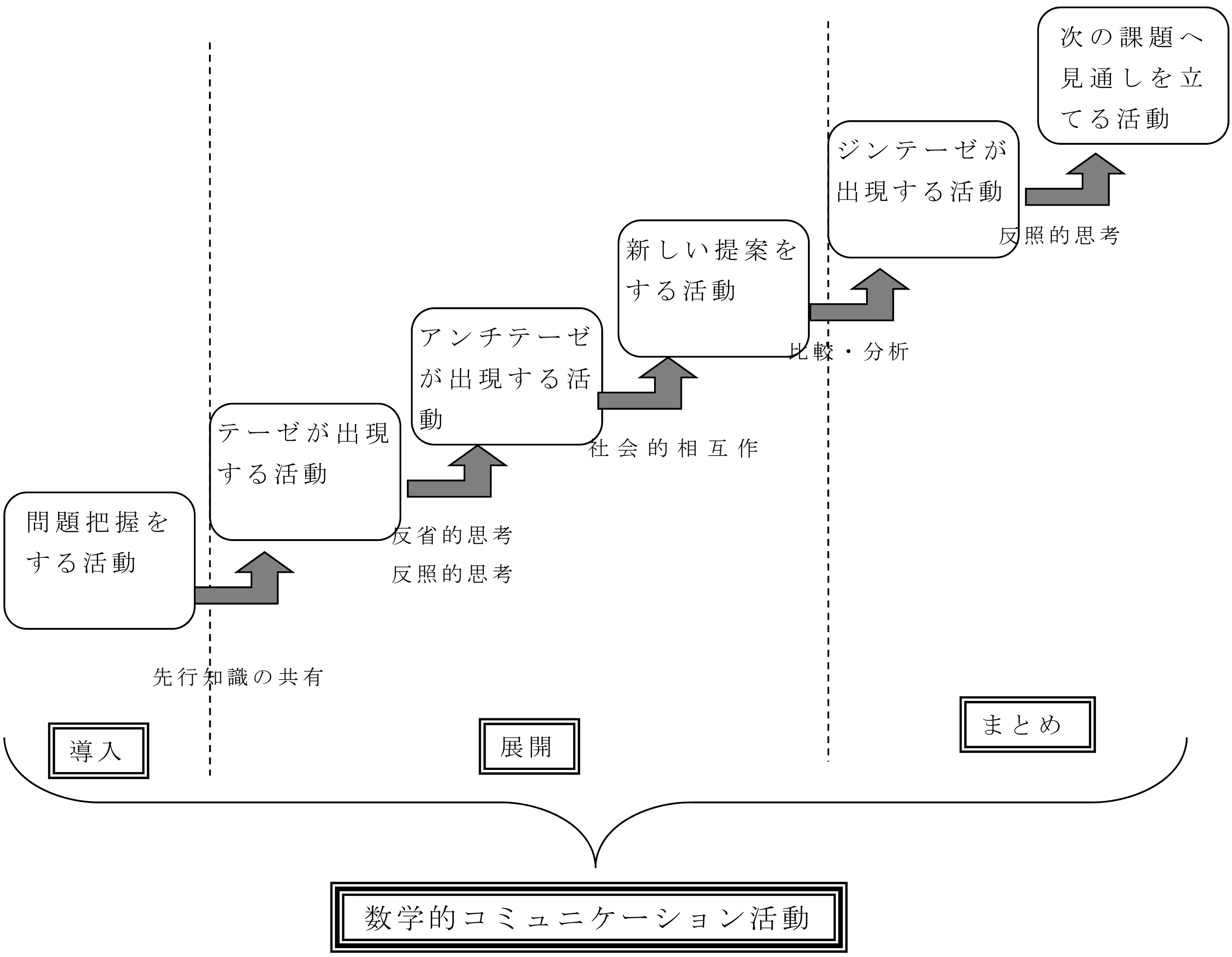
第２節では，社会的相互作用が学習過程ではどの様相で特に作用し，重要になるのかを考察し，数学学習の指導過程と社会的相互作用がどのようにかかわるのか明確にした。その結果,数学的問題解決の授業の「問題提示→自力解決→練り上げ→評価問題／振り返り」練り上げの様相で特に社会的相互作用が重要になる。さらに，数学的コミュニケーションをすることは，数学を学習していくことに他ならならず，数学学習において社会的相互作用が重要になることから，社会的相互作用は，数学的コミュニケーション活動において重要な役割を果たし，問題解決過程を数学的コミュニケーション活動の視点からみた際も，練り上げにおいて社会的相互作用が重要になるが，実際の授業過程で問題解決過程は一方

