

数学的リテラシー育成を目指した教授・学習に関する研究

—資料の活用領域に焦点を当てて—

新潟大学大学院 教育学研究科
教科教育専攻 数学教育専修
橋本 善貴

序章 本研究の目的と方法

本章では、本研究の目的と方法を述べ、論文全体の概要を示す。第 1 節では本研究の目的を、第 2 節では本研究の方法と構成を述べる。

第 1 節 研究の目的

これまで数学教育では、人間形成を主目的とし、それを補完するように数学の陶冶的、実用的、文化的側面から教授・学習の在り方が考えられてきた。つまり、これまでの数学教育における教授・学習は、「人間形成」という不変な理念のもとで、数学を通して人間の能力・態度・価値観などを育てるといった数学の「陶冶性」、また数学を知的道具として使用する能力を育むといった数学の「実用性」、そして数学の美しさや楽しさを感じ得せるといった数学の「文化性」から語られてきた（長崎，2007a）。

このように数学教育を考える上で、「人間形成」の理念は永久不変であると考えうる。一方で人間形成を求める「社会」は有為転変である。それゆえに、数学教育で形成される「人間」は不変ではなく、数学教育は社会とともに変化していかなければならない。

そして、《ポストモダンを推進する知識基盤社会・高度情報化社会・生涯学習社会の必要とする「能力」は、これまでの学校教育で保障されてきた教育課程的「学力」では到底まかないきれなくなった》（岩崎・服部，2011，p.102）と指摘されるように、数学教育においても、社会の変化という視点から、その在り方を再検討することが求められている（岩崎，2008；長崎，2009；阿部，2010）。

そのように社会の変化という視点から数学教育の在り方を考える 1 つの視座として、本研究では「数学的リテラシー」に着目する。なぜなら「数学的リテラシー」とは、すべての生徒が身につける社会参加のための数学に関する知識・能力（cf. 阿部，2010）と捉えられるゆえに、必然的に社会に対応したものであるからである。

一方、数学的リテラシーに関する研究動向として、《包括的な議論が充実する一方で、焦点化、局所化された議論にはまだ至っていない》（阿部，2011，p.89）ことが指摘される。つまり、数学的リテラシーを育成する教授・学習の在り方についての具体的な議論は、十分になされていない状況にある。したがって、数学的リテラシーを視점에、これからの社会に応じた教授・学習の在り方を探り、その具体化を図ることが求められる。

本研究では、このような課題意識にもとづき、数学的リテラシーの育成を目指した教授・学習の在り方を探り、その教授・学習を具体化することを目的とする。

【本研究の目的】

数学的リテラシーの育成を目指した教授・学習の在り方を探り，その教授・学習を具体化すること

第2節 研究の方法と構成

前節における研究の目的を達成するために，次の3点を主要な研究課題として設定する。

- (研究課題1) 数学的リテラシーの今日的な方向性を捉え，その育成に向けた教授・学習過程の在り方を探ること
- (研究課題2) 「課題1」を受けて，数学的リテラシー育成を目指した教授・学習の中心的内容として統計に焦点を当て，その核となる概念を捉えること
- (研究課題3) 「課題1」と「課題2」を受けて，統計を扱う資料の活用領域における数学的リテラシー育成を目指した教授・学習を明示すること

「研究課題1」では，数学的リテラシーの今日的な方向性を探り（第1章），その育成を目指した教授・学習過程の在り方を明確にする（第2章）。そのために，まず数学的リテラシーを捉えるための枠組みについて論じる（第1章・第1節）。その枠組みをもとに，これまでの数学的リテラシーの方向性を振り返り（第1章・第2節），それを社会の変化という視点から批判的に考察し，これからの数学的リテラシーの方向性を捉える（第1章・第3節）。その上で，今日的な数学的リテラシーを具体化する教授・学習過程の在り方を検討し（第2章・第1節），その教授・学習過程の実現に向けたアプローチを Lesh の研究をもとに明確にする（第2章・第2節）。

「研究課題2」では，「研究課題1」において明確にされた数学的リテラシーの今日的な方向性とそれを具現化する教授・学習過程の在り方にもとづいて，数学的リテラシーの育成を目指した教授・学習内容について考察する（第3章）。まず，「高度情報化社会」や「情報基盤社会」といわれる現代社会への参加を念頭に置けば，統計は学校数学カリキュラムにおける中心的内容の1つになりうると考えられること，そして統計はあくまで現実世界の問題に対する解決方法として教授・学習されることが想定されることが鑑み，統計に焦点を当てることについて論述する（第1節）。そして統計において核となる概念を捉え（第2節），統計学の発達と子どもの発達という視点から，その概念の発達の様相の明確化を試みる（第3節）。

「研究課題3」では，「研究課題1」と「研究課題2」で明らかになった教授・学習過程及び内容に関する議論を統合する形で，数学的リテラシー育成を目指した資料の活用領域の教授・学習を構想する（第4章）。そのためにまず，数学的リテラシーの今日的な方向性とその育成を目指した教授・学習過程及び内容という視点から，資料の活用領域の教授・学習について批判的に考察し，数学的リテラシーの育成に向けた課題を明確にする（第

1 節)。そして導出された課題に対するアプローチを探り（第 2 節）、それを数学的リテラシーの育成を目指した資料の活用領域の授・学習として具体的に示す（第 3 節）。

引用・参考文献

- 阿部好貴 (2010).『数学教育におけるリテラシー育成に関する研究』, 博士論文 (未刊行), 広島大学大学院教育学研究科.
- 阿部好貴 (2011).「数学的リテラシーに関する研究動向」, 長崎栄三 編著,『数学教育におけるリテラシーについてのシステミック・アプローチによる総合的研究』, 日本学術振興科学研究費補助金基盤研究 (B), pp.82-90.
- 岩崎秀樹 (2008).「リテラシーを考える」,『科学教育研究』, vol.32, no.2, pp.69-71.
- 岩崎秀樹・服部裕一郎 (2011).「数学的リテラシーからみえる数学教育学の課題と展望—中等教育段階における背景的理念—」, 長崎栄三 編著,『数学教育におけるリテラシーについてのシステミック・アプローチによる総合的研究』, 日本学術振興科学研究費補助金基盤研究 (B), pp.101-113.
- 長崎栄三 (2009).「人間・社会にとっての算数・数学:何のための数学的リテラシー論か」, 日本科学教育学会『年会論文集 33』, pp.115-118.
- 長崎栄三・滝井章 編著 (2007a).『算数の力を育てる① 何のための算数教育か』, 東洋館出版社.

第1章 数学的リテラシーに関する基礎的考察

本章は、数学的リテラシーの今日的な方向性を明確にすることを目的とする。そのために、第1節では数学的リテラシーの方向性を捉える枠組みについて述べる。第2節ではその枠組みを用いて、これまでの数学的リテラシーの方向性を捉える。さらに第3節では、社会の変化という視点から、これからの数学的リテラシーの方向性について論じる。

第1節 数学的リテラシーを捉える枠組み

リテラシーの本義は、文字を媒体とした文化を読み解くためのごく限られた大人の「(優雅な)教養」であって、今日広く知れ渡っている「読み書き能力」といった「識字」の意味は、教育用語として後に付加されたものである(佐藤, 2003)。そのようなリテラシーの史的展開について、佐藤(2003)は以下のように述べている。

《「リテラシー」は二つの意味を担ってきた。一つは「教養」としてのリテラシーという伝統的な概念であり、この用法は長らく「高度の教養」あるいは「優雅な教養」を意味してきたが、近年では「共通教養 (common culture)」あるいは「公共的な教養 (public culture)」を意味するものへと変化している。もう一つは、19世紀の末に登場した「識字」あるいは「読み書き能力」としてのリテラシーであり、この用法は学校教育の概念として登場し、社会的自立に必要な基礎教養を意味する「機能的識字」という概念に支えられて普及してきた。》(p.3)

このように、社会や時代の変化とともにリテラシー概念も変化してきたといえる。そして今日の日本において強調されるリテラシーは、OECD/PISAのリテラシーに示唆されるように、読み書き能力といった従来の「識字」とは異なり、生涯学習社会を背景に、機能的な「教養」をも包括する幅広い概念となっている。さらに高度情報化社会を前提にすれば、「識字」と「教養」の中身はかつてのそれと同じはずはなく、両者を統合させるような形で、リテラシー概念を拡充し、新たに構築し直し、明確にしていかなければならない(岩崎, 2008)。

阿部(2010)は、そのようにリテラシーが時代的・社会的・文化的な背景に依存する概念ではあるが、時代・社会・文化を捨象しリテラシーの概念を抽象すれば、その概念の前提として次の3つが挙げられるとしている。

- ① リテラシーは「社会参加」するために必須であること
- ② リテラシーは「すべての人を対象」とすること
- ③ リテラシーは「知識と能力」の両方からなること

そして氏は、これらの前提を踏まえ、数学的リテラシーを《すべての児童・生徒が身につけてほしい数学に関する知識や能力の総体であり、それは学校を超えた社会に参加するための知識や能力》(p.105)と定義づけている。

このことを踏まえ、本研究では、数学的リテラシーを「すべての生徒が身につける社会参加のための数学に関する知識・能力」と捉えることとする。このように数学的リテラシ

一は、すべての生徒が社会参加するために身につける必要があるゆえに、社会という視点から数学教育の在り方を論じる 1 つの視座となりうるということがわかる。

また阿部 (2010) は、次のような枠組みで数学的リテラシーを捉えている (pp.106-113)。

【数学的リテラシーを捉える枠組み】

- 数学の本質
- 数学の内容
- 数学の方法
- 価値観，態度

まず《「数学の本質」とは、児童・生徒が認識すべき数学とは何か、という数学の本質的な理解に関するもの》(ibid, p.107) とし、「数学の本質」を捉える上で、ヴィットマンの数学の捉えを参考にしている。ヴィットマンら (2004) は、数学を《「応用指向」と「構造指向」の 2 つの相補的側面を持つ「パターンの科学」》(p.53) と捉え、数学教育におけるそれら 2 つの側面のバランスの重要性を強調している。このことから「数学の本質」として、数学のための数学という「構造指向」、そして数学外へ応用するための数学という「応用指向」の 2 つの相補的側面があることがわかる。つまり数学には、数学それ自体を構成・発展させていく側面と数学を実生活や他学問へと応用していく側面の 2 つのベクトルがあるといえる。

また《数学は、その内容（対象）と方法で考えられる》(阿部，2010，p.109)。つまり数学は、現実事象や数、形、変化などを思考対象（「内容」）とし、それらに対して、数学的モデル化や抽象、一般化などの思考方法（「方法」）で考察を行うものと捉えられる。

例えば、現実事象を対象に、図 1-1 のような数学的モデル化（三輪，1983）を行うことが考えられる。その過程は、現実事象を数学的問題に定式化し（定式化）、定式化した問題を解き（数学的作業）、得られた数学的結果をもとの事象に照らして解釈、評価し（解釈・評価）、さらなる問題の定式化を図る（より良い定式化）といった 4 段階を踏むとされている。

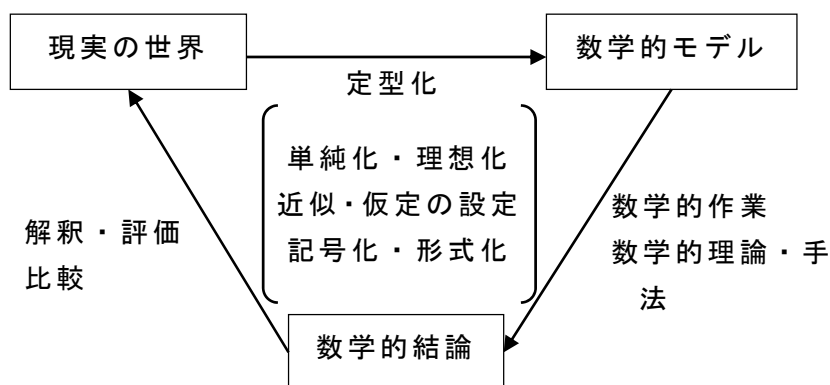


図 1-1. 数学モデル化（三輪，1983，p. 120）

また図形に関する性質や命題を対象に、抽象・一般化し、証明を行っていくことも、数学を「内容」と「方法」という視点で捉えた例として挙げられる。そしてその過程は、数学者によって発展された数学の史的発展を追発明することとして特徴づけられうる(伊藤, 2006)。つまり数学が発展してきた歴史的な過程を、学習者に合わせた過程へと何らかの修正を加え、それに従って現実世界の現象を数学によって組織化し、さらにそれまで組織化する手段であった数学を、新たな数学で組織化していくことと捉えられる。

このように「構造指向」と「応用指向」それぞれに、「内容」と「方法」があることがわかる。すなわち、「構造指向」における「内容」は数、形、関係などであり、「方法」は抽象や一般化などである。一方、「応用指向」における「内容」は現実事象であり、その「方法」は数学的モデル化や問題解決である(阿部, 2010, pp.107-110)。

そして《「数学の本質」、「数学の内容」、「数学の方法」は数学に対する特徴づけである一方で、他方「価値観・態度」はその学習者あるいは使用者》(阿部, 2010, p.112)が有するものである。つまり「価値観・態度」は、数学的リテラシーを発揮させるためのベースとして働くものであると考えられる。

なお、数学の「内容」と「方法」は、本来不可分なものである。例えば、幾何領域でいえば、van Hiele の幾何の学習水準理論(cf. 平林, 1987)における「方法の対象化」のように、思考の「方法」はやがて思考の「内容」へと変容する。それゆえ、これらの「数学の本質」、「数学の内容」、「数学の方法」、「価値観・態度」という4つの視点は、数学的リテラシーの複雑な様相を単純化して捉えるためのものである。したがって、以下でこれまでの数学教育の目的・目標及び今日的な数学的リテラシーの方向性について考察する際、その議論の複雑さを避けるために、これらの視点をを用いることとする。また、目的・目標の議論においては、子どもというよりはむしろ、数学的な側面が前景となるため、子どもが有するものである「価値観、態度」を除き、数学に対して特徴づけられた残り3つの視点をを用いて考察する。

第2節 これまで¹の数学的リテラシー

本節では、先に述べた数学的リテラシーを捉える枠組みを用いて、これまでの数学教育を振り返る。その際、IEA(国際教育到達度評価学会)によるカリキュラムの区分(cf. 国立教育研究所, 1991)、すなわち国家規模で定められる目的・目標にあたる「意図したカリキュラム(Intended Curriculum)」とそれを解釈し実際に営まれる教授・学習にあたる「実施したカリキュラム(Implemented Curriculum)」、そしてそれらの成果にあたる「達成したカリキュラム(Attained Curriculum)」に従い、それぞれの水準で考察を行う。なぜなら、学習指導要領や教科書などで示された「意図したカリキュラム」とそれを教師が解釈し生徒に与える「実施したカリキュラム」が必ずしも一致しているとは限らなく、さらに、

¹ 本節では、これまでの日本の数学教育が社会に対応しているかを検討する。そして、これまでの日本の数学教育における目的・目標及び教授・学習は、「問題解決」を背景に考えられてきたこと(Hino, 2007)を考慮して、ここでの「これまで」とは、「問題解決」が強調されはじめた1980年代以降から、引き続きその影響を受けている現代までの日本を意味する。

それらのカリキュラムが期待する成果が「達成したカリキュラム」となって現れるとは限らないからである。

2.1 意図したカリキュラムにおけるこれまでの数学的リテラシー

ここでは数学的リテラシーという視点，すなわち前節で述べた「構造指向」と「応用指向」及びそれらの「方法」，「内容」という視点で，これまでの数学教育の目的・目標を振り返る。

これまでの数学教育は，《基礎的な知識・技能の育成とともに，「数学的な考え方」の育成を目指し，意欲を育て，学習への望ましい態度を育て，自主的に学ぶ能力・態度を育てること》（片桐，2004，p.20）を意図して営まれてきた。そして，これまでの数学教育の目的・目標の強調点は，「数学的な考え方」の育成にあったと考えられる。「数学的な考え方」は，1980年のアメリカのNCTMのアジェンダによる「問題解決」の強調に影響を受け，日本に導入された目標概念である。しかし，「問題解決」は数学的概念を効果的に応用することに関するものであった一方で，「数学的な考え方」は数学的概念の創造に関するものであった（Hino，2007）。そのように「問題解決」と「数学的な考え方」では，それぞれの強調点が応用指向と構造指向で異なっていたが，それらは数学の「方法」に着目した数学教育を考える視座として，一体のものと考えられてきた。

このように，これまでの数学教育において《算数・数学を創り出していく考え方》（長崎，2007b，p.183）である「数学的な考え方」の育成が強調されてきた。つまり，これまでの数学教育の目的・目標，すなわち意図されたカリキュラムにおいては，数学を構成・発展させる抽象，一般化といった「構造指向」の「方法」が強調されてきたといえる。

2.2 実施したカリキュラムにおけるこれまでの数学的リテラシー

ここでは先に述べた目的・目標を受けて，教師が生徒へと与える実施されたカリキュラムを数学的リテラシーという視点から捉えていく。

これまでの数学の教授・学習を概略的に捉えれば，《まず，算数・数学の概念を理解し，知識をきちんと身につけさせることを最大の目標》（長崎，2007b，p.19）として営まれるが傾向があったといえるだろう。

例えば，そのような傾向は学校数学カリキュラムの構成からみてとれる。現在の学校数学カリキュラムは，《主に理科系の生徒が学習する微分法，積分法を唯一の頂点とする内容で構成されて》（長崎，2007c，p.4）おり，個別学問領域としての数学の系統性に依拠したものになっている。したがって，そのようなカリキュラムは，数学の内容を系統的に教授・学習することに重きを置いた構成になっていると解釈できる。換言すれば，これまでの学校数学カリキュラムの構成においては，「構造指向」の「内容」が強調されてきたと考えられる。

さらに，そのような「構造指向」の「内容」の強調は教科書における単元の構成からも窺える。例えば，中学3年生の教授・学習内容である「2乗に比例する関数」をみってみる。教科書（一松ら，2011，pp.88-121）におけるその単元の構成は大まかに表1-1のようにまとめられる。

表 1-1. 教科書による「2 乗に比例する関数」の単元構成

項目	主な学習内容
1. 2 乗に比例する関数の式	・表を用いて変化の様子を調べ、2 乗に比例する関数を式により定義する
2. 関数 $y=ax^2$ のグラフ	・比例定数が正か負か、あるいは比例定数の絶対値の大小によるグラフの違いを明らかにする
3. 関数 $y=ax^2$ の値の変化	・グラフから y の変域（最小値と最大値）を調べる ・一次関数との比較を通して、関数 $y=ax^2$ の変化の割合が一定ではないことを明らかにする
4. 関数 $y=ax^2$ の活用	・身の回りの事象への応用

この単元の構成では、「現実の世界」における変化を抽象、捨象し関数を導き出し、「数学世界」において、それを多様な表現で一般化し、その後応用する、というのがおよその展開となろう（阿部，2012，pp.26-27）。つまり、まず（疑似的な）現実事象から「2 乗に比例する関数」を導入し、その関数の特徴をグラフや式という表現を通して構成し、最後にそれらを応用するという展開になっている。

このように教科書の単元構成では、そのおよそが数学的な「構造」を探究し、最後に学習してきたことを「応用」といった流れになっている。さらに、そこでの「応用」は、脱文脈化された問題を通して知識・技能を学習した後に、「（時間があるときのみ）生徒たちが、現実的で複雑な応用問題の解決に取り組む」（Lesh & Zawojewski, 2007, p.783）程度にとどまることが指摘されている。このことから、これまでの単元構成においても数学の「応用指向」の側面というよりむしろ、「構造指向」の「内容」が強調されていたと解釈できる。

そして、「これまでの教材研究は、算数・数学の概念をいかによく理解させるかに重点が置かれていた」（長崎，2009，p.1）ことを考慮すれば、教師が意識するしないにかかわらず、これまでの数学の教授・学習において、数学の内容的側面が強調される傾向にあったと考えられうる。したがって、数学教育の目的・目標が具現化されたこれまでの実施したカリキュラムは、生徒たちが数学をつくり出し、その内容を理解すること、すなわち「構造指向」の「内容」に重きが置かれて営まれてきたと解釈できる。

以上をまとめれば、これまでの数学教育の目的・目標及び教授・学習では「構造指向」が強調されてきたといえる。しかし、これまでの数学教育において「応用指向」が軽視されていたわけではない。そのように「構造指向」が強調されてきた背景には、岩崎ら（2008）が指摘するような数学の教授・学習に対する前提があったことが窺える。

《数学は現実の頸木から脱するために、現象の抽象と捨象を繰り返して概念を洗練し、そのことによって一般化の端緒を開き、証明によって言明は不変性を得ることができた。この一連のプロセスが数学の現実への回帰を保証すると考えられてきた。》（岩崎ら，2008）

つまり、(疑似的な) 現実世界から普遍性を持った数学をつくり出すことで、おのずと数学を利用することができるようになる、という前提のもとで数学教育は展開されてきたといえる。すなわち、これまでの数学教育では構造指向が応用指向を担保すると考えられてきた。そしてそのような前提をもとに「構造指向」を強調することによって、構造指向と応用指向のバランスを取ることが意図されてきたと解釈できる。

またそのような「構造指向」の強調は、「これまでの社会」が数学によって構成されていくプロセスにあり、数学教育において、そのような社会を構成することのできる人間を育成するために求められてきたと考えられる (cf. 阿部, 2010)。換言すれば、これまでの数学的リテラシーとして、数学の「構造指向」の側面を強調する中で「応用指向」とのバランスを取るために、意図したカリキュラムと実施したカリキュラムのいずれにおいても「構造指向」が強調されてきたといえる。

2.3 達成したカリキュラムにおけるこれまでの数学的リテラシー

前節で述べたように、これまでの数学的リテラシーとして「構造指向」が強調されてきた。そしてそのような強調には、「構造指向」が「応用指向」を担保するという前提を認めることによって、「構造指向」と「応用指向」のバランスを取ることができると考えられてきた背景があった。

しかしながら、近年の学力調査などから、そのような前提に対する懐疑が露呈している。そのことは、例えば平成 22 年度の全国学力・学習状況調査における A 問題と B 問題の平均正答率から垣間見ることができる。前者は「知識」に関する問題であり、数学の内容的側面が問われるという点で「構造指向」的問題と捉えうる。一方、後者は「活用」に関する問題であり、ある事象へ数学を応用することが問われるという点で、「応用指向」的問題と捉えられうる。そして、それらの調査結果をみると、前者に比べ後者は決して良い結果であるとは言えない²。さらに後者の問題状況では、条件や仮定があらかじめ設定されているなど、十分な現実の状況であると言い難いことを考慮すれば、疑似的な問題状況でさえ、数学を利用することができていない状況にあると指摘できる。

このことから、意図したカリキュラムや実施したカリキュラムで期待されたこれまでの数学的リテラシーが、達成したカリキュラムとして必ずしも現れていないことが指摘できる。つまり子どもの実態からみて、これまで数学教育において前提とされてきた「構造指向による応用指向の担保」が成り立っていない状況にあると考えられる。

第 3 節 これからの数学的リテラシー

阿部 (2010) は、前述の「構造指向による応用指向の担保」に対する懐疑について、社会の変化という視点から説明しており、そこでの議論をまとめれば次のようになる³。

「これまでの社会」においては、数学によって社会を構成していくプロセスにあった。例えば電卓やパソコンは、数学が組み込まれることによって、社会を構成するための道具としてその役割を果たしてきた。そして、そのような社会を構成する道具をつくる人材の

² A 問題の平均正答率は、66.1%であるのに対し、B 問題は、45.2%である。

³ 阿部は、Jablonka (2007) とカイテル (1998) の「数学化された社会と脱数学化された個人」の議論を参照している。

育成のために、数学教育においては数学を構成したり、発展させたりする数学の「構造指向」の側面が求められてきたといえる。つまりこれまでの数学教育においては、「応用指向」というよりむしろ「構造指向」が強調されてきた。

