新潟大学教育学部数学教室,『数学教育研究』, 第 48 巻, 第 1 号, 346-406, 2013.

算数の力の育成に関する研究

新潟大学　教育学部
学校教員養成課程　数学教育専修
阿部ゼミナール　杉山史典

序章　本研究の目的と方法

本章では, 本研究の目的と方法を述べ, 論文全体の概要を示す。第 1 節では本研究の目的を, 第 2 節では本研究の方法と構成を述べる。

第 1 節　研究の目的

算数・数学教育は, 人間形成的目的, 実用的目的, 文化的目的の 3 つの目的から考えられる (長崎, 2007a)。その目的をふまえ, 算数・数学教育における目標は社会や文化が変わることによって変わる。特に, 2000 年代は学力低下が叫ばれ, 算数・数学教育で身に付けるべき学力は何かということが問われている。その問いに対する解答として, 算数・数学の最も重要な学力は, これまでの算数・数学のねらいでもあった「数学的な考え方」である (片桐, 2004)。数学的な考え方は, これまでの算数・数学教育の思想的基盤・哲学的基盤でもあるとともに, 他教科においても多くの部分で通じるものであろう。また, 思想的基盤・哲学的基盤であるが故に不可欠な議論である。何のための算数教育かということを踏まえた議論をする必要がある。

そこで, これまでの算数・数学のねらいでもあった「数学的な考え方」に着目すると, 学習指導要領において, その趣旨は,《日常の事象を数理的にとらえ, 見通しをもち筋道を立てて考え表現したり, そのことから考えを深めたりするなど, 数学的な考え方の基礎を身につけている。》(文部科学省初等中等教育局, 2010, p.5) と示されており, 広義に解釈されうる。また, 全国学力・学習状況調査の結果において, 数学的な考え方における成績は芳しくなく (国立教育政策研究所, 2010 ; 国立教育政策研究所, 2012a), 現状の学習指導で数学的な考え方が十分に育成されているとは言い難い。そして, この調査で使われている問題が,《知識, 技能等を実生活の様々な場面に活用する力や, 様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力などに関わる内容》(国立教育政策研究所, 2012a, p.5) という理念の下で作成されていることを踏まえると, 算数や数学を現実の場面で使う力においても十分に育成されているとは言い難い。

このような現状の中で,《求められる人間像はその時代や文化に深く依存する》(阿部, 2010, p.104) ことを踏まえると, 現在の社会で子どもに必要な能力を算数教育で育成する必要がある。また, そのときに,《数学教育において, 数学教育全体を貫く理念として, 数学的リテラシーが位置づく。その一方で, 下位概念, つまり, これまでの陶冶・実用・文化という目的, さらに, 目標のあり方も数学リテラシーの下で再考されるべきであり, そのような数学的リテラシーの下での目的・目標の構造化, さらにはカリキュラムの構築が望まれる。》(阿部, 2010, p.105) ことを踏まえて, 数学的リテラシーの下で, 目標の

再考が必要であると考える[1]。そこで，現在の社会で求められている能力，特に算数教育で育成できる能力は何かを考えると，今の日本では，子どもたちの思考力や判断力が求められており，それは，算数教育における数学的な考え方の育成であると考える。また，現実で算数を活用するという視点から問題解決能力や数学的モデル化能力，コミュニケーション能力（長崎，2007a）などの育成も求められると考える。

このような課題意識のもと，本研究では長崎（2007a）が，新しい算数教育の目標として提案した「算数の力」に着目する。「算数の力」とは，これまでの算数教育のねらいでもあった数学的な考え方に，現在の社会で求められる能力である問題解決能力や数学的モデル化能力，コミュニケーション能力などを加えたものである。数学的な考え方に加え，現実の問題を解決するという問題解決能力や数学的モデル化能力などは，現実を基盤とした算数教育であるからこそ育成できるものであると考える。つまり，「算数の力」という目標においては，算数や数学で培った考え方や算数や数学を現実の場面で使うという 2 点から考えられており，上記課題に対する解決の方策となりうると考える。また，目標が変更されることに伴い，目標を達成するための学習指導も変わることに繋がる。

本研究では，目標について再考し，「算数の力」を育成するための学習指導を明らかにすることを目的とする。

《本研究の目的》 算数教育の目標としての「算数の力」を育成するための学習指導のあり方を明らかにすること。

第 2 節　研究の方法と構成

前節における研究目的を達成するために，次の 3 点を主要な研究課題と設定する。

（研究課題 1）これまでの目標としての「数学的な考え方」を批判的に考察し，その課題を明確にするとともに，今日的な目標としての「算数の力」を考察し，今日の算数の目標を明らかにすること。 （研究課題 2）「課題 1」をうけて，今日的な学習指導について具体的に考察し，算数の力を育成するための学習指導のあり方を明らかにすること。 （研究課題 3）「課題 2」をうけて，算数の力を育成するための具体的な授業を構想すること。

「算数の力」の育成という研究目的に対し，これまでの目標を批判的に考察し，その課題を明確にするとともに，今日的な目標としての「算数の力」を考察し，今日の算数の目標について明らかにすることで学習指導における課題を明らかにし（研究課題 1），その育成のための学習指導の理論を明らかにすることで（研究課題 2），その育成のための具体的

[1] 長崎（2007b）が《人間形成的目的とは，数学の陶冶性に対応するもの》（p.36）と述べるように，人間形成と陶冶は同じであると考える。

な授業を構想する（研究課題 3）。

これらの研究課題に対し，本論文は，序章，第 1 章から第 4 章，終章の 6 つの章から構成される。

「第 1 章　算数教育の目標」では，これまでの算数教育で強調されてきた数学的な考え方について批判的に考察し，今日的な目標としての「算数の力」を考察し，目標について明らかにし，算数の力が算数教育の目標として位置づくことを示し，本研究における算数の力の強調点を示す。

「第 2 章　算数の力を育成するための学習指導」では，算数教育の学習指導に焦点を当て，算数の力を育成するための学習指導について探り，学習指導についての課題と展望を明らかにする。そのためにこれまでの学習指導とこれからの学習指導について考察を行う。

「第 3 章　算数の力を育成するための教授・学習」では，前章までをうけ，数学的モデル化に着目することにより，数学的モデル化における課題とこれからの教授・学習で求められる学習活動について述べる。

「第 4 章　算数の力を育成するための実践的研究」では，これまでの議論を踏まえ，算数の力を育成するための具体的な授業を構想する。

「終章　本研究の総括と今後の課題」では，本研究においての成果を述べ，残された課題について述べる。

第 1 章　算数教育の目標

本章は，算数・数学教育の目標に焦点を当て，算数の力が今日的な算数教育の目標であることを明確にし，その上で本研究での強調点を明らかにすることを目的とする。そのために，第 1 節では，算数教育の目的・目標のあり方について考察する。第 2 節では，これまでの算数教育の目標であった「数学的な考え方」を批判的に考察する。第 3 節では，今日的な目標として「算数の力」に着目し，算数の力の強調点を示し，算数教育における課題と算数の力を育成するための展望を述べる。

第 1 節　算数教育の目的・目標

1.1　算数教育の目的

教育の目的とは「人格の完成」である。そして，算数教育の目的は，人間形成的目的，実用的目的，文化的目的の 3 つから語られる（長崎，2007a）。人間形成的目的とは，算数・数学の学習を通して人間がもつ能力を育てること，実用的目的とは，算数・数学を使うための知識や能力を育てること，文化的目的とは，算数・数学のよさを知らせるものである。算数教育では，この 3 つの目的から「人格の完成」を目指すことが求められる。教育の目的や算数教育の 3 つの目的は変わらないが，教科として小学校では「算数」という名称である一方で，中学校以降では「数学」という名称に変わっている。名称が異なるということは，そこには何かしらの意図があると考える。阿部（2010）は，これまでの学校教育について初等教育，中等教育，高等教育という視点から次のように述べている。

《洋の東西を問わず，初等教育は義務教育として１つの完成教育であり，全ての子どもに将来の大人として不可欠な知識・技能（識字）を身につけさせることが目標となる。それは「現実主義（Realism)」といってよく，職業的な意味を含め，日常生活の必要性に応ずるものであった。一方中等教育は，高等教育への予備教育として誕生し，伝統的に人文主義的な教養を授けることを目標としていた。それは「学問主義（Academism)」といってよく,そのため旧来の中等教育は,初等教育とはその理念において異なるものであった。》（p.16）

つまり，初等教育では日常生活を基本として授業が行われ，学習がなされることが理念として掲げられている。それに対して，中等教育以降では数学の概念を理解することが理念として掲げられている。このような理念的な違いが名称にも影響していると考える。

また,国宗(2007)は,算数と数学の大きな違いとして推論の違いがあると述べている。算数では帰納的推論や類比的推論という発見的推論が主として用いられるが，一方で数学では演繹的推論，つまり確証的推論が用いられる。

国宗（2007）は，小学生という発達段階を考慮した上で，前提を明らかにし，演繹によって一般的に推論を進めることには無理があるとしている。国宗(2007)が述べるように，小学生という発達段階による演繹的推論の難しさはあると考えるが，発見的推論が主として行われる理由としては理念的な違いが大きいと考える。初等教育では，日常生活を基本としている。そこでは,具体的で,現実的なものを複数確認し性質として帰納的にまとめ,一般化する。中等教育以降では，数学の概念を文字や図形を使い証明することによって，性質を演繹的に示すことになる。この推論の違いが算数と数学には表れている。

実際,算数は現実を基盤として，そこに数学の概念を合わせることから,「算数は数学の衣を被せたもの」と揶揄されることがある。しかし，算数と数学には理念的な違いや推論の違いが存在することから,算数と数学を同じに考えることはできないと考える。つまり,算数と数学はそれぞれ別のものとして考えることができ，算数という教科でこそ育成できるものがあると考える。つまり，算数教育では現実を基盤として，数学をどう担保するかを考えることが必要である。

このような算数と数学の違いはあるが,《人間形成を頂点とする目的・目標のあり方は不易であろうが,その一方で人間形成のあり方は不易ではなく,むしろ流行である。つまり,求められる人間像はその時代や文化に深く依存する》（阿部，2010，p.104）ことを踏まえれば，算数教育では現実を基盤として，数学を担保しながら「人格の完成」を目指すことが求められるといえる。

1.2　算数教育の目標

1.1 で述べたように，算数と数学に理念的な違いや推論の違いはあるが，教育の目的である「人格の完成」は不変である。そして，阿部（2010）は《人間形成を頂点とする目的・目標のあり方は不易であろうが，その一方で人間形成のあり方は不易ではなく，むしろ流行である。つまり，求められる人間像はその時代や文化に深く依存する》（p.104）と述べている。これを踏まえて，現在の社会について見ると，今の日本では知識基盤社会と呼ばれている。それは一般に，産業基盤社会から転換したと考えられる。これまでは，機械を

用いることによって資源を加工し物を生産し，それにより利益を得ていた。今は，第 3 次産業の発達が取り沙汰されるように，知識を創造することによって利益を得ようとしている。それは，20 世紀末から 21 世紀にかけ，世界的に社会や経済が変化してきたからであるといえる。

これからの社会について，我が国の社会の将来像としては，民主主義社会，高度情報化社会，生涯学習社会，高齢化社会，少子化社会などがあり，算数教育に大きく関係するものは，民主主義社会，高度情報化社会，生涯学習社会である。また，算数教育は社会における考え方に依存する（長崎，2007b)。つまり，時代によって変わる社会が求める人間を算数教育で育成しようしていると考える。そして，そこには目標が関わってくると考える。

そこで，次節では，これまで算数教育の目標として強調されてきた数学的な考え方について考察する。

第 2 節　数学的な考え方に関する基礎的考察

2.1　数学的な考え方の歴史的変遷

阿部（2010）は《戦後から今日に至るまで，わが国の数学教育においては，「数学的な考え方」の育成が主要な目標として位置づいていた》（p.113）と述べており，我が国の算数・数学教育の目標としては，「数学的な考え方」の育成が位置づいている。数学的な考え方の趣旨としては，《日常の事象を数理的にとらえ，見通しをもち筋道を立てて考え表現したり，そのことから考えを深めたりするなど，数学的な考え方の基礎を身につけている。》（文部科学省初等中等教育局，2010，p.5）と規定され広義に解釈されうる。また，これが趣旨として示されているということは学校現場では，この趣旨の内容が授業の各時間の数学的な考え方育成のねらいになっていると考える。

長崎（2007a）が，《数学的な考え方は，日本の算数・数学教育の歴史の中で，算数・数学教育の目標としての実質陶冶と形式陶冶を総合しようとする中で生まれてきた。》（p.166）と述べるように，その歴史は深い。以下では，長崎（2007a）の研究を基に，数学的な考え方の歴史的変遷を探る。数学的な考え方が初めて明示的に述べられたのは，1955 年に発行された高等学校の学習指導要領であり，その後 1958 年の小学校の学習指導要領でも明示された。しかし，この段階では数学的な考え方が何かという概念規定はされていなかった。1960 年代後半からは，目標としての数学的な考え方について議論が始まった。まず，数学者と算数・数学教育者で見解の相違があった。数学者は，数学的な考え方を直感的・体験的なものであり定義できないとする一方で，算数・数学教育者は，数学的な考え方を分析・総合して定義しようとした。結果として，算数・数学教育者の影響が強い小中学校では陶冶的な数学的な考え方が目標となるが，数学者の影響が強い高等学校では内容の理解が中心となった。1968 年の小学校学習指導要領の改訂では，総括的な目標と具体的な目標に分けて記述され始める。総括的な目標は，現在の学習指導要領の算数科の目標に近いものとなっている。そして，それ以降も様々な研究者によって数学的な考え方の議論がなされ精緻化された。このように，数学的な考え方は現在に至るまでに長い歴史があり，これまでの算数・数学教育における貴重な財産（長崎，2007a）といえる。しかし，その上で氏は，現状のままの数学的な考え方には，これからの社会で求められる問題

解決能力や数学的モデル化能力，コミュニケーション能力などが含まれていないと述べている。

しかし上述したように,《日常の事象を数理的にとらえ，見通しをもち筋道を立てて考え表現したり，そのことから考えを深めたりするなど，数学的な考え方の基礎を身につけている。》（文部科学省初等中等教育局，2010，p.5）という内包的定義しか述べられていないため，数学的な考え方は広義に解釈されうる。中野（1965）は,《「数学的な考え方」を定義づけるのには，2 通りの方法が考えられる。その 1 つは，概括的，一般的に定義するもので，一応，これを内包的な定義と呼ぶことにしよう。それに対して，外延的な定義というのは，具体的に 1 つ 1 つの数学教材の実例をあげながら，そこで，どんな思考活動がなされているかを，分析的にとらえてそれらを列記していく方法である。》（p.11）と述べている。内包的定義と外延的定義はどちらも大切と考えているため，内包的定義と外延的定義の両方について述べている中島（1981），片桐（2004）の研究について考察する。

2.2　中島（1981）の数学的な考え方

中島（1981）は，これから先の数学教育の目的を考えるときに，特定の数学的な知識や技能を,少しでも多く能率よく習得させるというねらいに立って数学教育を考えるよりは，むしろ，算数なり数学にふさわしい創造的な活動を体験させ，それを通して創造的に考察し処理する能力や態度をのばすようにすることが重要とし,数学的な考え方の研究をした。氏は,《「数学的な考え方」の育成とは,「算数・数学にふさわしい創造的な活動が自主的にできるようにすること」である》（p.82）とし，創造的な活動[2]の重要性を強調した。そして,「数学的な考え方」の構造と創造のための論理として，次の表 1-1 を挙げている。

表 1-1　「数学的な考え方」の構造と創造のための論理（中島，1981，pp.82-102）

（1）課題を，簡潔，明確，統合などの観点をふまえて把握すること
（2）仮想な対象の設定と実在化（実体化）のための手法
（3）解決の鍵としての「数学的なアイデア」の存在とその意識づけ
（4）「構造」の認識と保存－特に，拡張・一般化による創造の手法と論理
（5）評価－解決の確認とその真価の感得，残された問題点と発展への志向

中島（1981）は，創造的活動について,《算数や数学で，子どもにとって新しい内容を指導しようとする際に，教師が既成のものを一方的に与えるのではなく，子どもが自分で必要を感じ，自らの課題として新しいことを考え出すように，教師が適切な発問や助言を通して仕向け，結果において，どの子どもも，いかにも自分で考え出したかのような感激

[2] 創造的活動では，これまで算数教育が積み上げてきた「問題解決」的授業のよさを継承しつつ,それを包摂する形でそこに潜む問題点への取り組みを模索することが必要であり，それを換言すれば，授業，学習の実際面で「問題解決」的授業を否定するのではなく，それを踏まえて「軸足の移動」を行うことが必要である。そして，それは子どもの「問い」を生かした算数の授業であり，求められるものは,「宝探し」に似た「正しい解決」に留まることなく,「宝作り」とも言える「価値ある解決と創造」へ向かおうとすることである（岡本，2008)。

をもつことができるようにする》（p.70）と述べている。創造的な活動では，先人が生み出した既にある理論を子どもたちがあたかも自分たちで創り出したかのように体験させることが望まれる。未知の理論を子どもたちが創り出すことはほぼ不可能であろう。数学的な考え方を身につけるためには，教師が仕向けることが必要となり，その教師の隠れた意図に沿って学習が進むことで，子どもたちは算数を生み出す，創り出すという感覚を得ることができるのである。

2.3　片桐（2004）の数学的な考え方

片桐（2004）は，学力低下が叫ばれる中で，《教育のねらいである「自ら考え判断できるようにする」ために，算数・数学の最も重要な学力は，これまでずっと算数・数学のねらいであった「数学的な考え方」なのである。「数学的な考え方」を駆使することによって，初めて「自ら考え，自ら判断し，どんな技能や知識を使ったらよいかが，考えられてくる」のである。》（p.15）とし，学力低下問題に対する真の解決には，数学的な考え方を学力の中心においた真の学力を伸ばすことに改めて努める必要があるとした。その上で，数学的な考え方は《それぞれの問題解決に必要な知識や技能に気付かせ，知識や技能を導き出す力である》（片桐，2004，p.36）とした。

表 1-2　数学的な考え方一覧（片桐，2004，pp.38-39）

Ⅰ　数学的な態度
1.自ら進んで自己の問題や目的・内容を明確に把握しようとする
2.筋道の立った行動をしようとする
3.内容を簡潔明確に表現しようとする
4.よりよいものを求めようとする
Ⅱ　数学の方法に関係した数学的な考え方
1.帰納的な考え方　2.類推的な考え方　3.演繹的な考え方　4.統合的な考え方
5.発展的な考え方　6.抽象化の考え方　7.単純化の考え方　8.一般化の考え方
9.特殊化の考え方　10.記号化の考え方　11.数量化，図形化の考え方
Ⅲ　数学の内容に関係した数学的な考え方
1.集合の考え　2.単位の考え　3.表現の考え　4.操作の考え　5.アルゴリズムの考え
6.概括的把握の考え　7.基本的性質の考え　8.関数の考え　9.式についての考え

片桐（2004）は外延的定義として，まずは大きく「数学的な態度」，「数学の方法に関係した数学的な考え方」，「数学の内容に関係した数学的な考え方」の 3 つに分類した。数学的な考え方は，学力低下問題に対する解決策のアプローチの一つとなり得る。日常生活のことを想起すれば，例えば，ラベリングとして記号化したり，筋道立てて話すために演繹的な考え方が必要になることもある。

しかし，外延を挙げること自体は終わりがなく無限に続くであろう。これを育成することが全てではなく，算数・数学の授業の中で主たる数学的な考え方が表 1-2 の数学的な考え方であると考える。

2.4　数学的な考え方の批判的考察

長崎（2007a）が述べるように，数学的な考え方は算数教育における貴重な財産である。そして，中島（1981），片桐（2004）によって，内包的定義と外延的定義の両側面から精緻化されてきた。一方で，これまでの学習指導において数学的な考え方は育成されてきたのだろうか。そこで，平成 24 年度の全国学力・学習状況調査の結果を考察する。結果は以下の表 1-3 のようになっている。この表は全国学力・学習状況調査の結果を評価の観点を視点としてまとめ直したものである。

表 1-3　平成 24 年度全国学力・学習状況調査結果（国立教育政策研究所，2012a）

評価の観点	学習指導要領の領域	正答率（%）	出題数
数量や図形についての技能	数と計算	95.8，94.4，63.5，90.8，85.9，82.6	6 問（A）
	量と測定	87.1，81.5	1 問（A），1 問（B）
	数量関係	80.3	1 問（A）
	量と測定・図形	64.8	1 問（B）
	量と測定・数量関係	87.2	1 問（B）
数量や図形についての知識・理解	数と計算	89.0，73.9，34.3，41.3	4 問（A）
	量と測定	60.7，54.9	2 問（A）
	図形	77.2，65.0，76.3	3 問（A）
	数量関係	58.7	1 問（A）
	数と計算・量と測定	56.6	1 問（B）
	量と測定・図形	74.5	1 問（B）
	量と測定・数量関係	85.0	1 問（A）
数学的な考え方	数と計算	92.7，42.8	2 問（B）
	数量関係	61.3，23.8	2 問（B）
	量と測定・図形	51.5	1 問（B）
	数と計算・量と測定	73.1，33.2	2 問（B）
	数と計算・量と測定・数量関係	27.0	1 問（B）