向に進むとは限らず，自力解決をし，練り上げた後にまた自力解決という流れになる場合もあり，問題提示を導入，自力解決・練り上げを展開，最後に振り返り／評価問題をまとめという過程で捉え，「導入 → 展開 → まとめ」の学習過程の中の展開を重視する。

1.4. 充実した数学的コミュニケーション活動の明確化

第４章では，充実した数学的コミュニケーション活動を行うにはどのように行えばよいのか明確にすることがねらいであった。そのため，第１節では，江森（1998，2012）によるコミュニケーションの視点から子どもの視座を強調した認知論，真野（2008，2010）による数学の視座を強調した認識論の学習過程モデルの先行研究を考察した。

第２節では，第１節における考察より，認知論に認識論を補完した学習過程を個人内，個人内を基に個人間も含めた，子どもたちによる数学的コミュニケーションで，子どもたちの数学の認識がどのように高まるのかをまとめ，数学的コミュニケーション活動の明確化を行った。その結果，以下のように図示することができた。



本研究における数学的コミュニケーション活動（図 4.3 の再掲）

1.5.本研究の成果

本研究の成果は，次の３点である。

研究成果１：数学的コミュニケーション概念の明確化

数学をコミュニケーションの視座から考察すると，数学をすることはコミュニケーションをすることであり，さらに，数学的コミュニケーションにおける先行研究の考察から，数学的コミュニケーションの概念を「数学のコンテクストを含んでおり，数学的な事象について，厳密に言語としての数学を使用し，問題解決・知識体系の構築をすること。また，個人内・個人間においてそれぞれ相互に行われる」と明確にした。

研究成果２：社会的相互作用と数学的コミュニケーションのつながり及び，学習過程における社会的相互作用の重要な様相の特定

数学的コミュニケーションをすることは，数学を学習していくことに他ならず，数学の学習において社会的相互作用が重要な役割を担うということは，数学的コミュニケーションにおいても社会的相互作用が重要になる。社会的相互作用は協同的な学びとなる練り上げの様相が核心部分にあたる。また，問題解決過程は一方向に進むとは限らず，自力解決をし，練り上げた後にまた自力解決という流れになる場合もあり，問題提示を導入，自力解決・練り上げを展開，最後に振り返り／評価問題をまとめという過程で捉え,「導入 → 展開 → まとめ」の学習過程の中の展開を重視することを特定した。

研究成果３：充実した数学的コミュニケーション活動の明確化

認知論と認識論を基にした学習過程モデルを考察し，認識論に認知論を補完した学習過程を述べた。また，補完した学習過程を個人内という視点で捉えた後，集団という個人間において個人内の学習過程がどのように移行していくのか考察し，ひとつひとつの活動が個人内・個人間で相互にかかわりで一連の流れになるものを数学的コミュニケーション活動とした。

第２節　今後の展望

本研究では，充実した数学的コミュニケーション活動とはどのようなものなのか明確にした。理論部分や数学的コミュニケーション活動を具体化していくにあたり，今後の課題として３点挙げられる。