一方「これからの社会」においては、隅々まで数学が暗黙的に埋め込まれ、その数学が質的に高度化し、量的に増加し、不可視となっている。そのように暗黙的に数学が埋め込まれていけばいくほど、個人は数学を実行する必要を感じなくなる。つまり社会が数学化されるほどに、個人は脱数学化されていくことになる。それゆえ「これからの社会」においては、その埋め込まれた数学を、どう読み解いていくのかが問題となり、「構造指向」を強調する数学教育では、その社会に対応することが難しくなる。つまり「これからの社会」においては数学を構成したり、発展させたりする「構造指向」というよりむしろ、数学を用いて現実世界を読み解く「応用指向」の「方法」が強調されることになる。したがって、「これからの社会」に対応する数学的リテラシーとしては、「応用指向」の「方法」が強調されると考えられる。

しかしヴィットマンら（2004）が、応用指向に傾倒した例としてアメリカの「数学的リテラシー」にもとづく教育運動を批判するように、ともすれば応用指向を過度に強調しがちな「数学的リテラシー」が、数学教育を論じるための視座となりうるには「構造指向」と「応用指向」のバランスを取ることが重視されなければならない。

以上のことを総括すれば、これからの数学教育の目的・目標、すなわち今日的な数学的リテラシーとして、応用指向の方法を強調する中で、応用指向と構造指向のバランスを取ることが目指されることになる。

【数学的リテラシーの今日的な方向性】

応用指向の方法を強調する中で、応用指向と構造指向のバランスを取る

第4節 本章のまとめ

本章では、数学的リテラシーの「これまで」を振り返り、それを批判的にみることで数学的リテラシーの「これから」の明確化を図った。

そのために、まず阿部（2010）の数学的リテラシーの方向性を捉えるための枠組みについて述べた。

【数学的リテラシーを捉える枠組み】

- 数学の本質
- 数学の内容
- 数学の方法
- 価値観，態度

「数学の本質」には数学のための数学という構造指向，そして数学外へ応用するための数学という応用指向の2つの相補的側面があり，それぞれに「内容」と「方法」があった。また「価値観・態度」は数学の受け入れ側が有するものであり，数学的リテラシーの基盤となった。

そして，この枠組みを用いてこれまでの数学的リテラシーを捉えれば，それは，構造指向の方法あるいは内容に焦点が当てられていた。そのような数学の構造指向的側面は，数学的リテラシーとして「これまで」の社会にとっては不可欠なものであったといえよう。一方で「これから」の社会に目を向ければ，数学的リテラシーとして構造指向よりもむしろ応用指向の方法へ焦点を当てることが重要となると考えられた。しかし，数学は応用指向と構造指向を相補的な側面として有するものである。それゆえ，数学教育において応用指向と構造指向のどちらかに傾倒しては意味をなさない。そのことを考慮すれば，数学的リテラシーの今日的な方向性として，「応用指向の方法を強調する中で，応用指向と構造指向のバランスを取る」ことが目指されると考えられた。

本章での議論を受けて次章から，今日的な数学的リテラシーの育成を目指した教授・学習の具体化に向け，その具体的な中身について論じていく。その際，教授・学習過程及び内容という視点から考察を行っていく。なぜなら，教授・学習の基本的な3つの要素として，「子どもの学び方」と「教師の在り方」，そして「学ぶ内容」が挙げられ（馬場・清水，2010），教授・学習を具体化する際には，子どもが学習し，教師が教授する「過程」とそこで教授・学習される「内容」について議論する必要があると考えるからである。

引用・参考文献

- Hino, K. (2007). Toward the problem-centered classroom: trends in mathematical problem solving in japan, *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, vol.39, pp.503-514.
- Jablonka, E. & Gallert, U. (2007). Mathematisation—Demathematisation, Gellert, U. & Jablonka, E. (Eds.), *Mathematisation—Demathematisation: Social, philosophical and educational ramifications*, Sense Publishers, pp.1-18.
- Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problem Solving and Modeling, Lester, F. K. (Ed.), *Second handbook of research on teaching and learning*, vol.2, Information Age Publisher, pp.763-804.
- 阿部好貴 (2010).『数学教育におけるリテラシー育成に関する研究』, 博士論文 (未刊行), 広島大学大学院教育学研究科.
- 阿部好貴 (2012).「数学的リテラシーという視点からの教授・学習内容の考察—関数領域に焦点をあてて—」, 全国数学教育学会『数学教育学研究』, 第18巻, 第1号, pp.23-29.
- 一松信, 岡田禎雄, 町田彰一郎, 他 28 名 (2011).『中学校 数学3』, 学校図書.
- 伊藤伸也 (2006).「H.フロイデントールの教授原理「追発明」と「発見学習」の異同」, 『第39回数学教育論文発表会論文集』, pp.625-630.
- 岩崎秀樹 (2008).「リテラシーを考える」, 『科学教育研究』, vol.32, no.2, pp.69-71.
- 岩崎秀樹・阿部好貴・山口武志 (2008).「知識基盤社会における数学的リテラシーの課題と展望」, 『科学教育研究』, vol.32, no.4, pp.366-377.

- カイトル, C. (狭間節子・日野圭子訳) (1998). 「21 世紀の数学教育の展望—数学カリキュラム：誰に対してか、だれの利益か—」, 日本数学教育学会『数学教育学論究』, 70, pp.57-64.
- 片桐重男(2004).『数学的な考え方とその指導 第1巻 数学的な考え方の具体化と指導』, 明治図書.
- 国立教育研究所(1991).『国立教育研究所紀要 119 集 数学教育の国際比較—第2回国際数学教育調査最終報告—』, 第一法規出版株式会社.
- 国立教育政策研究所(2010).『平成 22 年度 全国学力・学習状況調査 中学校集計結果』, (<http://www.nier.go.jp/>).
- 佐藤学(2003).「リテラシーの概念とその再定義」,『教育学研究』, vol.70, no.3, pp.292-301.
- 馬場卓也・清水浩士(2010).「数学科の授業構成」, 岩崎秀樹 編集,『数学科授業の理論と実際 中学・高等学校編』, ミネルヴァ書房, pp.98-119.
- 平林一榮(1987).『数学教育の活動主義的展開』, 東洋館出版社.
- 長崎栄三・滝井章 編著(2007 b).『算数の力を育てる③ 数学的な考え方を乗り越えて』, 東洋館出版社.
- 長崎栄三(2007c).「高校数学への離散数学の導入に関する考え方」, 長崎栄三(研究代表)『高校数学における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究 最終報告書』, 日本学術振興会科学研究費補助金(基礎研究 B) 報告書, 国立教育政策研究所, pp.3-9.
- 長崎栄三(2009).「算数・数学の力の育成を」, 日本数学教育学会『数学教育』, 第 91 巻, 第 9 号, p.1.
- ヴィットマン, E.Ch., 他 2 名(國本景亀・山本信也訳)(2004).『PISA を乗り越えて算数・数学授業改善から教育改革へ』, 東洋館出版社.
- 三輪辰郎(1983).「数学教育におけるモデル化についての一考察」,『筑波数学教育研究』, 第 2 号, pp.117-125.

第2章 数学的リテラシー育成を目指した教授・学習過程

本章は、前章で述べた目的・目標としての数学的リテラシーの今日的な方向性を踏まえ、その育成を実現しうる教授・学習過程について検討する。そのために、第1節では数学教育として取りうる教授・学習過程として3つ設定し、その中から、今日的な数学的リテラシーの育成を達成しうる教授・学習過程となる可能性があるものを検討する。第2節では、Lesh の論考を参照することによって、今日的な数学的リテラシーの育成を達成しうる教授・学習過程の実現に向けたアプローチを探る。

第1節 数学的リテラシーを育成する教授・学習過程の検討

1.1 数学の教授・学習過程

ヴィットマンら（2004）が、《数学教育においてこの2つの側面（「応用指向」と「構造指向」）がバランスよく考慮されなければ、数学教育は強固な基礎の上に構築することはできない》（p.54；括弧内筆者加筆）と強調しているように、数学教育において「応用指向」と「構造指向」のバランスを取ることが重要となる。そのことを考慮すれば、数学教育として取りうる数学の教授・学習過程として、3つ設定できる（cf. 阿部，2010）。つまり、どのように構造指向と応用指向のバランスを取るか、という視点から次の3つの教授・学習過程が想定される。

- （i） 教授・学習過程として構造指向を強調する中で、その結果として応用指向とのバランスを取る
- （ii） 教授・学習過程として応用指向を強調する中で、その結果として構造指向とのバランスを取る
- （iii） 教授・学習過程として構造指向と応用指向を交互に強調する中で、その結果として両者のバランスを取る

（i）は、教授・学習過程として、現実世界から数学的構造を抽象、一般化することで、数学を構成したり、発展させたりすることを強調する。このような教授・学習過程は、Freudenthal（1968）が《人間が学ばなければならないことは、閉じた体系としての数学ではなく、むしろ活動としての数学であり、現実を数学化することの過程、そして可能であれば、数学を数学化することの過程である》（p.7）と述べるように、数学化の過程と整合的である。そして、この教授・学習過程では、その活動の結果として構成・発展された数学は普遍的であるゆえに、現実への応用可能性が保証されると考えられる。つまりこの教授・学習過程では、構造指向が応用指向を担保するという前提のもとで、構造指向の強調によって両者のバランスを取ることが目指される。

（ii）は、教授・学習過程として、数学を応用することによって、現実世界を読み解いたり、現実世界の問題を解決したりすることを強調する。しかし、そのような応用指向の数学をするだけでは、数学の構成・発展はなされない。なぜなら応用指向は、数学を用いて現実世界の問題を解決することを目的とする一方で、構造指向は、数学それ自体を構成・発展させることを目的にしており、両者の活動の目的が異なっているからである。それゆえ、応用指向の中に構造指向を積極的に組み入れていく必要がある。つまり、この教

授・学習過程では、応用指向は構造指向を担保しないという前提のもとで、応用指向を強調する中に構造指向を積極的に組み入れることによって、両者のバランスを取ることが目指される。

(iii) は、教授・学習過程として応用指向と構造指向を区分し、数学の教授・学習を行う。この教授・学習過程の例としては、普遍的な数学を構成した後に、構成した数学を応用するといった教科書の単元構成があたると考えられる。そして、この教授・学習過程の背景には、構造指向と応用指向は本質的に異なるゆえに区分すべきであるという前提が存在していることが想定されうる。したがって、そのような前提をもとにこの教授・学習過程では、構造指向と応用指向を区分することによって両者のバランスを取ることが目指される。

1.2 数学的リテラシーを育成する教授・学習過程とその実現への課題

ここでは、数学的リテラシーの育成という視座から、上述の3つの教授・学習過程の検討を行いたい。

まず(i)の教授・学習過程は、構造指向が応用指向を担保することを前提とすることで、両者のバランスを取ることが目指される。しかし、第1章で述べたように社会の変化や子どもの実態からみて、その前提には議論の余地がある。ただし、そのような前提についての問題は、教授・学習の方法に起因しているとも考えられる。実際、Freudenthalの思想を引き継いだ Realistic Mathematics Education (cf. Gravemeijer & Stephan, 2002) やヴィットマンが提唱する教授・学習過程は構造指向的であるが、成功的であるとする。

そして(iii)の教授・学習過程は、構造指向と応用指向を区分して、それぞれを教授・学習するため、両者のバランスを取りうるかもしれない。しかしそのような教授・学習過程は、まずは数学を教え、次にその数学を使わせるといったものであり、「スモールステップの原理」にもとづくものと解釈できる。「スモールステップの原理」は、工場での商品生産をモデルに、数学を教授・学習する考え方であり、教授・学習の効率性や生産性の向上という目的がある。そしてその目的を達成するために、教材をきめ細かく分け、易から難へ教材を配列したり構成したりする。しかしながら國本(1998)が指摘するように、そのような原理に立つ教材の配列や構成では、子どもからみれば、次々に提示される問題の間には何ら関連がみえず、子どもは提示される問題を解くだけになり、子どもは必然的に受動的な立場に立たざるをえない。このことを考慮すれば、この教授・学習過程は、子どもが連続的に問い(問題)を生じさせることのない、子どもにとって不連続な教授・学習過程であると考えられうる。換言すれば、この教授・学習過程では、子どもが問い(問題)を連続的に生じさせる「学習の連続性」は保証されないといえる。

一方(ii)の教授・学習過程は、応用指向を強調するものであり、数学的リテラシーの今日的な方向性とも調和的である。また、この教授・学習過程の典型としては島田(1977)の数学的活動⁴(図2-1)が挙げられる。

⁴ 島田(1977)は、数学的活動を《既成の数学の理論を理解しようとして考えたり、数学の問題を解こうとして考えたり、あるいは新しい理論をまとめようとして考えたり、数学を何かに応用して、数学外の問題を解決しようとしたりする、数学に関係した思考活動》(p.14)としている。

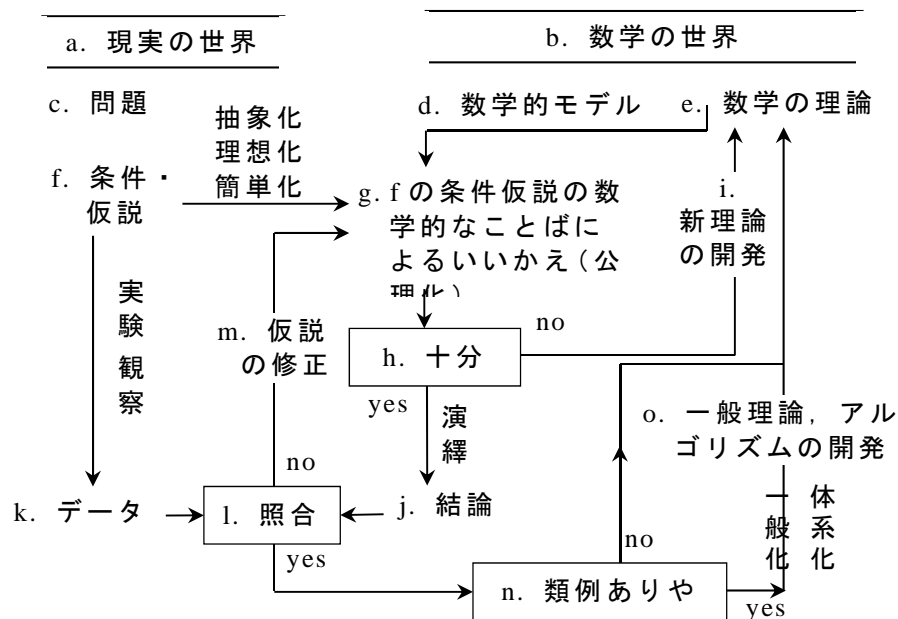


図 2-1. 数学的活動（島田，1977，p.15）

島田の数学的活動は，現実世界における問題状況から数学的モデルをつくり，そのモデルを用いて解決を図り，最適解を得るためにそのサイクルを何度も回ることによって進展していく。つまり島田の数学的活動は，現実世界における問題の解決を基盤に進展していく教授・学習過程であり，応用指向の方法が強調されているといえる。一方でそのサイクルの中には，既知の数学的モデルでは解決できない際に「i.新理論の開発」を行ったり，現実世界の問題の解決の後に，その解決に用いた数学的モデルの類例を探すことで「o.一般化，アルゴリズムの開発」を行ったりするといった過程が位置付けられている。換言すれば，現実世界における問題解決の繰り返しの中に，数学を構成・発展させるといった構造指向的な展開が組み込まれているといえる。

したがって，島田の数学的活動は，数学を用いた現実世界の問題解決の繰り返し（応用指向の方法）の中に数学の構成・発展（構造指向の方法）を組み入れており，そうすることによって，それらの教授・学習が連続的に展開されていることがわかる。それゆえ，(ii)の教授・学習過程は「学習の連続性」をも保証することが可能であるといえる。

そこで本研究では，数学的リテラシー育成を目指した教授・学習過程として，(ii)のような応用指向の方法の中で，結果として構造指向をも教授・学習する過程に着目していくこととする。

【数学的リテラシー育成を目指した教授・学習過程】

応用指向の方法の中で，結果として構造指向をも教授・学習する過程

しかし先に述べたように，現実世界の問題の最適解を求める応用指向と，普遍的な数学をつくり出していく構造指向とでは，その活動の目的が異なる。それゆえ，積極的に応用

指向の活動（現実世界における問題の解決）の中に構造指向の活動（抽象，一般化）を組み入れていくことが必要となる。換言すれば，数学的リテラシー育成を目指した教授・学習過程を実現するためには，どのように応用指向と構造指向を結び付けていくか，という「応用指向と構造指向の接続」が課題となるといえる。

【数学的リテラシー育成を目指した教授・学習過程の実現に向けた課題】
応用指向と構造指向の接続

また(ii)の教授・学習過程に関連する先行研究として，Leshの研究(Lesh, Post & Behr, 1987 ; Lesh & Doerr, 2003 ; Lesh & Harel, 2003 ; Lesh, 2006 ; Lesh & Yoon, 2007 ; Lesh & Zawojewski, 2007)が挙げられる。そこでは，現実世界の問題の最適解を得るために解決を繰り返す中で，数学的概念がつくり出されていく活動について述べられている。

そこで次節では，Leshの論考を参照することによって，「応用指向と構造指向の接続」という数学的リテラシーを育成する教授・学習過程の実現に向けた課題に対する方策を探ることとする。そのためにまず，Leshの研究と数学的リテラシー育成との関連について検討する。その際，それぞれの理念とそれを具現化した教授・学習という2つの水準から考察を行う。その上で，議論を「応用指向と構造指向の接続」に焦点化し，その課題に対するアプローチを探っていく。

第2節 数学的リテラシーを育成する教授・学習過程の実現に向けた方策

2.1 Leshのモデルとモデル化の視座

Leshは，問題解決の本質が社会によって変化する一方で，数学教育における問題解決がその変化に対応できておらず，さらに学校を超えた成功のために必要とされる数学の理解と能力が変化していることを指摘している(Lesh & Zawojewski, 2007)。そして，そのような《学校を超えた実生活の状況における問題解決と数学的な考え方の本質に関する前提はもちろんのこと，学校数学において最も重要な概念とプロセスについての理解が意味することに関する前提を再考する》(Lesh, 2006, p.20)視座として，「モデルとモデル化の視座 (Model and Modeling Perspectives ; 以下 MMP)」を提唱している。

Leshは，そのように数学教育を再考する視座となりうるMMPについて次のように述べている。

《チームで取り組んだり，進展している科学技術の道具に絶え間なく順応したり，そして複雑な人工物の本質についてコミュニケーションしたりしている間に，複雑なものを解釈することは，21世紀における成功のために必要とされることの中心である。つまり我々(MMP)は，数学的モデルとモデル化の能力が，数学の教授の最も重要な目的の1つであるべきであるという主張をする。》(Lesh & Doerr, 2003, p.521 ; 括弧内筆者加筆)

このことから MMP は、学校を超えて現代社会において成功するために必要とされる数学的モデルの形成とモデル化能力の育成を目指した数学教育を考える視座であることがわかる。換言すれば、MMP は「社会参加」するための「数学の知識と能力」を育成することを目的・目標とした数学教育を論じる視座であるといえる。

さらに Lesh は、MMP における教授対象について次のように説明している。

《MMP は、教師の段階的な指導がないかぎり、少数の並はずれた賢さをもつ生徒たちだけしか、重要な数学的概念を発展させることができないという考えを排除している。》
(Lesh & Yoon, 2007, p.163)

このように MMP は、一部の生徒だけでなく、すべての生徒が数学的概念を発展させることができることを前提とし、すべての生徒を教授対象とした数学教育の実現を強調している。つまり、MMP は「すべての生徒」を教授対象とした視座であると解釈できる。

以上のことをまとめれば、MMP は、「すべての生徒」が「社会に参加する」ために必要となる「数学の知識と能力」を育むことを目指した数学教育を論じる視座であるといえる。したがって MMP は、すべての生徒が社会参加することを念頭に置く数学的リテラシーの理念に対し、統合的な視座であると捉えられうる。

さらに MMP においても、社会参加のために必要とされる応用指向の方法、すなわち数学的モデル化能力の育成が過度に強調されているわけではない。MMP は、今日的な数学的リテラシーと同様、応用指向の方法を強調する中で、構造指向とのバランスを重視した視座であると解釈できる。そのことは、MMP を具体化した教授・学習から推測されるため、次節で詳述することとする。

2.2 Lesh のモデル導出活動

2.2.1 従来の問題解決と MMP の問題解決

Lesh は、MMP を具現化する問題解決及びその問題の意味を、「問題解決者」が、与えられた状況についての生産的な考え方を発展させる必要があるとき問題となる（または問題のある）課題、または目的志向の活動》(Lesh & Zawojewski, 2007, p.782) とし、次のように説明を加えている。

《「生産的な考え方」を発展させるために、問題解決者は、状況を解釈するプロセスであるモデル化に取り組む必要がある。このように問題解決は、状況を数学的に解釈するプロセスとして定義され、そのプロセスは、数学的解釈を表現したり、テストしたり、修正したり、または数学内外の様々なトピックから数学的概念を分類したり、統合したり、特定したり、修正したり、洗練したりする、いくつかのサイクルを含んでいる。》
(ibid, p.782)

このことから MMP を具現化する問題解決過程とは、状況を数学的に解釈していく数学的モデル化のサイクルを意味していることがわかる。

さらに Lesh は、MMP を具現化する問題解決過程と従来の伝統的な問題解決過程を比較し（図 2-2）、その特徴の明確化を図っている（Lesh & Zawojewski, 2007, p.783）。その内容をまとめれば次のようになる。

<p>問題解決に関する伝統的な視座 応用の問題解決は伝統的な問題解決の部分集合として扱われる。</p>	<p>M M P 伝統的な問題解決は応用の問題解決（モデル導出活動）の部分集合として扱われる。</p>
<div data-bbox="178 577 657 784"> </div> <p>「実生活」の問題を解決する学習は、次の 4 段階を踏むことが想定される。</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. まず、脱文脈化された状況において必須のアイデアとスキルを習得する。 2. 新しく習得されたアイデアとスキルを、学習された手続を用いるようにデザインされた文章題で練習する。 3. 一般的な内容に依存しない問題解決過程を学習する。 4. 最後に、（時間があれば）前のアイデアや補足的な情報が求められる厄介な「実生活」の状況（すなわち応用問題）でスキルを使うことを学習する。 	<div data-bbox="769 577 1248 784"> </div> <p>応用問題を解決することは、目的にふさわしい解決を開発する中で、（言い換えたり、図式をかいたりすることなどによって）問題を数学的に理解することを含んでいる。理解することは、イエスかノーかの状況にあるものとしてみなされず、問題解決過程の間に数学的アイデアと問題解決能力は相互に発達していく。</p> <p>「実生活」の問題（すなわち応用問題）を解決するために必要とされる構成物、過程、能力は、問題解決に取り組む前に「習得される」というよりもむしろ、発達の途中の段階でなされることが想定される。</p>

図 2-2. 従来の問題解決と M M P の問題解決の対比

伝統的な学校数学カリキュラムにおいて、「実生活」の応用問題は最も難しいタイプの問題であるという前提がつくられる傾向があった。それゆえ「実生活」の応用問題は、型にはまった手続きが学習され、問題解決ストラテジーが教えられた後にのみ焦点があてられていた。つまり、現実的で複雑な応用問題の解決は、教授の最後の段階で時間があるときのみ取り組まれていたといえる。このように問題解決に関する伝統的な視座において、数学的モデル化を必要とする応用問題は、生徒たちが取り組む問題解決の部分集合に過ぎなかった。

一方 MMP は、数学の学習が数学的モデル化を通して引き起こされることを前提としている。つまり生徒たちの学習は、数学的な考え方（すなわち数学的モデル）を生み出したり、修正したり、適応したりする必要がある実生活の状況を理解するために、概念システム（すなわちモデル）を開発することで始まる。このように MMP は、数学的モデル化、すなわち現実世界の問題を数学的に解決していく過程によって、数学的概念の形成と問題解決能力の育成の両者を統合的、相互的に達成することを目指していることがわかる。

したがって、MMP は現実世界における問題解決（応用指向の方法）を強調する中で、数学的概念の形成（構造指向）とのバランスを取ることを目指した数学教育を考える視座であるといえる。このことから、さきに述べたように、MMP は応用指向の方法を過度に強調しているわけではなく、数学的リテラシーの今日的な方向性と整合した視座であることがわかる。

さらに MMP では、現実世界における問題解決の繰り返しの中で、生産的な考え方という数学の構成・発展が図られる教授・学習過程によって、応用指向と構造指向のバランスを取ることが目指されていると解釈できる。つまり MMP を具現化する教授・学習過程は、応用指向の方法の洗練の中に構造指向が組み入れられた過程であるといえる。したがって、本研究における数学的リテラシー育成を目指した教授・学習過程と軌を一にしていると考えられる。