※A，B は，それぞれ A 問題，B 問題を表している。

また，この調査における平均正答率は，「数量や図形についての技能」では 77.8%,「数量や図形についての知識･理解」では 65.5%,「数学的な考え方」では 50.7%となっている。主として「活用」に関する問題（B 問題）の数学的な考え方に関する問題において，正答率が低いことがみてとれる。また，これまでの目標として強調されてきた数学的な考え方では不十分であるといえる。それは，これからの社会が求める力が数学的な考え方に対応していないからである。数学的な考え方だけではなく，現実の問題を算数を用いて解決するという問題解決能力や数学的モデル化能力の育成も必要であると考える。つまり，数学的な考え方の育成にも課題があると考える。

そこで，数学的な考え方について内包的定義と外延的定義について述べておられる中島（1981）と片桐（2004）の研究を考察した。これまでの数学的な考え方は，長崎（2007a）が述べるように，算数・数学を創り出す考え方であった。その考え方を育成するために創造的な活動があった。つまり，算数・数学の概念を生み出すことや発展させることに焦点があたる。しかし，そこには現実の問題を解決する能力を育成することに焦点があたっていない。

また，外延的定義を提示したがここにある数学的な考え方が全てではなく，数学的な考え方は無数にあるだろうと考える。つまり，ここに述べられている数学的な考え方が全てではないため，毎回の授業の最初に「今日はこの数学的な考え方を学びます」と授業をすることが適切であるとは言えないのではないだろうかと考える。このような形を取った場合，子どもが考える必要はなくなり，本当に現実の問題を数学的に解決することはできないのではないかと考える。しかし，外延的定義が無意味というわけではなく，外延的定義に当たる考え方を授業のどこで育成するのかということは授業を作る際に考えなければならないと考える。例えば，重視する点としては演繹的な考え方であるというように，指導案の授業のねらいで明らかにすることは必要であると考える。

つまり，これからの目標としては，現実の問題を算数・数学として捉えることで問題を解決することができる能力の育成が含まれる必要があり，そこでは帰納的な考え方や演繹的な考え方などの育成をねらう。それは，問題解決や数学的モデル化が求められていることを踏まえれば，現在の社会から求められている能力の一つであり，現実を主体としている算数という教科で育成することができると考えられる。

第３節　新しい算数教育の目標としての算数の力

3.1　新しい目標の社会背景

これからの社会について，我が国の社会の将来像としては，民主主義社会，高度情報化社会，生涯学習社会，高齢化社会，少子化社会などがあり，算数教育に大きく関係するものは，民主主義社会，高度情報化社会，生涯学習社会である。また，算数教育は社会における考え方に依存する（長崎，2007b)。つまり，時代によって変わる社会が求める人間を算数教育で育成しようしている。

そこで，それぞれの社会で必要な力であり，かつ算数・数学に関わると思われる力を長崎（2007a）は以下のように列挙している（p.26)。

（1）民主主義社会で必要な算数・数学の力
民主主義社会においては，多様な人間が自分たちで合意したルールに基づいて行動する。そのために必要な力は以下のようなものである。
①多様に考える力：多様性を認めるため
②論理的に説明し表現する力：他者を説得するため
③論理的に受け取る力：他者の説明を理解するため
④問題を発見し解決する力：自ら考えるため
⑤批判的な力：物事の意味をより深く理解するため
⑥統計的な力：多様な集団の意見を客観的にとらえるため
（2）高度情報化社会で必要な算数・数学の力
高度情報化社会においては，多様な大量の情報や知識がインターネットなどのネットワークを通じて世界的規模で発信・受信できるようになる。そのために必要な力は以下のようなものである。
①論理的に考える力：情報や知識の意味を理解するため
②アルゴリズムを使う力：情報の意味を理解し情報を発信するため
③情報を数学的に表現し発信する力：情報を制作するため
④数学的に表現された情報を読みとる力：情報を理解するため
⑤コンピュータやインターネットなどを数学的問題解決で使う力：道具を使って問題を解決するため
（3）生涯学習社会で必要な算数・数学の力
生涯学習社会においては，急激に変化する社会において問題に直面し，生涯いつでも学ぶことになる。そのために必要な力は以下のようなものである。
①自己学習力：社会を維持・発展させて自らを成長・発展させるため
②現実世界の問題を解決する力：変化する社会から生ずる問題に対処するため

これから子どもたちは，多様な人々が生活する社会で生きていく。その中では，多様な能力を身に付けていることが必要とされる。多様な能力のうち算数教育で育成できるものとしては，長崎（2007a）が述べるような上記の能力が当てはまると考える。そして，これらの力を，これまでの目標で特に強調されてきた数学的な考え方に含めて新しい目標を設定することによって，これからの社会で求められる力を備えた子どもを育成することができると考える。

そこで，次節では，新しい算数教育の目標として強調されうる算数の力について考察する。

3.2 算数の力

阿部（2010）は，《数学教育において，数学教育全体を貫く理念として，数学的リテラシーが位置づく。その一方で，下位概念，つまり，これまでの陶冶・実用・文化という目的，さらに，目標のあり方も数学リテラシーの下で再考されるべきであり，そのような数学的リテラシーの下での目的・目標の構造化，さらにはカリキュラムの構築が望まれる。》

（p.105）と述べている。数学的リテラシーの下で目標について再考する。

阿部（2010）は，数学的リテラシーにおいて，《「数学の本質」としての構造指向と応用指向という 2 つのベクトルをもち，さらに「方法」と「内容（対象)」という側面がある》（p.106）と述べている。構造指向とは，数学のための数学のことであり，つまり，数学を数学の世界で発展させようとするものである。一方で，応用指向とは，数学を現実や他教科や他領域に応用する数学のことである。そして，内容とは現実事象や数量，図形，関係などのことであり，方法とは問題解決や数学的モデル化，一般化などのことである。氏の研究から，構造指向における内容と方法，応用指向における内容と方法が存在するといえる。ここでの構造指向の内容とは，数量や図形，関係などであり，方法は一般化などの考え方にあたる。また，応用指向の内容は現実世界の問題であり，方法は問題解決や数学的モデル化であろう。つまり，構造指向の目的は算数・数学を創り出すことであり，応用指向の目的は現実世界の問題解決である。算数・数学教育におけるこれまでの目標は構造指向の方法と整合的である数学的な考え方であった。それは，これまでの算数・数学教育では算数・数学の概念を創り出すことに重きが置かれていたからであるだろう。

上述したように，これまでの算数・数学教育の目標では数学的な考え方が強調されてきた。この数学的な考え方は構造指向の方法と整合的である。しかし，この数学的な考え方には，現在重要とされる問題解決能力や数学的モデル化能力，コミュニケーション能力などが含まれていない（長崎，2007a)。そこで，長崎（2007a）は，算数・数学教育の新しい目標として，問題解決能力や数学的モデル化能力，コミュニケーション能力を含めて，「算数・数学の力[3]」を提案した。算数の力は，以下の 4 つの力で構成される。

「算数を生み出す力」
算数の概念を理解し形成するために，算数のきまりや方法を考えたり発展させたりする力
「算数を使う力」
算数の概念を現実の世界で使うために，現実の問題を算数の問題としてとらえたり算数で処理したり判断したりする力
「算数で表す力」
算数で考えたり算数を使ったりするために，式・表・グラフ・図などの数学的表現を扱う力
「算数で考え合う力」
算数を集団で協同して創り上げるために，算数の学習において数学的表現を用いて算数の内容について集団の参加者みんなで考える力

算数を生み出す力は，これまでの目標であった数学的な考え方に関連している。算数を使う力は，問題解決能力，数学的モデル化能力に関連している。算数で表す力は表現力に関連している。算数で考え合う力はコミュニケーション能力に関連している。このように

[3] 「力」と類似している言葉として，教育においては，学力，技能，能力などの言い方がある。「学力」は教育の目標の実質的・形式的の両面を含むあらゆるものを包含した総合的な表現，「技能」は繰り返しの練習で自動化された力を指す傾向，「能力」は生得的な面が強いことから，「力」と表現している （長崎，2007a)。

考えると，数学的な考え方に関連している算数を生み出す力は構造指向の方法，問題解決能力や数学的モデル化能力に関連している算数を使う力は応用指向の方法と整合的である。
長崎（2007a）は，3.1 で述べるような社会の状況から，算数・数学に関わると思われる力を挙げ，その上で算数・数学の力を提案している。そして，算数・数学の力を上記のような 4 つの力で構成した。これらの力は算数・数学のあらゆる活動に関わるはたらきであり，長崎（2007a）の研究では，これら 4 つの力に順序性や優劣は存在していないと考える。
構造指向の方法としての数学的な考え方という目標から，問題解決能力や数学的モデル化能力，コミュニケーション能力を構造指向の方法と応用指向の方法の協調を図ることのできる算数・数学の力へと目標が拡張した。図示すれば以下のようになる。

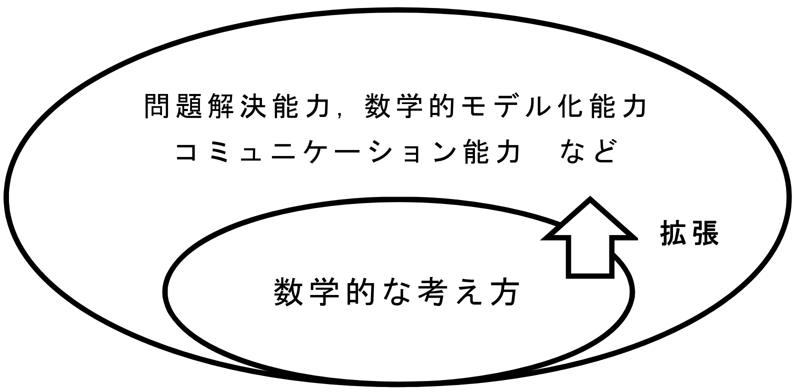


図 1-1　目標の拡張

これからの社会，つまりは，算数教育に大きく関係している民主主義社会，高度情報化社会，生涯学習社会において必要であると思われる力を踏まえている算数・数学の力は目標となり得ると考える。
その上で，阿部（2010）が述べるように，《構造指向と応用指向との両者のバランス》（p.107）が必要であるということを踏まえれば，今までの構造指向の方法と応用指向の方法のバランスが必要であるといえる。算数の力という視点から見れば，算数を生み出す力と算数を使う力の協調である。そこでは，両者を区別するわけではないと考える。両者を区別するということは，教授・学習の連続性（島田，1977[4]）という視点からみると適さないと考える。つまり，構造指向の目的である数学を創り出すということを，応用指向の目的である現実世界での問題解決の中に取り入れる必要がある。換言すれば，応用指向をベースにして，構造指向をどう担保するかということである。この時，構造指向と応用指向の協調の中で，どのように接続を図るかを考える必要がある。

[4]島田（1977）は，《既成の数学の理論を理解しようとして考えたり，数学の問題を解こうとして考えたり，あるいは新しい理論をまとめようとして考えたり，数学を何かに応用して，数学外の問題を解決しようとしたりする，数学に関係した思考活動を，一括して数学的活動と呼ぶ》（p.14）と述べ，教授・学習は一連の活動であるとしている。

3.3　算数の力の強調点

3.2 で述べたように《構造指向と応用指向との両者のバランス》（阿部，2010，p.107）が必要であり，構造指向と応用指向の協調の中で，どのように接続を図るかを考える必要がある。算数を生み出す力は構造指向の方法と整合的であり，算数を使う力は応用指向の方法と整合的である。そして《今日的な数学的リテラシーとして応用指向的方法へと強調点がシフトされる》（阿部，2010，p.117）と述べられるように，算数を使う力を育成することが求められる。しかし,《数学的リテラシーを応用力・活用力とし，他方の構造指向の数学を軽視することは無益》（阿部，2010，p.118）であることを踏まえれば，算数を生み出す力の育成も必要となる。そして，現実を基盤とした算数であるからこそ応用指向の方法である算数を使う力をベースにし，構造指向の方法である算数を生み出す力をどう担保して育成するかということを考えなければならない。つまり，算数を生み出す力と算数を使う力の協調は必須であると考える。

そして，ここでは，算数で表す力と算数で考え合う力に関連する先行研究を考察することで，本研究で算数の力のどれに焦点を当てるかについて述べる。

長崎（2007a）は，算数で表す力を本来は《「算数・数学を生み出す力」,「算数・数学を使う力」,「算数・数学で考え合う力」のそれぞれの力に含まれている》（p.49）と述べている。また，この力は他の力の基盤を形成するものとしている。長崎（2007a）はこの力を目標とする一方で《他の力と組み合さなければその意義が発揮されない》（p.51）と述べている。学習指導要領では《児童が具体物を用いたり，言葉，数，式，図，表，グラフなどを用いたりして，自分の考えたことを表現したり，友達に説明したりする学習活動を取り入れることが重要である》（文部科学省，2008，p.21）や《思考力，判断力，表現力等を育成するため，各学年の内容の指導に当たっては，言葉，数，式，図，表，グラフを用いて考えたり，説明したり，互いに自分の考えを表現し伝え合ったりするなどの学習活動を積極的に取り入れるようにすること》（文部科学省，2008，p.187）と述べられている。つまり,表現力やコミュニケーション能力は算数の学習において必要不可欠であるといえる。算数を表す力は全ての力の基盤として存在しているといえる。

次に，算数で考え合う力について，長崎（2007a）は《問題解決の過程で，多様な考えが出され，それをもとに話し合うことで，算数・数学の概念の理解が深まり，新たな考え方に目を向けるだけではなく，他の子どもの考えを聞き，よみとり，さらに，他の子どもにわかるように説明したりするなど,多様な人間が一緒に考え合う力が育てられる》(p.52)とし,《算数・数学においては，一人の個人による問題解決と，多様な子どもによる集団での問題解決の両者が重要である。後者においては，自分の考えを説明し，他人の考えをよみとり，そして，考え合うことが必要である。》（p.57）と述べている。また《算数・数学の学習では，個々の子どもだけによる個人思考に加え,「算数・数学で考え合う力」は必要不可欠なものとなる》（p.58）と述べられる。また，江森（2000）は，コミュニケーション手段としての数学という数学観を重視し，数学固有の表現方法を駆使した情報伝達能力の育成を教育目標として掲げたことで,《厳密性や操作性に優れた数学的表記を駆使する能力の育成が過度に強調されたために，問題解決や推論という活動と互いの考えを述べ合うという活動が分離されてしまうことになった》（p.96）と述べ，目標に設定したことで過度に強調されたことが他の力との乖離を生じさせてしまったと指摘している。渡辺（2008）

は，算数的表現を個人の思考や思考過程を表す手段として次の 6 つに分けた。

・動作化による表現	・学習具の操作による表現	・用語や言葉による表現
・絵や図による表現	・記号や式による表現	・表やグラフによる表現

そして，算数科におけるコミュニケーションとは，上記の算数的表現を用いて，相手（人）と対話しているときのことであると述べた。この研究から表現とコミュニケーションは表裏一体のものと捉えることができる。算数で考え合う力に関しても，それ単体として育成するものではなく，算数で考え合う力が基礎となり，他の力の育成につながると考える。

上記のことをまとめると,算数で表す力と算数で考え合う力は切り離せないものである。また，これらの力は算数を生み出す力と算数を使う力の育成には欠かせないものあり，基盤として存在しているといえる。

そこで，本研究では，算数を生み出す力，算数を使う力の育成を目標とし，その育成の基礎として算数で表す力と算数で考え合う力が存在すると考える。

その上で，本研究における算数の力を次のようなモデルとして表す。

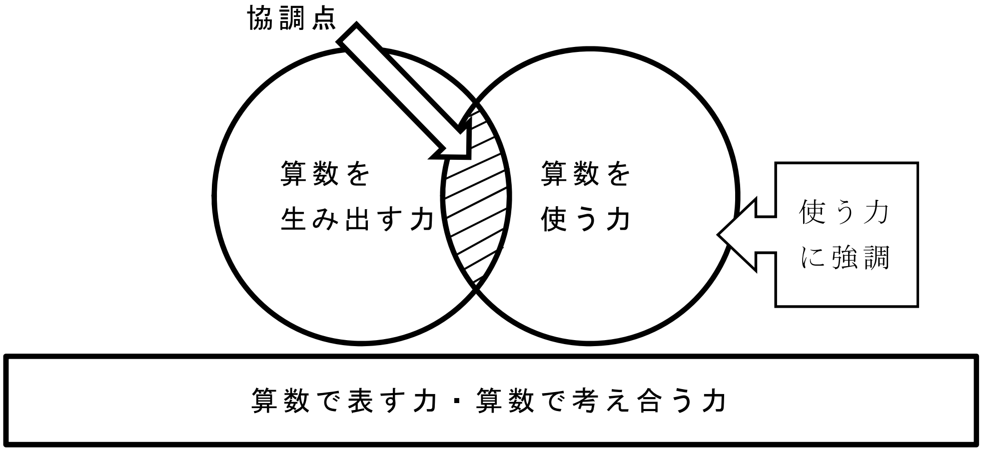


図 1-2　本研究における算数の力の構造

これ以降，算数で表す力と算数で考え合う力は算数を生み出す力と算数を使う力を育成するための基礎と考え，本研究は算数を生み出す力と算数を使う力の育成に焦点化する。算数を生み出す力と算数を使う力の育成は，構造指向と応用指向の協調を図るための目標である。

3.4　本章の総括

教育の目的としては「人格の完成」があり，算数教育の目的は人間形成的目的，実用的目的，文化的目的の 3 つの視座から語られる。目的は社会が変化しても変わることはない（阿部，2010）。

目標としては，これまで数学的な考え方が位置づいていた。多くの先生方によって研究がなされており，数学的な考え方は算数教育の貴重な財産である（長崎，2007a）。しかし，全国学力・学習状況調査の結果を踏まえると，数学的な考え方は十分に育成されていないといえる。また，数学的な考え方という目標にはこれからの社会で必要とされる問題解決能力や数学的モデル化能力，コミュニケーション能力などが含まれていない。これからの

社会で必要な力を含めた新たな目標が求められると考える。そして，これらの力を含めた新たな目標として，長崎（2007a）は算数の力を提案した。数学的な考え方から算数の力へ拡張したといえる。

そして，数学的リテラシーの下で目標について再考すると，まず数学には構造指向と応用指向の 2 つの側面が存在する。また，それぞれに内容と方法が存在している。目標である算数の力は構造指向の方法である算数を生み出す力と応用指向の方法である算数を使う力の両方が含まれている。そこで，算数の力の強調点のモデルを示した。今日的な動向として現実世界の問題を算数を用いて解決する力が求められている。また，現実を基盤とした算数教育では，応用指向をベースにして構造指向をどう担保するかということを考える必要があることから，算数を生み出す力と算数を使う力をどのように協調させるか考える必要がある。つまり，算数を使う力を育成する中で，算数を生み出す力を育成することが必要であり，その時は算数が使う力が強調される。本研究では，算数で表す力と算数で考え合う力を基盤として算数を生み出す力と算数を使う力を育成することを目的とする。

そこで第 1 章をまとめると以下のようになる。

<u>算数教育の目標</u> 構造指向と応用指向の協調を図るための目標として，算数を生み出す力と算数を使う力が位置づく。

第 2 章　算数の力を育成するための学習指導

本章は，算数教育の学習指導に焦点を当て，算数の力を育成するための学習指導について探り，学習指導についての課題と展望を明らかにすることを目的とする。そのために，第 1 節では，これまでの算数教育の学習指導であった「問題解決」に着目する。第 2 節では，今日的な学習指導とされる「算数的活動」に着目し，学習指導がどのように変わったのかについて述べる。第 3 節では算数教育において算数の力を育成するための学習指導を考察する。

第 1 節　問題解決学習の基礎的考察

1.1　問題解決学習とは

問題解決学習について，端的に表現すると，《問題解決の指導は，子ども一人ひとりが自ら学ぶ目標を設定し，主体的な学び方を身につけ，適切に判断したり表現したりできるような力を育てることをねらいとしている》（矢部，1992，p.10）ということである。また，問題解決について，矢部（1992）は《問題解決は，人間がある問題に直面したとき，どのようにその問題をとらえ，どのような見通しのもとに解決を進めていくかという思考過程であり，また，学び方そのものである。》（p.13）と述べている。また，磯田ら（2010）は，《問題解決の指導の特質は，指導内容と同時に，自ら学び・自ら考える方法や価値を教える点にある》（p.11）と述べている。問題解決によって身につける力は，つまり，これまで