１点目として，今回具体的に述べた数と式領域以外の図形，関数，資料の活用における数学的コミュニケーション活動を具体的に述べていくことである。数と式,図形の領域は，平林（1986）が述べるように，身のまわりの事象との関連づけが希薄な面があり，数学の方法における言語としての数学により強調点が置かれている。それに対し，関数，資料の活用は日常生活における有効性，つまり問題解決としての数学の方法が強調される。ゆえに，そういった強調点が異なる領域においてどのように数学的コミュニケーション活動が

なされていくのか今後考察し，具体的に捉える必要があると考える。

２点目として，実践的研究を行っていくことである。本研究における数学的コミュニケーション活動を具体的に述べたものの，実践していないため，有効性が得られていない。ゆえに，今後実践し，有効性を確かめていくことが求められる。

３点目として，評価に関することである。数学的コミュニケーション活動によって概念が変容していく様相を具体的にどのように捉え，評価していくか今後明らかにしていく必要があると考える。

引用・参考文献

阿部好貴（2010）『数学教育におけるリテラシーの育成に関する研究』，学位論文，広島大学院教育学研究科.

飯田慎司（1997）「社会的相互作用の文献的検討（１)」,『日本数学教育学会第 30 回数学教育論文発表会「テーマ別研究部会」発表収録』，pp.81-88.

岩崎秀樹（2007）『数学教育学の成立と展望』，ミネルヴァ書房

岩崎浩（2002）「メタ知識としての「限界（Grenze)」の意味とその役割－新しい数学的内容と学習者との間の関係と問題－」，全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，第 8 巻，pp.19-29.

江森英世（1998）「『数学的コミュニケーション』を数学的にしているものは何か？－『数学的コミュニケーションの』の暫定的定義を目指して－」,『日本数学教育学会第 31 回数学教育論文発表会「テーマ別研究部会」発表収録』，pp.57-62.

江森英世（2000）「数学的コミュニケーション参画者の認知過程」,『日本数学教育学会誌. 臨時増刊，数学教育学論究』,第 73 巻,pp.27-54.

江森英世（2006）「数学学習におけるコミュニケーション連鎖の研究」，日本数学教育学会誌　『数学教育学論究』第 84 巻，pp.29-37.

江森英世（2012）『算数・数学教授のための数学的コミュニケーション論序説』，明治図書.

岡崎正和・黒田匠（2002）「代数の導入過程における正負の数の加減の学習指導と，それに託される教育理念」,『日本数学教育学会第 35 回数学教育論文発表会』，pp.193-198.

笠一生・磯田正美（2006）「自ら発展する子どもを育てる数学科の授業作りに関する実践的研究－意味と手続きをつなぐ表現の再構成活動を通して－」,『第 39 回数学教育論文発表論文集』pp.139-144.

金本良通（1998）『数学的コミュニケーション能力の育成』，明治図書.

川嵜道広（2004）「図形概念の数学的意味に関する認識論的研究」,『大分大学教育福祉科学部研究紀要』，第 26 巻第 2 号，pp.277-292.

キース・デブリン　山下純一訳（1995）『数学：パターンの科学　宇宙・生命・心の秩序の探求』，日経サイエンス社.

科学技術の智プロジェクト（2008）『21 世紀の科学技術リテラシー像～豊かに生きるために智～プロジェクト　数理科学専門部会報告書』.

城戸雪照（2003)「第３章 場所的論理学 ４. 弁証法論理」,『場所の哲学－存在と場所－』，文芸社，pp.97-101.

久保良宏（2009）「数学的コミュニケーションを中心とした授業」，長崎栄三・國宗進・太田伸也・相馬一彦 編著『中学校新数学科の授業創る② 新たな数学の授業を創る』，明治図書，pp.89-98.

国立教育政策研究所（2007）『PISA 2006 年調査　評価の枠組み　OECD 生徒の学習到達度調査』，ぎょうせい.

真野祐輔（2004）「学校数学における拡張の意義」,『鳥取大学数学教育研究』，第 6 巻，No.9.

真野祐輔（2008）「平方根の学習における概念変容過程の分析」,『第 41 回数学教育論文発表論文集』pp.285-290.