2.2.2 モデル導出活動におけるモデルの変容

Lesh は、MMP を具現化した問題解決過程を「モデル導出活動 (Model-Eliciting Activities)」として次のように述べている。

《その名前が意味するように、モデル導出活動はモデルを引き出す問題解決活動である。つまりモデル導出活動における解決は、何度もテストされ、洗練される状態で生徒たちの現在の考え方（すなわち彼らの適切なモデル）を表現するように生徒たちに要求する。そして最終的な解決はモデルの発達だけでなく、同様にモデルが具体化する構成物と概念システムの発達を含んでいる。》(Lesh & Yoon, 2007, p.163)

このようにモデル導出活動は、生徒たちが問題状況についての考え方（モデル）を繰り返し表現し、テストし、洗練していくことで進展していく数学的モデル化のサイクルであることがわかる。そして、そのように数学的モデル化のサイクルが進展していくことによって、最終的なモデルには、数学的概念が具体化されるようになる。

そして Lesh は、モデル導出活動における数学的概念の発達について、モデルを視点に次のように述べている。

《モデル導出活動における局所的な概念発達、数学的構成物が漸進的に発達することを示唆する。つまり適切な概念システムは、特有の問題解決の状況に利用する状況的モデルとして最初は発展される。そして、これらのモデルが、より共有可能で、より転移可能で、より再利用可能であるようになるとき、それらは徐々に問題のより多くの種類へと拡張される。》(Lesh & Harel, 2003, pp.186-187)

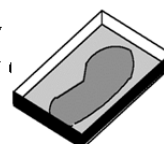
つまりモデル導出活動におけるモデルは、特有の状況で利用されうる状況的なモデルとして導出される一方で、そのモデルは他者と「共有可能」であり、他の状況に「再利用可能」であるように変容されなければならない。なぜなら、そのように変容させることで、モデルはより多くの問題に適応可能なものとなるからである。そしてモデルの適応可能性が高められるとともに、モデルが具体化する概念は数学的なものへと漸進的に洗練されていく。

したがってモデル導出活動では、生徒たちが、他の類似した状況やデータに対して再利用可能であり、他者と共有可能である（すなわち「一般化可能」⁵である）ように、問題状況についてのモデルを洗練していくことが強調されている。

また、そのようなモデル導出活動の例として、次の「大きな足跡問題（Big Footprint Problem）」が挙げられる（Lesh & Harel, 2003, p.166）。

大きな足跡の問題

今朝早く、警察官は公園の古い水飲み場が修理されているのを発見
市長は、それをしてくれた人たちにお礼をしたかったが、それが誰な
からなかった。



そして警察がみつけることができたのは、多くの足跡だけであった。あなたは、その足跡の1つを示す箱を与えられた。もしその人の身長を計算することができれば、その人たちをみつけるのに役立つだろう。そこであなたの仕事は、警察がそれらの足跡をみるだけで、その人たちの身長を推測することができる How To Tool Kit をつくることである。あなたの Tool Kit は、ここで示される1つの足跡に対して役立つべきであるが、それは同様に他の足跡に対しても役立つなければならない。

これは、与えられた靴の大きさを頼りに、みつきたい人物の身長を見積もる方法（モデル）を生徒たちに考えさせ、その活動の中で、そのモデルとして比例関係をつくり出させるという問題である。このモデル導出活動の当初、生徒たちは、自分自身の足の大きさと示された足跡を比較することで身長を見積もっていった。しかしながら、そのような方法で見積もられた結果は、生徒たちの間でバラバラであり、正確なものではなかった。そして次第にそのモデルは、他の足の大きさ（他の状況）に対して「再利用可能」であり、他の生徒たち（他者）によって「共有可能」であるように変容されていった。その一連の活動の中で、足の大きさと身長の関係について焦点が当てられ、モデルは、身長が足の大きさの6倍になるという比例関係（数学的概念）を具体化するものへと洗練されていった。

このようにモデル導出活動は、数学的モデル化のサイクル（応用指向の方法）の中で、モデルを「一般化可能」であるように変容させることで、問題の最適解を得るとともに、モデルに具体化される概念が数学的なものへと洗練されていく（構造指向）活動であるといえる。そしてモデル導出活動の核心は、「一般化可能」であるようにモデルを繰り返し洗

⁵ Lesh は、共有可能であり再利用可能であるということを「一般化可能」というコトバを用いている。しかし一般化というコトバは多様に捉えられ、共有可能、再利用可能にすることは、必ずしも一般化と合致するとは言えない。したがって、Lesh の意で一般化を使用する際には括弧を付すこととする。

練する中で、モデルに具体化される概念を数学的なものへ高めていく「モデルの変容⁶」にあることがわかる。

2.3 数学的リテラシーを育成する教授・学習過程への示唆

先に述べたように数学的リテラシー育成を目指した教授・学習過程の実現に向けた課題として、「応用指向と構造指向の接続」が考えられた。そして Lesh のモデル導出活動は、「応用指向の方法」の中に「構造指向」を積極的に組み入れた教授・学習過程、すなわち数学的リテラシー育成を目指した教授・学習過程として位置づけられた。そこで、ここではモデル導出活動を参照することで、「応用指向と構造指向の接続」に対する示唆を明確にしていくこととする。

モデル導出活動は、数学を用いて現実世界の問題を解決する活動であり、その目的は問題の最適解を求めることにある。それゆえ、モデル導出活動はその目的を達成するために、現実世界の問題解決を繰り返すことで進展していく。そしてその繰り返しの中で、モデルは他者と「共有可能」であり、他の類似した状況に「再利用可能」であるように何度も洗練されていく。そのようにモデルを変容させていくことは、モデルの普遍性を認識していくことであり、まさにモデルを一般化⁷していくことと捉えられる。

したがってモデル導出活動は、「一般化可能」であるようにモデルを繰り返し洗練すること、すなわち「モデルの変容」によって、現実世界の問題解決の繰り返し（応用指向の方法）の中に、一般化（構造指向の方法）を積極的に組み入れていると解釈できる。それは、どのように応用指向と構造指向を接続させるか、という問題に対する 1 つの解答となっている。そして、そのようにモデルを変容させていくことは、応用指向の目的を達成する手段として構造指向を位置づけていると解釈できる。換言すれば、まさに《問題解決を行うための武器を洗練するための手段として構造指向を位置づけている》（阿部，2010，p.158）といえる。

以上を総括すれば、モデル導出活動は、応用指向の方法の洗練の中でモデルを「一般化可能」なものへと変容させることによって構造指向をも教授・学習する活動であるといえる。そしてモデル導出活動を参照することで、「一般化可能」であるようにモデルを繰り返し洗練するという「モデルの変容」によって、応用指向と構造指向の接続が達成されうることが示唆された。

⁶ Lesh et al (1987) は、表現体系を 5 つの表現のタイプ（現実のスクリプト・操作的モデル・静的な図・話された言語・書かれた記号）によって示し、数学学習（すなわち問題解決）における表現間の変容の重要性を強調している。

⁷ Dörfler (1991) は一般化について、経験的一般化と理論的一般化というコトバを用いて説明している。前者は、複数の対象を比較することで、それらに共通する性質を見つけ、その一般性に気づくことであるが、その性質が共通である理由はわからない。一方、後者は経験的一般化の結果である性質を出発点とし、その一般性が多く異なる対象や状況にとって共通である理由を説明する。したがってモデル導出活動は、モデルを状況に応じて「一般化可能」であるように変容させることで、そのモデルが状況に共通で一般的であることに気づかせると考えうる。つまり「モデルの変容」によって、経験的一般化がなされていると考えられる。したがって、モデル導出活動において理論的一般化までもなされるかについては議論の余地がある。

【数学的リテラシーを育成する教授・学習過程の実現に向けた方策】

現実世界における問題の解決を繰り返す中で、モデル（解決方法）を他者と「共有可能」であり、他の類似した状況に「再利用可能」であるように（すなわち「一般化可能」であるように）繰り返し洗練していくこと

第3節 本章のまとめ

本章では、数学的リテラシー育成を目指した教授・学習過程を実現する際の課題とそれに対するアプローチを述べてきた。

まず今日的な数学的リテラシーの育成，すなわち「応用指向の方法を強調する中で，構造指向とのバランスを取ることを具現化する教授・学習過程について検討を行った。そして数学的リテラシーの今日的な方向性との整合及び学習の連続性の保証という点から，「応用指向の方法の中で，結果として構造指向をも教授・学習する過程」に焦点を当てることとした。しかし応用指向と構造指向の活動の目的は異なるため，「応用指向と構造指向の接続」が課題となった。

そこで，その課題解決に向けたアプローチを Lesh の論考を参考に探っていった。Lesh は，数学教育における問題解決の視座として「モデルとモデル化の視座（MMP）」をかかげ，「すべて」の子どもが「社会参加」するための「数学の知識・能力」を育成することを目指していると解釈できた。つまり Lesh がかけける MMP は，数学的リテラシーと整合的である視座として捉えることができた。

さらに Lesh は，MMP を具現化する活動として「モデル導出活動」を提唱している。モデル導出活動は，現実世界における問題を解決していく活動であり，その解決を図っていく中で数学的概念が教授・学習されていく。つまりモデル導出活動では，数学的概念が，あくまで現実世界の問題に対する解決方法として教授・学習されることになる。このことからモデル導出活動は，今日的な数学的リテラシーの育成を目指した教授・学習過程と軌を一にしていると考えられた。

そしてモデル導出活動を実現する上で，現実世界における問題を解決していく中で，その解決方法となる考え方（モデル）を他の類似した状況に「再利用可能」であり，他者と「共有可能」であるように繰り返し洗練していく「モデルの変容」が鍵となっていることを明らかにした。つまり，「モデルの変容」が「応用指向と構造指向の接続」に対するアプローチとなりうることが示唆された。

次章では，数学的リテラシーという視座から教授・学習内容について検討を行っていく。

引用・参考文献

Dörfler, W. (1991). Forms and Means of Generalization in Mathematics, Bishop, A.J. (Ed.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*, Kluwer Academic Publishers, pp.63-85.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful, *Educational Studies in Mathematics*, vol.1, pp.3-8.

- Gravemeijer, K. & Stephan, M. (2002). Emergent model as an instructional design heuristic, Gravemeijer et al (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education*, Kluwer Academic Publishers, pp.145-169.
- Lesh, R.(2006). New directions for research on mathematical problem solving, Grootenboer, P., Zevenbergen, R. & Chinnappan, M. (Eds.), *Identities, cultures and learning spaces* (Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia), Vol.1, pp. 15-34.
- Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). In What Ways Does a Models and Modeling Perspective Move Beyond Constructivism? , R. Lesh & H. M. Doerr (Eds), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*, Lawrence Erlbaum Associates, pp.519-557.
- Lesh, R. & Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development, *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2&3), Lawrence Erlbaum Associates, pp.166-168.
- Lesh, R. , Post, T. & Behr, M.(1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving, C. Janvier,(Ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics*, LEA, pp.33-40.
- Lesh, R. & Yoon, C. (2007). What is Distinctive in (our views about) Models & Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching? , W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn. & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education : The 14th ICMI Study*, Springer, pp.161-170.
- Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problem Solving and Modeling, Lester, F. K. (Ed.), *Second handbook of research on teaching and learning*, vol.2, Information Age Publisher, pp.763-804.
- 阿部好貴 (2010).『数学教育におけるリテラシー育成に関する研究』, 博士論文 (未刊行), 広島大学大学院教育学研究科.
- 國本景亀 (1998).「機械論的・原子論的数学教育から活動的・創造的数学教育へ」, 全国数学教育学会『数学教育学研究』, 第 4 巻, pp.1-9.
- 島田茂(1977).『算数・数学科のオープンエンドアプローチ授業改善への新しい提案一』, ぎょうせい.
- ヴィットマン, E.Ch., 他 2 名 (國本景亀・山本信也訳) (2004).『PISA を乗り越えて算数・数学授業改善から教育改革へ』, 東洋館出版社.

第3章 数学的リテラシー育成を目指した教授・学習内容

今日的な数学的リテラシー育成を目指した教授・学習過程は、単に応用指向の方法を強調した過程ではなく、応用指向の方法の中に構造指向をも組み込んだ過程であった。したがって、その教授・学習を具体化する上で、応用指向の方法の中で、どのような概念の洗練を行っていくかについて議論する必要がある。そこで本章では、応用指向の方法の中で、すなわち現実世界における問題を解決していく中で、洗練されていく教授・学習内容について考察を行う。その際、特に統計に焦点を当て、そこでの中心的概念がどのように洗練されていくかを捉えることとする。そのために第1節では、数学的リテラシーという視点から、統計に焦点を当てる意義について述べる。第2節では、統計教育に関する先行研究をもとに、統計における中心的概念を明確にする。その上で、第3節ではその中心的概念の発達の様相を、子どもの発達と統計学の発達という視点から捉えることとする。

第1節 数学的リテラシーの中心的な内容としての統計

数学的リテラシーは、社会参加を念頭に置いた数学教育を考える1つの視座である（第1章参照）。そして数学的リテラシーを具体化する教授・学習過程では、あくまで現実世界の問題に対する解決方法として教授・学習内容が育成されることになる（第2章参照）。

それらを踏まえて、本節では数学的リテラシーという視座から教授・学習内容としての統計について言及する。言い換えれば、「すべての生徒が社会参加するために強調される内容」と「現実世界の問題に対する解決方法として育成される内容」という2つの視点から、統計に焦点を当てる意義について述べる。

1.1 すべての生徒が社会参加するために強調される内容

どのような社会でも、数量や図形を扱うことは日常生活においてなくてはならないものであり、時代によって具体的な内容は変わっても、そのような数学の基礎的な知識や技能は、すべての成人に持って欲しい数学的リテラシーの中心部分を占める（長崎，2011）。

一方、その中心部分の具体的な内容を、「高度情報化社会」や「知識創造社会」といわれる現代社会からみてみれば、不確実性を伴ったデータに関連した内容、すなわち統計が挙げられる。なぜなら、そのような社会においては身近にあふれた統計情報を正しく受けとめ、自身の意思決定に活用できる市民、そして大規模なデータにもとづいて新たな知識を創造できる実践者の育成が世界規模で求められているからである（渡辺，2007；藤井，2007）。

例えば我々が、日常的な雑誌や新聞といった技術的でない出版物をみるにしても、データに関連した概念の道具としての強力さと有用性は明白であり、見識ある市民にとって、グラフ、図式、表、そしてそのような出版物に充満している数学的な構成物（artifact）を理解できることは重要なこととなっている（Lesh et al, 2008）。このように、今日の社会へ参加することのできる人間の育成を念頭に置けば、統計はこれからの数学教育において強調される教授・学習内容であると考えられる。

そして《多くのデータモデリングの概念の意味が、算術、測定、グラフ化、あるいは他の基礎的な課題領域の基盤となるアイデアからの簡単な拡張を含んでいる》（Lesh et al, 2008, p.116）ことを考慮すれば、統計は数学の他領域を統合することができる教授・学習内容として位置づけられることができると考えられる。このことから、数学的リテラシ

一という視座からみれば、統計は学校数学カリキュラムにおける中心の1つとして据えられうる教授・学習内容であると考えられる。そして数学的リテラシーを育成するためには、そのようなカリキュラムの構成は必要とされていると考える。

1.2 現実世界の問題に対する解決方法として育成される内容

今日的な数学的リテラシーの育成を目指した教授・学習過程は、あくまで現実世界の問題を解決する道具として数学を発展させていく過程である。そして数学が現実世界における問題に端緒を持っていることを考慮すれば、そのように数学が現実世界の問題に対する道具として教授・学習されうるとは考えられる。一方で数学は、その発端を現実世界にもつものの、その後の発展の仕方は、数学の各領域によって異なる。そしてその差異が、数学の各領域における教授・学習過程に多かれ少なかれ影響を及ぼすと考える。

例えば、幾何学に関するヒルベルトの公理系はユークリッドの原論の公理系を一般化したものであり、群や環や体の公理系は整数や有理数や実数などの性質から抽象して得られたものである（吉田・赤，1961）。このように代数学や幾何学は、現実世界における問題に端を発するも、次第に数学世界で抽象、一般化を繰り返すことで発展されてきた。それゆえ、伝統的な学校数学カリキュラムでは、代数や幾何の教授・学習は現実世界の問題を用いて導入されるが、次第にその現実的文脈から切り離されることで、それらの内容を数や形といった数学世界で構成・発展していくように進展していく。

一方、統計学は国の統治者が集めたデータに端を発し、天文学や生物学の測定結果の研究や、遺伝や知能を理解しようという試みの中で発展された考え方が一つにまとまり、「データの科学」という学問領域として発展してきた（ムーア・マッケイブ，2008）。つまり統計学は、絶えず現実世界とのつながりの中で発展してきたといえる。このことを考慮すれば、統計の教授・学習は、あくまでも現実世界の問題に対する道具として、統計の内容を構成・発展していくように進展していくことが想定されうる。言い換えれば、統計は、本研究が目指す数学的リテラシー育成を目指した教授・学習過程によって育成されうる典型的な内容であると考えられる。

無論、代数や幾何といった数学世界での発展性が強いと考えられる領域であろうとも、数学的リテラシーの育成を目指した教授・学習の展開、すなわち応用指向の方法を強調した教授・学習の展開は必要である。問題となるのは、応用指向の方法に組み込まれる構造指向の程度であると考ええる。

以上を考慮し、本研究では、数学的リテラシー育成を目指した中心的な教授・学習内容として統計に焦点を当てていく。すなわち統計に焦点を当てる意義として、数学的リテラシーという視座から次の2点が挙げられる。1つは、統計が現代社会に参加する上で不可欠な数学的素養であり、数学の他領域を統合することのできる1つの核となる教授・学習内容であると考えられることである。もう1つは、統計学の発展の仕方を考慮すれば、統計が数学的リテラシー育成を目指した教授・学習過程によって育成される典型的な内容であると考えられることである。これらのことを踏まえ、本研究では数学的リテラシー育成を目指した教授・学習の中心的な内容として統計に焦点を当てることとする。

第2節 統計において核となる概念

2.1 統計的概念としての中心とちらばり

これまで統計教育全体にわたる目的・目標として、データの「分布」を読んだり、分析したり、批判したり、推定したりできるようにすることが目指されてきた（Shaughnessy, 2007）。換言すれば、統計教育の目的・目標としてデータを「分布」として捉える考え方の育成が重視されてきたといえる。そしてその目的・目標を達成すべく、これまでの統計教育では分布を捉える視点となる「中心（center）」と「ちらばり（variability）」といった統計的概念について論じられてきた。

「中心」は平均値や中央値といった代表値に関わる概念である。Konold & Pollatsek (2004) は、そのような代表値に関わる概念について次のように述べている。

《統計学者は、平均値や中央値のような集合（データセット）に関する特徴を、変わりやすいシステムの安定した特性、すなわち集合体（分布）においてのみ明らかとなる特性を表す指標としてみなす。そのような安定性は、不確実性を含んだ状況における確実性、すなわちノイズプロセスにおけるシグナル、または我々が（代表値の概念的側面を強調するために）好んで使う中心傾向として考えられうる。》（p.172；括弧内筆者加筆）

このことから「中心」は、中心傾向といわれるような「分布」の安定した特性について、平均値や中央値などを用いて記述・測定することと解釈できる。そして「中心」は、分布の安定した特性を特定の値に要約するため、複数のデータセットを比較する際に有用な概念となる。例えば、ある日の気温を平均気温で記述し、その前の日の平均気温と比較することは、「中心」の概念が用いられている身近な例として挙げられる。

一方「ちらばり」は、範囲や標準偏差などに関わる概念であり、Reading & Shaughnessy (2004) は次のように説明している。

《ちらばりというコトバは、（データの変わりやすさという）観察されうる実在（分布）の特性を意味するのに用いられる。さらにそのコトバは、そのような特性を記述したり、測定したりすることを意味するために使用される。》（p.202；括弧内筆者加筆）

つまり「ちらばり」は、変わりやすさという「分布」の特性について、範囲や標準偏差などを用いて記述・測定することと捉えられうる。例えば、あるテストの学年全体の点数の変わりやすさについて、標準偏差を用いて数量化することは、「ちらばり」の概念を用いた例として挙げられる。そして自然現象あるいはよく管理された実験データでさえも、測定を繰り返せば、同じデータを得られるわけではなく、データは微妙に変化する。つまりデータは、《観察の対象となる個体間での変動的な測定値の集合》（宮川，1999，p.7）であるゆえに、「ちらばり」を必然的に伴ったものである。それゆえ、「ちらばり」はデータを分析する上で不可欠な概念である。

2.2 統計の中核を担う概念

Reading & Shaughnessy (2004) は、これまでの統計教育では「中心」の教授・学習が過度に強調される一方で、「ちらばり」への注意が欠如する傾向があったことを指摘している。そして氏は、その傾向の背景について次のように述べている。

《教師とカリキュラム開発者たちは、ちらばりを処理することを避ける傾向があるかもしれない。なぜなら彼らは、計算的に複雑で、おそらく学校数学で動機づけることが困難である標準偏差を導入しなければならないと考えるからである。そしてそのような傾向のもう 1 つの理由は、中心、あるいは平均値がしばしば（データを用いて）予想するために使用されるからである。》(Reading & Shaughnessy, 2004, p.204 ; 括弧内筆者加筆)

このように、標準偏差を筆頭に複雑な計算を伴う「ちらばり」の教授・学習は、これまでの学校数学において避けられる傾向にあった。その一方で、データを用いて何かを予想したり、比較したりする際に容易に用いることができる平均値などといった「中心」は、統計教育における主要な教授・学習内容として扱われてきた。

しかしながら近年の統計教育において、そのような「中心」の教授・学習の過度な強調が見直され、「ちらばり」の教授・学習により一層の注意が向けられはじめている (e.g. Wild & Pfannkuch, 1999 ; Pfannkuch & Wild, 2004 ; Reading & Shaughnessy, 2004 ; Reading, 2004 ; Shaughnessy, 2007)。

2.2.1 統計的な問題解決に不可欠な概念

「ちらばり」は観察可能な実在であり、データに遍在し、我々が観測するものや生活に影響を及ぼすものである。そのような「ちらばり」の遍在と影響力という点から、Wild & Pfannkuch (1999) は、統計における「ちらばり」の重要性を指摘している。そして氏は、データにもとづいて行動の結果を予想したり、事象の因果関係を思考したりすることを困難にするといった「ちらばり」の実際的な影響力から、統計教育における「ちらばり」の概念の育成を強調している。さらに氏は、そのような「ちらばり」の実際的な影響力について、データにもとづいて現実世界の問題を解決していく過程である PPDAC サイクル (図 3-1) に照らして述べている。

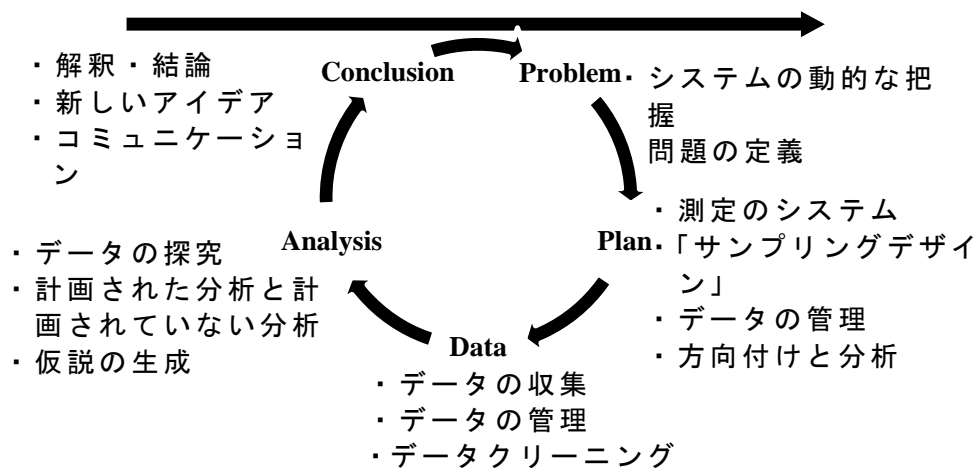


図 3-1. PPDAC サイクル (Wild & Pfannkuch, 1999, p.226)