の問題解決能力とは，算数・数学を学ぶ上で見通しをもって解決に向かって考え，また，そこで得た解決の方法を学ぶことであるととらえることができる。《日々の算数・数学の授業を通して，常に既習の内容を生かして問題の解決に当たること，そして既習の内容を生かして問題を解決する過程で，いつでも使えなかった手法がいつでも使えるようにするにはどうしたらよいか，考えていくことが真の問題解決学習である》（矢部，1992，p.25）ことから，思考過程を重視することが求められており，構造指向と応用指向の協調という視点から見れば，算数とは問題解決であるといえるだろう。《一般に，我々が強調する問題解決の状況は，数学的な考え方が学生や彼らの友人または家族の日常生活に役立つ実生活経験のシミュレーションである。特に，多数は航空工学から企業経営に至るまでの分野で，21 世紀における成功のためにリーダーを訓練するために，我が国の主要な大学院の多くで（指導と評価の両方について）強調されている事例研究の一種の中学生版である。》（Lesh & Harel，2003，p.158）と述べられるように，問題解決では現実の世界をもとにして，数学的な考え方を駆使して問題解決をすることが必要であると考える。《算数の内容はよき問題解決を通して理解されるのである。》（長崎，1990，p.137）と述べられるように，算数教育において問題解決は大きな役割を果たしていると言える。

「問題解決」が注目を浴びたのは，1980 年に全米数学教師協議会（National Council of Teachers of Mathematics，NCTM）は，「行動計画～1980 年代の学校数学のための勧告」，通称アジェンダを刊行したことによってである。そして，それ以降算数・数学教育においては問題解決を通して，問題解決能力を育成しようとした。

長崎（1990）は，学習指導要領において，算数科での問題解決の扱いをまとめ，次のように変わってきたと述べている。まず，1948 年の改訂で，問題解決が内容領域としてあげられたが，それらは四則の文章題の解決に関係していた。1951 年の改訂で問題解決は指導目標の 1 つの領域となり学年別に目標が掲げられた。1958 年には問題解決という言葉は消えるものの，数量的に問題を解決する能力という名前が残り，目標には数学的な考え方が明記された。1968 年には数学的な考え方が強調され，学習指導要領から問題解決という言葉は消えたが，指導書には問題解決について書かれており，問題解決は数学的な考え方に包含された。大きくまとめると次の 3 つになると氏は述べている（p.136）。

①1958 年までは，問題解決は指導内容・目標の独立した領域として明記されており，それは主として四則や割合に関する文章題の解決であった。
②1958 年以降は，問題解決は数学的な考え方に包含され，表面的にはみられなくなった。
③最近は，問題解決と数学的な考え方は一体であるとされている。

数学的な考え方が目標に明示されてから，問題解決は表面的に見られなくなることもあったが，数学的な考え方と一体であるとされた。谷田部（1975）も《問題解決力を育てることは，算数科のねらいである数学的な考え方を伸ばすことと表裏一体の関係にある》（p.19）と述べている。つまり，問題解決学習の役割は，子どもの数学的な考え方を育成するということに集約される。どちらが欠けてしまった場合，算数教育は成立しないと考える。

1.2　問題解決の解釈

問題解決において解釈が多様であるとした上で，長崎（1990）は問題解決の解釈を分類した。次の 3 つの前提を置くアプローチを同定した（p.137)。

①算数教育の指導目標には,「問題解決ができて問題解決のよさがわかるようになること」が含まれる。(指導目標としての問題解決)   ②算数の指導過程においては,「問題解決を通して数学的な考え方のよさがわかるような指導」が大切である。(指導過程としての問題解決)   ③算数の指導内容の中には，習得すべき内容として「問題解決の仕方」が含まれる。(指導内容としての問題解決)

氏はそれぞれの特徴について次のように説明を加えている。

①指導目標としての問題解決

算数の目標は，算数の内容の学習を通して子どもの問題解決能力，つまり考える力を伸ばし，考える態度・習慣を養うものであるととらえる立場である。ここでは，学習のあらゆる場面を問題解決であるとしており，教材となる問題は子どもの世界から取ろうとし，子どもの思考過程を重視する。

②指導過程としての問題解決

算数の指導とは，現実的な問題の解決を通して，算数概念の生成過程を踏ませるものであるととらえる。現実事象が算数の対象となる過程を重視するため，単元での導入場面での問題解決に配慮する。この思想は発展・純化して，算数の指導とは，算数的な問題の解決を通して，算数に特有な内容や方法に関した考え方を身につけさせるものであるととらえられるようになり，数学的な考え方が意識されるようになった。

③指導内容としての問題解決

算数の指導においては，算数の問題の解決の仕方を身につけさせることが重要であるという立場である。問題解決の仕方として，手順，段階，方略などが，指導内容として案出されている。1980 年に NCTM が問題解決の重視を発表して，この傾向が強くなった。

①から③を見ると，①と②に関しては現実の世界を基本としているが，③に関しては現実の世界の問題以外についても考えられている。問題解決は,これら 3 つの特徴をもつが,①と②の特徴を本研究では重視する。もちろん，③の特徴が不適切であると考えているわけでない。本研究では，算数を生み出す力と算数を使う力の育成に焦点を当てており，そこでは特定の算数の問題を解決することを目的としているわけではなく，現実の問題の解決ができるようになることを目的としているからである。

そして，問題の解決ができるようになるために，これまでの問題解決ではどのような問題がよいかということが考えられてきた（矢部，1992)。次にその問題について考察する。

1.3　問題解決におけるよい問題

矢部（1992）は，問題解決におけるよい問題を以下のようにまとめた（p.26）。

①学習者である子どもが，その問題の解決を欲しているか，または問題の解決を必要としている問題であること。 ②学習者である子どもが，その問題の解決に際していまだ使えるようになっている手法を持っていない問題であること。 ③学習者である子どもが，その問題の解決に際して既習事項を生かして，何か試行しなければならない問題であること。 ④数学的に意味のある内容を含んでいること。 ⑤問題の解決に際して，多様な解決のアプローチを含んでいる問題であること。 ⑥問題の解決に際して，数学的な見方や考え方のそのよさ，さらにそれらを活用する能力を感得する態度を評価できる問題であること。 ⑦問題の解決後，その問題が発展・応用へつながる問題であること。

また長崎（1990）は，《問題解決においては，子どもの自由性，多様性が保証されねばならない》（p.141）と指摘しており，オープンエンドな問題が今までの問題解決学習では，よい問題とされてきた。オープンエンドな問題で多様な解決方法を身に付ける授業が展開されてきたと言える。多様な解決のある問題を扱うことによって，子どもたちが多様な解決を行い，クラスで共有することができるからである。

しかし，《よい問題の開発が不可欠》（溝口，2010，p.179）である一方で，《よい問題が開発されれば直ちに問題解決学習が首尾よく展開されるというわけではない》（溝口，2010，p.179）と指摘している。問題解決学習は，一般的に，問題提示，自力解決，解決の練り上げ，振り返りという流れで行われる。特に練り上げは問題解決学習で重要視されており，よい問題はあくまで問題解決学習の一端を担うと考える。

1.4　問題解決学習の課題

これまでの問題解決やその現状やその問題について考察してきたが，ここではこれまでの問題解決学習の課題を述べる。

そこで，平成 24 年度の全国学力・学習状況調査の結果[5]を参照する[6]。この結果を見ると，これまでの問題解決では，子どもたちに知識・技能や考え方は十分に身についていないと考える。また，この調査における B 問題[7]の正答率が低いことから，現実の問題を解決する力も身についていないと考えることができる。つまり，これまでの学習指導の成果として，応用指向的方法を育成することに課題があるといえる。

---

[5] 結果は第 1 章第 2 節 2.4 を参照。

[6] 本研究では，平成 24 年においても，本質的には問題解決学習と変わっていないため，最も新しい調査結果を用いる。

[7] 全国学力・学習状況調査における問題は，《知識・技能等を実生活の様々な場面に活用する力や，様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力などに関わる内容》（国立教育政策研究所，2012a，p.5）という理念の下で作成されている。

また，これまではオープンエンドな問題によって子どもたちの考えを引き出し，数学的な考え方を身に付けることがねらわれていた。オープンエンドはよい問題とされ，よい問題によって多様な考えが生み出された。よい問題は，子どもの多様な考えを引き出すという点では重要だと考える。つまり，算数を生み出すことに強調点が置かれていたといえる。しかし，これからは問題に固執することなく，算数を使うことに強調点を置いた学習指導を行うことが必要であると考える。

第2節　算数的活動における基礎的考察

2.1　問題解決から算数的活動

これまでの算数教育では問題解決を通して数学的な考え方を育成しようとしてきた。そこでは，現実の問題を使うことで問題解決能力も同時に育成しようとしていた。しかし，これまでの問題解決では，その両者は育成されていないことを第 1 節で述べた。そこで，次にこれからの学習指導がどうあるべきかについて述べる。

平林（1991）が，《学習というのは，そもそも主体的なものでなければならない》（p.15）と，述べているように，自ら主体的に行うことが本当の学習であると考える。《いかにして子どもに算数・数学を教えようかではなく，いかにして子どもは算数・数学を学ぶかという考え方に教師が立つ》（矢部，1992，p.32）ことが必要であるといえる。

溝口（2010）は学習について，《子どもにとって相当の努力を要するような場合，高い程度の「学習」と認めることになる》（p.172）と述べた上で，《子どもは「学習」しようとして学習するわけではない。ある活動を経たとき，結果としてそれが，教師の視点から見れば「学習」であると映る》（p.172）と指摘している。つまりは，学習において，ある問題に直面したときに，子どもがそれに対する解決の必要性を感じ，主体的に解決することが求められるといえる。つまりは，授業において現実の世界との関連を図る必要があると考える。しかし，現状の学習指導としては，現実の世界をもとにしているかという点について考察する。実際現場で現実の世界との関連を図る授業が行われているのかについて考察するために，平成 24 年の全国学力・学習状況調査での質問紙調査の結果をみる。算数・数学の指導として，実生活における事象との関連を図った授業が行われている学校の割合は以下の表 2-2 のようになっている。この表は質問紙調査の結果から実生活における事象との関連を図った授業を行ったかという質問に対しての結果を抜粋したものである。

表 2-2　実生活における事象との関連を図った授業　（国立教育政策研究所，2012b）

	小学校	中学校
よく行った	7.4%	6.6%
どちらかといえば，行った	55.9%	47.9%

質問紙調査の結果をみると，実生活における事象との関連を図った授業をしていない学校も少なくないと考える。つまり，子どもたちは実生活における事象との関連を図った授業を経験していないため，現実の問題を解決する必要を感じていないのではないかと考える。

主体性について着目したものとして，算数教育では算数的活動がある。算数的活動は平

成 20 年度の学習指導要領の改訂での強調点である。算数的活動は,《児童が目的意識をもって主体的に取り組む算数にかかわりのある様々な活動》（文部科学省，2008，p.8）と規定されており，この規定では広義に解釈される。

では,問題解決と算数的活動の違いは何かについて考察する。これまでの問題解決では,《問題解決の導入理念そしてその本性は応用指向であるが，その目標である数学的な考え方は構造指向であるといえ，不整合が生じうる。》（阿部，2010，pp.147-148）と指摘されるように，そこには不整合が生じている。それについて，阿部（2010）は次のように述べている。

《問題解決へという展開は，数学という客体から，子どもという主体へと数学教育の焦点が移ったことを意味する。しかしながら，そこで強調されてきたのは構造指向の数学であり，問題解決によって数学的な考え方の育成を図ってきた。つまり，理念的には主体に焦点化されて導入された問題解決であったが，その教授・学習の焦点は客体である数学に焦点があり，その意味で主客の乖離が存在する。》（p.148）

問題解決は子どもを主体として行う学習であるが，一方で授業においては算数・数学の内容を生み出すこと，発展させることに焦点があたっていたと考える。阿部（2010）は,《問題解決も数学的活動もその規定を広義に捉えるなら,それらの「意味」は同じになる。したがって，それらの「意義」を与える必要がある。「数学的活動」に今日的な「意義」を与えれば，それは主体と客体との乖離を繋ぐもの》（p.148）と述べている。つまり，問題解決も算数的活動も子どもを主体として考えられていたという点で意味は同じであるが，問題解決学習の焦点は数学の内容の理解であった。問題解決で生じていた主客の乖離を算数的活動[8]で繋ぐことができると考える。

2.2　算数的活動に関する基礎的考察

現実の世界と数学の世界に焦点を当てたものとして提案したものがある。それが島田（1977）の数学的活動である。算数的活動の在り方を探るために，島田（1977）の数学的活動を参照する。

島田（1977）は,《既成の数学の理論を理解しようとして考えたり，数学の問題を解こうとして考えたり，あるいは新しい理論をまとめようとして考えたり，数学を何かに応用して，数学外の問題を解決しようとしたりする，数学に関係した思考活動を，一括して数学的活動と呼ぶ》（p.14）として，数学的活動を次の図 2-1 のように示している。

[8] 本研究において，算数的活動と数学的活動の内容は同じであると捉える。

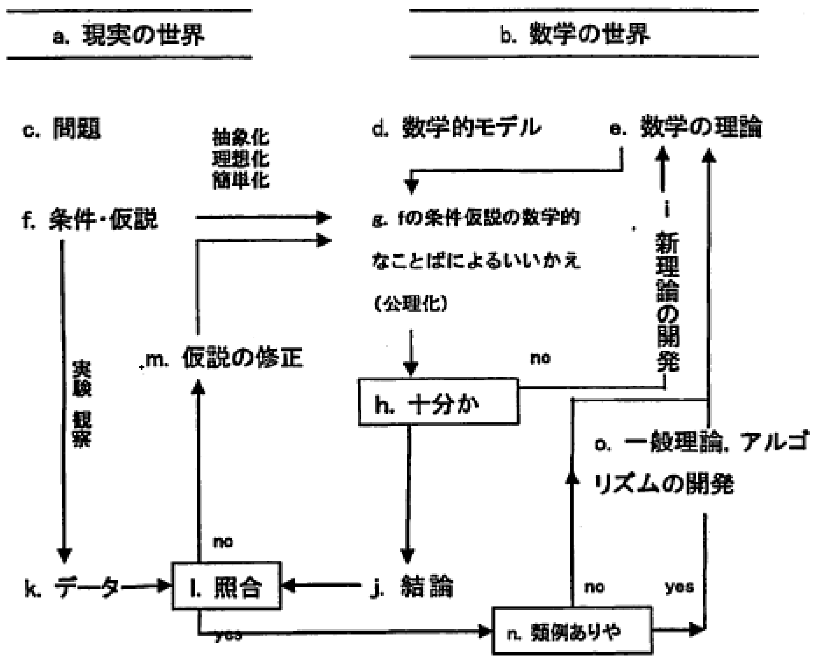


図 2-1　現実の世界と数学の世界（島田，1977，p.15）

図 2-1 の数学的活動において，現実の世界の問題から数学的モデルを作り，数学の世界で数学の理論の開発が行われる。そして，数学の世界で開発された理論が現実の世界に戻ってくる。これによって問題解決が行われている。数学的活動において，《「現実の世界」と「数学の世界」との往還》（阿部，2010，pp.116-117）をすることが必要である。

また，大坂（2012）は，具体的な学習指導を想定し，それぞれの学習場面における算数的活動を捉えるための枠組みを作成した。氏は,算数的活動を,算数的活動(「算数の方法」)を通して「算数の内容」を理解する活動と，「算数の内容」を使って，算数的活動（「算数の方法」）そのものを身につける活動の 2 つに区分し，以下のようにまとめた。

①方法型の算数的活動：
算数的活動（算数の方法）を通して，算数の内容を理解する。
　学習指導の目的：算数の内容
　学習指導の方法：算数の方法
②目的型の算数的活動：
算数の内容を使って，算数的活動（算数の方法）そのものを身に付ける。
　学習指導の目的：算数の方法
　学習指導の方法：算数の内容

また，問題解決においても，算数的活動と同じように，目的型と方法型の両者がある（大坂，2012）。氏は，《これまでの算数教育では，算数の内容の学習指導，すなわち，方法型の問題解決に重点が置かれていた》（p.63）と述べている。算数の内容を教えようとする今

までの学習は方法型の算数的活動であるが，応用指向的方法の強調ということを踏まえれば，これから教育現場では目的型の算数的活動が必要であると考える。しかし，目的型の算数的活動はどのように行うかが不明確であり，それは，これまでのカリキュラムが内容に関するものであり，どのように内容を指導すべきかが強調されてきたからであると考える。算数的活動の課題としては，どのような目的型の算数的活動が例として挙げられるかを示すことであると考える。

そして，阿部（2010）は，数学的リテラシー育成の方向性として《応用指向的方法の強調による構造指向と応用指向の協調》（p.133）とし，そして，このように求められる数学的リテラシーに対し，取り得る立場は以下の 3 つであると述べた。

《①構造指向の強調から応用指向を包含する。
②応用指向の強調から構造指向を包含する。
③構造指向と応用指向を区分しバランスを考える。》（p.133）

算数教育は現実を基盤としていることから，応用指向をベースとして構造指向をどう担保するのかを考える必要がある。つまり，算数では応用指向的方法の育成が求められる。これを踏まえれば，①の立場は適さないと考える。また，③の立場であると，構造指向と応用指向とを区分することになり，それは教授・学習の連続性（島田，1977[9]）という視点からみれば適さないと考える。その上で，本研究にふさわしい立場は②の立場であると考える。算数・数学教育において，これまでの目標は構造指向の方法と整合的である数学的な考え方であった。それは，これまでの算数・数学教育が算数・数学の概念を理解することに重きが置かれていたからであろう。②の立場をとり，目的型の算数的活動を行うことで連続性を保ちながら応用指向的方法の育成ができると考える。

これまでの問題解決では客体である数学に焦点があたっていたことから，数学の概念を理解することに重きが置かれており,構造指向の数学が強調されていたといえる。しかし，応用指向の強調,つまり方法の育成を考えれば目的型の算数的活動が必要であるといえる。

そして，これまでの問題解決と算数的活動について示せば以下のようになる。

[9] 島田（1977）は，《既成の数学の理論を理解しようとして考えたり，数学の問題を解こうとして考えたり，あるいは新しい理論をまとめようとして考えたり，数学を何かに応用して，数学外の問題を解決しようとしたりする，数学に関係した思考活動を，一括して数学的活動と呼ぶ》（p.14）と述べ，教授・学習は一連の活動であるとしている。

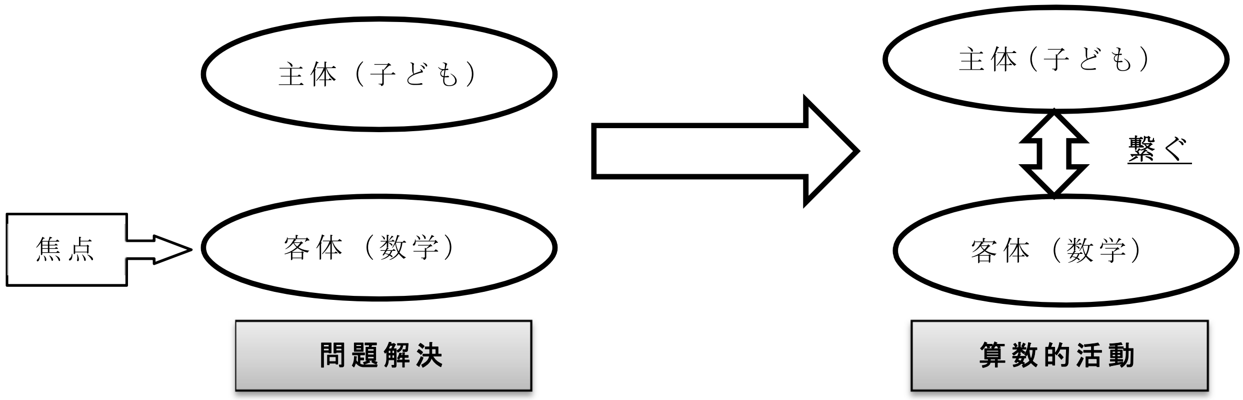


図 2-2　学習指導の変化

2.3　算数的活動における課題

算数的活動を方法型と目的型に分けることにより，応用指向の方法，つまり算数を使う力を育成するためには算数の内容を使って算数の方法を育成する目的型の算数的活動が適するということがいえた。しかし，そこには課題があると考える。しかし，教科書などの問題を見れば，「f.条件・仮説」から「g.公理化」への理想化・簡単化の必要がなく，解が現実にあてはまるかどうかを検討する必要もない。島田（1977）は，このような問題で用いられているモデルを,数学の理論を現実のことばで言い換えているにすぎないことから，擬似数学モデルと呼んでいる。擬似数学モデルでの問題を目的は，解く場面に慣れることにある。これは島田（1977）の数学的活動の「n.類例」→「e.数学の理論」の過程から生まれたものであり，「e.数学の理論」の理解や，「g.公理化」→「j.結論」の過程に慣れることにその目的があると考える。擬似数学モデルであるという前提で，理想化や簡単化の必要がない問題を扱うことが必要であると考える。一方，擬似数学モデルでの問題には「f.条件・仮説」から「g.公理化」への理想化・簡単化の活動がないため，この過程を取り入れた学習を取り入れることが必要である。そうしなければ，数学は現実とは異なり，現実の問題を解決するには役立たないという概念を子どもたちに与えてしまうと考える。例えば，「分速 50m で 30 分歩くときの道のりはどのくらいですか。」という問題であれば，速さが一定であることが前提になっている。実際は分速 45m のときや分速 55m の時もある。それを理想化して分速 50m としているのである。しかし，この問題であれば，解く場面に慣れるためには適していると考える。