真野祐輔（2009）「数学学習における概念変容のメカニズムに関する一考察：数学の対話的・弁証法的本性への着眼」,『第 42 回数学教育論文発表論文集』pp.481-486.

真野祐輔（2010）『算数・数学学習における概念変容に関する基礎的研究－「数」領域の展開を中心に－』, 学位論文, 広島大学大学院教育学研究科, pp.190-256.

長崎栄三・滝井章（2009）「数学教育の目的と目標」, 長崎栄三・國宗進・太田伸也・相馬一彦 編著『中学校新数学科の授業創る① 豊かな数学の授業を創る』, 明治図書, pp.11-32.

中原忠男（1997）「社会的相互作用の文献的検討（２）」,『日本数学教育学会第 30 回数学教育論文発表会「テーマ別研究部会」発表収録』, pp.89-96.

中原忠男（2001）『数学教育における多世界パラダイムに基づく学習論の理論的・実証的研究』, 研究成果報告書.

中原忠男（2007）「これからの算数・数学教育－カリキュラムの構成原理に着目して－」,『日本数学教育学会誌』, 第 89 巻第 4 号, pp.28-33.

平林一榮（1986）「数学教育の有効性のために」,『奈良教育大学紀要（自然科学)』, 第 35 巻第 2 号, pp.1 -17.

溝口達也（2006),『創造性の基礎を培う授業構成とその展開』,「第 39 回中国・四国算数・数学教育研究（鳥取）大会　公開授業学習指導案集」, p.1-14.

文部科学省（2008)『中学校学習指導要領解説　数学編』, 教育出版.

文部科学省（2010)『高等学校学習指導要領解説　国語編』
http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2010/12/28/1282000_02.pdf

八代京子, 荒木晶子（2001)『異文化コミュニケーション・ワークブック』, 三修社, p.29

謝　辞

本研究をこのような形にまとめることができたのは，多くの方々にご指導，ご助言をいただいたからに他なりません。ここに感謝とお礼を申し上げます。

指導教員をしていただきました阿部好貴先生には，言葉では言い表すことができないほどの感謝の念でいっぱいです。平面の広がりである勉強とは異なり，垂直方向への高まりである研究をするにあたり，私は右も左もわからない状況でした。突拍子もないことを言い出したり,論理的に自分の考えを伝えることができず時間ばかり浪費させてしまったり,不出来な学生であったと思います。このような私を見捨てず，最後まで導いてくださいました。まだまだ未熟ではありますが，少しは自分自身を成長させることができたのではないかと思います。これも阿部先生からのご指導があったからこそだと思います,

また,勉強会や合宿などで現職の先生方から多大なるご指導,ご助言をいただきました。大学での理論的な研究からだけではみえてこない新たな知見を得ることができました。心より感謝申し上げます。

先輩方，後輩方，そして同期にも心より感謝申し上げます。不出来な私に，多大なるご指導，ご助言をしていただきました。そして，研究内容だけではなく，研究に対する真摯な姿勢も学ばさせていただきました。皆様がいてくださったからこそ，私は研究を進めることができ，濃厚な学生生活を過ごすことができたのだと思います。数学教育について議論し，共に高め合うことができる仲間に出会うことができ，私は本当に幸せ者だと思います。

私の学生生活は，阿部先生をはじめ，多くの方々との出会いで大きく変わりました。阿部先生と出会うことができなかったら，どのような学生生活を送っていたか想像するだけでも恐ろしいです。阿部先生から，私は学び方を教わりました。目の前にいる子どもたちを幸せにするために，私は学び続けます。そして，その場に留まることなく，少しでも歩み続けていきたいと思います。

最後になりましたが，阿部先生をはじめとする多くの方々に支えられ，本研究をまとめるまで至りました。皆様への感謝の気持ちとお礼を申し上げたく，謝辞にかえさせていただきます。

平成 25 年 3 月

三ヶ月　好