PPDAC サイクルでは、まず現実世界の問題を明確にし (Problem)、その問題を解決するために、何をデータとして測定するかを決め、実験や調査を計画する (Plan)。その際、解決に求められるデータを適確に収集・分析することができるためには、「ちらばり」を引き起こす要因が取り除かれるように計画する必要がある。そして実際にデータを収集、整理し (Data)、得られたデータを分析する (Analysis)。その分析結果を当初の問題に照らし合わせて解釈し、それを説明する (Conclusion)。そのようにデータを分析し、当初の現実世界の問題に照らして結論を得る際には、データに遍在している「ちらばり」を無視あるいは制御することによって、「ちらばり」の存在下で、どのように行動するかを決定することが求められる。なお、分析で不足した点や新しい問題などは次のサイクルの出発点となる。そのように問題が連続していくことで、さらなる問題解決のサイクルへと進展していく。

このように統計的な問題解決において、データの収集・分析を計画する際には、既知の「ちらばり」の原因を取り除くように問題の解決に向けた計画を立てる必要がある。そしてデータを分析し、当初の現実世界の問題に照らし合わせて結論を出す際には、データに遍在する「ちらばり」を無視または制御することによって、「ちらばり」が存在する中で意思決定することが求められる。これらのことから、「ちらばり」は統計的な問題解決全体に影響する概念であることがわかる (Pfannkuch & Wild, 2004)。換言すれば「ちらばり」は、統計的な問題解決を進展させる上で不可欠となる概念であるといえる。

2.2.2 統計的概念を包括する概念

「中心」と「ちらばり」は互いを排除する概念ではなく、データの分布を捉える上で関連し合っている概念である (Bakker & Gravemeijer, 2004)。そしてデータを分析する際には、《データにおけるシグナルを決定する前にノイズに焦点を当てなければならない》

(Shaughnessy, 2007, p.971) ことを考慮すれば、「ちらばり」は「中心」を捉えるための前提として位置づく概念であると考えうる。

このことは、生徒の「ちらばり」の理解に関する先行研究を参照することで、Shaughnessy (2007) が示した次の 8 つのタイプの「ちらばり」の概念からも窺える。

- ① 代表値や外れ値を含んだ特定の値におけるちらばり
- ② 時間経過を伴う変化としてのちらばり
- ③ 全体的な範囲としてのちらばり
- ④ 標本の起きそうな範囲としてのちらばり
- ⑤ ある固定された点からの距離や差としてのちらばり
- ⑥ 残差の合計としてのちらばり
- ⑦ 共変動や関連性としてのちらばり
- ⑧ 分布としてのちらばり

図 3-2. ちらばりの概念の 8 つのタイプ

例えば、特定の値における「ちらばり」の概念（①）には、データの「中心」について考える際に、外れ値に着目して推論することが含まれていると解釈できる。具体的には、生産年齢人口の所得の代表的な金額を捉える際に、少数の高額所得者のデータ（外れ値）を除いた平均値で捉えたり、あるいは外れ値に抵抗力のある中央値で捉えたりすることが挙げられる。また特定の値からの偏差及びその合計としての「ちらばり」の概念（⑤や⑥）には、データの「中心」について考える際に、代表値などのある基準値とデータの各値の偏差に着目して推論することが含まれていると考えうる。例えば、平均値の周りにデータが集まっていることから、平均値をデータの代表的な値として用いることが考えられる。

このように、「ちらばり」の概念は「中心」と密接に関連しており、「ちらばり」が「中心」を捉える上で前提となる概念であると考えられうる。

そして《データの集合体（aggregate）の特性について推論できるためには、中心とちらばりの概念を統合する必要がある》（Shaughnessy, 2007, p.1009）。つまり「中心」と「ちらばり」が統合されることによって、「分布」を捉えることができるようになるといえる。そのような「中心」と「ちらばり」を統合した「分布」を捉える考え方として、「偏差」が挙げられる。なぜなら、「偏差」は《すべてのデータの持つ情報を利用した尺度》（景山, 2007, p.84）であり、換言すれば「中心」と「ちらばり」というデータが持つ特性を統合した考え方であると捉えることができるからである。このことから、「ちらばり」は「偏差」の考えとして「中心」をも統合する概念であると考えられる。

したがって、「ちらばり」は「中心」を捉えるための前提として位置づき、「分布」を捉えるために「偏差」という考え方として、「中心」をも統合する統計的概念であるといえる。つまり「ちらばり」は統計的概念を包括する概念であると考えうる。

ここまでの議論を総括すれば、「ちらばり」は統計的な問題解決を進める上で不可欠な概念であり、さらには統計的概念を包括する概念であると捉えられる。そこで、そのような統計における「ちらばり」の中核的な役割を考慮し、本研究では「ちらばり」に焦点を当て、その教授・学習の具体化を目指す。勿論、先に述べたように「中心」と「ちらばり」は関連し合っていることから、「ちらばり」の概念のみを教授・学習することを意図していない。

以下では、「ちらばり」の概念が「中心」とともにどのように発達しうるか、という「ちらばり」の概念の発達の様相について「子どもの発達」と「統計学の発達」という2つの視点から捉えていくこととする。

第3節 ちらばりの概念の発達の様相

3.1 子どものちらばりの概念の発達の様相

「ちらばり」の概念の発達の様相を捉える枠組みとして、Reading & Shaughnessy (2004) が特定した「ちらばり」の階層が参考になると考えられる。氏は、小中学生を対象にキャンディ問題を用いた記述調査とインタビュー調査を行い、その結果から2つの「ちらばり」の階層を特定している。つまり氏らの「ちらばり」の階層は、「子ども」という視点から「ちらばり」の概念の発達の様相を捉えた枠組みであると捉えられる。

キャンディ問題

ボールの中に赤、黄、青のキャンディが、それぞれ50個、20個、30個入っている。その中から10個のキャンディを取り出し、赤いキャンディの数を記録し、ボールに戻す。これを5回行う。

取り出された赤いキャンディの数はどうなるか？

取り出す回数や取り出す数を増やすとどうなるか？

3.1.1 ちらばりの記述に関する階層

Reading & Shaughnessy (2004) が特定した階層の内の1つは、データの「ちらばり」を記述することに関する階層（図3-3）である。

階層Ⅰ：「極値」か「中間値（middle value）」のいずれかに着目した考え方

階層Ⅱ：「極値」と「中間値」の両者に着目した考え方

階層Ⅲ：必ずしも中心ではない基準からの「偏差」に着目した考え方

階層Ⅳ：中心からの「偏差」に着目した考え方

図3-3. Reading & Shaughnessy (2004) の「ちらばりの記述」の階層

「ちらばりの記述」に関する階層Ⅰ・Ⅱは、それぞれ言及しているデータ数は異なるものの、極値や平均値などといった「特定の値」を用いてデータの特性を捉えようとする考え方としてまとめられる。例えば階層Ⅰには、ボールの中に赤いキャンディが50個あるから、「取り出される10個のキャンディの中に、1, 2個の赤いキャンディ（極値）のみが含まれるとは考えにくい」、あるいは「4, 5個の赤いキャンディ（中間値）が取り出される」というような考えが含まれる。また、階層Ⅱの例としては「赤いキャンディは7個（最大値）や3個（最小値）よりも、5個（中間値）の方が取り出される」という考えが挙げられる。

一方で階層Ⅲ・Ⅳは、「偏差」を用いてデータの特徴を記述する考え方であるといえる。例えば階層Ⅲには、「最大値（８個）と最小値（２個）から少なくとも３つずつ離れた数の赤いキャンディ（５個）が取り出されやすい」のような極値を基準値とした「偏差」の考えが含まれる。また階層Ⅳの例としては、「５回抽出したときより、５０回抽出したときのほうが、抽出される赤いキャンディは５個に収束する」のような平均値などの「中心」を基準値とした「偏差」の考えが挙げられる。

なお Reading（2004）は、異なる調査問題⁸を用いて「ちらばりの記述」に関する階層を特定している。そこでの階層は、図 3-3 から階層Ⅲ（必ずしも中心ではない基準からの「偏差」に着目した考え）を除いた３つの階層からなっている。このことから、階層ⅢとⅣは明確に区別されるものではなく、いずれにせよ、ある基準値からの「偏差」によってデータの特徴を捉える考え方であるといえる。

このように「ちらばりの記述」に関する階層には、データの特徴を「特定の値」で捉える考え方から、「偏差」で捉える考え方への高まりが表されていると解釈できる。

3.1.2 ちらばりの原因に関する階層

Reading & Shaughnessy（2004）が特定したもう１つの階層は、データの「ちらばり」の原因を認識することに関する階層（図 3-4）である。

階層Ⅰ：「外的要因」に着目した考え方
階層Ⅱ：「度数（特定の特性のみ）」に着目した考え方
階層Ⅲ：「割合（複数の特性）」に着目した考え方
階層Ⅳ：「割合」による推定に着目した考え方

図 3-4. Reading & Shaughnessy（2004）の「ちらばりの原因」の階層

「ちらばりの原因」に関する階層Ⅰは、データ（標本）収集の背景といった「外的要因」によって、標本間に「ちらばり」が生じているという考え方であるといえる。例えば、５回取り出される赤いキャンディの数（標本）に「ちらばり」があるのは、「キャンディを取り出す手の大きさが異なっていたから」、あるいは「キャンディの色を盗みみて取り出したから」というような考えが挙げられる。

一方で階層Ⅱ・Ⅲは、それぞれ着目するのが母集団の絶対度数か相対度数かに違いはあるものの、標本間の「ちらばり」を引き起こす原因として「母集団の特性」をみなす考え方としてまとめられる。換言すれば、階層Ⅱ・Ⅲは取り出される標本が「母集団の特性」をそのまま表していると推論する考え方であるといえる。例えば、階層Ⅱには「より多くの赤いキャンディがボールの中にあるから、より多くの赤いキャンディが取り出される」といった母集団の度数に着目した考えが含まれる。また階層Ⅲの例としては、「ボールの中

⁸ Reading（2004）は、ある町の３年間の降水量と気温に関するデータから、町で行われる祝賀会を催す最善の日を判断させる問題を調査問題として用いている。

の半分のキャンディが赤いから、取り出されたキャンディの半分も赤い」というような母集団の割合に着目した考えが挙げられる。

ここまでの階層Ⅰ・Ⅱ・Ⅲでは、それぞれの具体例をみてもわかるように、標本間の不可避な「ちらばり」は認識されていないことがわかる。それゆえ、それぞれの階層では「特定の値（特定の標本）」によって母集団の特性を捉えることができると考えられている。そのような標本間に存在する不可避な「ちらばり」を認識するのは、階層Ⅳである。

階層Ⅳは、「母集団の特性（割合）」にもとづいて標本の特性を推定する考え方であるといえる。換言すれば、標本間に「ちらばり」が遍在していることから、「複数の値（複数の標本）」あるいは「分布（標本分布）」によって母集団の特性を捉えようとする考え方であるといえる。例えば「赤いキャンディ以外が取り出される偶然はどんなにわずかでも、無視できない」という考え、または「ボールの中に 50 個の赤いキャンディがあるから、取り出される 10 個のキャンディのうち 5 個は赤となるだろうが、異なる結果を得る可能性はある」という考えが挙げられる。

このように「ちらばりの原因」に関する階層は、データ（母集団）の特性を「特定の値（特定の標本）」で捉える考え方から、「複数の値（複数の標本）」あるいは「分布（標本分布）」で捉える考え方への高まりが表されていると解釈できる。

以上のように Reading & Shaughnessy (2004) の「ちらばり」の階層は、「子ども」が有する「ちらばり」の概念を評価する、いわば記述的な階層であるといえる。実際に、氏らは「子ども」が有する概念を評価する枠組みとして、これらの階層を特定している。このことから、氏らの階層は規範的な階層であるとは言い切れず、さらに氏らの研究では、記述統計と推測統計の「ちらばり」の違いを明確に考慮した考察が必ずしもなされていない。

そこで以下では、記述統計と推測統計における「ちらばり」の認識の変容という「統計学」の史的変遷⁹を視点に、Reading & Shaughnessy (2004) の「ちらばり」の階層を再考する。それによって、「ちらばり」の概念の発達の様相を明確にしていく。

またそのように数学史を数学の教授・学習設計へ活用した例として、平均値と中央値の歴史的な発達にもとづいて教授・学習を設計した Bakker & Gravemeijer (2006) の研究が挙げられる。そして氏らが《そのような歴史研究は、概念理解の異なる様相と水準を区別するのに役立った》(p.149) と報告しているように、「統計学」の史的変遷をみることは、Reading & Shaughnessy (2004) の「ちらばり」の階層を検討する際の有効な視点となると考えられる。

3.2 統計学のちらばりの概念の発達の様相

3.2.1 記述統計の成り立ち

統計学が不確実性の科学として確立しはじめた時期は、およそ 1890 年代といわれ、それに大きく関わった人物としてカール・ピアソンが挙げられる（サルツブルグ, 2006）。そしてピアソンの統計学者としての活躍に起因した当時の科学観の変化に、記述統計の成り立ちを見出すことができる。

⁹ 本研究では、数学史を「数学の教授・学習の進展に直接的に影響するもの」というよりは、「数学史と数学の教授・学習との間で何らかの調整・修正は図られる必要があるが、数学の教授・学習設計の理論的基盤になりうるもの」と捉える（cf. 真野, 2011）。

ピアソンが統計学者として活躍する以前の 19 世紀初めの科学観は、《世界の初期条件や世界の運動を記述する数学公式によって、起こりうるすべてのことは事前に決定されている》(サルツブルグ, 2006, p.vi) というものであった。つまり当時の科学観は決定論の掌中にあったといえる。例えば、ニュートンの万有引力の法則が新たな惑星の存在を予想するのに用いられ、実際に海王星は(約 1 度の誤差があったものの) 予想通りの場所で見つかった。

そのような 19 世紀初めの科学観のもとでは、測定値と推定値の間に生じる誤差は、測定の不精確さのせいにする事で無視されていた。つまり、《不確実性は下手な計測によるもので、自然が本来持っているものではないと思われていた》(ibid, p.20)。そしてそのような前提を置くことで、測定値は現象を説明する数学公式をみつけるために用いられ、現象は決定論的に、すなわち一意の値によって捉えられると考えられていた。

このようにピアソンが活躍する以前の科学観では、測定値に、すなわち標本内に「ちらばり」が本来存在しないことを前提とすることで、測定値の「特定の値」によって現象を捉えることができると考えられていた。

しかしながら、精密な測定機器が開発されはじめた 19 世紀末になっても、測定値と推定値の間の誤差はなくなり、それどころか増え続けた。つまり精密な測定機器が開発されることで、現象が本来持っている「ちらばり」が一層明らかになりはじめた。そして、それを契機に《ピアソンは、誤差は測定によるものというより、むしろ観測値そのものが確率分布を持っていることに気付》(ibid, p.20) き、旧来の科学観における数学公式は、現象の大雑把な近似にすぎないことを指摘した。

このようなピアソンの活躍により、《実験から実際に得られる数値は散らばっており、その中の一つが正しいのではなく、正しい値にできるだけ近い推定値を得るためにすべてのデータを用いることができる》(ibid, p.19) という新たな科学観が誕生していった。その新たな科学観のもとでは、測定値は、慎重に測定された数値ではなく、《散らばりのある数値例、もっとわかりやすくいえば、数値の分布》(ibid, p.19) として扱われるようになった。つまりピアソンによる新たな科学観では、測定値に、すなわち標本内に「ちらばり」があることを前提とすることで、測定値の「分布」によって、現象を捉えることができると考えられるようになった。

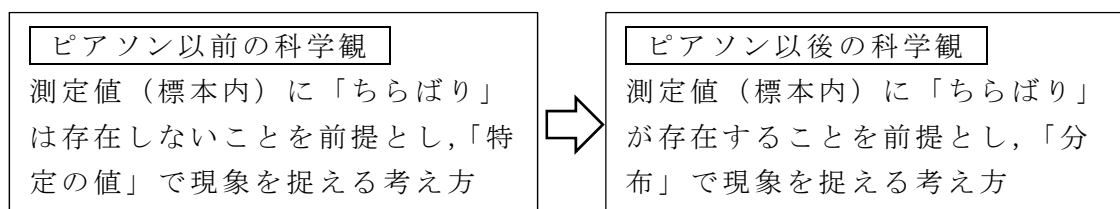


図 3-5. 記述統計の成り立ちにおける「ちらばり」の概念の発達

そしてピアソンは分布を特定する数値として母数(図 3-6)を導入することで、「ちらばり」のある測定値を記述することを可能にした。

- ・ 平均（測定値のちらばりの中心値）
- ・ 標準偏差（大多数の測定値のちらばりがどれほど平均から離れているか）
- ・ 対称性（平均を中心とした片側だけに測定値が偏っている度合）
- ・ 尖度（平均から離れて稀に測定される値のちらばりがどれほど平均から離れているか）

図 3-6. ピアソンの母数（サルツブルグ，2006，p. 21）

母数は決して観測できるわけではなく，測定値のちらばり方，すなわち分布から推測できるだけである。それゆえ，「測定値に匹敵するもの」を意味するパラメータと呼ばれるようになった。

以上のようにして，ピアソンは測定値の集合を一つの「ちらばり」のある実在物（分布）とみなし，それを記述し，分析する方法（母数）を導入することで，記述統計の端緒を開いたといえる。

3.2.2 記述統計から推測統計へ

ピアソンによって発展された記述統計は，測定値そのものを記述し分析することに主眼を置き，測定値の収集について多くの議論はなされていなかった。なぜなら，測定値が十分に収集されることで，測定値の分布（標本の分布）は真の分布（母集団の分布）になることが前提となっていたからである。換言すれば，記述統計では測定で得られた標本が本当に知りたい母集団になりうると考えられていたといえる。

しかしながら，多くの科学者は十分な測定値を集められるわけではなく，むしろ限られた測定値から母数を推定することになる。そのような測定値の収集の限界が認識されることで発展してきたのが推測統計であるといえる。それゆえ推測統計では，母数の真値との誤差が最小となるように測定値を収集すること，さらに得られた測定値の分布をもとに母数の真値を推定することに主眼が置かれた。そして，そのような記述統計から推測統計へと統計学を発展させた主要な人物として，ロナルド・フィッシャーが挙げられる。

フィッシャーは，測定値の分布から母数の真値を決定することができるというピアソンの考えの不適切さを指摘した人物である（サルツブルグ，2006）。フィッシャーは，母数の推定値である《統計量それ自体をランダムなものとして》（ibid, p.83），すなわち不確実性を有するものとして認識した。それゆえ，十分な測定値が集められたからといって，母数の推定値である統計量が母数の真値になるというわけではなく，統計量が母数の真値に近づく確率が高くなるだけであることを主張した。そのように統計量は《すべて誤差を含んでいるので，フィッシャーはそうした誤差の程度を最小にするか，あるいは他のどんな手法よりもより真の値に近い答えをもたらすような分析方法を提案した》（ibid, p.81）。

このようにして，ピアソンとフィッシャーの統計学に対する哲学の違いが，分布に対するアプローチをより精緻なものへと高めていった。すなわち，ピアソンの考えを反映した記述統計では，測定値を大量に集めることで，測定値の分布（標本の分布）が真の分布（母集団の分布）となると考えられていた。換言すれば，標本から推定される統計量に，すなわち標本間に「ちらばり」は本来存在していないことが前提とされていたといえる。そし

て、そのような前提を置くことで、「特定の値（特定の標本）」で母集団の特性（母数）を捉えることができると考えられていた。

一方でフィッシャーの考えを反映した推測統計では、統計量と母数の間に誤差が必然的に生じるゆえに、測定値の分布（標本の分布）は、真の分布（母集団の分布）をあくまで推定するためのものに過ぎないことを前提とした。つまり推測統計では、統計量に、すなわち標本間に「ちらばり」が本来存在していることを前提とし、「分布（標本分布）」で母集団の特性（母数）を捉えることができると考えられた。

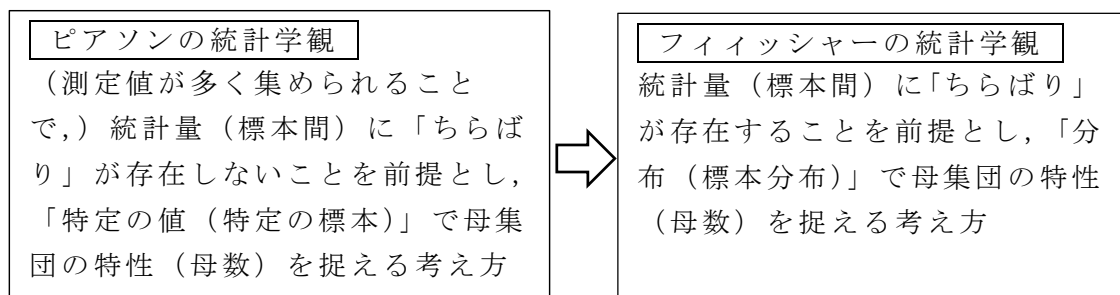


図 3-7. 推測統計の成り立ちにおける「ちらばり」の概念の発達

そしてフィッシャーは、母数を推定するための望ましい統計量に関する基準（図 3-8）を提案した。これらすべての基準の紛らわしさを除いてしまえば、それらの重要なことは、不確実性を有するものとして統計量を捉えていることであるといえる（サルツブルグ，2006）。

- ・ 一致性（データが多いほど、統計量の値は母数の真値に近づく確率が高くなる）
- ・ 不偏性（異なるデータセットごとに求めた統計量の値の平均は母数の真値に近づくはずである）
- ・ 効率性（統計量の値が母数の真値と完全に一致せずとも、統計量の大部分の値は真値からそれほど離れていないはずである）

図 3-8. フィッシャーの統計量の基準（サルツブルグ，2006，p. 83）

以上のようにして、フィッシャーは標本から推定される統計量を一つの「ちらばり」のある実在物（分布）とみなし、実験計画法などといった母数を推定する方法を導入することで、推測統計を発展させていったといえる。

これまで述べてきた統計学の史的変遷という視点から、以下では Reading & Shaughnessy (2004) の「ちらばり」の階層を再考し、「ちらばり」の概念の発達の様相を明確にしていく。

3.3 Reading らのちらばりの階層の統計学史的検討

3.3.1 ちらばりの記述に関する階層と記述統計

「ちらばりの記述」の階層は、データの特性を極値や平均値などといった「特定の値」によって捉えようとする考え方（階層Ⅰ・Ⅱ）から、「偏差」を用いて捉える考え方（階層Ⅲ・Ⅳ）への高まりを表したものであった。そして「偏差」は、《すべてのデータの持つ情報を利用した尺度》（景山，2007，p.84）であることを考慮すれば、階層Ⅲ・Ⅳはすべてのデータを考慮した「分布」を用いて、データの特性を捉えようとする考え方であるということができる。

このような「ちらばりの記述」に関する階層を統計学史的に解釈すれば、それは記述統計の成り立ちに整合した階層であると考えられる。つまり階層Ⅰ・Ⅱは、データの「ちらばり」は下手な計測によるもので、データが本来持っているものではないと考えられていた記述統計が発展する以前の考え方であると捉えられる。そしてそこでは、データ（標本内）に「ちらばり」が存在しないことを前提とすることで、「特定の値」でデータの特性を捉えようとしていると解釈できる。

一方で階層Ⅲ・Ⅳは、得られるデータには「ちらばり」があり、その中の一つが正しいのではなく、正しい値にできるだけ近い推定値を得るためにデータを用いることができるだけであるという記述統計が確立された当時の考え方と整合的なものとして解釈することができる。そしてそこでは、データ（標本内）に「ちらばり」が遍在していることを前提とするゆえに、「特定の値」ではなく「分布」によってデータの特性を捉えることができると考えられている。