以上のことから，現実の問題を解決するために，「f.条件・仮説」から「g.公理化」への理想化・簡単化の活動を取り入れる必要があるといえる。

第３節　本章の総括；目標の拡張に伴い変わる学習指導における総合的な考察

第１章で述べたように，これまでの算数教育での目標は数学的な考え方が強調されており，新しい目標として算数の力へと拡張した。算数の力は，応用指向をベースにして構造指向をどう担保するのかという構造指向と応用指向の協調を図ることができる目標である。そこでは応用指向をベースに構造指向をどう担保するかが課題となり，議論する必要があると考える。

一方で，学習指導については，これまでの問題解決学習から算数的活動へと意義を付与することで変わっている。これまでは数学的な考え方を育成するために問題解決が行われてきた。そこではよい問題を通して問題解決を行った。そして，算数的活動において，方法型と目的型の 2 つの算数的活動に分類することができる（大坂，2012)。特に目的型の算数的活動は，算数の内容を使うことで算数の方法を育成することをねらっており，応用指向の方法の育成と整合的であるといえ，これからの学習指導で求められる。そして，そこでは理想化や簡単化を取り入れることのできる問題を扱うことが必要であると考える。それは，目標としての算数を使う力が，算数の概念を現実の世界で使うために，現実の問題を算数の問題としてとらえたり算数で処理したり判断したりする力であることから言える。また，方法型の算数的活動を行わないということではなく，応用指向の強調ということを踏まえ，目的型の算数的活動を強調するということである。

つまり，算数の力を育成するためには，算数的活動を行うことは必要不可欠なことであるといえる。しかし，《応用指向の強調から構造指向を包含する。》（阿部，2010，p.133）の立場を取ることを踏まえると，構造指向の方法と応用指向の方法の両者を同時に育成する学習指導が必要であると考える。

第 1 章を踏まえ，第 2 章のまとめとして，応用指向の強調による構造指向と応用指向の協調を目標と学習指導の両者から図示すると以下のようになる。

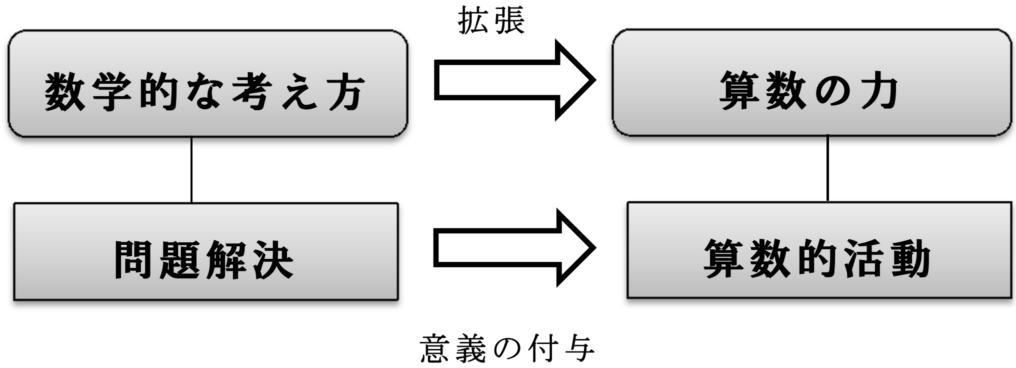


図 2-3　応用指向の強調による構造指向と応用指向の協調

第３章　算数の力を育成するための教授・学習

本章は，応用指向の強調という点から，数学的モデル化に着目することによって，これからの教授・学習で求められる学習活動と数学的モデル化での課題について述べることを目的とする。そのために，第 1 節では，数学的モデル化研究について着目し，その研究について考察する。第 2 節では，数学的モデル化研究における強調点について考察する。第 3 節では，伝統的な問題解決と新しい問題解決の視座から，これからの学習指導について示す。第 4 節では，新しい問題解決の視座から，教科書や単元構成について考察を行うことで授業構想への示唆を得る。

第１節　数学的モデル化研究に関する基礎的考察

1.1　数学的モデル化について

第２章で述べたように,応用指向の強調による構造指向と応用指向の協調が求められる。そして，応用指向の強調のために，これからの算数的活動で求められるのは目的型の算数的活動である。目的型の算数的活動とは，算数の内容を使って，算数的活動（算数の方法）そのものを身に付けるものである。目的型の算数的活動では現実をもとにして，算数の方法を身に付けることがねらわれる。算数の方法を身に付けることは，現実での問題を解決する力，つまりは，算数を使う力を育成することに繋がると考える。

算数を使うことで現実の問題を解決することは数学的モデル化と整合的である。数学的モデル化とは，現実の世界に始まり，それを算数・数学の世界（数学的モデル化）に持ち込み，さらに現実の世界に戻るという一連の過程であり，次のような段階がある。現実の問題を算数・数学の問題に直すこと〔数学化，定式化〕，算数・数学の問題を解くこと〔数学的処理〕，算数・数学での問題解決の解を現実における観察・実験のデータを照らし合わせること〔振り返り，照合，検証〕，そして，算数・数学の解がデータと適合するときにはそれが現実の解となり，適合しないときには仮説を修正し新たな数学化を行って，このサイクルを質を高めながら繰り返す（長崎，2007a)。数学的モデル化は，《現実問題の解決の中での新しい概念形成は考えられるが,数学として発展することはその主目的ではなく,数学を用いて現実の問題を解決することが主目的》(阿部，2010，p.123）である。つまり，数学的モデル化は目的型の算数的活動と整合的であるといえる。つまり，応用指向の強調には数学的モデル化が必要であると考える。

数学的モデル化がなぜ必要なのかということについてについて述べる。まず一点は応用指向の強調である。もう一点は，子どもは，既習の現実の世界と数学の世界の関係を活用しながら,数学的モデル化を通して新しい事柄を見いだす。そして,数学的モデル化から,現実の世界で起こる現象を予想したり，説明したりする。抽象的な内容は，具体的な内容と結びつけることによって理解される。具体的活動は不可欠であるといえる。なぜなら,子どもは現実の世界を観察する経験が不十分で，本質的な数学的構造であればあるほど,子どもにとって難しいからである（マックスら，2012)。

そこで，次節でこれまでの数学的モデル化研究について考察する。

1.2　数学的モデル化の立場

阿部（2010）は数学の方法について以下の３つのタイプを同定した（p.131)。

（1）構造指向における数学の方法；

　現実の事象から数学化し，さらに数学内で数学化することで，数学の概念形成および数学を発展させることに焦点があたる。

（2）応用指向における数学の方法；

　現実の事象から数学化し，数学的モデルを作り，数学を現実へと応用することに焦点があたる。

（3）（1)，（2）を包含する考え方。

これまでの数学的モデル化研究は，どのタイプであるか考察する。

1.2.1　構造指向における数学の方法

例えば，三輪（1983）の研究がある。三輪（1983）は，数学的モデル化過程を次のように示している。

《それまでの経験・観察をもとにして，ある事象が探求を要するという認識があるという前提の下で，

（1）その事象に光を当てるように，数学的問題に定式化する（定式化）。

（2）定式化した問題を解く（数学的作業）。

（3）得られた数学的結果をもとの事象と関連づけて，その有効さを検討し，評価する（解釈，評価）。

（4）問題のより進んだ定式化をはかる（より良いモデル化）。》（p.120）

氏は《数学的モデル化過程に数学的な考え方のさまざまの側面が含まれているので，その育成をモデル化過程を通してはかろうとすることがあげられる。》（p.122）と述べている。つまり，数学的モデル化過程を通して数学の概念を理解することに重点が置かれていると考える。そして，（1）の定式化においては，単純化・理想化・仮定の設定などの思考方法が必要であり，数学的に表現するためには，数量化や記号化などの数学的な考え方も必要となる。このような定式化を三輪（1983）は，《すべて，数学的な考え方といわれるものの基本的な部分である。》（p.122）とし，《数学的モデル化の過程を通して，この面の育成をはかることが十分考えられる》（p.122）と述べている。

そして，この数学的モデル化過程を次のように図式化した。

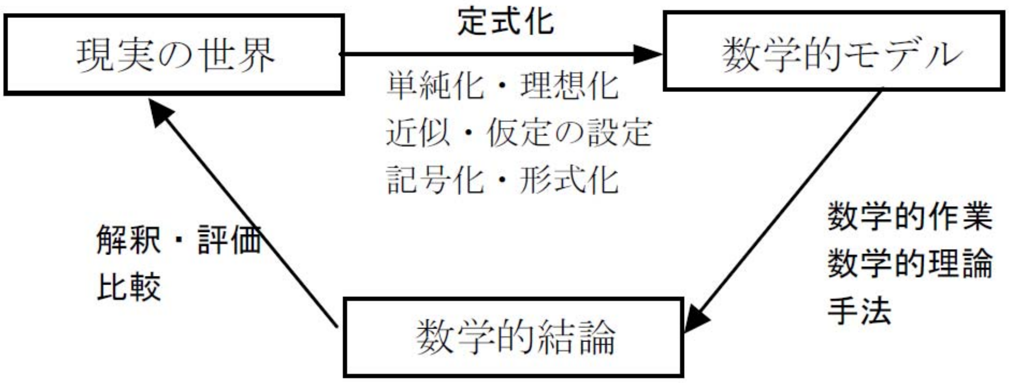


図 3-1　数学的モデル化過程（三輪，1983，p.120）

この図について，《実際は数学的モデルの改良を求めて，何回もまわることになる》（三輪，1983，p.120）と述べていることから数学的モデルを作成することに重点を置いている。つまり，三輪（1983）の数学的モデル化は，概念形成に焦点があたっているといえ，構造指向と整合的であるといえるだろう。

三輪（1983）は，（1）～（4）の段階の中で，最も困難かつ重要なものは（1）の定式化であるとし，定式化について次のように述べている。

《（1）では，理想化・単純化ないし近似など，一種の「結晶化」がなされるとともに，適切な仮定の設定，それらを数学的言語で表現することが必要である。この際，解けるように簡単な定式化をはかることと，事象の複雑さを捉えることとは，経済学でいうトレード・オフの関係にあるといえる。》（三輪，1983，p.120）

つまり，現実の問題を数学の問題として解決するために，より厳密な数学的モデルを作成しようとすることと，数学的作業が容易な数学的モデルを作成しようとすることは相反すると換言できるだろう。例えば，速さと時間，距離の関係を考察しようとする場合，「走る速度は分速 100m である」として数学的モデルを作成すれば,数学的処理は容易になる。しかし，実際は「走る速度は一定ではない」のであって，例えば，分速 95m であったり，分速 105m のこともあるため，この数学的モデルでは現実の事象と数学的結論に差が生じることになる。「走る速度は一定ではない」として考察を行えば，現実事象と数学的結論の差は小さくなるが，数学的処理が困難になってしまう。数学的作業の容易さと数学的結論の妥当性のバランスを考えて，数学的モデルを作成することが求められる。

数学的モデル化の図示として他にも例えば池田ら（1993），西村（2001）の研究がある。

池田ら（1993）は次のような図を示した。

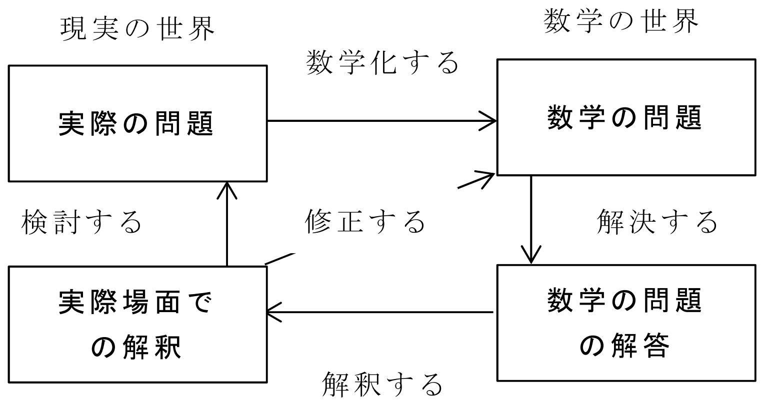


図 3-2　数学的モデリング活動（池田ら，1993，p.27）

また,《モデリングが現実と数学との間を行ったり来たりする活動であることから，一連の思考過程を構成している根本的な要素》（池田，1999，p.5）として，2 つの考え方に着目した。一つは，現実場面を厳密に分析しようとする考え方，もう一つは，数学的に処理しやすくするための考え方である。

現実場面を厳密に分析しようとする考え方とは，問題がおかれている状況を厳密に観察し，何がどのように問題に影響しているのかを分析しようとする考え方のことである。数学的に処理しやすくするための考え方とは，自分の扱うことのできる数学的知識・技能を省みながら，自分の力で処理可能な数学の世界へとどのように引きずり込めばよいかを考察する考え方のことである。このように 2 つに分けると大別された 2 つの考え方は，さら

に 2 つの代表的なタイプの考え方へと分類される。

表 3-2　数学的モデリングを促進する代表的な考え方（池田，1999，p.5）

方向	Type	モデリングを促進する代表的な考え方
現実の方向	1	①曖昧なものはないか ②曖昧なものは明確にしよう ［条件の明確化の考え］
	2	①実際の解決に影響するか ②実際の解決への影響はどの程度か ［関数的な考え，抽象捨象の考え］
数学の方向	3	①数学的に解決しやすいか ②数学的に解決しやすくしよう ［抽象捨象，理想化，単純化，特殊化の考え］
	4	①数学的に表現できるか ②どのように数学的に表現するか ［記号化，図形化，数量化の考え］

また，西村（2001）は次のように図を示した。

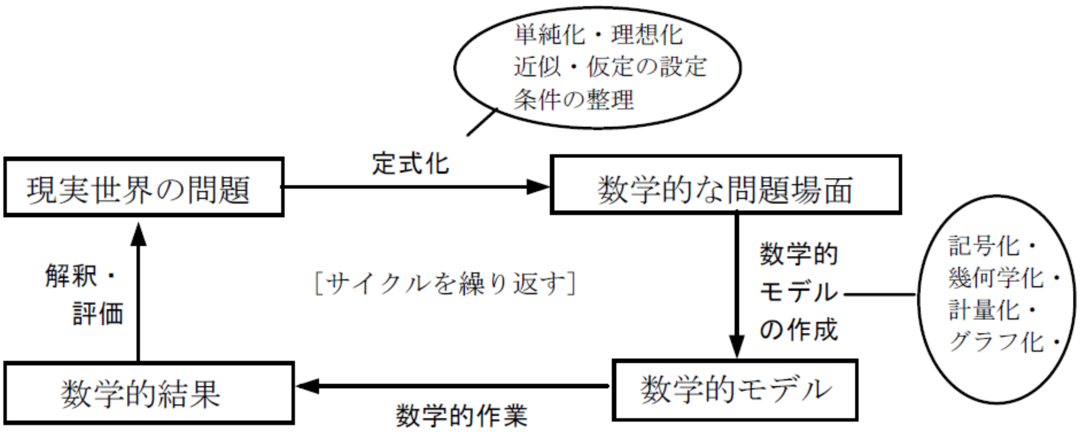


図 3-3 数学的モデル化過程（西村，2001，p.4）

ここまでの研究を総括すると，モデル化のサイクルを回ることによって，数学的モデルの作成を重点的に行っているように考える。池田（1999）の研究においても，数学的モデル化に働く考え方を示しており，内容としては数学的な考え方と関係していると考える。数学的モデルの作成，つまり概念形成に重点を置いていると考えられ，構造指向における数学の方法であるといえる。つまり，これまでの数学的モデル化研究は，（1）の立場であるといえる。

1.2.2 構造指向における数学の方法と応用指向における数学の方法の包含

1.2.1 で述べたように，これまでの数学的モデル化研究は（1）の立場であった。しかし，応用指向の強調による構造指向と応用指向の協調を考えると，（1）の立場に応用指向を加える必要があると考える。

例えば，島田（1977）の研究がある。島田（1977）は，《既成の数学の理論を理解しようとして考えたり，数学の問題を解こうとして考えたり，あるいは新しい理論をまとめようとして考えたり，数学を何かに応用して，数学外の問題を解決しようとしたりする，数学に関係した思考活動を，一括して数学的活動と呼ぶ》（p.14）として，数学的活動を次の図 3-4 のように示している。

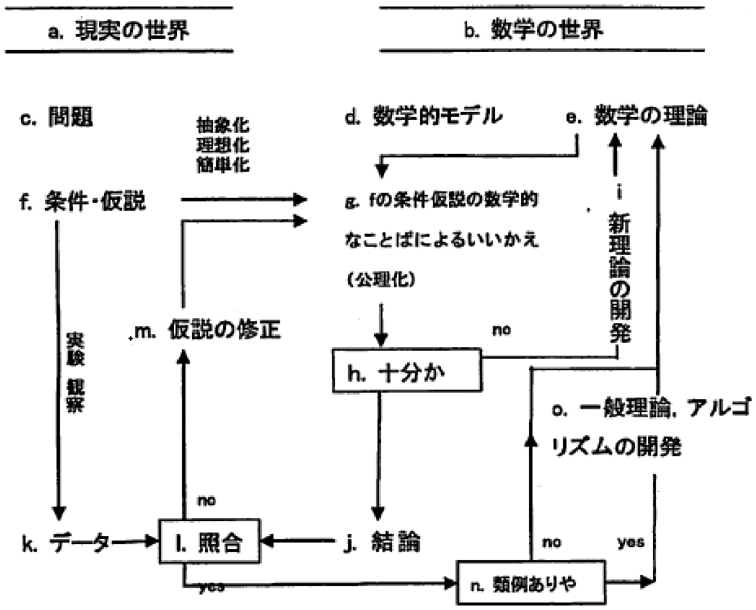


図 3-4　現実の世界と数学の世界（島田，1977，p.15）

図 3-4 の数学的活動において，現実の世界の問題から数学的モデルを作り，数学の世界で数学の理論の開発が行われる。そして，数学の世界で開発された理論が現実の世界に戻ってくる。これによって問題解決が行われている。数学的活動においては，《「現実の世界」と「数学の世界」との往還》（阿部，2010，pp.116-117）をすることが必要である。

また，他にも Lesh & Harel（2003）は，モデルについて《一般的に書かれた記号，話し言葉，コンピュータベースのグラフィックス，紙ベースの図表やグラフ，または経験ベースの隠喩を含んでもよい多様な相互作用表象メディアを使用して表現される傾向にある概念体系である。それらの目的は，他の体系を構築するか，記述するか，説明することである。》（p.159）と述べた上で，次の 2 つを含むとしている。

《（a）問題解決の状況に起因して，関連する数学的対象，関係，行動，パターン，規則性を記述するか，説明するための概念体系
（b）明白に認識された目的（goal）を達成するための有用な構造，操作あるいは予測を生成するために伴う手続き》（p.159）

そして，問題解決について，《一般に，我々が強調する問題解決の状況は，数学的な考え方が学生や彼らの友人または家族の日常生活に役立つ実生活経験のシミュレーションである。特に，多数は航空工学から企業経営に至るまでの分野で，21 世紀における成功のためにリーダーを訓練するために，我が国の主要な大学院の多くで（指導と評価の両方について）強調されている事例研究の一種の中学生版である。》（Lesh & Harel，2003，p.158）と述べている。つまり，Lesh & Harel（2003）の目的は，数学的な考え方を育成すること，それだけではなく，問題解決を通して学習を行うことによって，問題解決能力，本研究での言葉を使えば，算数を使う力を身に付けた子どもを育てることにある。

この問題解決で，問題解決者，つまり子どもは，《数学的に重要な体系を造るか，記述するか，説明するために，明白な数学モデルを含む概念的ツールを生産》（p.159）する。言い換えると，《モデル導出活動（Model-electing activities）であり，また，問題解決者が生産するモデルは，技術基盤情報時代に遍在している複雑なシステムの種類の意味を理解するために必要な構成要素および概念体系》（p.159）を含んでいる。このモデルの開発のため，モデル化サイクルを回る必要がある（Lesh & Harel，2003）。