このように「ちらばりの記述」に関する階層は、記述統計に関する「ちらばり」の階層（図 3-9）として捉えられ、統計学の史的変遷と整合的であるといえる。

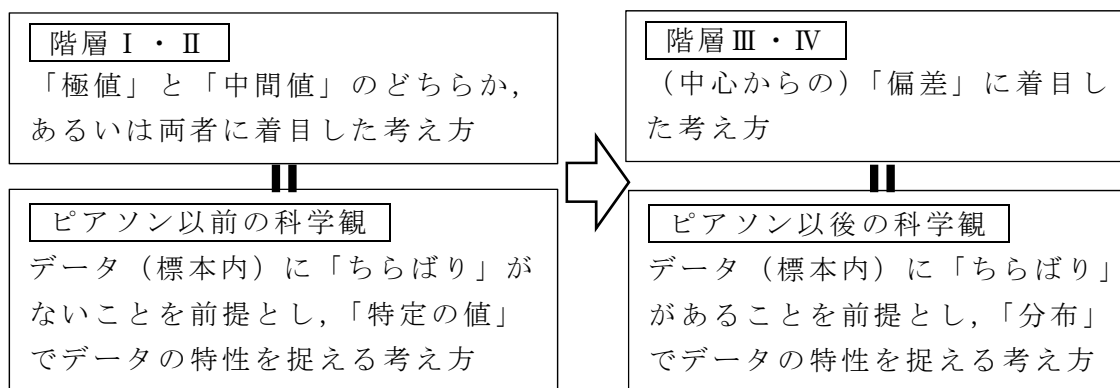


図 3-9. 記述統計における「ちらばり」の階層

3.3.2 ちらばりの原因に関する階層と推測統計

「ちらばりの原因」に関する階層は、データ（母集団）の特性を「特定の値（特定の標本）」で捉えようとする考え方（階層Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ）から、「複数の値（複数の標本）」あるいは「分布（標本分布）」で捉える考え方（階層Ⅳ）への高まりを表したものであった。

そして「ちらばりの原因」に関する階層を統計学史的に解釈すれば、記述統計から推測統計への史的発展に整合した階層になっていると考えられる。つまり階層Ⅰ・Ⅱ・Ⅲは、

十分なデータが集められれば、母数の推定量である統計量に「ちらばり」はなくなり、母数の真値になると信じられていた記述統計が発展された当時の考え方であるといえる。そしてそこでは、統計量（標本間）に「ちらばり」が本来存在しないことを前提とすることで、「特定の値（特定の標本）」でデータ（母集団）の特性を捉えようとしていると解釈できる。

一方で階層Ⅳは、統計量を不可避な「ちらばり」を有するものとして捉えるようになった推測統計が確立された当時の考え方であると解釈できる。そしてそこでは、統計量（標本間）に「ちらばり」が遍在していることを前提とするゆえに、「特定の値（特定の標本）」ではなく「分布（標本分布）」によってデータ（母集団）の特性を捉えることができると考えられている。

このように「ちらばりの原因」に関する階層は、推測統計に関する「ちらばり」の階層（図 3-10）と捉えられ、統計学の史的変遷に整合した階層であると解釈できる。

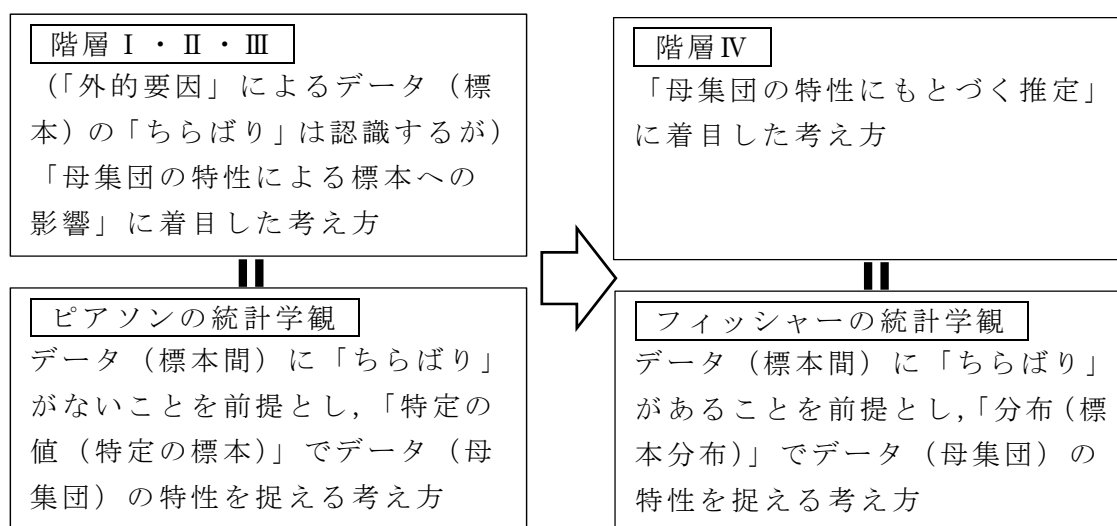


図 3-10. 推測統計における「ちらばり」の階層

以上の考察から、記述統計と推測統計のいずれにおいても「ちらばり」の概念は、データの特性を「特定の値」で捉える考え方から「分布」で捉える統計的な考え方へと高められていく発達の様相を呈すると解釈できる。さらにその考え方の変容は、データ（標本内あるいは標本間）に遍在する「ちらばり」が認識されることによって進展していくことがわかる。したがって、統計を扱う資料の活用領域の教授・学習を通して、そのような「ちらばり」の概念の発達の様相にもとづいて統計的な考え方を育成していくことが鍵となると考えられる。

【ちらばりの概念の発達の様相】

データ（標本内あるいは標本間）に遍在する「ちらばり」が認識されることで、データの特性を「特定の値」で捉える考え方から「分布」で捉える統計的な考え方へと高まっていく

第4節 本章のまとめ

本章では、数学的リテラシー育成を目指した中心的な教授・学習内容として統計に焦点を当て、統計において核となる概念を捉えてきた。

まず数学的リテラシーという視座から、教授・学習内容について検討を行った。つまり「すべての生徒が社会参加するために強調される内容」と「現実世界の問題に対する解決方法として育成される内容」という視点から、数学的リテラシー育成を目指した教授・学習の中心的な内容として統計に焦点が当てられることについて論じた。「情報基盤社会」などといわれる現代社会に目を向ければ、数学的リテラシーとして統計は重要な内容になると考えられた。また統計学の発展の仕方をみれば、統計は絶えず現実世界とのかかわりの中で、つまり現実世界の問題の解決方法として発展してきた内容として捉えられた。そのことを考慮すれば、統計はあくまで現実世界の問題の解決方法として教授・学習されると考えられた。

さらに統計教育に関する先行研究をもとに、「ちらばり」が統計的な問題解決を進展させる上で不可欠な概念であり、統計的概念を包括する概念であることについて論じた。それらのことから、統計の中核を担う概念として「ちらばり」に着目していった。

そして子どもの発達と統計学の発達という2つの視点から、「ちらばり」の概念の発達の様相を明らかにした。その結果、記述統計と推測統計のいずれにおいても「ちらばり」の概念は、データの特性を「特定の値」で捉える考え方から「分布」で捉える統計的な考え方へと高められていくという発達の様相を呈することが想定された。さらにそのような考え方の変容は、データ（標本内あるいは標本間）に遍在する「ちらばり」が認識されることで進展していくことが明らかになった。

引用・参考文献

- Bakker, A. & Gravemeijer, K. (2004). Learning to Reason about Distribution, Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*, Kluwer Academic Publishers, pp.147-168.
- Bakker, A. & Gravemeijer, K. (2006). An Historical Phenomenology of Mean and Median, *Educational Studies in Mathematics*, vol.62, no.2, pp.149-168.
- Konold, C. & Pollatsek, A. (2004). Conceptualizing an Average as a Stable Feature on a Noisy Process, Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*, Kluwer Academic Publishers, pp.169-199.
- Lesh, R., Middleton, J., Caylor, E. & Gupta, S. (2008). A science need: Designing tasks in modeling complex data, *Educational Studies in Mathematics*, vol.68, pp.113-130.
- Pfannkuch, M. & Wild, C. (2004). Towards an Understanding of Statistical Thinking, Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*, Kluwer Academic Publishers, pp.17-46.
- Reading, C. (2004). Student Description of Variation while Working with Weather Data, *Statistics Education Research Journal*, vol.3, no.2, International Association for Statistical Education, pp.84-105.

- Reading, C. & Shaughnessy, M. (2004). Reasoning about Variation, Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*, Kluwer Academic Publishers, pp.201-226.
- Shaughnessy, M. (2007). Research on Statistics Learning and Reasoning, Lester, F. K. (Ed.), *Second handbook of research on teaching and learning*, vol.2, Information Age Publisher, pp.957-1009.
- Wild, C.& Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry, *International Statistical Review*, 67, 3, pp.223-265.
- 景山三平 (2007). 「第Ⅱ部 教育統計に関する話」, 畠山良・景山三平・下村哲 共著『教員のための数学Ⅱ＝統計・解析・コンピュータ』, 培風館, pp.55-113.
- サルツブルグ, D. (竹内恵行・熊谷悦生訳) (2006). 『統計学を拓いた異才たち 経験則から科学へ進展した一世紀』, 日本経済新聞社.
- 真野祐輔 (2011). 「数学教育における数学史の活用の方法論：課題分析のための理論的枠組みの提案」, 大阪教育大学数学教室『数学教育研究』, 第40号, pp.59-69.
- 長崎栄三 (2011). 「社会における人間の生涯を視野に置いた算数・数学教育—数学的リテラシーから見た算数・数学教育—」, 長崎栄三 編著, 『数学教育におけるリテラシーについてのシステミック・アプローチによる総合的研究』, 日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究 (B), pp.91-100.
- 藤井良宜 (2007). 「米国統計学会の統計教育ガイドライン」, 日本数学教育学会『数学教育』, 第89巻, 第7号, pp.49-54.
- 宮川公男 (1999). 『基礎統計学』, 有斐閣.
- ムーア, D. & マッケイブ, G. (麻生一枝・南條郁子訳) (2008). 『実データで学ぶ, 使うための統計入門』, 日本評論社.
- 吉田洋一・赤堀也 (1961). 『数学序説』, 培風館.
- 渡辺美智子 (2007). 「統計教育の新しい枠組み—新しい学習指導要領で求められているもの—」, 『数学教育学会誌』, vol.35, 48(3・4), pp.39-51.

第4章 数学的リテラシー育成を目指した資料の活用領域の教授・学習

本章では、前章までで論じてきた数学的リテラシーの方向性、そしてその育成を目指した教授・学習過程と教授・学習内容という視点から、数学的リテラシー育成を目指した教授・学習を総合的に考察する。つまり目的・目標としての「応用指向の方法の強調」、そしてそれを具現化する「モデル導出活動」と「ちらばりの概念」という3つの視点を総合することによって、数学的リテラシー育成を目指した資料の活用領域の教授・学習を具体的に示す。そのためにまず、第1節では目的・目標、そして教授・学習の過程及び内容という3つの視点で、資料の活用領域について批判的に考察を行い、数学的リテラシーの育成に向けた課題を明確にする。その上で第2節では、指摘された課題の解決に向けた方策について論じる。そして第3節では、その方策をもとに数学的リテラシー育成を目指した具体的な教授・学習を資料の活用領域の教授・学習として提案する。

第1節 資料の活用領域に関する批判的考察¹⁰

ここでは、数学的リテラシー育成を目指した資料の活用領域の教授・学習を具体的に示す前段階として、数学的リテラシーという視座からみた資料の活用領域の課題の明確化を図る。つまり本節は、現行の資料の活用領域を数学的リテラシーという視座から乗り越えるための準備段階として位置づけられる。

1.1 目的・目標に関する課題

近年の統計教育に関する先行研究では、統計教育の目的・目標として「統計的に問題解決する能力」や「与えられた統計情報を批判的に考えようとする能力」の育成について論じられる傾向がある。

例えば渡辺（2011）は、知識基盤社会を背景に、《先進各国においては、新しいアイデア・知識・ビジネスプラン・情報・技術などへの創造力を有した人材の育成》（p.71）の必要性が認識されており、統計教育においてPPDACサイクルのような「統計的に問題解決する能力」の涵養を図ることが主目的とされていることを指摘している。

またガル（2012）は、統計を教える目的・目標として3つ挙げている。1つ目は学問としての統計を知ること、2つ目は統計の専門家として社会に出ていくこと、3つ目は社会へ出て統計情報を受け取ることである。氏は《ほとんどの市民が統計情報の消費者、統計情報にさらされる側、つまり、統計調査の結果を見て、それを解釈して、自身の行動を決定していく》（p.3）ことから、3つ目の目的・目標に焦点を当て、特に「与えられた統計情報を批判的に考えようとする能力」の育成の重要性を強調している。

このことは、近年の統計教育の目的・目標が、主として「情報の送り手（統計の実践者）」として必要とされる「統計的に問題解決する能力」と、主に「情報の受け手（統計情報の

¹⁰ 本節では確率というより統計の内容に焦点を当てて批判的に考察する。なぜなら資料の活用領域の構成が、記述統計を扱う第1学年「資料の散らばりと代表値」、第2学年「確率」、推測統計を扱う第3学年「標本調査」となっていることからわかるように、資料の活用領域は統計領域として、その中に確率が組み込まれる構成になっていると捉えられるからである。そこで本節では、第1学年「資料の散らばりと代表値」と第3学年「標本調査」に焦点を当て、数学的リテラシーの育成に向けた課題を明らかにする。

消費者)」として必要とされる「与えられた統計情報を批判的に考えようとする能力」の育成の両側面から論じられていると解釈できる。

そして、この2つの視点で現行の中学校学習指導要領における資料の活用領域の目的・目標をみてみれば、「統計的に問題解決する能力」の育成にその強調点が置かれていると考えられる。

〔第1学年：資料の散らばりと代表値〕

目的に応じて資料を収集，整理し，代表値やちらばりに着目してその資料の傾向を読み取ることができること

〔第3学年：標本調査〕

母集団から標本を取り出し，標本の傾向を調べることで，母集団の傾向が読み取れることができること

このように学習指導要領の記述から、「資料の散らばりと代表値」と「標本調査」のいずれにおいても現実世界の問題をデータにもとづいて解決できるようになることが重視されていると解釈できる。そのような目的・目標を数学的リテラシーという視点からみれば，現実世界の問題を統計的に解決していく能力という「応用指向の方法」が強調されていると捉えられる。したがって，資料の活用領域の目的・目標は数学的リテラシーの今日的な方向性と整合的であるといえる。

しかし学習指導要領の目的・目標で強調されている内容は，主として情報の送り手として求められる「統計的に問題解決する能力」であり，主に情報の受け手として要求される「与えられた統計情報を批判的に考えようとする能力」までも含意されているとは考えにくい。それゆえ，資料の活用領域の目的・目標で強調されている内容が，数学的リテラシーとして十分であるか検討の余地がある。

無論，これらの能力は二分することはできなく，相互に関連し合った能力であると考えられる（cf. 青山，2011）。言い換えれば，「統計的に問題解決する能力」を育成することは，「与えられた統計情報を批判的に読み取る能力」を育成することにつながりうると考えられる。したがって，両者の能力の関連についてさらなる考察は必要であるが，本研究では数学的リテラシーの今日的な方向性と整合的である現行の目的・目標に準ずることとする。

【資料の活用領域の目的・目標の課題】

現実世界の問題を統計的に解決する能力という「応用指向の方法」が強調されており，数学的リテラシーの今日的な方向性と整合している一方で，多くの市民に必要とされる「与えられた統計情報を批判的に読み取る能力」の育成まで必ずしも含意されていないこと

1.2 教授・学習過程に関する課題

今日的な数学的リテラシーの育成を目指した教授・学習は、Lesh が提案するモデル導出活動を通して行われることが想定された(第2章参照)。モデル導出活動は、端的に言えば、数学を用いて現実世界の問題を解決する過程であり、現実世界と数学世界を往還することで進展していく。このようにモデル導出活動は「応用指向の方法」を基盤とした活動であることがわかる。

そしてモデル導出活動の主要な特徴の1つとして、単に現実世界の問題を解決するだけでなく、その解決の中で新たな数学が構成・発展されていくことが挙げられる。つまりモデル導出活動では、現実世界の問題に対する最適解を得るために、解決方法となる数学を繰り返し洗練していくことで、新たな数学が構成・発展されていく。このようにモデル導出活動では、現実世界の問題に対する解決方法を洗練していくことによって、「応用指向と構造指向の接続」が図られているといえる。

これらのことを考慮すれば、資料の活用領域の教授・学習は、現実世界の問題をデータにもとづいて解決する PPDAC サイクルを通してなされることが考えられる。PPDAC サイクルは、端的に言えば、統計を用いて現実世界の問題を解決する過程であり、現実世界と数学世界を往還することで進展していく。つまり、PPDAC サイクルは「応用指向の方法」を基盤とした活動であると捉えられる。

また PPDAC サイクルの主要な特徴の1つとして、現実世界の問題に対する最適解を得るために、分析で不足した点や新しい問題が次のサイクルの出発点となり、問題解決が繰り返されていくことが挙げられる。そして連続して表出する問題を解決するために、解決方法となる統計は洗練されていき、そうすることで新たな統計が構成・発展されることが想定される。このように PPDAC サイクルにおいても現実世界の問題に対する最適解を得るために、解決方法を繰り返し洗練することによって、「応用指向と構造指向の接続」が図られていくと解釈できる。

このようにモデル導出活動と PPDAC サイクルは、数学や統計を用いて現実世界の問題を解決する過程であり、現実世界と数学世界の往還という「応用指向の方法」を基盤に進展していく。そして現実世界の問題を解決していく中で、その問題に対する最適解を得るために解決方法が繰り返し洗練され、その洗練によって新たな数学や統計が構成・発展されていく。すなわち現実世界の問題に対する解決方法の洗練によって、「応用指向と構造指向の接続」がなされていくことになる。

そこで以下では、PPDAC サイクルという視点から、すなわち「応用指向の方法の強調」と「応用指向と構造指向の接続」という視点から、資料の活用領域の教授・学習過程を批判的に考察する。

1.2.1 応用指向の方法の強調という視点からみた課題

第1学年「資料の散らばりと代表値」の教科書(岡本ら, 2012a)の記述をみれば、例えば代表値の教授・学習では代表値を求める活動が中心的になされることが想定されうる。そのような傾向は、代表値に関わる知識を教授・学習すること自体が活動の目的になっていることから引き起こされていると考えられる。例えば中央値の教授・学習(図4-1)でいえば、「データの個数が偶数の場合は、中央に並ぶ2つの値の平均をとって中央値とする

こと」や「平均値は外れ値に影響を受けるが、中央値はその影響を受けないこと」のような代表値に関する知識を教授・学習することを目的に、その活動は営まれていると捉えられる。

◆◆中央値◆◆

資料の値を大きさの順に並べたとき、その中央の値を**中央値**、または、**メジアン**といいます。

資料の個数が^{きすう}奇数の場合は、まん中の値が中央値です。資料の個数が^{ぐうすう}偶数の場合は、中央に並ぶ2つの値の平均をとって中央値とします。

右の表は、194 ページの表 1 を、大きさの順に並べかえたものです。A 選手の得点では、

$$\frac{177 + 176}{2} = 176.5 \text{ (点)}$$

が中央値になります。

問 3 B 選手の得点の中央値を求めなさい。

B 選手の 204 点は、ほかの得点とかけ^{はな}離れた値です。このような値があると、平均値はその^{えいきよう}影響を受けますが、中央値はその影響を受けません。

問 4 ある中学校の陸上部員 15 人の 50 m 走の記録(秒)は、次のようでした。この 15 人の記録の中央値と平均値を求めなさい。

7.2, 7.8, 7.4, 8.2, 7.7, 8.1, 7.0, 7.5,
7.3, 8.3, 7.9, 7.0, 7.4, 8.1, 7.1

A 選手	B 選手
193	204
188	193
185	189
182	188
182	184
181	181
179	179
178	178
178	177
177	174
176	174
176	173
175	173
174	172
173	170
171	169
170	168
167	168
166	165
164	162

図 4-1. 教科書における中央値の教授・学習（岡本ら，2012a，p.196）

このように「資料の散らばりと代表値」の教授・学習では、データを分析する活動が強調され、その一方で現実世界の問題を解決するために、どのようなデータを集めるかを計画することで統計によって解決可能な問題に変換したり、データの分析結果を問題に照らして解釈したりする活動は付加的になされる傾向にあると考えられる。つまり「資料の散らばりと代表値」の教授・学習は、現実世界の問題を解決するという目的の中で必ずしも行われておらず、現実世界と数学世界を往還していないといえる。すなわち「応用指向の方法」を基盤とした教授・学習が必ずしも展開されていない傾向にあると解釈できる。

この傾向は、第3学年「標本調査」の教授・学習においても指摘されうる。教科書（一松ら，2011）の構成から、おおよそ次のような「標本調査」の教授・学習展開が想定されうる。まず母集団の特性を推定するために、偏りのない標本を得る必要があることから、無作為抽出の考えが導入される。そして特性がわかっている母集団から標本抽出を何度か行う。得られた複数の標本平均と母集団の平均値の関係をみるために、度数分布表などに得られた標本平均を整理する。そして標本分布から、母集団の平均値が推定できることを確認する。その後、標本サイズや抽出回数を変えたときの標本分布の変化の様子を調べる。

このように無作為抽出や母集団の推定の教授・学習（図4-2）では、標本調査で本来わからないはずの母集団の特性が与えられている。

● 母集団の平均と標本平均

前ページの間1では、母集団のみかん50個の重さの平均値を求めると111.0 gとなる。標本平均は、母集団の平均値とは誤差があるのがふつうである。



母集団の平均値と標本平均の関係を調べてみよう。

例 1 次の表は、18人の生徒が前ページの間1の表から、それぞれ10個のみかんを標本として無作為抽出し、標本平均を求めたものである。

(単位：g)

111.2	108.4	113.2	110.5	109.8	114.9	109.5	111.5	112.4
106.2	109.4	112.2	113.1	111.2	108.1	110.1	110.9	108.6

上の標本平均のうち、母集団の平均値111.0 gとの誤差の絶対値が1 g以下のものは次の6個である。

111.2 g, 110.5 g, 111.5 g, 111.2 g, 110.1 g, 110.9 g

問 2 例1の標本平均で、母集団の平均値111.0 gとの誤差の絶対値が2 g以下のものは何個ありますか。

図4-2. 教科書における母集団の推定の教授・学習（一松ら，2011，p. 210）

そのように母集団の特性を与えるのは、「標本が大きいほど、標本平均は母集団の平均に近い値を取ることが多くなること」のような標本調査に関する知識を教授・学習すること自体が活動の目的になっていることに起因していると考えられる。換言すれば、「標本調査」の教授・学習も現実世界の問題を解決するという目的の中で必ずしも行われておらず、「応用指向の方法」を基盤とした活動がなされていないといえる。

以上のことから、「応用指向の方法の強調」という視点からみた資料の活用領域における教授・学習過程の課題として、必ずしも現実世界の問題を解決することを目的に教授・学習過程が進展していないことが挙げられる。

【資料の活用領域の教授・学習過程の課題①】

現実世界の問題を解決することを活動の目的とすること

1.2.2 応用指向と構造指向の接続という視点からみた課題

第1学年「資料の散らばりと代表値」の教科書（岡本ら，2012a）の記述をみれば，例えばデータの整理方法である度数分布表やヒストグラムを教授・学習する際には，それらにデータを整理し，分析する活動を行うことが想定されうる。そしてその活動では，「度数が最大の階級（最頻値）」を読み取ったり，「ある一定以上の値をとる度数あるいはその割合」を求めたりした分析結果を問題に照らして解釈することで，問題に対する現実的な結論が出されることが考えられる。

このような教授・学習展開は，一見すれば PPDAC サイクルによって進展しているように捉えられる。しかしながら，教科書では得られた結論を評価するような記述はいわば暗黙的であり，得られた結論が問題の目的や文脈に対して十分なものであるか，あるいは適切なものであるかを評価することが，生徒たちによって行われているとは考えにくい。

例えば度数分布表の教授・学習展開（図 4-3）では，極値などの「特定の値」のみに着目して得られた結論を評価することによって，「全体としてどんな違いがあるか」という新たな問題が必ずしも生徒たちから表出していないと考えられる。