このように島田（1977）や Lesh & Harel（2003）は，構造指向の強調ではなく，応用指向の強調による構造指向と応用指向の協調を図る研究であるといえ，これは（3）の立場であると考える。そこでは，現実の世界を基にして，問題解決をし，概念の形成も行われる。第 1 章で述べたように，構造指向と応用指向の協調を図ることが求められており，その際の課題が構造指向と応用指向の接続であることを考えれば，両者の協調のためには（3）のタイプが必要であるといえると考える。

1.3 数学的モデル化の強調点

構造指向と応用指向の協調を図ることが求められ，協調を図る際には構造指向と応用指向の接続を考える必要がある。それは現実の世界と数学の世界をどう繋ぐかという議論にも繋がると考え，数学的モデル化研究では接続について強調されている。ここでは，その強調点について述べる。

西村ら（2001）は，児童・生徒の社会の問題を数学的に解決する力の実態を発達的に調べるために，社会の問題を数学的に解決する際に働く感覚や力について，A.社会における量・形についての感覚，B.社会の問題を数学的に解決する力，C.社会において数学でコミュニケーションする力，D.近似的に扱う力の 4 つの領域を基に構造化を図り，領域毎に，選択肢形式の調査問題を作成し調査を行った。

A.社会における量・形についての感覚
A1.長さの感覚　A2.広さの感覚　A3.かさの感覚　A4.重さの感覚
A5.角度の感覚　A6.時間の感覚　A7.速さの感覚　A8.形の感覚
B.社会の問題を数学的に解決する力
B1.社会の現象を数学の対象に変える
B11.仮定をおく　B12.変数を取り出す　B13.変数を制御する　B14.仮説を立てる
B2.対象を数学的に処理する
B21.表・式・グラフ・図等で表現する　B22.操作を実行する
B3.社会に照らして検証する
B31.予測・推測をする　B32.修正する
C.社会において数学でコミュニケーションする力
C1.数学的表現から現象を読み取る，伝える　C2.数学を使った日常文を読み取る
D.近似的に扱う力
D1.近似的に式を立てる　D2.近似的に読み取る

この調査の結果として,「B14.仮説を立てる」,「B32.修正する」,「D2.近似的に読み取る」は特に基準より低かった。このことは，授業において，社会の問題を数学的に解決する力は，あまり育成されていないことを示している。教科書にあるような算数・数学を学べば，日常生活や社会と関連した問題にも対処できるようになるという考えもあるが，そうではないことが明らかになったと言える。

これらのことから，社会の問題を数学的に解決する力を育成するためには，授業において，社会の問題を扱う必要があるといえ，その時に重視することとして，仮説を設定する場面を取り入れることであると考える。

社会の中で様々な問題に直面し，そして，その問題の中には，数学の舞台に載せることで適切な判断ができるものがある。しかし，実際には，問題場面を数学的にみることなく，経験的に判断する場合がある。あるいは，ある問題場面が他者にとって都合のよい結果が得られるように仮定が設定されていることにも気づかず，数学的処理が施されているということから，信頼できるものとして受け入れ失敗することがある。このようなことが起きないようにするために，数学的処理の方法だけでなく，現実の世界の問題が何のために，どのような仮定を設定して，数学の舞台に載せられたのかを指導することが必要であり，仮定の設定が必要であると考える。

1.4　仮定の設定

西村ら（2001）の研究から仮定の設定に課題があるといえる。そこで仮定の設定に関する先行研究について考察する。

まず，創造的思考の育成に関する研究をしている松島（2010）は，創造的思考の育成をするために必要な指導を明らかにするために，創造的思考のそれぞれの特性が数学的活動（図 3-4）のどこに対応するのかについて比較し，その特性を顕在化させるための具体的な手立てについて考察した。そして，創造的思考育成のための授業構成への示唆として，5 つの手立てを挙げた。この創造的思考は，新しい価値あるものをつくり出す，あるいは

新しい場面の問題解決に適したアイデアを生み出す思考のことで，創造活動に働く思考である。つまり，算数を生み出す力[10]と整合的であるといえる。

ⅰ　現実の世界の原問題から問いを生み出すこと
ⅱ　f→g の数学化，n→o の一般化・体系化の過程で子どもに喜びや驚きを感じさせる　こと
ⅲ　子どもが現実の世界の問題と感じられる原問題から数学的モデル化をスタートさせること
ⅳ　現実の事象と問題解決結果を照合し，仮説を検討する活動を設けること
ⅴ　f→g の仮設の設定の根拠を学級全体で確認する活動を設けること

この 5 つの手立てのうち，ⅱ，ⅲ，ⅳ，ⅴ が f→g の仮説の設定の段階に関する手立てである。数学的モデル化の中でも，仮説の設定をすることが求められているといえる。

島田（1977）は，「f 条件・仮説」から「g 公理化」への理想化・簡単化の必要がなく，解が現実にあてはまるかどうかを検討する必要もないような問題で用いられているモデルを，数学の理論を現実のことばで言い換えているにすぎないことから，擬似数学モデルと呼んでいる。擬似数学モデルでの問題を目的は，解く場面に慣れることにある。これは島田（1977）の数学的活動の「n 類例」→「e 数学の理論」の過程から生まれたものであり，「e 数学の理論」の理解や，「g 公理化」→「j 結論」の過程に慣れることにその目的がある。従って，擬似数学モデルであることを了解した上で，ねらいを捉えた扱いが必要である。一方，擬似数学モデルでの問題には「f 条件・仮説」から「g 公理化」への理想化・簡単化の活動がないため，この過程を取り入れた学習を独自に追究することが必要である。そうでないと，数学は現実とは異なり，現実の問題を解決するには役立たないということを子どもに与えかねないと考える。数学的活動を取り入れる際に定式化について考えることが必要である。

三輪（1983）は，（1）～（4）の段階の中で，最も困難かつ重要なものは（1）の定式化であるとしている。池田ら（1993）は，従来の数学の応用は，条件・仮定がすでに設定されたものが多く，子どもが数学は抽象的で現実に関連していないと感じていると指摘した上で，モデリングの研究が必要だと述べている。清野（2004）は，《「仮定の意識化」は，数学的モデル化過程（図 3-1）における「定式化」の段階を振り返らせる活動となる。よって，この指導を通して，数学的モデル化の素地を養うことが考えられる。》（p.12）とし，仮定の重要性を示している。実際，教科書の問題とは，《既に概念や手続きを直接適用できる形まで定式化されてしまっている》（清野，2005，p.2）ものが多いと考えることができる。池田（2007）は，《仮定を明確にすることは，問題をどの範囲で考えているかを明確にすることであり，解決した結果を解釈する上で役立つ》（p.4）と述べ，仮定を設定することの重要性を示した。その中で，①単純に考えるために仮定を設定し，それを解釈する際に活かす，②仮定を設定することで，適用範囲を明確にした判断をすることについて述

[10]算数を生み出す力とは，算数の概念を理解し形成するために，算数のきまりや方法を考えたり発展させたりする力のことである（長崎，2007a）。

べた。

以上のことから，現実の問題を解決をするために，理想化・簡単化の活動，つまり仮定を設定することが必要であるといえる。また，算数を使う力には「現実の問題を算数の問題にする力」が含まれており，定式化は算数を使う力とも整合的であるといえる。

つまり，算数を生み出す力と算数を使う力を育成することを考えた場合，仮定の設定を含めた定式化を取り入れた授業は重要な役割を示すといえる。

第２節　定式化を意識した先行研究の考察

本節では，前節を踏まえて授業構想をするために課題となる定式化を含んだ授業実践の先行研究を考察する。

2.1　小出（2009）の研究

教科書の問題とは,《既に概念や手続きを直接適用できる形まで定式化されてしまっている》（清野，2005，p.2）ものが多いと考えることができる。章末問題で挙げられるような応用問題でも，必要な値は示されており，あとは既有の知識を用いて問題を解くことが求められる。

しかし，小出（2009）が指摘するように，《教科書におけるこの種の応用問題は，しかしながら，必ずしも不適切な問題であるというわけではない》（p.45）だろう。なぜなら，この問題が適切か不適切であるかは，授業の目標に依存するからである。仮にも授業の目的が，問題解決をするために必要な数学的手法の獲得であるとした場合，定式化されてしまっているとしても問題はない（小出，2009)。

しかし，授業の目標が，社会における現象や問題を数学的に扱う力を育成すること，例えば現実世界の問題を算数や数学に直す力にあるとすれば，教科書の問題を適切な問題として扱うことはできないであろう。その理由は，現実世界における問題解決の目的の欠如とである。つまり，問題が《既に概念や手続きを直接適用できる形まで定式化されてしまっている》（清野，　2005，　p.2）ことにより解決の必要性が生まれない。

そこで，小出（2009）は，次の点に配慮しながら問題を作成し，授業展開を考えた。ちなみに，氏の作成した授業は高校生を対象としたものである。

《①現実世界における問題解決の目的（問題解決の必要性）をもたせる
②現実世界の状況から，数学的な問題に変換するプロセスが含まれるようにする
③得られた解を現実世界の状況と照らし合わせる活動を行う》（p.45）

特に，②について，氏は，状況を現実世界により近づけるようにするとともに，現実世界の状況から,現実的な問題,すなわち文章題を作らせる活動があった方がよいと考えた。なぜなら，こうすることで，子どもが数学的モデルを構成する中で，どのように仮定を置いたり，単純化したり，理想化したりするのかを見ることができる。定式化を取り入れたモデル導出活動を行うために上記の 3 点を考慮することが必要であると考える。

これを踏まえて，氏は金属板を折り曲げて，できるだけ断面積の大きい雨といを作る授

業を構想した。この授業の目標は 2 点ある。1 点目は，金属板を折り曲げて雨といを作るという現実世界の問題から，できるだけ断面積が大きくなるような折り曲げ方を考える数学的な問題に帰着させ，解を求めることができることで，2 点目は，断面積に焦点をあてた雨といの作り方の理解を通して，数学と社会とのつながりを認識することができることである。

2.2 牧野・清水（2007）の研究

牧野ら（2007）は，算数を使う力を育てるための授業の工夫として次の 7 点を挙げている。

①導入問題の主題を継続的に追究する
②子どもが解決する必要性を感じる現実の問題を扱う
③問題場面の条件を考え，整理し，取捨選択させる
④自由に考えさせる
⑤算数を使うことに焦点を当てた発問をする
⑥表・式・グラフ・図などをよんだりかいたりする
⑦振り返るためのまとめを設ける

これら 7 つのうち,すべてが定式化の段階に関係があると考えることができる。なぜなら，現実の問題を扱うということは，抽象化や理想化，簡単化が必要となり，そして，目の前にある事象から，算数の問題にするために必要な条件を取り出して取捨選択することが必要不可欠であるからである。また，自由に考えるという点においては，現実の問題からできた異なる問題を検討するなかで，現実の問題を算数の問題に直す力が育つと考えるからである。

そして，牧野らは，算数を使う力を伸ばすために，第 4 学年の「変わり方」に焦点を当てて授業を計画した。学習活動としては,「ドッジボールコートを作ろう」である。

授業のねらいは，日常の事象を，算数を使って考えるための条件の整理をすることができることである。学習活動は，遠足で使うドッジボールのコートの形，大きさを決定するための条件を整理することである。以下に授業計画を示す。これは，牧野ら（2007）の実践を子どもの反応と教師の発言という点からまとめ直したものである。

	学習活動，子どもの反応	○算数を使う力を育てるための工夫 ・留意点
問題把握自力	問題 1 全校遠足の写真を見て，算数の問題を考えよう。 T：どんな算数の問題がつくれそうかな。 C：「野原の面積は何㎡でしょう」という問題が作れます。 ・つくったものを発表し，何がわかれば	○子どもに解決の必要感がもてる現実の問題を提示する（全校遠足の写真を見せながら提示する。）

	解けそうか考える。	
集団検討	C：ドッジボールをしている人数 C：コートの中にいる人数と外にいる人数 C：野原の面積 T：どんな形だったら解けますか。 C：正方形，長方形ならばよい C：ドッジボールの面積を求める問題が作れる T：ドッジボールの面積を出すには何が分かればよいですか。 C：1 つの辺の長さが分かればよい。 T：どうやって求めますか。 C：縦と横の長さがわかれば，数えなくてもかけ算でできる。 問題 2 ドッジボールのコートの面積をなるべく広くするにはどうしたらよいでしょうか。 T：解決するためにはどんなことがわかればよいでしょうか。 T：面積を求めやすい形にはどのような形がありますか。 T：片面のコートだけで考えましょう。 C：縦と横の長さはいくらですか？ T：ドッジボールコートを作るビニールテープは 1 本なので周りの長さは 24m です。	○何がわかれば解決できるか条件を明確にさせる。 ・「算数の問題をつくるときには，分かっていることがないとできない」とまとめる。 ○子どもに解決の必要感がもてる現実の問題を提示する（ビニールテープを実際に提示してどのようにドッジボールコートをつくったか確認する）。 ○条件を考えさせる（ドッジボールコートを正方形や長方形の形と見なす）。 ○変数を考えさせる（四角形の縦と横の長さという変数を取り出す）。 ・広げればいいということでもないことから，「なるべく」という言葉を入れる。
まとめ	・今日のまとめをします。 ・わかったことや使った考え，感想を書きましょう。 ・発表してください。	○今日学習してわかったことや思ったことをノートに書かせる。 ○発表する。

牧野ら（2007）は，この授業から定式化に関連する部分を抜き出している。例えば，「どんな形だったら解けますか」と子どもたちの議論の方向を明確にしようと質問している。それに対して，子どもたちは「「正方形」「長方形」ならばよい」と言っており，これは既習を生かして「単純化・理想化の考え」を用いたことであると判断できる。

そして問題を作るという点においては，「ドッジボールコートの面積」の問題がつくれると言い出す子どもが現れた。「ドッジボールの面積を出すためには何がわかればよいですか」

と問いかけると「1 つの辺の長さがわかればいい」と答えた。続けて「どういう形を考えましたか？」と問うと「正方形，長方形」と答え，さらに「どうやって求めますか？」と問うと，次のような答えが返ってきた。
・「1 ㎡が何個分かで面積がわかる」
・「テープを敷き詰めてみる」
・「縦と横の長ささえわかれば，数えなくてもかけ算で求められる」
つまり，現実の問題を算数の問題に直そうとしている。子どもたちが算数の問題をつくるために何をするとよいかが見えてきたといえる。
上記の授業では，「変わり方」において算数の問題をつくる学習を通して，「現実の問題を算数の問題に直す力」や「算数で処理した結果を振り返る力」の育成に関わる授業となった。この授業における工夫としては,次の 4 点を挙げることができる(牧野・清水,2007)。

①継続的に追究するストーリー性のある問題を設定すること,「算数の問題をつくろう」と算数の問題になり得る場面だけに焦点を当てさせるような発問をすること
②つくられた問題を焦点化させるために，伴って変わる 2 つの数量があることに気づかせるような発問をすること
③算数の問題をつくるために不足している条件に気づいたとき，思考過程を振り返らせ，過程の吟味・検証の意味をこめて，小まとめをすること
④すぐに算数の問題をつくることに取り組ませるのではなく，みんなで話し合いながら，条件を考え，整理し，取捨選択しながら授業を進めること

2.3　授業実践の考察

上記の実践はどちらも問題を作るということから，定式化や仮定を意識させようとする実践である。問題を作ることによって，子どもが自ら，問題に必要な条件や仮定を設定することや理想化などを行うものとなっている。そして，この実践から見えてきた定式化を取り入れる際の特徴は，まずは現実の問題であり，その問題に解決の必要性があることである。解決の必要な問題によって，子どもたちは定式化を行うと考える。そして，その問題の中で，教師の発問などで議論の方向を明確にし，子どもが数学の概念を作ることができるようにする必要があると考える。つまり，概念形成と問題解決が同時に行われる必要があると考える。牧野ら（2007）の実践では，変わり方についての理解とコートを作るという問題解決の両者が行われる。次節では，概念形成と問題解決の両方が行われる活動について述べている Lesh & Zawojweski（2007）の研究について考察を行う。

第 3 節　モデルとモデル化の視座とモデル導出活動

3.1　モデルとモデル化の視座（Model and Modeling Perspective）

構造指向と応用指向の協調を考えると，そこでは，島田（1977）や Lesh & Zawojweski（2007）の研究のような構造指向と応用指向の両者が包含されている学習指導が必要であると考える。そこで，本節では Lesh & Zawojweski（2007）のモデル化について考察を行う。

Lesh & Zawojweski（2007）は問題解決と数学的モデル化に関する 2 つの視座を示した。これらの視座は，「伝統的な視座」と「モデルとモデル化の視座（Model and Modeling Perspective）」と呼ばれる。モデルとモデル化の視座に埋め込まれるものは，問題解決者が，数学的な解釈あるいは考え方や手続きの仕方を，創造，洗練，適応することが期待される状況の強調である。下の図は，問題解決に関する伝統的な視座と，モデルとモデル化の視座を比較し，対比したものである。

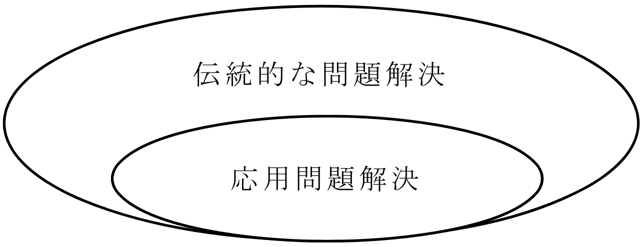
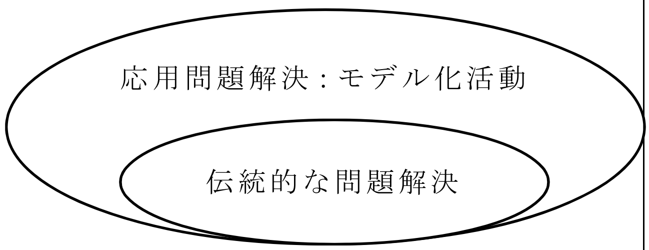
問題解決の伝統的視座	**問題解決のモデルとモデル化の視座**
応用問題の解決は伝統的な問題解決の部分集合として扱われる。	伝統的な問題解決は，応用問題解決（すなわち，モデル導出活動）の部分集合として扱われる。
	
「実生活の」問題を解決する学習は，次の 4 段階を踏むと仮定される。 1．まず，脱文脈化された状況において必要とされる知識（idea）や技能（skill）を修得する。 2．新しく習得された知識や技能を学習した手続きを用いるようデザインされた文章問題で練習する。 3．一般的な内容に依存しない問題解決のプロセスを学ぶ。 4．最後に（時間が許せば），補足的な情報を求められる厄介な（messy）「実生活の」状況（すなわち，応用問題）において先行する考え，技能，発見法を用いることを学ぶ。	応用問題を解決することは，目的にふさわしい解決を開発する中で，（言い換えや図を書くことなどによって）問題に対する数学的センスをつくることが含まれる。理解は，all-or-nothing の状況であることとはみなされず，数学的知識および問題解決能力は，問題解決プロセスにおいて共につくり上げられる。 「実生活の」問題（すなわち，応用問題）を解くために必要とされる構成，プロセス，能力は，問題解決に取り組む前に「習得する」というよりも，発達の途中の段階でなされることが仮定される。

図 3-5　伝統的な問題解決とモデルとモデル化の視座（Lesh & Zawojweski, 2007, p.783）

問題解決の伝統的な視座とは，今までの問題解決のことである。Lesh & Zawojweski（2007）は，《計算の手続きを学習し，一連の文章題でその手続きを練習し，問題解決ストラテジーを教わった後にのみ共通に取り組まれる。すなわち，指導の最終段階においてのみ，生徒は，現実的で複雑な応用問題に（時間があれば）従事する》（p.783）と述べている。これは最初に教師が児童に学習する内容に関連する知識を与え，児童は教えられたことに関して実生活の問題に適応させ，問題を解決するものである。

一方で，問題解決のモデルとモデル化の視座については，《生徒は，数学的に考える方法

（mathematical way of thinking）を創造，洗練，適応する必要がある実生活の状況を理解するための，概念体系（すなわち，モデル）を創り上げることによって，彼らの学習経験を開始する。》（Lesh & Zawojweski，2007，p.783）と述べられている。最初に児童が実生活の問題に対して，自分の考えを表現，テスト，修正する活動から始まる。

現在の伝統的な問題解決は，知識の定着は図りやすいと考えるが，ここでの問題は，生徒にとって身近であるとは言い難く，生徒は問題解決の必要性を感じず，生徒の学習活動が知識を適用し解答を求めるだけになってしまう可能性がある。算数を生み出す力と算数を使う力の両者の協調を図り育成することを考えれば，課題は構造指向と応用指向の接続である。その際，これまでの伝統的な問題解決ではなく，モデルとモデル化の視座が必要であると考える。