<p><u>Problem (問題の明確化)</u></p> <p>◆「羽の長さが 7 cm の紙コプターと 5 cm の紙コプターをつくって比べると、どちらの方が滞空時間が長いか」を判断する課題に取り組んでいく</p> <p><u>Plan (データの収集・分析の方法の計画)</u></p> <p>◆それぞれの紙コプターの 2m の高さからの落下（滞空）時間を記録し、それを 50 回行う</p> <p><u>Data (データの収集・整理)</u></p> <p>◆実験回数ごとに整理されたそれぞれの紙コプターの滞空時間のデータを得る</p> <p><u>Analysis (データの分析)</u></p> <p>◆「極値（最大値・最小値）」あるいは「ある一定以上の値を取るデータの数（例えば滞空時間が 3 秒以上であるのは何回か）」を求める</p> <p><u>Conclusion (現実的な結論)</u></p> <p>◆分析結果にもとづいて、どちらの紙コプターの滞空時間が長いのか判断する</p> <p>◆全体としてどんな違いがあるかを問う</p>

図 4-3. 度数分布表の教授・学習の導入場面（岡本ら，2012a，pp.186-189）

本来は問題解決者である生徒たちが結論を評価し、「全体としてどんな違いがあるか」という新たな問題を感じるからこそ、さらなる問題解決へと進む。そして次の問題解決では、解決方法を「分布」によってデータの特性を捉える考え方へと洗練することで、より最適な解を求めていくことになる。しかしながら教科書の記述を踏まえれば、「資料の散らばりと代表値」では得られた結論が問題に対し十分であるか、あるいは適切であるかを評価し、その解決方法の不十分さから、再度問題解決を図るといった PPDAC サイクルを繰り返すことによって教授・学習が進展していない傾向にあると考えられる。換言すれば、現実世界の問題に対する解決方法を洗練していくことによって、新たな統計が構成・発展されておらず、「応用指向と構造指向の接続」がなされていないといえる。

また、そのような傾向は第 3 学年の「標本調査」の教授・学習にもみられる。教科書（岡本ら，2012b）の記述をみれば、例えば無作為抽出の教授・学習（図 4-4）では、無作為でない抽出方法によって得られた標本では偏りがでてしまい、母集団の特性を正確に表さないことを評価することで、無作為な抽出方法へと洗練していくことが必ずしも生徒たちによって行われていないと考えられる。

◆◆標本の抽出◆◆

標本調査では、調べるのは標本ですが、知りたいのは母集団の性質なので、母集団を代表するように、標本をかたよりなく取り出すことがたいせつです。

ひろげよう どうすればいいかな

次の場合に、標本としてかたよりなく取り出すには、どうすればよいでしょうか。

- (1) 52 枚のカードから、何枚かのカードを取り出す。
- (2) 箱の中のたくさんの玉から、何個かの玉を取り出す。

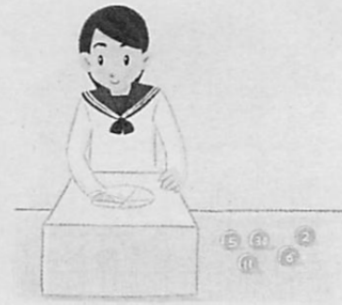


図 4-4. 教科書における無作為抽出の教授・学習（岡本ら，2012b，p. 181）

同様に母集団の推定の教授・学習（図 4-5）をみても、標本から推定された結論（母集団の特性）を評価することに関する記述は暗黙的である。

◆◆母集団と標本◆◆

標本によって母集団の性質を推測する場合、標本の性質と母集団の性質とが大きく^{もが}く違うことはないでしょうか。前ページのハンドボール投げの記録で、このことを調べてみましょう。

ひろげよう どんなことがわかるかな

前ページ 3 のハンドボール投げの記録から母集団の平均値を求めると、24.8mでした。また、右の表は5つの班で、それぞれ、10個の記録を無作為に抽出して、平均値を求めたものです。これらの結果をくらべてみましょう。

標本調査の結果 (m)

	A 班	B 班	C 班	D 班	E 班
	28	30	25	26	24
	20	23	26	22	25
	25	23	23	24	25
	24	23	23	21	24
	25	23	27	26	22
	23	22	24	31	26
	24	20	25	27	30
	30	21	22	25	21
	29	26	24	22	23
	24	24	28	25	22
平均値	25.2	23.5	24.7	24.9	24.2

上の表で、各班の標本の平均値は、少しばらつきが見られますが、どれも母集団の平均値に近い値になっています。

標本調査では、その結果に母集団とある程度の違いがあることを考えに入れて、母集団の性質を推測することになりますが、適切に標本の大きさを決め、無作為に抽出することにより、母集団の性質と標本の性質が大きくく違うこともなくなります。

図 4-5. 教科書における母集団の推定の教授・学習（岡本ら，2012b，p. 184）

それゆえ、「特定の標本」から推定された結論を評価することで、生徒たちから「標本の性質と母集団の性質とが大きくく違うことはないのか」という新たな問題が生じているとは考えにくい。換言すれば、「特定の標本」を用いた母集団の推定方法を評価する活動が必ずしもなされていないといえる。それゆえ、生徒たちは新たな問題を感じず、「特定の標本」を用いて母集団の特性を捉える考え方は「複数の標本」あるいは「より大きなサイズの標本」を用いて推定する考え方へと洗練されているとは言い難い。つまり、現実世界の問題に対する解決方法を洗練していくことで、「応用指向と構造指向の接続」の接続が必ずしもなされていないといえる。

以上のように、「応用指向と構造指向の接続」という視点からみた資料の活用領域における教授・学習過程の課題として、最適解を得るために結論を批判的に評価し、その結論を導いた解決方法の不十分さが表出することで、より洗練された解決方法を用いたさらなる問題解決へと進展していく活動を組織する必要があることが挙げられる。

【資料の活用領域の教授・学習過程の課題②】

得られた結論を批判的に評価し、その結論を導いた解決方法の不十分さが表出することで、より洗練された解決方法を用いたさらなる問題解決へ進展していく活動を組織すること

1.3 教授・学習内容に関する課題

統計における中心的な教授・学習内容として、変わりやすさというデータの特性を範囲や標準偏差などを用いて記述・測定する「ちらばり」の概念が考えられた（第3章参照）。そして「ちらばり」の概念の発達の様相から、「ちらばり」の概念は、データの特性を「特定の値」で捉える考え方から「分布」で捉える考え方へと発展していくことが想定された。さらに、そのような「分布」を分析する考え方として「偏差」の考えが考えられた（cf. Reading & Shaughnessy, 2004）。このことは、データを「分布」として分析できるためには「ちらばり」と「中心」が統合されなければならないこと（Shaughnessy, 2007）、そしてそのように「ちらばり」と「中心」といった《すべてのデータの持つ情報を利用した尺度》（景山, 2007, p.84）が「偏差」であることからわかる。したがって、「偏差」は「中心」と「ちらばり」を統合した考え方であり、「ちらばり」がある中でデータの「中心」を捉える、すなわち「分布」を捉える考え方であるといえる。

しかしながら、《多くの場合、ちらばりの学習は完全に無視されたり、あるいは中心の学習と不自然に分けられたりして行われている状況にある》（Reading & Shaughnessy, 2004, p.223）。日本の現行カリキュラムにおいても、標準偏差や分散、四分位偏差のような「偏差」の考えは、高等学校における「データの分析」（数学Ⅰ）の教授・学習内容として位置づけられており、中学校の資料の活用領域では「偏差」の考えが教授・学習内容として明確に位置づけられていない。このことから、中学校の主要な教授・学習内容として代表値のような「中心」が位置づけられている一方で、標準偏差のような「ちらばり」は高校の主要な教授・学習内容として位置づけられていると解釈できる。

したがって、「ちらばり」の概念の発達という視点から中等教育における統計の教授・学習内容をみてみれば、日本の現行カリキュラムにおいて「ちらばり」と「中心」の教授・学習は乖離して行われているといえる。つまり、資料の活用領域では「中心」と「ちらばり」が関連付けられて教授・学習されておらず、「分布」としてデータを捉える「ちらばり」の概念の育成が必ずしも達成されていないと考えられる。

以上のことから、資料の活用領域の教授・学習内容の課題として、データの特性を「分布」で捉える「ちらばり」の概念を育成するために、「中心」と「ちらばり」が関連付けられた「偏差」の考えを主要な教授・学習内容に位置づける必要があることが挙げられる。

【資料の活用領域の教授・学習内容の課題】

「中心」と「ちらばり」が関連付けられた「偏差」の考えを主要な教授・学習内容として位置づけること

第2節 資料の活用領域の教授・学習の課題に対する方策

2.1 資料の活用領域の課題に対するアプローチ

資料の活用領域の教授・学習過程の課題として、2点挙げられた。1点目は、現実世界の問題を解決することを活動の目的とすることであった。2点目は、得られた結論を批判的に評価し、その結論を導いた解決方法の不十分さを表出させることで、より洗練された解決方法を用いたさらなる問題解決へと進展していく活動を組織することであった。

そして教授・学習過程の2点目の課題は、解決方法の発達という点で、「ちらばり」の概念の発達と関連していると考えられる。すなわち2点目の課題は、教授・学習内容の課題である「中心」と「ちらばり」が統合された「偏差」の考えを教授・学習することと関連した課題であるといえる。したがって、それらの教授・学習過程及び内容の課題をまとめれば、次のようになる。

【資料の活用領域の教授・学習の総合的課題】

現実世界の問題に対する最適解を得るために結論を批判的に評価し、その結論を導いた考え方（解決方法）の不十分さを表出させることで、データを「分布」として分析する「偏差」の考えという洗練された考え方（解決方法）を用いたさらなる問題解決へと進展していく活動を組織すること

本節では、教授・学習過程及び内容について包括的に論じることで、資料の活用領域の教授・学習を具体的に示すことを目的としている。そのため以下では、特に上記の総合的課題の解決に焦点を当てる。そして「モデルの変容」と「ちらばりの概念の発達」の論考を統合することで、その課題に対するアプローチを考えれば、次の2つが挙げられる。

1つは、データの特性を「特定の値」で捉える考え方（モデル）から「分布」で捉える考え方（モデル）へと解決方法を変容させる教授・学習を展開することである。詳述すれば、データの特性を「特定の値」で捉える考え方（モデル）を他者に対する「共有可能性」と他の状況に対する「再利用可能性」という視点で評価することで、データ（標本内あるいは標本間）に遍在する「ちらばり」を認識させる。その認識によって「特定の値」を用いた考え方の不十分さを表出させ、それを契機に「分布」でデータの特性を捉える考え方（モデル）を用いたさらなる問題解決へと進展していく活動を組織する。

もう1つは、先のアプローチを受けて「分布」で捉える考え方（モデル）から「偏差」で捉える考え方（モデル）へと解決方法を変容させる教授・学習を展開することである。具体的には、データの特性を「分布」で捉える考え方（モデル）を他者に対する「共有可能性」と他の状況に対する「再利用可能性」という視点で評価することで、「分布」を数量化する手続きを考える必要があることを表面化させる。それを契機に「偏差」によって「分布」を分析する考え方（モデル）を用いたさらなる問題解決へと進展していく活動を組織する。

2.2 資料の活用領域の教授・学習の枠組み

先の資料の活用領域の教授・学習の具体化に向けたアプローチをより詳細に示せば、次のような流れになる。そしてその流れは、資料の活用領域の教授・学習を具体化する際の枠組みとなりうる。

2.2.1 特定の値を用いた問題解決

教授・学習の当初、生徒はデータに「ちらばり」があることを必ずしも認識していない状態にあることが想定される。それゆえ、平均値や極値といった「特定の値」によってデータの特性を捉える考え方（モデル）を用いて問題を解決していくと考えられる。

しかしデータには「ちらばり」が遍在しており、一意の値に定まらない。それゆえ生徒によって異なった「特定の値」で、データの特性を捉えようとするのが想定される。それゆえデータの特性を「特定の値」で捉える考え方では、他の「特定の値」で捉えた他者と「共有可能」であるとはいえない。さらにいえば、「特定の値」でデータの特性を捉える考え方は、特有の問題状況には適する場合もあるが、多くの問題状況に「再利用可能」な考え方であるとは必ずしもいえない。

2.2.2 分布を用いた問題解決

「特定の値」でデータの特性を捉える考え方の不十分さの表出を契機に、どうして「特定の値」ではデータの特性を捉えられないのかを反省させ、データに遍在する「ちらばり」を意識化させる。そうすることで、データの特性を個々の値で捉える考え方は、データのまとまりで捉える考え方へと洗練されていくと考える。そのように「分布」でデータの特性を捉える統計的な考え方は、より多くのデータを反映した考え方であるゆえに、多くの者が「共有可能」なものであるといえる。

しかしながら、「分布」でデータの特性を捉えようとする考え方が導出されたとしても、そのような考え方がはじめから誰にとっても明瞭であり、より多くの分布に利用できるくらい洗練されたものであるとは考えにくい。つまり、この段階では視覚的に「分布」を捉えるにとどまり、どこを「分布」として捉えるかは生徒によって異なり、データセットによって「分布」を捉える方法は変わってくることが想定される。

2.2.3 偏差を用いた問題解決

「分布」でデータの特性を捉える考え方を、他者と「共有可能」であり、他の状況に「再利用可能」であるようにするためには、「分布」を記述し測定できる、すなわち「分布」のまとまり具合を数量化できる手続きが必要となる。なぜなら「分布」を数量化できることで、視覚的で曖昧であった考え方は他者にも捉えやすくなり、そしてその手続きが明らかになることで、データセットに依存していた考え方は他の分布に対して用いられうるようになるからである。

そのような必要性の表出を契機に、分布内のある基準値（「中心」）に他のデータがどれだけ集まっているかをどのように捉えることができるかを反省させる。そうすることで分布の密度が意識化され、密度によって「分布」を数量化する「偏差」の考えへと解決方法が洗練されていくと考える。そして《(密度がより前景に現れた) モデルは様々なタイプの

分布について推論するためのモデルとなりうる》(Gravemeijer, 2007, p.143 ; 括弧内筆者加筆) ことから、「偏差」の考えはより多くの分布に「再利用可能」な考え方であるといえる。

なお、ここで示された資料の活用領域の教授・学習の枠組みは、数時間の教授・学習をひとまとめにしたものである。すなわち、教授・学習を大局的に示した枠組みであるといえる。そのように教授・学習を大局的にみれば、「特定の値」・「分布」・「偏差」という教授・学習内容の発展が前景に現れていることがわかる。一方で教授・学習を1時間の授業として局所的にみれば、モデル導出活動あるいは PPDAC サイクルといった教授・学習過程の発展が前景に現れる。そのことは、1つ1つの教授・学習展開を述べることで明らかになる。

第3節 数学的リテラシーを育成する資料の活用領域の教授・学習

3.1 第1学年「資料の散らばりと代表値」の小単元の構想

本節では、前節で示した資料の活用領域の教授・学習の枠組みを用いて、数学的リテラシー育成を目指した教授・学習の具体的な展開を示す。その際、資料の活用領域の第1学年「資料の散らばりと代表値」を想定した教授・学習を提案する。なぜなら図4-6に示されるように、記述統計は確率論とともに推測統計の基盤となるゆえに、「資料の散らばりと代表値」が資料の活用領域の教授・学習のベースとなると考えられるからである。

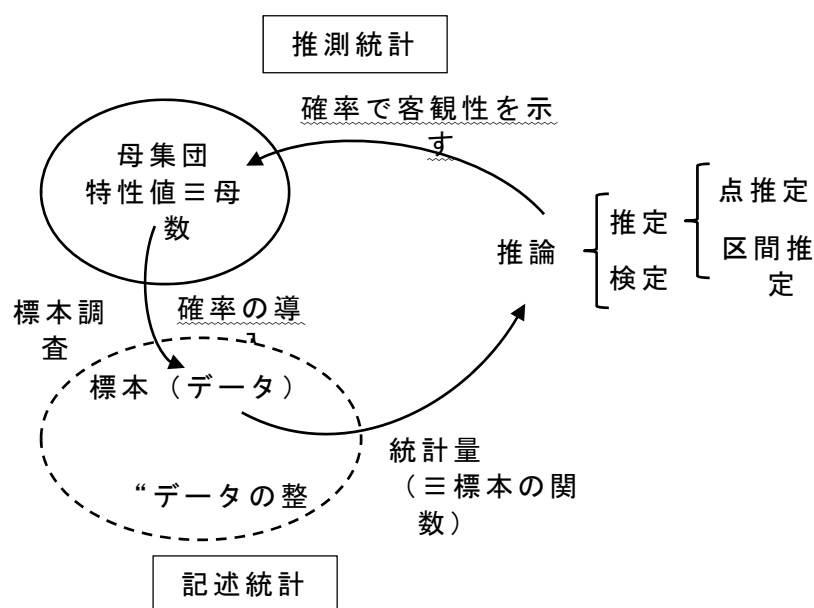


図4-6. 統計の構造 (景山, 2007, p. 80)

資料の散らばりと代表値」の教授・学習を構想する上で、平成24年度全国学力・学習状況調査の中学校数学B問題の「スキージャンプ問題 (参考資料)」を参考にした。そして、前節で述べた資料の活用領域の教授・学習の枠組みにもとづき、再構成されたスキージャンプ問題を用いた小単元 (表4-1) を構想した。したがって、この小単元は PPDAC サイクルを繰り返すことで進展していく。

再構成されたスキージャンプ問題

大谷監督はスキージャンプ競技の新潟県代表の監督です。いま全国大会（団体戦）の最後の選手を決めかねている状態です。団体戦では1人2回飛ぶのですが、1回1回が重要になるため、次の1回でより遠くに飛びそうな選手を選ぶことにしました。そこで、後藤選手を最後の選手にしようと考えたところ、もう1人の候補選手であった鈴木選手が「後藤選手が選ばれるのは納得できない!」と、怒り口調で抗議してきました。今日中に選手を決めなくてはなりません。さて、どうしましょうか。

表 4-1. 「資料の散らばりと代表値」の小单元¹¹

	ねらい	教授・学習展開
1時間目	<ul style="list-style-type: none"> 得られた結論を再検討する活動を通して、特定の値に依拠した結論の不適切さに気付き、分布によって判断する必要性がわかる。 共有可能性を高めるために必要となるデータの優先順位を、根拠を持って決めることができる。 	<p>Problem : 課題はどこにあるか。</p> <p>Plan : 何がわかれば課題解決できそうか。</p> <p>(Data : 2選手の記録を与える。)</p> <p>Analysis : データを「特定の値」で分析する。</p> <p>Conclusion : 2人の主張の根拠を示す。</p> <p>Problem' : 2人の主張の「共有可能性」を向上するにはどうするか。</p> <p>Plan' : 新たな情報を加え、データを「分布」で分析する。</p>
2時間目	<ul style="list-style-type: none"> より妥当性のある結論を導く活動を通して、分布を偏差によって数量化することができる。 	<p>(Data' : 要求された情報を与える。)</p> <p>Analysis' : データを「分布」で（視覚的に）分析する。</p> <p>Conclusion' : 納得しそうな結論を出す。</p> <p>Problem'' : 分布を捉える方法の「共有可能性」や「再利用可能性」を高めるためにはどうするか。</p> <p>Plan'' : 「分布」のまとまりを「偏差」の考えによって数量化する。</p> <p>(Data'' : 要求された情報を与える。)</p> <p>Analysis'' : 密度で分布のまとまり具合を数量化する「偏差」の考えで分析する。</p> <p>Conclusion'' : より納得のいく結論を出す。</p>

¹¹ 教授・学習展開が問題解決の繰り返しによって進展することを強調するために、各問題解決のサイクルを区別して、2サイクル目には ' を付し、3サイクル目は '' を付すこととする（以下、同様に ' と '' を用いる）。

小単元は全 2 時間の構成となっている。1 時間目では、最高記録や平均記録といった「特定の値」で選手の特性を捉える考え方から、記録全体を考慮した「分布」で捉える考え方へと解決方法を変容させていく。そのために「特定の値」で導かれた結論を評価することで、その考え方は異なる「特定の値」で判断した他の生徒に「共有可能」でないという解決方法の不十分さを表出させる。それを契機に、「分布」を用いたさらなる問題解決へと進展させていく。

2 時間目では前時を受けて、「分布」を視覚的に捉える考え方から、「分布」を「偏差」によって数量的に捉える考え方へと解決方法を変容させていく。そのために「分布」を視覚的に分析して得られた結論を評価することで、視覚的に「分布」を捉える考え方では、「分布」の異なる部分を起きそうな記録として特定した他の生徒に「共有可能」でなく、他の分布に対して「再利用可能」でないという不十分さを表出させる。それを契機に、「分布」を密度によって数量化する「偏差」の考えを用いたさらなる問題解決へと進展させていく。

このように小単元では、ある標本の分布を「偏差」によって分析する記述統計に関する「ちらばり」の概念の育成が目指されることになる。それはいわば統計の「方法」の育成に焦点を当てたものである。それゆえ統計手法に関する知識（例えば、代表値の求め方や中央値は平均値に比べ外れ値に強いという知識）といった統計の「内容」を教授・学習することは意図していない。そのような統計の「内容」は、小単元の後に各統計手法に適した文脈の問題状況を設定し、それを統計的に解決していく中で教授・学習していくことが想定される。そうすることで、データを「分布」としてみた上で、文脈に適した統計手法を教授・学習することができると考える。言い換えれば、小単元を「資料の散らばりと代表値」の単元の導入部分として位置づけることで、データを「分布」としてみる「ちらばり」の概念と各統計手法を結び付けて教授・学習することを意図している。すなわち、小単元は「資料の散らばりと代表値」の教授・学習の抛り所となる役割を果たしうると考える。

3.2 1 時間目の授業の構想

3.2.1 授業のねらい

- ・得られた結論を評価する活動を通して、特定の値に依拠した結論の不十分さに気づき、分布を用いて判断する必要があることがわかる。
- ・より現実的な結論を得るために必要となる他の情報の優先順位を、根拠を持って決めることができる。

3.2.2 授業の構成

1 時間目の授業では、スキージャンプの選手選考という問題状況を読み解く中で、2 人の選手の記録を分析していく。まず課題把握の場面では、問題状況から「大谷監督と鈴木選手が納得できる主張が必要であること」、そのために「2 人の主張を調べる必要があること」を明確にする（Problem）。それを受けて、2 人の主張を調べるために何が必要かを定める（Plan）。続く自力解決の場面では、2 人の選手の 20 回分の記録を分析し（Analysis）、大谷監督と鈴木選手の主張を解釈していく（Conclusion）。しかし分析のはじめでは、記録に

潜在する「ちらばり」が生徒たちの中で意識されていないと考えられる。そのため、平均値や極値のような「特定の値」に依拠したものになることが想定されうる。

そのことから練り上げの場面では、「特定の値」で分析する考え方によって導かれた結論を評価し、その結論では納得できない、すなわち「共有可能」でないという結論の不十分さについて話し合う活動を組織する（Problem'）。その活動を通して、「特定の値」で選手の特性を捉える考え方が不十分であることに気付かせる。それを契機に、なぜ結論が「共有可能」でないのかを反省させることで、記録には「ちらばり」が遍在していることを意識化させる。そうすることで、個々の値ではなく集合体としてデータをみる「分布」を用いて選手の特性を判断しようとするようになると考える（Plan'）。最後に次時での問題解決に向けて、解決の計画をまとめる。

またより現実的な結論を得るためには、問題状況に関する追加の情報が必要となる。そこで課題把握あるいは練り上げの場面において、必要な情報の優先順位を考えさせることで、よりよい問題の定式化を図っていく（Plan）。

3.2.3 授業の展開

	教師の主な働きかけ (T) ・ 予想される生徒の反応 (S)	指導上の留意点
課題提示	T：問題提示 <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> 問題 大谷監督はスキージャンプ競技の新潟県代表の監督です。いま全国大会（団体戦）の最後の選手を決めかねている状態です。団体戦では1人2回飛ぶのですが、1回1回が重要になるため、次の1回でより遠くに飛びそうな選手を選ぶことにしました。そこで、後藤選手を最後の選手にしようと考えたところ、もう1人の候補選手であった鈴木選手が「後藤選手が選ばれるのは納得できない！」と、怒り口調で抗議してきました。今日中に選手を決めなくてはなりません。さて、どうしましょうか。 </div>	<ul style="list-style-type: none"> ・ 納得できる選手選考を考えると目的を明確にする。 ・ 記録以外の要素（練習態度など）は、選ばれなかった選手が納得しにくいことから排除する。 ・ 記録に関わる付加的な要素（記
	○活動の目的を明確にする T：どういう状況ですか。 Problem S：大谷監督と鈴木選手の意見が食い違っていて、選手が決まらない。 S：どちらの選手を選べばよいか分からなくなりました。 S：2人が納得できるような主張が必要だ。 T：大谷監督と鈴木選手の主張を知るためには、何が必要ですか。 Plan S：鈴木選手と後藤選手の記録。 S：2人以外の選手の記録。 S：最高記録・最低記録・平均記録。 S：練習の態度。 S：天候。 T：後藤選手と鈴木選手のすべての記録（20回分）を与える。 Data	

	<table><tr><th colspan="3">後藤選手(m)</th><th colspan="3">鈴木選手(m)</th></tr><tr><td>124.5</td><td>139.0</td><td>124.0</td><td>119.5</td><td>115.0</td><td>130.2</td></tr><tr><td>104.9</td><td>114.4</td><td>114.9</td><td>125.1</td><td>113.4</td><td>106.0</td></tr><tr><td>109.9</td><td>109.7</td><td>89.8</td><td>105.6</td><td>121.3</td><td>115.9</td></tr><tr><td>69.9</td><td>129.8</td><td>124.9</td><td>125.5</td><td>105.4</td><td>119.7</td></tr><tr><td>124.9</td><td>115.4</td><td>124.6</td><td>115.2</td><td>120.7</td><td>112.1</td></tr><tr><td>109.7</td><td>119.8</td><td>115.4</td><td>110.0</td><td>119.8</td><td>120.1</td></tr><tr><td>114.8</td><td>139.7</td><td></td><td>118.5</td><td>121.0</td><td></td></tr></table>	後藤選手(m)			鈴木選手(m)			124.5	139.0	124.0	119.5	115.0	130.2	104.9	114.4	114.9	125.1	113.4	106.0	109.9	109.7	89.8	105.6	121.3	115.9	69.9	129.8	124.9	125.5	105.4	119.7	124.9	115.4	124.6	115.2	120.7	112.1	109.7	119.8	115.4	110.0	119.8	120.1	114.8	139.7		118.5	121.0		録が取られた日付や天気) に対しては、調べる優先順位を問うことで、問題の定式化を図る。
後藤選手(m)			鈴木選手(m)																																															
124.5	139.0	124.0	119.5	115.0	130.2																																													
104.9	114.4	114.9	125.1	113.4	106.0																																													
109.9	109.7	89.8	105.6	121.3	115.9																																													
69.9	129.8	124.9	125.5	105.4	119.7																																													
124.9	115.4	124.6	115.2	120.7	112.1																																													
109.7	119.8	115.4	110.0	119.8	120.1																																													
114.8	139.7		118.5	121.0																																														
自力解決	<p>○それぞれの主張を明確にするために、記録を分析する</p> <p>T：2 選手の記録をもとに、大谷監督と鈴木選手の主張を考えよう Analysis</p> <p>S：平均記録と最低記録は鈴木選手の方が高い。だから鈴木選手は納得してない。</p> <p>S：最高記録は後藤選手の方が高い。しかも 10m も違うから後藤選手が選ばれた。</p> <p>S：記録の半分は鈴木選手の方がいい。だから鈴木選手は選ばれてもいい。</p>	<ul style="list-style-type: none">・ どうしてそのような主張がされるのか根拠を明確にさせる。																																																
練り上げ	<p>○それぞれどのような主張が考えられるか発表する</p> <p>T：大谷監督と鈴木選手それぞれどんな主張が考えられますか。 Conclusion</p> <p>S：より遠くに飛べる人が良いのだから最低記録ではなく、最高記録が重要になる。だから後藤選手が選ばれた。</p> <p>S：鈴木選手の記録の半分が後藤選手より良い。だから、鈴木選手は調子が悪くても後藤選手よりは悲惨にならない。</p> <p>S：平均記録が後藤選手より高いから、鈴木選手は納得していない。</p> <p>S：平均記録が似ているから、最高記録の良い方が遠くに飛べる。だから大谷監督は後藤選手を選んだ。</p> <p>○「特定の値」による主張の不十分さについて話し合う</p> <p>T：大谷監督の判断に鈴木選手が納得せず、大谷監督は困っていたけれど、それぞれの主張は、もう一方を納得させることができますか。</p> <p>S：お互いを納得させられる主張がないからできない。</p> <p>T：どうしてそれぞれの主張は互いを納得させることができないのですか。</p> <p>S：もし大谷監督が最高記録だけで決めたら、半分の記録が後藤選手よりもよい鈴木選手は納得しないから。</p> <p>S：色んな記録があるから特定の記録だけで考えられた主張では、相手を納得させるのは難しいから。 Problem' 1</p> <p>S：これだけの情報では決められないから。 Problem' 2</p> <p>○「分布」で考える必要があることを明確にする</p> <p>T：特定の記録のみで判断するのではなく、どのようにデータをみて判断すればいいですか。</p>	<ul style="list-style-type: none">・ 1 つの分析結果に対する他の生徒の考えを引き出し、納得できる主張がないことを表面化させる。・ 結論を評価することで、その不十分さを表出させる。・ 「特定の値」で判断できない理由を問い、記録に遍在するちらばりを意識させる。																																																

	<p>S：いろんな記録があるから1つ1つの記録ではなく、複数の記録をまとめてみたり、記録全体をみたりする。 Plan' 1</p> <p>○どのような「追加の情報」を考えるか明確にする</p> <p>T：次はどんな情報を優先的に調べればいいですか。</p> <p>S：スポーツは最近の調子が優先だと思うから、2選手の最近の記録。 Plan' 2</p>	<p>・多くの記録から導いた結論の方が、より納得できることに気付くことができる。【評価】</p> <p>・情報の優先順位を考えることができる。【評価】</p>
まとめ	<p>○次時の問題解決の計画をまとめる</p> <p>T：次の授業でどのように問題を解決するか計画をまとめよう。</p> <p>S：記録が取られた天候を考えて、記録全体を使って判断しよう。</p>	

※ **Problem'**と**Plan'**の後続の数字はそれぞれ対応しており、1＝分析する方法に関するもの、2＝情報不足に関するものを表している。

3.3 2時間目の授業の構想

3.3.1 授業のねらい

- ・より納得しやすい結論を導く活動を通して、「分布」を「偏差」の考えによって数量化することができる。

3.3.2 授業の構成

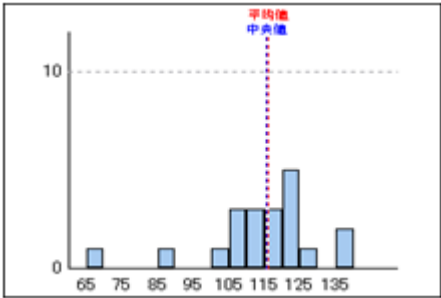
前時を受けて2時間目は、より納得しやすい主張を考えることを目的に2人の選手の記録を再度分析していく。まず課題把握の段階では、大谷監督と鈴木選手がより納得しやすい主張を考えるためにデータをどのようにみるか、またどのような追加の情報が必要かを振り返る(**Problem'・Plan'**)。自力解決の場面では、2選手の記録のより詳細な情報を加え、記録を「分布」によって視覚的に分析し(**Analysis'**)、納得しやすい主張を考える

(**Conclusion'**)。そして実際に「分布」の分析を進めていく中で、起こりそうな記録を「分布」によって、どのように捉えることができるのかという疑問が生じはじめると考えられる。

それを受けて練り上げの場面では、「分布」を視覚的に捉えることで得られた結論を評価し、その結論を導いた考え方が視覚的で曖昧であるゆえに、「共有可能」でなく、「再利用可能」でないという結論の不十分さについて話し合う。つまり「分布」を視覚的に捉える考え方では、「分布」のどこを起こりそうな記録として捉えるかは生徒によって異なり、さらにデータセットによって起こりそうな記録を捉える方法が変わることを明確にしていく(**Problem''**)。そうすることで他の生徒に「共有可能」であり、他の分布にも「再利用可能」であるように、起こりそうな記録の「分布」を数量化する手続きを考える必要があること

を表面化させる。その必要性の表出を契機に、データの「中心」に他のデータが密集している度合、すなわち起こりそうな記録をどのように数量的に捉えることができるのかを反省させ、分布の密度を意識化させていく。そうすることで、密度によって「分布」を数量化する「偏差」の考えを用いて選手の記録を分析しようとするようになると考える(Plan”)。そして実際に「偏差」の考えを用いて記録を分析し(Analysis”),より納得しやすい主張を導いていく(Conclusion”)。最後に、これまで解決してきたことをまとめる。

3.3.3 授業の展開

	教師の主な働きかけ (T) ・ 予想される生徒の反応 (S)	指導上の留意点																						
課題提示	<p>○活動の目的を明確にする</p> <p>T：大谷監督の判断に鈴木選手が納得せず、大谷監督は困っていたけれど、お互いが納得しやすい主張をするためには、記録をどのようにみたり、どんな情報があったりするといいいですか。（Problem'・Plan'）</p> <p>S：特定の記録ではなく、記録をまとめてみたり、記録全体をみたりする。そのために、グラフにするといいかもしれない。</p> <p>S：スポーツは最近の調子が重要だから、最近の記録があるといい。</p> <p>S：外でやるスポーツは天候に左右されるから、記録が取られたときの天候が必要だ。</p> <p>S：プレッシャーに強いかみるために、記録が取られた状況も知りたい。</p> <p>T：必要とされた情報を与える。Data'</p>	<ul style="list-style-type: none">・問題状況を振り返り、納得しやすい主張が必要なことを確認する。・どの新しい情報を使用するかどうかはSに委ねる。																						
自力解決	<p>○問題状況に関する情報を加え、記録を「分布」で分析する</p> <p>T：より納得しやすい主張ができるように、もう一度、後藤選手と鈴木選手の記録を調べてみよう。Analysis'</p> <p>S：後藤選手の最低記録は悪天候のときの記録だ。</p> <p>S：記録全体の様子をみやすくするために、グラフにして考える。</p> <div><table><caption>【後藤選手】</caption><thead><tr><th>記録値</th><th>頻度</th></tr></thead><tbody><tr><td>65</td><td>1</td></tr><tr><td>75</td><td>0</td></tr><tr><td>85</td><td>1</td></tr><tr><td>95</td><td>0</td></tr><tr><td>105</td><td>2</td></tr><tr><td>110</td><td>3</td></tr><tr><td>115</td><td>3</td></tr><tr><td>120</td><td>4</td></tr><tr><td>125</td><td>2</td></tr><tr><td>135</td><td>2</td></tr></tbody></table></div>	記録値	頻度	65	1	75	0	85	1	95	0	105	2	110	3	115	3	120	4	125	2	135	2	<ul style="list-style-type: none">・「特定の値」で判断している S には、前時を振り返らせたり、その値がどれくらい生じそうか尋ねたりする。・グラフは、S が必要とした際に、あらかじめ作成したものを与える。・分析に困難を示す S には、グラフから選手が出しそうな記録は
記録値	頻度																							
65	1																							
75	0																							
85	1																							
95	0																							
105	2																							
110	3																							
115	3																							
120	4																							
125	2																							
135	2																							

	<div data-bbox="475 197 930 499" data-label="Figure"> </div> <div data-bbox="635 515 769 548" data-label="Caption"> <p>【鈴木選手】</p> </div> <div data-bbox="220 560 1185 638" data-label="Text"> <p>S：グラフをみると後藤選手の出そうな記録は 105～125m で、鈴木選手は 110～125m のようにみえる。</p> </div> <div data-bbox="220 649 1185 728" data-label="Text"> <p>S：最近の記録で考えると、2 人の選手の記録の数が違って比較しにくいから、割合で考える必要がある。</p> </div> <div data-bbox="424 745 979 1043" data-label="Figure"> </div> <div data-bbox="555 1059 849 1093" data-label="Caption"> <p>【3 か月以内の後藤選手】</p> </div> <div data-bbox="424 1111 979 1408" data-label="Figure"> </div> <div data-bbox="555 1424 849 1458" data-label="Caption"> <p>【3 か月以内の鈴木選手】</p> </div> <div data-bbox="220 1469 1185 1547" data-label="Text"> <p>S：最近の記録のグラフをみると後藤選手の出そうな記録は 115～125m で、鈴木選手は 115～125m のようにみえる。</p> </div> <div data-bbox="220 1559 979 1592" data-label="Text"> <p>S：どうやったら記録全体を的確に使った主張ができるのかな。</p> </div>	<p>わかるか尋ねる。</p>
<p>練 り 上 げ</p>	<p>○分析した結果を発表する</p> <p>T：どのような結果が得られましたか。 Conclusion'</p> <p>S：グラフをみると後藤選手は良く飛びそうだが、ミスも起きそう。</p> <p>S：グラフをみると鈴木選手の記録はまとまっているから、安定して飛べる。</p> <p>S：グラフをみると後藤選手の出そうな記録は 105～125m で、鈴木選手は 110～125m のようにみえる。</p> <p>S：記録が取られた大会の規模を考えれば、後藤選手は大きな大会であるほど、飛距離が長い。</p> <p>S：最近の記録で考えれば、後藤選手と鈴木選手の両者とも 115m～125m の記録</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・ どの情報を考慮したか、また分析する際に記録のどこをみたかを明確にする。 ・ 分析結果に対する他の S からの質問を聴き、ど

	<p>が出やすそう。</p> <p>S: 記録が取られたときの天候を考えれば、後藤選手の悪い記録は悪天候だった。それを除けば、後藤選手の方が全体的によいから、高い記録が出やすそう。</p> <p>○<u>どのようにして「分布」を捉えられるかについて話し合う</u></p> <p>T: この説明は分かった、あるいは分からないというものはありますか。</p> <p>S: グラフにすると、データ全体をみることができるのでわかりやすかった。</p> <p>S: グラフのどこをみるかは、みんなバラバラだった。</p> <p>S: どうやって起きそうな記録を予想しているのかわからなかった。</p> <p>S: どうやって記録全体を使って、起きそうな記録を予想できるのか。 Problem”</p> <p>T: 起きそうな記録とはグラフでいうとどこの部分でしょうか。</p> <p>S: まとまっている部分。</p> <p>S: 密度が高い部分を考えればいい。 Plan”</p> <p>T: グラフの密度はどうやって表せるか考えてみよう。</p> <p>S: 平均記録から離れた記録を除いて、平均記録に近い記録のまとまりが密度の高い部分だと思う。</p> <p>S: 人口密度 ($\frac{\text{人}}{\text{m}^2}$) は 1m^2 あたりにいそうな人数を表すから、1回あたりに出そうな飛距離を表す平均記録が密度になると思う。</p> <p>S: でも平均記録だけでは他の記録が無視されてしまうから、他の記録が平均記録にどれだけ近いかみるために、平均記録との差を考える。</p> <p>S: 平均記録との差の平均をとれば、1回あたりで生じそうな「平均記録との差」がわかり、それと平均記録を使えば1回あたりで飛びそうな距離がわかる。</p> <p>S: 平均記録とそれぞれの記録の差の平均をとれば、平均記録の周りでまとまっている部分を捉えることができる。</p> <p>S: 後藤選手は平均記録 116m で、1回のジャンプで平均記録との差が 9.66m 生じそうだから、後藤選手の出そうな記録は $116 \pm 9.66\text{m}$ だ。</p> <p>S: 鈴木選手は平均記録 117m で、1回のジャンプで平均記録との差が 5.54m 生じそうだから、鈴木選手の出そうな記録は $117 \pm 5.54\text{m}$ だ。 Analysis”</p> <p>S: こう考えると後藤選手はおよそ 106m~125m、鈴木選手はおよそ 111m~122m の記録が出そう。</p> <p>S: 後藤選手の 106m~125m、鈴木選手の 111m~122m の範囲をグラフでみると、後藤選手は特に 120~125 の記録が出そうで、鈴木選手は特に 115~120m が出そうだから、後藤選手が良いと思う。 Conclusion”</p>	<p>うやって起きそうな記録（「分布」）を特定したのか疑問をもたせる。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 結論を評価することで、起きそうな記録を捉える方法の不十分さを問題として顕在化させる。 ・ ここでの密度は、(0m や平均記録を基準とした) 線上の分布の密度と考えられる。 ・ 前時を振り返り、データにちらばりがあり、平均記録だけでは不十分なであることを強調する。 ・ 「分布」を数量化することで、他者にもわかりやすく、他の分布にも使えることを確認する。
ま	○ <u>スキージャンプ問題で学習したことを振り返る</u>	

と め	<p>T：授業で学んだことをまとめましょう。</p> <p>S：すべての記録を使って、起きそうな記録を考えれば、大谷監督も鈴木選手も納得できそうな主張になった。</p> <p>S：特定の値で考えるよりも分布としてデータをみた方がより納得できそうな主張になった。</p> <p>S：より細かい情報を踏まえて判断したほうが、より納得できそうな主張になった。</p> <p>S：1回あたりで飛びそうな距離（平均記録）と、1回あたりで出そうな平均距離との差（平均偏差）を考えれば、出そうな記録（分布）を捉えることができた。</p>	<p>・「分布」を「偏差」で数量化し、比較することができるか。【評価】</p>
--------	---	---

前述のように小単元の構成としては教授・学習内容、すなわち「ちらばりの概念の発達」が前景に現れている。一方、そのような小単元を通した教授・学習内容の発達は、「モデルの変容」という教授・学習過程によって連続的になされていることがわかる。換言すれば、教授・学習を1時間という局所的な射程で捉えれば、数学を用いて現実世界の問題を解決する教授・学習過程の発展が前景に現れる一方で、単元のような大局的な射程で捉えれば、解決方法となる概念の発達という教授・学習内容の発展が前景に現れる。そして、そのように教授・学習過程と教授・学習内容の発展が統合されることで、教授・学習は連続的に展開されていることがわかる。

以上のように、教授・学習を大局的かつ局所的に示すことによって、応用指向の方法の中で構造指向をも教授・学習する数学的リテラシー育成を目指した教授・学習の具体例が示されたことになる。

第4節 本章のまとめ

本章では、前章までで論じてきた数学的リテラシー育成を目指した教授・学習過程と教授・学習内容に関する議論を統合する形で、数学的リテラシー育成を目指した資料の活用領域の教授・学習を具体的に示した。

そのためにまず、数学的リテラシーという視座から資料の活用領域の目的・目標、教授・学習過程及び内容について批判的に考察し、数学的リテラシーの育成を実現する上で課題となる点を明らかにした。

目的・目標としては、現実世界の問題を「統計的に問題解決する能力」という「応用指向の方法」が強調されており、数学的リテラシーの今日的な方向性と整合しているといえた。しかし、多くの市民が必要とされる「与えられた統計情報を批判的に読み取る能力」の育成まで含まれているとは言い難く、数学的リテラシーとして目的・目標の内容が十分であるか議論の余地があることを指摘した。教授・学習過程の課題としては、2点挙げられた。1つは、現実世界の問題を解決することを活動の目的とすることであった。もう1つは、現実世界の問題に対する最適解を得るために結論を批判的に評価し、その結論へと導いた解決方法の不十分さから、より洗練された解決方法を用いたさらなる問題解決へと

進展する活動を組織することが挙げられた。教授・学習内容の課題としては、データを「分布」として捉える考え方を育成するために、「中心」と「ちらばり」が関連付けられた「偏差」の考えを主要な教授・学習内容として位置づけることが考えられた。

そして、これらの課題を解決するためのアプローチとして、「モデルの変容」と「ちらばりの概念の発達」という視点をもとに資料の活用領域の教授・学習の枠組み（「特定の値を用いた問題解決」・「分布を用いた問題解決」・「偏差を用いた問題解決」）を示した。

さらにこの枠組みを用いて、第1学年「資料の散らばりと代表値」を想定した資料の活用領域の具体的な展開を提案した。その展開を1時間という局所的な射程で捉えれば、教授・学習過程が前景となっていた。つまり現実世界の問題を解決するという応用指向の方法が前面に現れていた。一方、単元構成という大局的な射程で捉えれば、教授・学習内容が前景に現れた。すなわち「特定の値」、「分布」、「偏差」といった教授・学習内容が変容していく構造指向の展開が前面に出現していた。このような教授・学習展開は、まさに応用指向の方法の繰り返しのうちに構造指向を組み入れた教授・学習といえた。換言すれば、大局的かつ局所的に教授・学習を示すことで、数学的リテラシー育成を目指した教授・学習の具体的な展開が示されたといえる。

引用・参考文献

- Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modeling, Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, H.-W. & Niss, M. (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study*, Springer, pp.137-144.
- Reading, C. & Shaughnessy, M. (2004). Reasoning about Variation, Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*, Kluwer Academic Publishers, pp.201-226.
- Shaughnessy, M. (2007). Research on Statistics Learning and Reasoning, Lester, F. K. (Ed.), *Second handbook of research on teaching and learning*, vol.2, Information Age Publisher, pp.957-1009.
- 青山和裕 (2011). 「「知の創造」の視点からの統計的リテラシーの階層に対する再検討—批判的解釈との位置づけの明確化をねらいとして—」, 『科学教育研究』, vol.35, no.2, pp.101-117.
- 一松信, 岡田樟雄, 町田彰一郎, 他 28 名 (2011). 『中学校 数学 3』, 学校図書.
- 岡本和夫, 小関熙純, 杉森馨, 佐々木武, 他 39 名 (2012a). 『未来へひろがる数学 1』, 啓林館.
- 岡本和夫, 小関熙純, 杉森馨, 佐々木武, 他 39 名 (2012b). 『未来へひろがる数学 3』, 啓林館.
- 景山三平 (2007). 「第Ⅱ部 教育統計に関する話」, 畠山良・景山三平・下村哲 共著『教員のための数学Ⅱ＝統計・解析・コンピュータ』, 培風館, pp.55-113.
- ガル, I. (2012). 「統計リテラシーのこれから—その教育と評価への挑戦—」, 日本数学教育学会『数学教育』, 第 94 巻, 第 5 号, pp.2-10.
- 国立教育政策研究所 (2012). 『平成 24 年度 全国学力・学習状況調査 調査問題 中学校数学 B』, (<http://www.nier.go.jp/>).

文部科学省 (2008).『中学校学習指導要領解説 数学編』, 教育出版.

渡辺美智子 (2011).「科学的探究・問題可決・意思決定のプロセスを通して育成する統計的思考力」,『科学教育研究』, vol.35, no.2, pp.71-83.