3.2 モデル導出活動（Model-electing activities）

Lesh & Zawojweski（2007）は前節で述べたようなモデルとモデル化の視座の特徴として，《生産する結果の目的（goal）が一般化可能（換言すれば，共有可能で再利用可能）である必要を取り巻く》（p.780）と述べている。モデルとモデル化の視座における問題解決については《「問題解決者」が，与えられた状況についての生産的な考え方を発展させる必要があるとき，問題となる（または問題のある）課題，または目的志向の活動》（Lesh & Zawojweski，2007，p.782）として，次のように述べている。

《「生産的な考え方」を発達させるために，問題解決者は，状況を解釈するプロセスであるモデル化に取り組む必要がある。このように，問題解決は，状況を数学的に解釈する過程として定義され，その過程では，数学的解釈を表現したり，テストしたり，修正したり，数学的内外の様々なトピックから数学的概念を分類したり，統合したり，修正したり，洗練したりする，いくつかのサイクルを含む》（Lesh & Zawojweski，2007，p.782）

そして，このような活動をモデル導出活動と呼んでいる。モデル導出活動の特徴としては，《開発プロセスは一般に「与えられた」情報（例えば，既知の事実（given），目的（goal）と利用可能な解決ステップ）に関して考える問題解決プログラムの方法を反復してテストし改訂する必要のある一連のモデル化サイクルを含んで》（Lesh & Harel，2003，p.160）おり，また，《主として製品が共有可能で（他の人々と），再利用可能で（他の状況で），修正可能で（他の目的のために）あることが意図される場合，道具（tool）開発は有益である。》（Lesh & Harel，2003，p.160）ことが挙げられる。つまりは，子どもたちはモデル導出活動において，モデルが他の解決や他の状況においても再利用可能であり，他の人と共有可能である必要がある。このような数学的モデル化のサイクルの中で，普遍性を認識することが必要となる。また，橋本（2012）はモデル導出活動を《応用指向の方法の洗練の中で，モデルを「一般化可能」なものへと変容させることによって構造指向をも教授・学習する活動》（p.53）であると捉えている。構造指向と応用指向の協調を図るために，モデル導出活動は重要な役割をもつと考える。

そこで，具体的なモデル導出活動について取り上げる。本稿では，ビッグフット問題（The Big Foot Problem）を取り上げる。ビッグフット問題の問題文は以下のようになっている。

（Lesh & Harel，2003，p.166）

今朝早く，警察官は昨夜公園の古い水飲み場が修理されているのを発見した。市長は，それをしてくれた人たちにお礼をしたかった。しかし，それが誰なのか分からなかった。そして，すべての警察が見つけることができたのは，たくさんの足跡だけであった。あなたは，その足跡の１つを示す箱（図 3-6）を与えられた。その人は足がとても大きい。もしその人の身長を計算することができれば，その人たちをみつけるのに役立つだろう。あなたの仕事は，警察がそれらの足跡をみるだけで，その人たちの身長を推測することができる How To Tool Kit をつくることだ。あなたの Tool Kit は，ここで示される一つの足跡に対して役立つべきである。しかしながら，それは同様に他の足跡に対しても役立たなければならない。

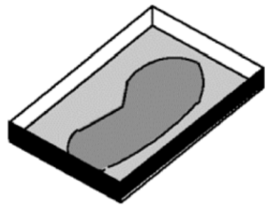


図 3-6　大きな足跡

これは，靴の大きさから，見つけたい人の身長を見積もる方法を子どもたちに考えさせることで，モデルとして比例関係をつくり出させる問題である。最初は，数学に関係ない部分（例えば，靴の種類や足の大きさから性別を判断する）からの推測で始まる。そして，自分自身の脚の大きさと比較したり，加法を用いて身長について考えたりするが正確ではない。その中で徐々に，自分以外の人にも成り立つようなものを考え，他の足の大きさに関しても再利用可能で，他の人にも共有可能であるようにモデルを変容させる。そして，最終的に身長が足の大きさの約 6 倍になるという比例関係が作られる。モデル導出活動においては，モデルを他の人々と共有可能であり，他の状況においても再利用可能であるように，モデル化サイクルの中で洗練することが必要であるといえる。また，この問題でもあったように，モデルを洗練する中でモデルが普遍性をもつということを認識させていくことが求められる。それは一般化に繋がる。つまり，構造指向と応用指向の協調が図れると考える。

現状の問題では，全て数値が与えられ，それらの関係を見つけ出すような問題が多い。そこで，このように定式化されていない問題が必要であり，それは現実世界でも有用であると考える。つまり，モデルとモデル化の視座から学習指導を行うことで構造指向と応用指向の協調を図ることが必要である。そこで次節では，モデルとモデル化の視座から教科書や単元構成について考察を行う。

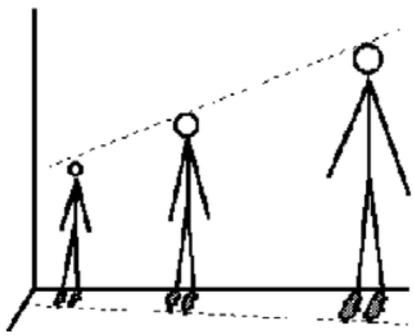


図 3-7　生徒の用いた具体的なグラフ

第４節　モデルとモデル化の視座から教科書の考察

4.1　単元構成における課題

教科書ではどのような学習の流れになっているかを考察する。そこで本研究では，具体例として第５学年における比例と小学校６年生における反比例に焦点を当てる。第６学年の比例と反比例でない理由としては，学習指導要領の改訂によって初めて比例を指導する学年が５学年となったからである。つまり，比例の概念形成が最初に行われるのは第５学年である。まず，学校図書の教科書の単元構成を参照する。最初に第５学年である

表 3-3　教科書の単元構成（学校図書，2011a，pp.21-22）

小単元	ねらい	学習活動	指導上の留意点と評価の観点
二つの変わる量(1)	●100 個のみかんをかごに移していく際に変化する二つの量を見付ける。 ●変化する 2 つの量の関係を,□と○を使った式で表す。	●かごと箱のみかんの数や箱の数と高さの間にどんな関係があるのかを見付ける。 ●□や○を使った式に表す。 ●変化を表した式に数をあてはめ,そのときの値を求める。	【関】伴って変わる二つの数量を,進んで見付け,表にまとめようとしている。
比例（4）	●パラシュートが上がる時間と高さの関係を調べる。	●パラシュートが上がる時間と高さも，伴って変わる関係が成り立つか考える。 ●時間から高さを求める方法をいろいろと考え，高さを求める。 ●時間と高さの関係を表にまとめる。	【考】伴って変わる２つの数量の関係を，表に表したりして，その関係を考えている。
	●表を読み取り,比例の意味を理解しまとめる。	●比例の定義を知る。 ●1 個 15 円のあめと代金の関係について，伴って変わる二量を見付け，その関係を表や式で表し，比例関係にあるかを調べる。	【知】比例の定義を理解している。 【技】伴って変わる２つの数量が，表や式から比例関係にあるかどうかを判断できる。
	●合同な平行四辺形が横に連なっていくようすから,その面積の変化をとらえる。	●伴って変わる 2 つの数量を見付ける。 ●変化する量を，言葉の式や□や○を使った式に表す。 ●平行四辺形の底辺と面積の関係を表にまとめ，比例関係にあるかどうかを調べる。	【考】2 つの数量の関係を調べ，式に表したりして一般化して考えている。 【技】2 つの数量の関係を，□や○を用いた式に表すことができる。

	●三角形の高さを 1cm ずつ高くしていくようすから，その面積の変化をとらえる。	●伴って変わる 2 つの量を見付ける。 ●変化する量を，言葉の式や□や○を使った式に表す。 ●平行四辺形の底辺と面積の関係を表にまとめ，比例関係にあるかどうかを調べる。 ●三角形の求積公式を活用して，高さを求める。	【考】比例関係を用いて，問題を考察している。 【知】2 つの数量の関係を，式に表す方法を理解している。
力だめし（1）	●既習事項の確かめをする。	●伴って変わる量が比例しているかどうかを確かめる。 ●伴って変わる量の関係を，表や式で表し，比例関係を確かめる。 ●比例関係を用いて問題解決をする。	※学習実態に応じて,「力だめし①，②」の時間配分を工夫する。「力だめし②」は，授業形式で実施すると，学習効果がより期待される。 ●観点を確認しながら指導し，必要に応じて前に戻り復習する。
	●ばねの伸びとおもりの重さの比例関係を調べる。	●比例関係を利用して，おもりの重さによるばねの伸びを求める。	【考】比例関係を用いて，問題を解決している。

この表 3-3 を見ると，1 時間目と 2 時間目で比例の定義に関する授業，3 時間目や 4 時間目で図形を用いて関係に関する授業を行うことで問題解決の方法を学ぶようになっている。そのあとの力試しで初めて，身の回りの事象に着目する単元構成となっている。

また，教科書では伴って変わる量では「一方がふえると，もう一方がへるのはどれかな？」と尋ねることで，2 つの変わる数量に気付かせ，《わたしたちの身のまわりには，一方の量が変わると，それにともなってもう一方の量も変わるものがあります。》（p.48）と明示している。そして問題を解くことで伴って変わる量について確認する。そして，伴って変わる量をふまえて比例の学習に入っている。そこでは，遊園地に関する問題が使われており，ここでは高さと時間という 2 変量はあらかじめ与えられた状態である（図 3-8）。

上がるのにかかる時間と高さ

時間（秒）	0	3	5	9	10	16	18	20
高さ（m）	0	9	15	27	30	48	54	60
	あ	い	う					

図 3-8　2 変量が与えられた表（一松ら，2010a，p.49）

この問題を通して，子どもに「○は□に比例する」（図 3-9）という定義を教えるのである。

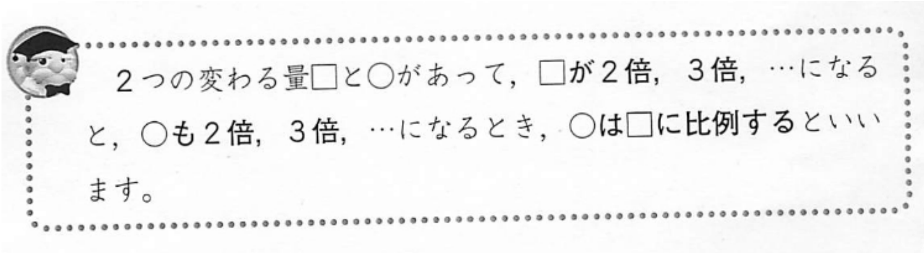

２つの変わる量□と○があって，□が２倍，３倍，…になると，○も２倍，３倍，…になるとき，**○は□に比例する**といいます。

図 3-9　教科書における第 5 学年の比例の定義（一松ら，2010a，p.50）

その後は力だめしも含め，問題を解くことが第 5 学年の比例の単元である。同様に，第 6 学年の反比例の単元構成は以下の表 3-4 である。

表 3-4　教科書の単元構成（学校図書，2011b，pp.21-22）

小単元	ねらい	学習活動	指導上の留意点と評価の観点
反比例（3.5）	●一方が増えると，もう一方が減る 2 つの量について，その変わり方を調べる。	●面積が一定の長方形の，縦と横の長さの関係を調べる。 ●反比例の意味をまとめ，定義を知る。	●表の横の関係に着目させる。 【考】2 量の関係を表などを用いて考えている。 【知】反比例の意味を理解している。
	●反比例の関係を表す式について理解する。	●面積一定の長方形の横の長さを x, 縦の長さを y としたときに, x と y の対応する数のきまりを見付け，式に表す。 ●反比例の関係を表す式を知る。	●表の縦の関係に着目させる。 【技】反比例の関係を，式に表すことができる。
	●反比例の関係を表すグラフについて理解する。 ●反比例のきまりや式についての理解を深める。	●x×y＝24 の x，y に対応する点の組をグラフに表す。 ●反比例のグラフを，比例のグラフと比べる。 ●反比例の関係にある問題を解く。	●反比例の関係をグラフに表すと, 直線にはならないことに気付かせる。 【知】反比例のグラフの特徴を理解している。
	●身の回りのものに，反比例の事象が見られ，活用されていることを知る。	☆★歯車の歯数と回転数の関係を表にまとめる。 ☆★2 量の関係が反比例していることに気付き，いろいろな問題を解く。	【関】反比例の事象が身の回りに見られ, 活用されていることに気付き, 日常生活に対する興味をもっている。

練　習（0.5）	●既習事項の理解を深める。	●2量の関係を表に表し，反比例しているかどうかを判断する。 ●x と y の関係を式に表す。 ●x が決まっているときの y の値を求める。	

1時間目で反比例の定義に関する授業，2時間目や3時間目で関係やグラフに関する授業を行うことで問題解決の方法を学ぶようになっている。4時間目で初めて，身の回りの事象に着目する単元構成となっている。反比例の定義の単元においても最初に表を作ることが指示されており，表には2変量が何かを捉えることができるようになっている（図3-10）。その後，この表を用いて反比例の定義を教える（図3-11）。

面積が24cm²の長方形の横と縦の長さ

横の長さx（cm）	1	2	3	4	6	8	12	24
縦の長さy（cm）	24							

図3-10　2変量が与えられた表（一松ら，2010b，p.53）

ともなって変わる2つの量xとyがあって，xの値が2倍，3倍，…になると，yの値は$\frac{1}{2}$倍，$\frac{1}{3}$倍，…になるとき，yはxに**反比例する**といいます。

図3-11　教科書における第6学年の反比例の定義（一松ら，2010b，p.54）

6年生の反比例においても，内容の理解が先に行われ，その後現実の世界に関連する問題を解く流れになっている。これは図3-5のLesh & Zawojweski（2007）が示す2つの視座のうち，「伝統的な視座」と整合的である。これまでの問題解決は知識を教えたあとに問題を解くというものであった。しかし，もう一つの視座である「モデルとモデル化の視座（Model and Modeling Perspective）」では問題解決者が，数学的な解釈あるいは考え方や手続きの仕方を，創造，洗練，適応することが期待される状況で身に付ける。求められるのはモデルとモデル化の視座であると言える。そして，この視座から問題解決を考えると，第3章で述べたモデル導出活動があると考える。モデル導出活動の特徴は《主として製品が共有可能で（他の人々と），再利用可能で（他の状況で），修正可能で（他の目的のために）あることが意図される場合，道具（tool）開発は有益である。》（Lesh & Harel, 2003, p.160）ことが挙げられる。作成したモデルが共有可能で，再利用可能である必要があると考える。

この数学的モデル化の中でも，最も重要なプロセスは定式化の段階が重要である（三輪，

1983；清野，2005 など)。その理由として，清野（2005）の言葉を借りれば，定式化の段階があってはじめて，《「現実の世界」と「数学の世界」が繋がれ，数学的概念や手続きが活用できるようになる》（清野，2005，p.2）からであると考える。構造指向と応用指向の協調を図るために，この定式化[11]を活動の中に取り入れることで構造指向と応用指向の接続をしたいと考える。

4.2 教材について

溝口（2010）が《よい問題の開発が不可欠》（p.179）と指摘するように，教材は重要であると考える。そこで教材について考察する。

西村（2006）は教材の要件としては，《科学的，私的，公共的，職業的な文脈で，数学化サイクルをふみ，判断や主張をする教材》（p.28）と述べ，その上で教材を作成する上で次の 3 点のような工夫が必要であると述べている。

《①判断や主張をするようにする
②解決の必要性を持たせる
③現実性を大切にする》（p.29）

①については，数学的根拠にもとづいて，何らかの判断や主張をするように問題設定を工夫するということである。②については，「解決したい」「解決しなければならない」という必要性を感じるようにすることである。それは他人の解決の必要性でもよい。③については，場合によって実験や調査をさせ，問題場面に関する現実のデータを用いるようにすることである（西村，2006)。しかし，教材において《条件や変数を整理しすぎたり，数値を計算に都合のよいように簡単にしたりしないようにする。なぜなら，そのことは，生徒にとっての現実性をそこなうとともに，数学化サイクルを実現できないことにつながるからである。》（p.29）と指摘している。定式化されていない問題によって，子どもが定式化する状況が生まれると考える。

4.3 本章の総括

ここまでの議論をまとめる。算数教育における新しい目標は第 1 章でも述べたように，算数の力であり，その中でも本研究において焦点化しているのは算数を生み出す力と算数を使う力である。算数を生み出す力と算数を使う力の両者を育成するということは，構造指向と応用指向の協調を図ることであり，そのときの課題は構造指向と応用指向の接続である。その上で第 2 章では学習指導に焦点をあてて考察をした。算数教育は応用指向をベースとして構造指向をどのように担保するかを考えることが必要である。応用指向の方法を育成するためには目的型の算数的活動が適していると述べた。そして，応用指向の強調という点から第 3 章では現実の世界を基に数学をする数学的モデル化についての考察を行った。

数学的モデル化についての研究を考察すると，今までの数学的モデル化研究は 3 つのタイプに分類できる（阿部，2010)。その 3 つのタイプの中で，これまでは数学的モデルを

[11] 本稿において，定式化は三輪（1983）の捉えを用い，単純化・理想化・近似・仮定の設定・記号化・形式化であるとする。

洗練することで数学の概念を理解することに重きが置かれていた（例えば，三輪，1983）。しかし，構造指向と応用指向の方法の両者を含むことが必要であり，その研究としては島田（1977）や Lesh & Harel（2003）がある。そして，数学的モデル化の強調点は定式化である。定式化によって現実と数学を繋ぐことができるからであり，定式化，特に仮定の設定は，算数を生み出す力と算数を使う力の育成，つまり，構造指向と応用指向の協調を考えた際に有効に働くと考える。そして，定式化に加え，ここで重要視されるのは，モデル化のサイクルを回る中で，概念を形成し問題解決ができるようになることである。本研究であれば，算数を生み出す力と算数を使う力の両者の育成と整合的であると考える。Lesh & Zawojweski（2007）が述べるようなモデルとモデル化の視座からのモデル導出活動は，構造指向と応用指向の協調が図れるものであり，構造指向と応用指向の接続を達成することができると考える。

<u>算数の力を育成するための教授・学習</u> 算数の力を育成するときの構造指向と応用指向の協調を図るためには，モデルとモデル化の視座を具体化したモデル導出活動が必要である。

第４章　算数の力を育成するための授業構想

本章では，これまでの第 1 章から第 3 章を踏まえて，算数を生み出す力と算数を使う力を育成するための授業を示すことを目的とする。そして，算数の力を育成するための授業構想を第 5 学年の比例及び第 6 学年の反比例に焦点を当てて行うことで，本研究を結論することとする。

第１節　算数の力を育成するための授業構想

1.1　授業構想へ向けて

第 1 章から述べているように，算数を生み出す力と算数を使う力を育成するときには，両者の力の協調を図ることが必要になる。その課題を達成するための学習指導として，モデル導出活動が適していることを第 3 章で述べた。そして，本節では，これまでの議論を踏まえて授業構想のためにどの単元を扱うのか，また，その単元での課題は何かについて述べる。

阿部（2012）は，《応用指向的方法という視点，すなわち「「現実の世界」と「数学の世界」との往還」という視点からみてみると，数学的内容の中で強調されうる領域は，「関数」と「資料の活用」と考える。それぞれ数学的考察の対象は関数とデータ・不確実性であり，現実との接続が，一方向的というよりむしろ現実と数学との往還を求める領域と考えるからである。》（p.24）と述べている。また，氏は《関数の教授・学習の目的においては，応用指向の側面が強調される》（p.25）が《関数はその目的において応用指向と整合的ではあるが，その構成・展開は構造指向的である。》（p.26）と述べている。そこで，現実との関連を図ることができ，応用指向を強調する必要があることから，本研究での授業構想では

関数を扱う。特に，第 5 学年の比例と第 6 学年の反比例である。教科書を考察すれば第 6 学年で比例と反比例の両方を指導するが，比例を初めて指導する学年は第 5 学年である。モデル導出活動では，概念形成と問題解決を同時に行うことがねらわれるため，比例についての先行知識のない第 5 学年を選択する。また，阿部（2012）は，《応用指向が強調される場合，「現実の世界」における関係あるいは変化を関数として抽象すること，またそれを用いて「現実の世界」を読み解くことが求められる。つまり，これまで関数の構造に重きがおかれていたものを，関数へと至るプロセス，そして，関数を「現実の世界」へと還元するプロセスの強調が求められる。ここで問題となることは，応用指向的な展開の中に，どのように構造指向を位置付けるか，という構造指向と応用指向の協調が問題になる。》（p.27）と述べている。関数には構造指向と応用指向との協調を図る必要性があると考え，モデル導出活動を取り入れる必要があると考える。

そして，関数の学習では，数学の方法の観点からいうと関数の考えの育成をすることが目的となると考える。そこで，1.2 でまず，関数の考えについて述べ，どのような活動が想定できるかを述べる。その上で，比例の学習の課題点を指摘し，課題解決に向けたアプローチを述べる。