終章 本研究の総括と今後の課題

本研究で得られた「数学的リテラシーの育成」に関する知見を整理した上で、今後の展望を述べる。

第1節 本研究の総括

本研究の目的は、以下のとおりであった。

【本研究の目的】

数学的リテラシーの育成を目指した教授・学習の在り方を探り、その教授・学習を具体化すること

この目的に対して、本研究では以下の3つの研究課題を設定し、その解決を試みた。

- (研究課題1) 今日の数学的リテラシー育成の方向性を捉え、その育成に向けた教授・学習過程の在り方を探ること
- (研究課題2) 「課題1」を受けて、数学的リテラシー育成を目指した教授・学習の中心的内容として統計に焦点を当て、その核となる概念を捉えること
- (研究課題3) 「課題1」と「課題2」を受けて、統計を扱う資料の活用領域における数学的リテラシー育成を目指した教授・学習を明示すること

これらの課題に対する取組み及びその成果を各章ごとにまとめ、論文の全体を概観したい。

1.1 数学的リテラシーの今日的な方向性

第1章では、数学的リテラシーの今日的な方向性を述べるのがねらいであった。

第1節では、阿部（2010）の数学的リテラシーの方向性を捉えるための枠組みについて述べた。

【数学的リテラシーを捉える枠組み】

- 数学の本質
- 数学の内容
- 数学の方法
- 価値観，態度

「数学の本質」には数学のための数学という構造指向、そして数学外へ応用するための数学という応用指向の2つの相補的側面があり、それぞれに「内容」と「方法」があった。また「価値観・態度」は数学の受け入れ側が有するものであり、数学的リテラシーの基盤となった。

第2節では、この枠組みを用いてこれまでの数学的リテラシーを捉えた。これまでの数学的リテラシーとしては、構造指向の方法あるいは内容の教授・学習に焦点が当てられていた。第3節では、これまでの数学的リテラシーについての批判的考察を行った。これまでの数学的リテラシーはこれまでの社会にとっては不可欠なものであった。一方で今日の社会に目を向ければ、そこで求められる数学的リテラシーとしては、構造指向よりもむしろ応用指向の方法に焦点を当てることが重要となった。

【数学的リテラシーの今日的な方向性】

応用指向の方法を強調する中で、応用指向と構造指向のバランスをとること

1.2 数学的リテラシー育成を目指した教授・学習過程

第2章では、数学的リテラシーの育成を目指した教授・学習過程を実現するためのアプローチを述べるのがねらいであった。

第1節では、今日的な数学的リテラシーを育成しうる教授・学習過程について検討した。数学的リテラシーの今日的な方向性との整合及び学習の連続性の担保という点から、応用指向の方法の中で、結果として構造指向をも教授・学習する過程に着目した。

第2節では、その教授・学習過程を実現する上で課題となる「応用指向と構造指向の接続」に向けたアプローチを Lesh の論考を参考に探っていった。Lesh のモデル導出活動は現実世界における問題を解決する活動であり、その問題に対する解決方法として数学的概念を教授・学習する。そしてその教授・学習過程を実現する上で、解決方法となる考え方（モデル）を他の状況に「再利用可能」であり、他者と「共有可能」であるように繰り返し洗練していく「モデルの変容」が鍵となっていることについて論じた。すなわち、「モデルの変容」が「応用指向と構造指向の接続」に対するアプローチとなりうることを明らかにした。

【数学的リテラシー育成を目指した教授・学習過程】

応用指向の方法の中で，結果として構造指向をも教授・学習する過程

【数学的リテラシー育成を目指した教授・学習過程の実現に向けた課題】

応用指向と構造指向の接続

【数学的リテラシーを育成する教授・学習過程の実現に向けたアプローチ】

数学的モデル化のサイクルを回る中で，モデル（解決方法）を他者と「共有可能」であり，他の状況に「再利用可能」であるように繰り返し洗練していくこと

1.3 数学的リテラシー育成を目指した教授・学習内容

第3章では，数学的リテラシーの育成を目指した中心的な教授・学習内容の1つとして，統計の核となる概念を捉えることがねらいであった。

第1節では数学的リテラシーという視座から，すなわち「すべての生徒が社会参加するために強調される内容」と「現実世界の問題に対する解決方法として育成される内容」という視点から，教授・学習の中心的な内容として統計に焦点が当てられることについて論じた。

第2節では，統計教育に関する先行研究をもとに，「ちらばり」が統計的な問題解決を進展させる上で不可欠な概念であり，統計的概念を包括する概念であることを述べた。そのことから統計の中核を担う概念として「ちらばり」に着目し，第3節では子どもの発達と統計学の発達という2つの視点から，「ちらばり」の概念の発達の様相を明確にした。すなわち，記述統計と推測統計のいずれにおいても「ちらばり」の概念は，データの特性を「特定の値」で捉える考え方から「分布」で捉える考え方へと高まっていくという発達の様相を呈することを指摘した。さらにその考え方の変容は，データ（標本内あるいは標本間）に遍在する「ちらばり」が認識されることで進展することが明らかになった。

【ちらばりの概念の発達の様相】

データ（標本内あるいは標本間）に遍在する「ちらばり」が認識されることで，データの特性を「特定の値」で捉える考え方から「分布」で捉える統計的な考え方へと高められていく

1.4 数学的リテラシー育成を目指した資料の活用領域の教授・学習の枠組み

第4章では，数学的リテラシー育成を目指した資料の活用領域の教授・学習を具体的に示すことがねらいであった。

第1節では，数学的リテラシーという視座から資料の活用領域の目的・目標，教授・学習過程及び内容について批判的に考察し，数学的リテラシーの育成を実現する上で課題となる点を明らかにした。目的・目標としては，「現実世界の問題を統計的に解決する能力」

という「応用指向の方法」が強調されており、数学的リテラシーの今日的な方向性と整合する一方で、多くの市民が必要とされる「与えられた統計情報を批判的に読み取る能力」の育成までも含まれているとは言い難いことを指摘した。また教授・学習過程の課題としては、2点挙げられた。1つは現実世界の問題を解決することを活動の目的とする必要があることであった。もう1つは、現実世界の問題に対する最適解を得るために結論を批判的に評価し、その結論を導いた解決方法の不十分さから、より洗練された解決方法を用いたさらなる解決へと進展していく活動を組織する必要があることがあった。そして教授・学習内容の課題としては、データを「分布」として捉える考え方を育成するために、「中心」と「ちらばり」が関連付けられた「偏差」の考えを主要な教授・学習内容に位置づけることが考えられた。

第2節では、上述の課題を解決するためのアプローチとして、「モデルの変容」と「ちらばりの概念の発達」に関する論考をもとに資料の活用領域の教授・学習の枠組みを示した。

【数学的リテラシー育成を目指した資料の活用領域の教授・学習の枠組み】

特定の値を用いた問題解決

データに遍在する「ちらばり」が認識されておらず、「特定の値」でデータの特性を捉える考え方によって問題解決を図る。しかし、その考え方は他の「特定の値」で捉えた他者と「共有可能」でなく、他の問題状況に「再利用可能」な考え方であるとは必ずしもいえない。

分布を用いた問題解決

データの「ちらばり」が意識化されることで、「分布」でデータの特性を捉える考え方によって問題解決を図る。しかしその考え方は誰にとっても明瞭であり、より多くの分布に利用できるほど洗練されていない。

偏差を用いた問題解決

「分布」を用いた考え方が、より「共有可能」であり「再利用可能」であるように、「分布」を密度によって数量化する「偏差」の考えへ洗練され、その考えを用いることで問題解決が図られる。

第3節では、この枠組みを用いて、第1学年「資料の散らばりと代表値」を想定した資料の活用領域の具体的な展開を提案した。その展開を1時間という局所的な射程で捉えれば、教授・学習過程、すなわち現実世界の問題を解決するという応用指向の方法の展開が前景に現れた。一方、単元構成という大局的な射程で捉えれば、教授・学習内容、すなわち「特定の値」・「分布」・「偏差」という概念が発達していく構造指向の展開が前面に出現した。このように大局的かつ局所的に教授・学習を示すことで、応用指向の方法の繰り返しの中に構造指向を組み入れた教授・学習が示され、数学的リテラシー育成を目指した教授・学習の具体的な展開を明示することができた。

1.5 本研究の成果

本研究の主な成果は、次の3点である。

研究成果1：数学的リテラシー育成を目指した教授・学習過程の明確化

社会の変化と子どもの実態という視点から、今日的な数学的リテラシーの育成を目指した教授・学習過程として、応用指向の方法の中で構造指向をも教授・学習する過程、すなわち数学を用いて現実世界の問題を解決する中で数学を構成・発展していく過程に焦点を当て、その教授・学習過程を明確にした。そのために Lesh の論考を参照し、現実世界の問題に対する解決方法（モデル）を他者と「共有可能」であり、他の状況に「再利用可能」であるように繰り返し洗練していく「モデルの変容」が、その教授・学習過程を実現する上で鍵となることを明らかにした。

研究成果2：核となる統計的概念としてのちらばりの概念の発達の様相の同定

統計教育に関する先行研究を考察することで、統計の中核を担う統計的概念として「ちらばり」の概念を特徴づけた。さらに「ちらばり」の概念の育成を目指し、その概念の発達の様相を子どもの発達と統計学の発達という2つの視点から同定した。そして「ちらばり」の概念は、データの特性を「特定の値」によって捉える考え方から「分布」によって捉える考え方へと発達していくことを明らかにした。またその発達には、データ（標本内あるいは標本間）に遍在する「ちらばり」を認識することが重要となることを指摘した。

研究成果3：資料の活用領域の具体的な教授・学習の提案

数学的リテラシーという視座から資料の活用領域の目的・目標及びそれを具現化する教授・学習過程と内容について批判的に考察し、その課題を明らかにした。またそれらの課題に対するアプローチとして、「モデルの変容」と「ちらばりの概念の発達」という視点から資料の活用領域の教授・学習の枠組みを論じた。そしてその枠組みをもとに、第1学年「資料の散らばりと代表値」の教授・学習として、数学的リテラシー育成を目指した教授・学習の具体的な展開を示した。

第2節 今後の展望

本研究は、数学的リテラシー育成を目指した教授・学習を、資料の活用領域の教授・学習として具体的に示した。そのような数学的リテラシー育成を目指した教授・学習のさらなる具体化へ向けて以下の3点が課題となる。

第1に、統計を1つの頂点とした学校数学カリキュラムの構築が挙げられる。今日的な数学的リテラシーの育成という視座からみれば、統計は中心的な教授・学習内容の1つとなりうると考える。そして統計が他領域の基盤となる内容を発展させることで教授・学習されうることが考慮すれば、統計を中心に据えた学校数学カリキュラムを構築することは可能であると考えられる。それゆえ数学的リテラシーという視座からみれば、統計を1つの中心とし、他領域との接続を意識したカリキュラム構成を考えることが求められる。

第2に、他領域における数学的リテラシー育成を目指した教授・学習の具体化が挙げられる。数学は領域ごとにその特性が異なると考えられる。そして、各領域の特性はその教授・学習の展開に多かれ少なかれ影響を及ぼすと考えられる。例えば、各領域の史的発展の仕

方を考慮すれば、代数や幾何は現実世界に端を発するも、抽象、一般化されることによって数学世界の中で発展されてきた。一方解析や統計は、現実世界と数学世界を往還する中で発展されてきた。このことから、数学的リテラシーの育成を念頭に置けば、各領域の教授・学習において「応用指向の方法」を強調することが基盤となるものの、その中に組み込まれる「構造指向」の活動の在り方は多少なりとも異なってくると考えられる。それゆえ、領域ごとに数学的リテラシー育成を目指した教授・学習の在り方について議論し、それらの具体的な展開を示すことが必要となる。

第3に、数学的リテラシー育成を目指した資料の活用領域の教授・学習のさらなる具体化が挙げられる。本研究では、記述統計における「ちらばり」の概念の育成を志向した第1学年「資料の散らばりと代表値」の教授・学習を具体的に示した。したがって、具体的に示された教授・学習は資料の活用領域の中でも記述統計に焦点を当てたものであり、さらに言えば1つの教材例に限られている。それゆえ、数学的リテラシー育成を目指した記述統計、推測統計、さらには確率をも含めた資料の活用領域の教授・学習をさらに具体化していくことが求められる。その際には、統計学が記述統計から推測統計へ連続的に発展してきたことを考慮する必要がある。つまり記述統計、確率、推測統計の教授・学習が連続的になされるように、それらの教授・学習の在り方を「ちらばり」の概念の発達を視点に探る必要がある。すなわち、資料の活用領域全体を通した「ちらばり」の概念の大局的な発達を踏まえて、記述統計、確率、推測統計それぞれの教授・学習を具体的に示していくことが求められる。

参考資料

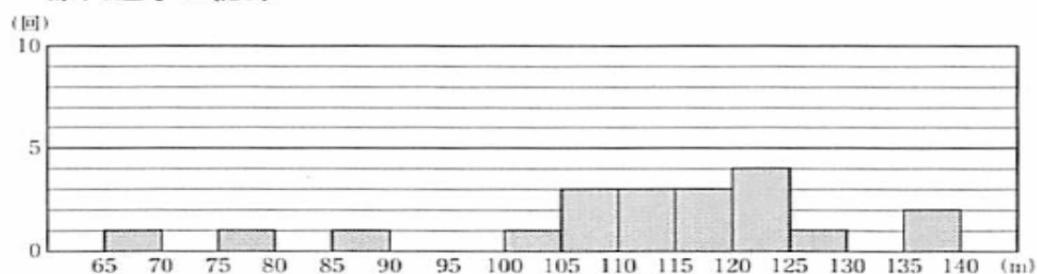
平成 24 年度全国学力・学習状況調査 中学校数学 B (スキージャンプ問題)

- 3 1998 年生まれの美咲さんは、この年に行われた長野オリンピックで日本チームが金メダルをとったスキージャンプ競技に興味をもちました。この競技では、飛んだ距離の大きさと姿勢の美しさを競います。

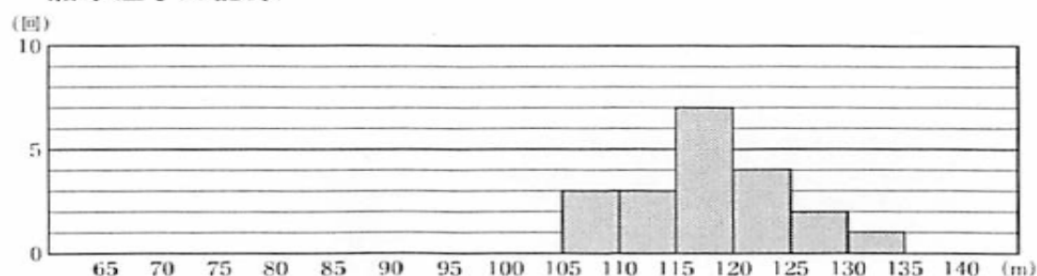
美咲さんは、このときの日本チームの原田雅彦選手と船木和喜選手の飛んだ距離の記録について調べました。下の 2 つのヒストグラムは、1998 年シーズンの長野オリンピックまでのいくつかの国際大会で、二人が飛んだ距離の記録をまとめたものです。たとえば、このヒストグラムから、二人とも 105 m 以上 110 m 未満の距離を 3 回飛んだことが分かります。

原田雅彦選手と
船木和喜選手の写真

原田選手の記録



船木選手の記録



次の(1)、(2)の各問いに答えなさい。

(1) 前ページの二人のヒストグラムから、原田選手と船木選手の飛んだ回数が同じであることが分かります。その回数を求めなさい。

(2) 美咲さんは、もしこの二人がもう1回ずつ飛んだとしたら、どちらの選手がより遠くへ飛びそうかを、二人のヒストグラムをもとに考えてみたいと思いました。

二人のヒストグラムを比較して、そこから分かる特徴をもとに、次の1回でより遠くへ飛びそうな選手を一人選ぶとすると、あなたならどちらの選手を選びますか。下のア、イの中からどちらか一方の選手を選びなさい。また、その選手を選んだ理由を、二人のヒストグラムの特徴を比較して説明しなさい。どちらの選手を選んで説明してもかまいません。

ア 原田選手

イ 船木選手



中数B-6

本研究における引用・参考文献

- Bakker, A. & Gravemeijer, K. (2004). Learning to Reason about Distribution, Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*, Kluwer Academic Publishers, pp.147-168.
- Bakker, A. & Gravemeijer, K. (2006). An Historical Phenomenology of Mean and Median, *Educational Studies in Mathematics*, vol.62, no.2, pp.149-168.
- Dörfler, W. (1991). Forms and Means of Generalization in Mathematics, Bishop, A.J. (Ed.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*, Kluwer Academic Publishers, pp.63-85.
- Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful, *Educational Studies in Mathematics*, vol.1, pp.3-8.
- Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modeling, Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, H.-W. & Niss, M. (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study*, Springer, pp.137-144.
- Gravemeijer, K. & Stephan, M. (2002). Emergent model as an instructional design heuristic, Gravemeijer et al (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education*, Kluwer Academic Publishers, pp.145-169.
- Hino, K. (2007). Toward the problem-centered classroom: trends in mathematical problem solving in japan, *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, vol.39, pp.503-514.
- Jablonka, E. & Gallert, U. (2007). Mathematisation—Demathematisation, Gellert, U. & Jablonka, E. (Eds.), *Mathematisation—Demathematisation: Social, philosophical and educational ramifications*, Sense Publishers, pp.1-18.
- Konold, C. & Pollatsek, A. (2004). Conceptualizing an Average as a Stable Feature on a Noisy Process, Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*, Kluwer Academic Publishers, pp.169-199.
- Lesh, R.(2006). New directions for research on mathematical problem solving, Grootenboer, P., Zevenbergen, R. & Chinnappan, M. (Eds.), *Identities, cultures and learning spaces* (Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia), Vol.1, pp. 15-34.
- Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). In What Ways Does a Models and Modeling Perspective Move Beyond Constructivism? , R. Lesh & H. M. Doerr (Eds), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*, Lawrence Erlbaum Associates, pp.519-557.
- Lesh, R. & Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development, *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2&3), Lawrence Erlbaum Associates, pp.166-168.
- Lesh, R., Middleton, J., Caylor, E. & Gupta, S. (2008). A science need: Designing tasks in modeling complex data, *Educational Studies in Mathematics*, vol.68, pp.113-130.

- Lesh, R. , Post, T. & Behr, M.(1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving, C. Janvier,(Ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics*, LEA, pp.33-40.
- Lesh, R. & Yoon, C. (2007). What is Distinctive in (our views about) Models & Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching? , W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn. & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education : The 14th ICMI Study*, Springer, pp.161-170.
- Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problem Solving and Modeling, Lester, F. K. (Ed.), *Second handbook of research on teaching and learning*, vol.2, Information Age Publisher, pp.763-804.
- Pfannkuch, M. & Wild, C. (2004). Towards an Understanding of Statistical Thinking, Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*, Kluwer Academic Publishers, pp.17-46.
- Reading, C. (2004). Student Description of Variation while Working with Weather Data, *Statistics Education Research Journal*, vol.3, no.2, International Association for Statistical Education, pp.84-105.
- Reading, C. & Shaughnessy, M. (2004). Reasoning about Variation, Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*, Kluwer Academic Publishers, pp.201-226.
- Shaughnessy, M. (2007). Research on Statistics Learning and Reasoning, Lester, F. K. (Ed.), *Second handbook of research on teaching and learning*, vol.2, Information Age Publisher, pp.957-1009.
- Wild, C.& Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry, *International Statistical Review*, 67, 3, pp.223-265.
- 青山和裕 (2011). 「「知の創造」の視点からの統計的リテラシーの階層に対する再検討—批判的解釈との位置づけの明確化をねらいとして—」, 『科学教育研究』, vol.35, no.2, pp.101-117.
- 阿部好貴 (2010). 『数学教育におけるリテラシー育成に関する研究』, 博士論文 (未刊行), 広島大学大学院教育学研究科.
- 阿部好貴 (2011). 「数学的リテラシーに関する研究動向」, 長崎栄三 編著, 『数学教育におけるリテラシーについてのシステミック・アプローチによる総合的研究』, 日本学術振興科学研究費補助金基盤研究 (B), pp.82-90.
- 阿部好貴 (2012). 「数学的リテラシーという視点からの教授・学習内容の考察—関数領域に焦点をあてて—」, 全国数学教育学会『数学教育学研究』, 第 18 巻, 第 1 号, pp.23-29.
- 一松信, 岡田禎雄, 町田彰一郎, 他 28 名 (2011). 『中学校 数学 3』, 学校図書.
- 伊藤伸也 (2006). 「H.フロイデンタールの教授原理「追発明」と「発見学習」の異同」, 『第 39 回数学教育論文発表会論文集』, pp.625-630.
- 岩崎秀樹 (2008). 「リテラシーを考える」, 『科学教育研究』, vol.32, no.2, pp.69-71.
- 岩崎秀樹・阿部好貴・山口武志 (2008). 「知識基盤社会における数学的リテラシーの課題と展望」, 『科学教育研究』, vol.32, no.4, pp.366-377.

- 岩崎秀樹・服部裕一郎 (2011).「数学的リテラシーからみえる数学教育学の課題と展望—中等教育段階における背景的理念—」, 長崎栄三 編著,『数学教育におけるリテラシーについてのシステミック・アプローチによる総合的研究』, 日本学術振興科学研究費補助金基盤研究 (B), pp.101-113.
- 岡本和夫, 小関熙純, 杉森馨, 佐々木武, 他 39 名 (2012a).『未来へひろがる数学 1』, 啓林館.
- 岡本和夫, 小関熙純, 杉森馨, 佐々木武, 他 39 名 (2012b).『未来へひろがる数学 3』, 啓林館.
- カイトル, C. (狭間節子・日野圭子訳) (1998).「21 世紀の数学教育の展望—数学カリキュラム: 誰に対してか, だれの利益か—」, 日本数学教育学会『数学教育学論究』, 70, pp.57-64.
- 景山三平 (2007).「第 II 部 教育統計に関する話」, 畠山良・景山三平・下村哲 共著『教員のための数学 II=統計・解析・コンピュータ』, 培風館, pp.55-113.
- 片桐重男 (2004).『数学的な考え方とその指導 第 1 巻 数学的な考え方の具体化と指導』, 明治図書.
- ガル, I. (2012).「統計リテラシーのこれから—その教育と評価への挑戦—」, 日本数学教育学会『数学教育』, 第 94 巻, 第 5 号, pp.2-10.
- 國本景亀 (1998).「機械論的・原子論的数学教育から活動的・創造的数学教育へ」, 全国数学教育学会『数学教育学研究』, 第 4 巻, pp.1-9.
- 国立教育研究所 (1991).『国立教育研究所紀要 119 集 数学教育の国際比較—第 2 回国際数学教育調査最終報告—』, 第一法規出版株式会社.
- 国立教育政策研究所 (2010).『平成 22 年度 全国学力・学習状況調査 中学校集計結果』, (<http://www.nier.go.jp/>).
- 国立教育政策研究所 (2012).『平成 24 年度 全国学力・学習状況調査 調査問題 中学校数学 B』, (<http://www.nier.go.jp/>).
- 佐藤学 (2003).「リテラシーの概念とその再定義」,『教育学研究』, vol.70, no.3, pp.292-301.
- サルツブルグ, D. (竹内恵行・熊谷悦生訳) (2006).『統計学を拓いた異才たち 経験則から科学へ進展した一世紀』, 日本経済新聞社.
- 島田茂 (1977).『算数・数学科のオープンエンドアプローチ—授業改善への新しい提案—』, ぎょうせい.
- 真野祐輔 (2011).「数学教育における数学史の活用の方法論: 課題分析のための理論的枠組みの提案」, 大阪教育大学数学教室『数学教育研究』, 第 40 号, pp.59-69.
- 長崎栄三 (2009).「人間・社会にとっての算数・数学: 何のための数学的リテラシー論か」, 日本科学教育学会『年会論文集 33』, pp.115-118.
- 長崎栄三・滝井章 編著 (2007a).『算数の力を育てる① 何のための算数教育か』, 東洋館出版社.
- 長崎栄三・滝井章 編著 (2007b).『算数の力を育てる③ 数学的な考え方を乗り越えて』, 東洋館出版社.

- 長崎栄三 (2007c).「高校数学への離散数学の導入に関する考え方」, 長崎栄三 (研究代表)『高校数学における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究 最終報告書』, 日本学術振興会科学研究費補助金 (基礎研究 B) 報告書, 国立教育政策研究所, pp.3-9.
- 長崎栄三 (2009).「算数・数学の力の育成を」, 日本数学教育学会『数学教育』, 第 91 巻, 第 9 号, p.1.
- 長崎栄三 (2011).「社会における人間の生涯を視野に置いた算数・数学教育—数学的リテラシーから見た算数・数学教育—」, 長崎栄三 編著,『数学教育におけるリテラシーについてのシステミック・アプローチによる総合的研究』, 日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究 (B), pp.91-100.
- 馬場卓也・清水浩士 (2010).「数学科の授業構成」, 岩崎秀樹 編集,『数学科授業の理論と実際 中学・高等学校編』, ミネルヴァ書房, pp.98-119.
- 平林一榮 (1987).『数学教育の活動主義的展開』, 東洋館出版社.
- 藤井良宜 (2007).「米国統計学会の統計教育ガイドライン」, 日本数学教育学会『数学教育』, 第 89 巻, 第 7 号, pp.49-54.
- ヴィットマン, E.Ch., 他 2 名 (國本景亀・山本信也訳) (2004).『PISA を乗り越えて算数・数学授業改善から教育改革へ』, 東洋館出版社.
- 宮川公男 (1999).『基礎統計学』, 有斐閣.
- 三輪辰郎 (1983).「数学教育におけるモデル化についての一考察」,『筑波数学教育研究』, 第 2 号, pp.117-125.
- ムーア, D. & マッケイブ, G. (麻生一枝・南條郁子訳) (2008).『実データで学ぶ, 使うための統計入門』, 日本評論社.
- 文部科学省 (2008).『中学校学習指導要領解説 数学編』, 教育出版.
- 吉田洋一・赤堀也 (1961).『数学序説』, 培風館.
- 渡辺美智子 (2007).「統計教育の新しい枠組み—新しい学習指導要領で求められているもの—」,『数学教育学会誌』, vol.35, 48(3・4), pp.39-51.
- 渡辺美智子 (2011).「科学的探究・問題可決・意思決定のプロセスを通して育成する統計的思考力」,『科学教育研究』, vol.35, no.2, pp.71-83.