1.2　関数の考え

関数の考えは，ある目的から 1 つの数量 A を考察しようとするとき，それと関連のあるほかの数量 B を見い出し，その数量 B をとらえることで，もとの数量 A が決められないかという考えとして基本的に捉えられる（中島，1991）。ここでの 2 量は，例えば，はっきりわかっていない変量や測ることの困難な変量をよくわかっている変量や測りやすい変量に関係づけようとするという立場で取り出されているものであり，関数の考えとは何か新しいものを捉えようとするときの思考の仕方であるといえる（中島，1978）。このように考えると，問題解決において，事象を算数の問題にしたり，よりよい解決を求めて異なる算数の問題に表現を変えたり，数学的処理をしたりといった，様々な段階で関数はかかわっていると考えることもできる（長崎，1995）。関数の考えの教育的価値として，事象を数理的にとらえる能力・態度を育てることが挙げられる（片桐，2004）。このように，関数の考えは事象の関係の考察において基本となる考えであり，問題解決において重要な考えの一つであるといえる。つまり，関数の考えは構造指向の方法と整合的であり，関数の考えを育成するということは，算数を生み出す力を育成することに繋がる。そして，その関数の考えから問題解決をするという算数を使う力を育成することに繋がると考える。

1.3　関数の考えを育成するために

ここで，関数の概念である変化と対応に焦点を当てて考察することで活動の方向性を明らかにする。三輪（1974）が，《1 つの量の変動に伴う他の量の変動とはいうものの，実際の事象を見ると，そのように単純なものはあり得ないはずである。事象では，常に，多くの量が関連しあい，関係をもっているのである。》（p.212）と述べているように，事象は多くの量が関係をもっているものである。したがって，事象の考察においては，まずは様々な対応関係や依存関係が取り出されるはずである。そして，変化させてみることで，その中から，規則性をもった関係が明らかになる。事象の考察を目的とした場合，対応関係や

依存関係にあるものについて考察するだけでなく，何と何を対応づけることができるかを考察することから入る必要があるといえる。

また，三輪（1974）は，《$x_1 \rightarrow y_1$，$x_2 \rightarrow y_2$という値の対応を明確にしなければ，x_1からx_2まで変わったときに y_1から y_2まで変わったという，変化のようすは明らかにすることはできない。つまり，変化というとき，既に対応を前提にしているのである。いっぽう，対応といっても，単に，数量の対応であってはそのようなものを考える必然性あるいは必要性はうすい。数量についての変動の法則性をつかんで課題の解決に利用したり，将来の予測をしたりするのに，数量の対応関係を利用するものでなくてはならないだろう。つまり，対応というものも実は変化を予想し，それあるが故に意味をもつものといえるわけである。このように，変化と対応というのは，一応異なる側面のように見えるが，不即不離，分かつべからざるものといえるのである。》（pp.213-214）と述べている。関数における変化と対応は，一方を捉える際は他方を前提としており，別々に捉えることはできないものであるといえる。そして，事象の考察をする際には，まず関係のある 2 量をみつけるという対応に着目する活動が位置づき，そして，それらの関係の考察，つまり，規則性を発見する際に，変化に着目することになると考えられる。したがって，事象の考察というのは，互いに他方を前提としながらも，対応への着目から変化への着目へと意識が変わるプロセスを踏むと捉えることができる。

1.4　比例の学習の課題と単元構成における課題

これまでの学習指導について先行研究をみてみると，変量をみつける活動がなされておらず，そこでは着目すべき 2 量が与えられ，その 2 量の関係を表や式に表したり，きまりを発見して問題を解決したりするだけの学習活動が多いことが課題として挙げられている（高見，1996；黒澤，2009 など）。これを数学的モデル化のプロセスでみれば，〔数学的処理〕に焦点があり，〔数学化，定式化〕，〔振り返り，照合，検証〕があまりなされていないといえる。このことは，現行の検定教科書（一松ら，2010a；一松ら，2010b）においてもみることができ，関数の考えを用いて問題を解決する活動ではなく，表や式，グラフを考察する活動が中心となっていることがわかる。つまり，構造への着目がねらわれており，方法型の算数的活動が主たる活動となっているといえる。始めにあるべきとされる対応づけの活動が弱く，「変化」から「対応」へという活動がなされることになる。既述したように，事象を考えれば，関数における変化と対応は，三輪（1974）の言葉を借りれば，「不即不離であり，分かつべからざるもの」であるにもかかわらず，このような展開によって，事象の考察のための変化と構造の理解のための対応というように，変化と対応が別々に捉えられてしまうと考える。

単元構成における課題は第 3 章第 4 節の 4.1 で述べたように教科書の課題は知識を教え，それに対する応用問題を解くという流れであると言え，それはこれまでの問題解決の伝統的な視座（図 3-5）と対応する。しかし，応用指向をベースとして構造指向をどう担保するか考える必要があることを踏まえれば，モデルとモデル化の視座から学習を行うことが必要であると考える。

これらの活動を取り入れて，数学的知識及び問題解決能力を共に育成する授業，つまり算数を生み出す力と算数を使う力を育成する授業構想を次節で行う。

第２節　授業の展開

2.1　比例の授業展開

（1）　単元

○第 5 学年「比例」

（2）　本時のねらい

○1 つのランドルト環を用いた視力検査について，比例を用いて，どんな視力も測定する方法を考えることができる。

（3）　本時の展開

	学習内容（教師の働きかけ（T）と児童の反応（C））	留意点（☆）
導入	１．問題をとらえる。 ランドルト環を提示する。 あなたたちはテレビ番組のディレクターです。これからアフリカ部族である，マサイ族，トゥルカナ族のどちらの視力が高いかという視力対決を行う番組を作りたいと考えています。視聴者に分かりやすいように，彼らの視力がどのくらいあるのかも示したいと考えています。 ちなみに，私たちは視力を測る際に「ランドルト環」を使用します。この一つのランドルト環で複数の視力を測るにはどうしたらいいですか。  ランドルト環 T：このランドルト環一つでどんな視力も測ることができます。 C:今までの視力検査ではランドルト環がたくさんあったよ。 C：ランドルト環の大きさを変えればいいと思います。 T：でも，この一つでも測ることができます。 C：えっ，たった一つで？ C：一つでは，測ることはできるのかな。 C：どうすれば測ることができるのだろう。 C：何が関係しているのかな。 T：では，まず 3.0 を測るには，どうすればいいか予測してみましょう。 C：何が分かればいいかな。 C：距離かな。	☆ランドルト環で視力を測ることができることを確認する。 ☆ランドルト環の大きさは直径が 7.5mm である。 ☆本時では,通常のランドルト環の大きさの違いで視力を測るのではなく,一つのランドルト環で視力を測ることを認識させる。

<table>
<tr>
<td>展
開
①</td>
<td>２．測定する
T：では，どうやったら測ることができるでしょうか。班で考えて，実際に測ってみよう。
C：なんでこのランドルト環一つで視力が測れるのだろう。
C：自分が動けばいいんじゃないかな。
C:いつもはランドルト環自体の大きさが変わっていたけど，今回はどうしたらいいんだろう。
C：自分が動けば，視力が測れるのではないか。
C：みんなで，自分の視力に見合った位置を探してきまりがあるかどうかを調べればいい。
C：僕はこれより後ろだと見えない。
C：私の視力は 0.6 だけれど，この距離は見えるから，3m だ。
C：表を作ることができた。
（1）変化の見方
<table>
<tr><td>視力</td><td>0.1</td><td>0.2</td><td>0.3</td><td>…</td><td>1.0</td><td>…</td><td>1.5</td><td>…</td><td>2.0</td></tr>
<tr><td>距離（m）</td><td>0.5</td><td>1.0</td><td>1.5</td><td>…</td><td>5.0</td><td>…</td><td>7.5</td><td>…</td><td>10</td></tr>
</table>
（2）対応の見方
<table>
<tr><td>視力</td><td>0.1</td><td>0.2</td><td>0.3</td><td>…</td><td>1.0</td><td>…</td><td>1.5</td><td>…</td><td>2.0</td></tr>
<tr><td>距離（m）</td><td>0.5</td><td>1.0</td><td>1.5</td><td>…</td><td>5.0</td><td>…</td><td>7.5</td><td>…</td><td>10</td></tr>
</table>
C：表をみると，視力が 2 倍，3 倍，…になると，距離も 2 倍，3 倍，…になっているからきまりがではないかな。
C：（視力）×5＝（距離）になっている。
C：15m 離れたところに立てば 3.0 を測ることができる。
T：正しい距離は 15m です。</td>
<td>☆一つで測る場合を考えることで，何が分かれば視力を測ることができるかを考えさせる。
☆測定者には，自身の視力を伝える。
☆実際に見える位置を確かめさせる。
☆測定のために必要になった用具は与える。（メジャーなど）</td>
</tr>
<tr>
<td>展
開
②</td>
<td>３．視力の測定方法について考える。
T：どのように考えたか教えてください。
C：自分が動けばいいと考えました。
C：視力が立つ位置で変わるのだから，視力と距離の関係を調べればいいと考えました。</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>ま
と
め</td>
<td>４．視力の測定方法を考えることでわかったことを考える。
T：今日の学習したことは何ですか。
C：2 倍，3 倍，…になると，距離も 2 倍，3 倍，…になっているという関係を使えば，わからない部分まで予測することができた。</td>
<td></td>
</tr>
</table>

	C：視力×5＝距離を用いることで，わからない部分まで予測することができた。 C：アフリカの人の視力が 10.0 だったら，これを 50m の距離から見えるんだ。	

2.2　反比例の授業展開

（1）単元

〇第 6 学年「反比例」

（2）本時のねらい

〇ランドルト環を用いた視力検査について，反比例を用いて，規定の範囲外のランドルト環を作成する方法を考えることができる。

（3）本時の展開

	学習内容（教師の働きかけ（T）と児童の反応（C)）	留意点（☆）
導入	１．問題をとらえる。 ランドルト環を提示する。 私たちは視力を測る際に「ランドルト環」を使用します。みなさんが経験したことのある視力検査で 3.0 の視力を測るにはどうしたらいいでしょうか。  ランドルト環	☆ランドルト環で視力を測ることができることを確認する。
	T：視力を測るにはどうしたらいいでしょうか。 C：このランドルト環だとどのくらいの視力が測れるんだろう。 C：小さいランドルト環を作ったらいいんじゃないかな。 C：視力が大きくなるから大きいランドルト環かな。 T：大きさはどのくらいになると思いますか。予測してみましょう。 C：比例関係になっていると思う。 C：同じ数ずつ引いて小さくなっていく。	☆本時では，通常の視力検査同様に，5 メートルの位置からランドルト環を見ることによって視力を測定する。 ☆最初は 1.0 の視力を測ることができるランドルト環のみを提示する。
展開①	２．測定する T:どうすれば視力 3.0 を測るランドルト環を作ることができるでしょうか。 C：なんでこのランドルト環で視力が測れるのだろう。 C：いつもはランドルト環自体の大きさが変わっていたけどな。	☆何が分かれば視力を測ることができるかを考えさせる。 ☆何をすればよいのか分からない児童に対しては，他のランド

	C：これまでは比例だったけど，比例しないかもしれない。 C：2.0 より小さいランドルト環にしたいから，遠ざかる。 C：他のランドルト環はどのくらいの大きさなのかな。 C：測ってみたら，直径は 7.5mm だった。 C：隙間は 1.5mm だよ。 ①ランドルト環の直径と視力の大きさに着目した場合 視力：0.1　0.2　0.3　…　1.0　…　1.5　…　2.0 直径（mm）：75　37.5　25　…　7.5　…　5　…　3.75 C：視力が 10 倍されると，直径が 10 分の 1 になっているから，3.0 の視力を測りたいときの直径の大きさは，7.5÷3 で 1.5mm C：視力と直径の長さをかけると全部 7.5 だから，同じように考えると，7.5÷3 で 1.5mm になる C：（視力）×（直径の長さ）＝7.5 になっている ②ランドルト環の隙間と視力の大きさに着目した場合 視力：0.1　0.2　0.3　…　1.0　…　1.5　…　2.0 隙間（mm）：15　7.5　5　…　1.5　…　1　…　0.75 C：視力が 10 倍されると，隙間が 10 分の 1 になっているから，3.0 の視力を測りたいときの隙間の大きさは 1.5÷3 で 0.5mm C：視力と直径の長さをかけると全部 1.5 だから，同じように考えると，1.5÷3 で 0.5mm になる C：（視力）×（隙間の大きさ）＝1.5 ③ランドルト環の太さと視力の大きさに着目した場合 視力：0.1　0.2　0.3　…　1.0　…　1.5　…　2.0 太さ（mm）：15　7.5　5　…　1.5　…　1　…　0.75 C：視力が 10 倍されると，太さが 10 分の 1 になっているから，3.0 の視力を測りたいときの太さの大きさは 1.5÷3 で 0.5mm C：視力と太さをかけると全部 1.5 だから，同じように考え	ルト環との違いについて考えさせる。 ☆他の大きさのランドルト環を見せる。長さは明示しない。 ☆測定者には，自身の視力を伝える。 ☆実際に見える位置を確かめさせる。 ☆測定のために必要になった用具は与える。（メジャーなど） ☆関係に気付くことができない児童に対しては表を作るように指示する。

Inner tables:

①
視力	0.1	0.2	0.3	…	1.0	…	1.5	…	2.0
直径（mm）	75	37.5	25	…	7.5	…	5	…	3.75

②
視力	0.1	0.2	0.3	…	1.0	…	1.5	…	2.0
隙間（mm）	15	7.5	5	…	1.5	…	1	…	0.75

③
視力	0.1	0.2	0.3	…	1.0	…	1.5	…	2.0
太さ（mm）	15	7.5	5	…	1.5	…	1	…	0.75

<table>
<tr>
<td></td>
<td>ると，1.5÷3 で 0.5mm になる
C：（視力）×（太さ）＝1.5

④ランドルト環の相似比に着目した場合
<table>
<tr><td>視力</td><td>0.1　0.2　0.3　…　1.0　…　1.5　…　2.0</td></tr>
<tr><td>直径（mm）</td><td>75　37.5　25　…　7.5　…　5　…　3.75</td></tr>
<tr><td>隙間（mm）</td><td>15　7.5　5　…　1.5　…　1　…　0.75</td></tr>
<tr><td>太さ（mm）</td><td>15　7.5　5　…　1.5　…　1　…　0.75</td></tr>
</table>
C：直径の長さ：隙間：太さは，5：1：1 になっている。
C：このままの形で 3.0 の大きさを考えれば作れそう。</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>展開②</td>
<td>３．視力の測定方法について考える。
T：どのように考えたか教えてください。
C：ランドルト環の直径と視力の大きさについて調べてランドルト環を作りました。
C：ランドルト環の隙間と視力の大きさについて調べてランドルト環を作りました。
C：ランドルト環の太さと視力の大きさについて調べてランドルト環を作りました。

T：みなさんが作ったランドルト環ですが，正しいものはこれになります。同じ大きさになっていますか。
T：ここから分かることはなんでしょうか。
C：ランドルト環の大きさが小さくなると，高い視力がさらに測れるようになる。
C：高い視力を測ることのできるランドルト環が作れたから，低い視力を測るランドルト環も作ることができると思う。
C：大きさの関係を使えば，予測して大きさを考えることができる。</td>
<td>☆クラスで測定方法について共有する。
☆自分が作った表や計算方法を黒板に貼って説明する。

☆3.0 の視力を測れるランドルト環を提示する。</td>
</tr>
<tr>
<td>まとめ</td>
<td>T：今日の学習したことを算数ノートに書きましょう。
C：二つの量について，関係を見ると予測して小さいランドルト環が作れた。大きいランドルト環も作ってみたい。
C：関係する量は，その間のきまりをみつけるとわかる。
C：比例関係を用いることで，わからない部分まで予測することができた。</td>
<td></td>
</tr>
</table>

2.3 モデル導出活動との関連

2.1 と 2.2 で構想した授業がどのような点でモデル導出活動になっているのかについて述べる。まず，モデル導出活動とは，《応用指向の方法の洗練の中で，モデルを「一般化可能」なものへと変容させることによって構造指向をも教授・学習する活動》（橋本，2012，p.53）であった。つまり，現実の問題を解決するために数学的概念を形成する活動であり，目的は問題解決である。

2.1 の比例での現実の問題とは，既定の視力検査では測れない 2.0 以上の視力を測ることである。ここでは，1 つのランドルト環のみで視力を測るという制限をしており，子どもたちの経験した視力検査ではない。この課題に対し，子どもたちは視力と距離の関係に着目する。距離が遠くなればなるほど視力は高くなるという比例関係について考察し，（視力）×5＝（距離）という規則性を発見する。その規則性を用いることで，子どもたちは現実の問題である 2.0 以上の視力も比例関係を用いることで予測することができる。

同様に 2.2 の反比例についてである。ここでの現実の問題も，既定の視力検査では測れない 2.0 以上視力を測ることである。反比例では比例と違い子どもたちが経験したことのある視力検査である。この課題に対し，子どもたちは視力とランドルト環の大きさに関係に着目する。ランドルト環の大きさが小さくなればなるほど視力は高くなるという関係について考察し，視力は 2 倍になればランドルト環の大きさは半分になるという規則性を発見する。その規則性を用いることで，子どもたちは現実の問題である 2.0 以上の視力もランドルト環の大きさを変えれば測ることができることが分かるのである。

比例においても反比例においても応用指向をベースにして構造指向をどう担保するか，つまり，応用指向と構造指向の協調を図れるものとなっている。まずは，現実の問題を解決するという応用指向の側面が前景に現れる。しかし，2.0 以上の視力を測る方法を考えるためには，事象の構造に着目し関係を見出すことが求められる。ここでは構造指向が前景に現れる。そして，見出した関係が再利用可能であり共有可能であれば，その関係を用いることで 2.0 以上の視力を測るという問題解決ができる。このように応用指向と構造指向の協調が図られる。

2.4 本章の総括

本章では，第 1 章から第 3 章を踏まえて授業構想を行った。阿部（2012）が《関数はその目的において応用指向と整合的ではあるが，その構成・展開は構造指向的である。》（p.26）と指摘していることから関数に着目した。また，関数において，《応用指向的な展開の中に，どのように構造指向を位置付けるか，という構造指向と応用指向の協調が問題になる。》（阿部，2012，p.27）ことより，協調を図るためにはモデル導出活動が適していると考えることができる。

また，関数で育成される考え方には関数の考えがあり，これは構造指向の方法と整合的である。関数の考えを用いることで，事象を数理的にとらえ問題解決する能力のような応用指向の方法を育成することが可能であると考える。

これらを踏まえて第 2 節では第 5 学年の「比例」と第 6 学年の「反比例」の授業を構想した。どちらの授業も 2.0 以上の視力を測るという現実の問題を解決する中で，規則性を発見し，発見した規則性を用いることによって問題解決が行われるというものである。こ

のような授業であれば，応用指向をベースにしながら構造指向を担保することができ，応用指向と構造指向の協調を図ることができると考える。

終章　本研究の総括と今後の課題

本章では，本研究の主題である「算数の力の育成」に関するこれまでの理論的な検討とそれをもとに構想した授業について振り返り，得られた知見を整理する。

第１節　本研究の総括

本研究における研究目的は，以下のとおりであった。

《本研究の目的》
算数教育の目標としての「算数の力」を育成するための学習指導のあり方を明らかにすること。

この目的に対して，本研究では以下の 3 つの課題を設定し，その解決を試みた。

（研究課題 1）これまでの目標としての「数学的な考え方」を批判的に考察し，その課題を明確にするとともに，今日的な目標としての「算数の力」を考察し，今日の算数の目標を明らかにすること。
（研究課題 2）「課題 1」をうけて，今日的な学習指導について具体的に考察し，算数の力を育成するための学習指導のあり方を明らかにすること。
（研究課題 3）「課題 2」をうけて，算数の力を育成するための具体的な授業を構想すること。

これらの課題に対する取り組みと成果を各章ごとにまとめる。

1.1　算数教育の目標

第 1 章では，これまでの算数教育で強調されてきた数学的な考え方について批判的に考察し，今日的な目標を考察し，今日の算数の目標について明らかにすることで，算数の力が算数教育の目標として位置づくことを示し，その強調点を設定することを目的とした。

第 1 節では，算数教育の目的と目標についてまとめ，目標にはその時代の社会が関係することを述べた。教育の目的としては人格の完成が位置づき，算数教育の目的は，人間形成的目的，実用的目的，文化的目的の 3 つから語られる。また，算数という教科は現実を基盤としており,数学は理論を基盤としている。そのような算数と数学の違いがあっても，人格の完成という目的は変わることがないことを述べた。そして，目標に着目すると，これまでの数学的な考え方には，問題解決能力や数学的モデル化能力，コミュニケーション能力が含まれておらず,現在の社会が求める目標を明らかにすることがあることを述べた。

第 2 節では, これまでの目標である数学的な考え方について批判的に考察した。そこで, まず数学的な考え方の歴史的変遷をたどり，数学的な考え方は算数の概念を生み出すということに焦点が当たっていたことを述べた。しかし，現在の社会が求める能力を踏まえれば，問題解決能力や数学的モデル化能力，つまり，算数の概念を生み出すことだけではなく，現実の問題を解決する力を含めた新しい目標が必要であるといえる。また，現状としては数学的な考え方が十分に育成されているとは言い難い状況である。現実の問題を算数・数学として捉えることで問題を解決することができる能力などの現実と関連した能力の育成が目標にも含まれる必要があるといえた。

第 3 節では，数学的な考え方が算数の力に拡張されたことを述べ，算数の力が数学を発展させるという構造指向と現実の問題を解決するという応用指向の両者の協調を図るための目標になることを述べた。その上で，本研究において算数を使う力を強調する中で，算数を生み出す力と算数を使う力を協調する必要があることを論じ, そのモデルを作成した。

<u>算数教育の目標</u>
構造指向と応用指向の協調を図るための目標として算数を生み出す力と算数を使う力が位置づく。

1.2　算数の力を育成するための学習指導

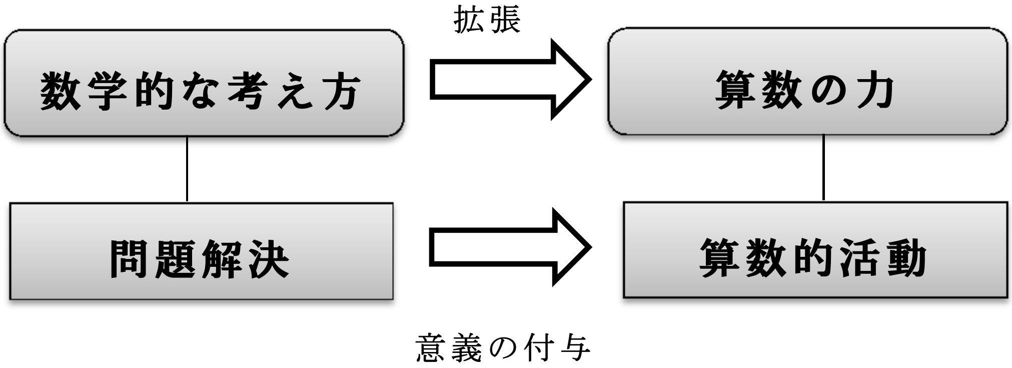
第 2 章では，算数教育の学習指導に焦点を当て，算数の力を育成するための学習指導について探り，学習指導についての課題と展望を明らかにすることを目的とした。そのために，これまで行われてきた問題解決学習を批判的に考察し，そこで見えた課題に対し達成するために，算数的活動を考察することでその課題を達成することを試みた。

第 1 節では，問題解決学習を批判的に考察した。これまでの問題解決学習では数学的な考え方を育成することをねらっていた。しかし，現在の調査結果を参照すると，数学的な考え方は十分に育成されていないといえ，調査問題が現実の問題場面を想定していることを踏まえると算数を現実で使う力も十分に育成されていないと考えることができる。そこでは，よい問題の作成も重要視されており，問題だけではなく，よい問題を活用することを前提とし，算数を生み出す力と算数を使う力を育成するためにはどのような学習指導を行うべきか考える必要があることを述べた。

第 2 節では, 算数的活動について考察した。問題解決では, 主客の乖離が存在しており, その乖離を算数的活動に意義を付随させることで繋ぐことができると阿部（2010）の研究で述べられていた。そして，算数を生み出す力と算数を使う力の育成が目的であることを踏まえると，応用指向の強調が必要であり，そのためには目的型の算数的活動が必要であることを述べ，問題解決と算数的活動の学習指導の変化をモデルで示した。また，現実の問題を解決することを踏まえ，単純化や理想化の活動の重要性を示した。

第 3 節では，第 1 章と第 2 章を総括した。目標は構造指向と応用指向の協調を図るために算数の力が位置づき，学習指導では算数的活動が算数の力を育成するために必要であると述べた。そして，応用指向の強調による構造指向と応用指向の協調を目標と学習指導の両者から図示した。しかし, 応用指向に構造指向を取り入れることが必要であることから,

課題としては構造指向の方法と応用指向の方法を同時に育成する活動を明らかにすることであるといえた。そして，算数を生み出す力と算数を使う力の協調という点から目標の拡張に伴って変わる学習指導に関してモデルを作成した。



1.3　算数の力を育成するための教授・学習

第 3 章では，応用指向の強調という点から，数学的モデル化に着目することにより，これからの教授・学習で求められる学習活動と数学的モデル化における課題について述べることを目的とした。

第 1 節では，数学的モデル化に関するこれまでの研究について考察した。そこで得られたこととして，これまでの日本の研究をみると，モデル化のサイクルを回ることでモデルを洗練し数学の概念を身に付けることに焦点が当たっていた。それに対し，構造指向と応用指向の協調を図ることが必要であることを踏まえれば，数学的モデル化のサイクルの中でモデルの洗練と問題解決の両者が行われる必要があることを述べた。また，数学的モデル化での強調点を述べた。数学的モデル化の強調点は定式化にある。定式化は現実と数学を繋ぐ部分であり，現実と数学の接続に関連している。つまり，現実の問題を算数に直すこと，数学で得た解を検証する部分にあたり，算数を生み出す力と算数を使う力の両者に関連していることから，定式化を学習活動に取り入れることによって，構造指向と応用指向の協調という課題を解決することができることを論じた。

第 2 節では，第 1 節を踏まえて定式化を取り入れた授業について先行研究を考察した。そこでは，仮定を意識することが図られており，仮定を設定することの困難性がある。また，この実践から見えてきた定式化を取り入れる際の特徴は，まずは現実の問題に解決の必要性があることである。そして，その問題の中で，子どもが数学の概念を作ることができるようにする必要があると考える。つまり，概念形成と問題解決が同時に行われる必要があると考える。仮定を意識させるために，必要とされることが表面化したことで，授業構想のための示唆を得ることができた。

第 3 節では，数学的モデル化のサイクルの中でモデルの洗練と問題解決の両者が必要であることを踏まえ，伝統的な問題解決とモデルとモデル化の視座について考察した。構造指向と応用指向の協調のためにはモデルとモデル化の視座が必要であり，そのための学習活動としてモデル導出活動がある。モデル導出活動は，応用指向に構造指向を取り入れる活動であり，モデル導出活動であれば構造指向と応用指向の協調を図ることができること

を述べた。
第 4 節では，モデルとモデル化の視座から教科書の単元構成と算数の力を育成するための教材について考察した。現行の教科書を考察すれば，知識を教えてから現実の世界と関連のある問題を扱うという流れになっている。しかし，それは伝統的な問題解決と整合的であり，モデルとモデル化の視座から考えれば，数学的概念の形成と問題解決の両者を同時に行うことが求められる。そのときに扱う教材としては，解決の必要性がある問題であることが望ましいといえた。

<u>算数の力を育成するための教授・学習</u>
算数の力を育成するときの構造指向と応用指向の協調という課題を解決するためには，モデルとモデル化の視座を具体化したモデル導出活動が必要である。

1.4　授業構想

第 4 章では，算数を生み出す力と算数を使う力を育成するための授業を示すことを目的とした。
第 1 節では，比例と反比例の授業構想へ向けて，現状の課題やそれに対するアプローチを整理した。現行では，知識の習得から現実問題への活用という流れであること，また，2 量を取り出す活動がなされていないことから，その活動を授業に取り入れることが必要であると述べた。
第 2 節では，ここまでの内容を踏まえて授業構想を行った。モデル導出活動を取り入れるために，比例構造を作ることと問題解決の両者を行えるものとしてランドルト環を用いた授業とした。子どもたちが自ら比例構造を生み出すことができ，それを一般化することによって問題解決できるものであると考える。同様に反比例の学習でも同じことがいえると考える。

1.5　本研究の成果

本研究の主要な成果は，次の 3 点である。

<u>研究成果 1：算数の力の強調点の設定</u>
数学的な考え方の歴史的変遷を述べ，これまでの数学的な考え方を批判的に考察し，新しい目標として「算数の力」が位置づくことを述べた。「算数の力」は今日の社会に対応し得る目標である。また，算数教育は応用指向をベースにして構造指向をどう担保するかを考えることが必要であることから，算数を使う力を強調する中で，算数を生み出す力と算数を使う力を協調する必要があることを論じた。

<u>研究成果 2：算数の力を育成するための学習指導の理論構築</u>
問題解決と算数的活動に関する先行研究を考察することから，問題解決学習の成果を批判的に考察し，算数的活動へと何が変わったかを述べた。算数的活動は子どもと数学を繋

ぐことが可能である。また，応用指向の方法を育成するが強調されていることを踏まえると目的型の算数的活動を行う必要がある。その上で応用指向の強調という点から，数学的モデル化に着目することによって，これからの教授・学習で求められる学習活動と数学的モデル化での課題について述べた。そこでは，モデルとモデル化の視座から考えられるモデル導出活動を行うことで，数学的な概念形成と問題解決の両者が行われ，これまでの伝統的な問題解決とは異なっている。モデル導出活動によって，算数を生み出す力と算数を使う力の協調を図り，両者の育成ができることを述べた。

研究成果 3：算数の力を育成するための授業構想

まず，現状での比例と反比例における課題を明確にし，その上でそれに対するアプローチを述べた。そして，これまでの議論を総括し，算数を生み出す力と算数を使う力を育成するためにモデル導出活動を取り入れた授業を構想した。

第 2 節　今後の課題

本研究では，算数教育の新しい目標としての「算数の力」を育成するための学習指導のあり方を明らかにすることとした。そこでは，算数を生み出す力と算数を使う力の協調を図り，同時に育成することが必要であるといえる。その上でモデル導出活動を取り入れる授業が必要であることを論じ，授業構想を行った。本研究によって得られた今後の課題を 4 点述べる。

第 1 に，算数の力についてである。本研究においては，算数の力の中でも算数を生み出す力と算数を使う力の育成に焦点を当てた。それは，算数という教科においては，応用指向をベースとして構造指向をどう担保するかを考えなければならないからである。しかし，算数の力には算数で表す力と算数で考え合う力の 2 つの力が存在する。その 2 つの力をどのように育成するか考えることが求められると考える。

第 2 に，カリキュラムについてである。教科書の単元構成を始め，カリキュラムはどのような内容を教えるかというカリキュラムになっていると考える。算数を生み出す力や算数を使う力のように方法を育成することを考えた場合，内容とともにどのような方法が育成するべきかという議論を行う必要があると考える。つまり，方法に関するカリキュラムが必要であると考える。

第 3 に，授業展開についてである。本研究では，関数領域に焦点を当ててモデル導出活動を取り入れた授業構想を行った。しかし，領域は関数だけではない。他領域では，どのようにモデル導出活動を取り入れた授業が展開されるかを考察する必要があると考える。また，この授業はまだ実践しておらず有効性について検証されていない。今後，授業実践することで検証する必要があると考える。

第 4 に，教材についてである。授業展開に加え，そこでは解決の必要のある教材開発が求められる。本研究では，一つの教材例に限られている。今後，算数の力を育成するための教材開発を行うことが必要であると考える。

算数の力を育成するための課題として上記のように様々な課題が表出する。本研究においては，理論に加え授業展開について考えたが実践を行っていない。実践することで，課

題は出てくると考える。その課題を先行研究を踏まえ解決に導くことが必要であると考える。

引用・参考文献

Lesh，R. & Harel，G.（2003）. Problem solving，modeling，and local conseptual development，*Mathematical Thinking and Learning*，vol.5，no.2&3，Lawrence Erlbaum Associates，pp.157-168.

Lesh，R. & Zawojewski，J.（2007）. Problem Solving and Modeling，Lester，F. K.（Ed.），*Second handbook of research on teaching and learning*，vol.2，Information Age Publisher，pp.779-784.

阿部好貴（2010）.『数学教育におけるリテラシーの育成に関する研究』，広島大学大学院教育学研究科　博士論文（未刊行）.

阿部好貴（2012）.「数学的リテラシーという視点からの教授・学習内容の考察－関数領域に焦点をあてて－」,『全国数学教育学会誌』，第 18 巻第 1 号，pp.23-29.

五十嵐一博（2001）.「理想化された世界と現実とのずれ」，長崎栄三（編著）,『算数・数学と社会・文化のつながり』，明治図書，pp.28-37.

池田敏和（1999）.「数学的モデリングを促進する考え方に関する研究」,『日本数学教育学会誌』，第 81 巻臨時増刊，pp.2-18.

池田敏和・山崎浩二（1993）.「数学的モデリングの導入段階における目標とその授業展開のあり方に関する事例的研究」,『日本数学教育学会誌』，第 75 巻第 1 号，pp.26-32.

磯田正美・中村享史（2010）.「指導法の発展と問題解決の指導論」,『日本数学教育学会誌』，第 92 巻第 11 号，p.11.

一松信ら（2010a）.『みんなと学ぶ小学校算数 5 年下』，学校図書.

一松信ら（2010b）.『みんなと学ぶ小学校算数 6 年下』，学校図書.

江森英世（2000）.「数学教育学研究におけるコミュニケーションモデルの変遷」,『第 33 回数学教育論文発表会論文集』，pp.95-100.

大坂睦（2012）.「学習内容としての算数的活動の学習指導に関する基礎的研究－課題となる算数的活動の同定－」,『全国数学教育学会誌』，第 18 巻第 2 号，pp.59-68.

太田伸也（2009）.「数学的活動とその意義」，長崎栄三・國宗進・太田伸也・相馬一彦（編著）,『豊かな数学の授業を作る』，明治図書，pp.33-47.

岡本光司（2008）.「子どもの「問い」を軸とした算数学習の創造に向けて」，岡本光司・両角達男（編著）,『子どもの「問い」を軸とした算数学習』，教育出版，pp.2-65.

片桐重男（2004）.『数学的な考え方の具体化と指導』，明治図書.

学校図書（2011a）.「第 5 学年の指導計画」,『平成 23 年度用年間指導計画作成資料』,（http://www.gakuto.co.jp/junsansu/index.html）.

学校図書（2011b）.「第 6 学年の指導計画」,『平成 23 年度用年間指導計画作成資料』,（http://www.gakuto.co.jp/junsansu/index.html）.

国宗進（2007）.「数学の特徴とその教育的価値」，長崎栄三・滝井章（編著），『算数の力を育てる①　何のための算数教育か』，東洋館出版社，pp.48-60.
黒澤俊二（2009）.「『関数の考え』を誘発する提示物の条件と効果」，『日本教育心理学会総会発表論文集』，p.325.
小出実（2009）.『社会とのつながりを重視する数学科授業の開発研究』，広島大学大学院教育学研究科，修士論文（未刊行）.
国立教育政策研究所（2010）.「平成 22 年度全国学力・学習状況調査解説資料小学校算数」，『平成 22 年度全国学力・学習状況調査の調査問題・正答例・解説資料について』，（http://www.nier.go.jp/index.html）.
国立教育政策研究所（2012a）.「平成 24 年度全国学力・学習状況調査解説資料小学校算数」，『平成 24 年度全国学力・学習状況調査の調査問題・正答例・解説資料について』，（http://www.nier.go.jp/index.html）.
国立教育政策研究所（2012b）.「平成 24 年度全国学力・学習状況調査【小学校】集計結果」，『「平成 24 年度全国学力・学習状況調査報告書・集計結果」について』，（http://www.nier.go.jp/index.html）.
国立教育政策研究所（2012b）.「平成 24 年度全国学力・学習状況調査【中学校】集計結果」，『「平成 24 年度全国学力・学習状況調査報告書・集計結果」について』，（http://www.nier.go.jp/index.html）.
島田功・西村圭一（2006）.「算数と社会をつなげる力の育成をめざす授業に関する研究」，『日本数学教育学会誌第 88 巻第 2 号』，pp.2-11.
島田茂（1977）.『算数・数学科のオープンエンド　アプローチ－授業改善への新しい提案－』，みずうみ書房，pp.9-21.
清野辰彦（2005）.「数学的モデル化における「仮定の意識化」の役割」，『日本数学教育学会誌』，第 87 巻第 7 号，pp.2-12.
高見資宏（1996）.「依存関係を認識する過程に関する研究」，『数学教育論文発表会論文集』，pp.85-90.
長崎栄三（1990）.「問題解決」，新算数教育研究会（編著），『算数授業の新展開講座 8 算数教育の基礎理論』，東洋館出版社，pp.134-146.
長崎栄三（1995）.「関数の本質と考えさせる授業」，半田進（編）『考えさせる授業算数・数学―実践編』pp.252-265.
長崎栄三（2007a）.「今なぜ算数・数学の力が注目されるのか」，長崎栄三・滝井章（編著），『算数の力を育てる③　数学的な考え方を乗り越えて』，東洋館出版社，pp.18-27.
長崎栄三（2007a）.「算数・数学の力の構造化」，長崎栄三・滝井章（編著），『算数の力を育てる③　数学的な考え方を乗り越えて』，東洋館出版社，pp.40-61.
長崎栄三（2007a）.「数学的な考え方の再考」，長崎栄三・滝井章（編著），『算数の力を育てる③　数学的な考え方を乗り越えて』，東洋館出版社，pp.166-183.
長崎栄三（2007b）.「算数教育の目的はどう考えるか」，長崎栄三・滝井章（編著），『算数の力を育てる①　何のための算数教育か』，東洋館出版社，pp.12-34.
長崎栄三（2007b）.「算数教育の目標はどう考えるか」，長崎栄三・滝井彰（編著），『算数の力を育てる①　何のための算数教育か』，東洋館出版社，pp.35-47.

中島健三（1978).「集合や関数の考えを生かした指導」, 伊藤一郎・片桐重男・沢田和佐・中島健三・平林一栄（編）『新・算数指導講座 1』, 金子書房, pp.211-256.
中島健三（1981).『算数・数学教育と数学的な考え方』, 金子書房.
中島健三（1991).「数量関係の指導内容の概観」,『新・算数指導実例講座 9 数量関係』, 金子書房, pp.3-34.
中野昇（1965).「数学的な考え方」,『日本数学教育会誌』, 第 47 巻第 8 号, pp.10-13.
西村圭一(2001).「数学的モデル化の授業の枠組みに関する研究」,『日本数学教育学会誌』, 第 83 巻第 11 号, pp.2-12.
西村圭一・長崎栄三・久保良宏・島崎晃・牧野宏・松元新一郎・五十嵐一博・島田功(2001).「児童・生徒の社会の問題を数学的に解決する力に関する調査研究」,『数学教育論文発表会論文集』, 第 33 巻, pp.253-258.
西村圭一（2006).「数学的リテラシーを育成するための教材の開発」,『日本数学教育学会誌』, 第 88 巻第 5 号, pp.26-32.
橋本善貴（2012).「数学的リテラシーの育成を目指した教授・学習に関する基礎的考察」,『全国数学教育学会誌』, 第 18 巻第 2 号, pp.47-57.
平林一栄（1991).「数学嫌いにするための算数教育」,『新教育課程の実践と数学的な考え方・問題解決』, 東洋館出版社, pp.1-29.
牧野宏・清水壽典（2007).「算数を使う力を育てる授業」, 長崎栄三・滝井章（編著),『算数の力を育てる③数学的な考え方を乗り越えて』, 東洋館出版社, pp.127-138.
マックス ステフェンス・池田敏和（2012).「数学的モデル化の必要性とその方法」,『日本数学教育学会誌』, 第 94 号第 3 巻, pp.2-8.
松島充(2010).「数学的モデル化と創造性－創造的思考を育成するための授業構成－」,『数学教育論文発表会論文集』, 第 43 巻第 2 号, pp.495-500.
溝口達也（2010).「第 10 章　指導方法」, 数学教育研究会（編),『新訂　算数教育の理論と実際』, 聖文新社, pp.172-197.
三輪辰郎（1974).「関数的思考」, 中島健三・大野清四郎（編）『数学と思考』, 第一法規, pp.210-225.
三輪辰郎(1983).「数学教育におけるモデル化についての一考察」,『筑波数学教育研究』, 第 2 巻, pp.117-125.
文部科学省（2008).『小学校学習指導要領解説算数編』, 東洋館出版社.
文部科学省初等中等教育局(2010).「各教科等・各学年等の評価の観点及びその趣旨」,『小学校, 中学校, 高等学校及び特別支援学校等における児童生徒の学習評価及び指導要録の改善等について（通知)』,（http://www.mext.go.jp/).
谷田部憲一・山戸敏治（1975),「問題解決力を育てる指導」,『日本数学教育学会誌』, 第 57 巻第 10 号, pp.19-26.
矢部敏昭（1992),『新しい学力観と問題解決』, 明治図書, pp.8-46.
渡辺耕太（2008).「算数科の学習における表現とコミュニケーション能力の育成を目指す指導」,『日本数学教育学会誌第 90 巻第 6 号』, pp.2-9.