新潟大学教育学部数学教室，『数学教育研究』，第 48 巻，第 1 号，65-129，2013.

# 目的型の算数的活動に関する研究

## —数量関係領域に焦点をあてて—

新潟大学大学院　教育学研究科
教科教育専攻　数学教育専修
大坂　睦

## 序章　本研究の目的と方法

本章では，本研究の目的と方法を述べ，論文全体の概要を示す。第 1 節では本研究の目的を，第 2 節では本研究の方法と構成を述べる。

### 第 1 節　研究の目的

算数・数学教育は合目的的な営みであり，その目的は社会的・文化的な背景の影響を受ける。今日においては「知識基盤社会」として特徴づけられている社会に対する算数・数学教育が求められる。そのような動向は，今回の学習指導要領の改訂にも大きく影響を与えており，その表れの一つが，「算数的活動のより一層の充実」と考える。しかしながら，算数的活動は《児童が目的意識をもって主体的に取り組む算数にかかわりのある様々な活動》（文部科学省，2008，p.8 ）と広く規定され，様々な活動が想定されうる。

また，数学教育研究においても「数学的活動」という考えが重要であるという認識が高まっており，特に，学校数学の目標と内容を再構成する上で鍵となる考えとして着目されている（大谷，2002）。学習指導要領の解説書では，授業の改善を図る形で「算数的活動」が例示されており，また，「算数的・数学的活動」に関する書物も多く出版されている（岩崎，2001）。しかしながら，大谷（2002）が，《数学の要領や要目に盛り込まれている個々の指導内容とは異なり，数学教育の教科の目標として「数学的活動」をどのように理解すればよいかに関しては，不明確な点も多いように思われる。》（p.4）と述べ，数学的活動それ自体の概念規定を明確にすると共に，学校数学の目標における位置付けや個別の指導内容との関連について，さらに検討を進めていくことの必要性を指摘している。このように理論と実践の両方において,数学的活動それ自体のとらえが必ずしも明確でないと考える。

このような今日的課題を意識する必要がある一方で，教科の本質として常に存在するであろう課題も軽視すべきではない。算数教育で対象となる算数は，その本性において，活動において不変なものを抽象し，一般化し，概念化したものである（岡崎，2011，p.68）ことを踏まえれば，算数教育においては本質的に活動が求められると考えられる。したがって，今日的課題として，算数的活動のより一層の充実が挙げられるが，教科の本質からもそれは強調される。このように算数的活動は，「流行」と「不易」の両方の視点より求められると解釈できる。しかしながら,改めて強調するには何らかの要因があるはずである。

したがって，今日求められる算数教育を実現するためには，算数的活動が強調されるようになった背景を明らかにし，今日の算数教育において強調されるべき算数的活動がどのような活動を示すのか，またそのための学習指導はこれまでの学習指導で対応可能である

のかということを議論する必要がある。そして，これまでの学習指導では対応しえない算数的活動に対しては，新たな学習指導のあり方を探る必要があると考える。

本研究では，上記のような課題意識に基づき，今日の算数教育で強調される算数的活動を明らかにし，これまでの学習指導で対応しえない算数的活動に対する学習指導のあり方を探ることを目的とする。

《本研究の目的》
今日の算数教育で強調される算数的活動を明らかにし，これまでの学習指導で対応しえない算数的活動に対する学習指導のあり方を明らかにすること。

## 第２節　研究の方法と構成

前節における研究目的を達成するために，次の 3 点を主要な研究課題と設定する。

（研究課題 1）　算数的活動をとらえる枠組みを構築すること。
（研究課題 2）　「課題 1」をうけて，構築した枠組みをもとに，今日の算数教育で強調される算数的活動のあり方を明らかにし,その実現に向けた課題を明示すること。
（研究課題 3）　「課題 2」をうけて，今日の算数教育で強調される算数的活動を実現するための学習指導のあり方を明らかにすること。

これらの研究課題に対し，本論文は，序章，第 1 章から第 4 章，終章の六つの章から構成される。

算数的活動をとらえる枠組みを構築する（研究課題 1）ために，数学的活動に関する先行研究を考察し，学習指導の目的に対する算数的活動の位置付けを明確にする（第 1 章)。そして，この枠組みを用いて今日強調される算数教育の実現のための算数的活動を明らかにし，今日の算数教育で強調される算数的活動がこれまでの学習指導で対応するかどうかを明らかにする（研究課題 2）ために，今日の算数教育で強調される算数的活動を，算数教育の理念的背景と社会的背景の二つの観点より明らかにし，その上でこれまでの学習指導を批判的に考察し，課題を明確にする（第 2 章)。そして，強調される算数的活動のあり方を明らかにする（研究課題 3）ために，その典型として考えられる数学的モデル化と数量関係領域を用いて具体的に考察し，授業構想を提示する（第 3 章，第 4 章)。

## 引用・参考文献

岩崎浩（2001)．「「算数・数学的活動」とそれを実現することの意味について」，上越教育大学数学教室『上越数学教育研究第 16 号』，pp.37-46.
大谷実（2002)．『学校数学の一斉授業における数学的活動の社会的構成』，風間書房.
岡崎正和（2011)．「算数的活動を活かした授業づくり」，中原忠男（編著)『新しい学びを拓く算数科授業の理論と実践』，ミネルヴァ書房，pp.63-75.
文部科学省（2008)．『小学校学習指導要領解説算数編』，東洋館出版社.

# 第１章　算数的活動とは

算数的活動は，今日強調される一方で，広く規定され，とらえがたい。教育とは合目的的な営みであることを踏まえれば，学習指導の目的に対する算数的活動の位置付けを明確にする必要があると考える。

そこで，本章では，数学的活動に関する先行研究を考察し，学習指導の目的に対して算数的活動をとらえるための枠組みを構築することを目的とする。そのために第 1 節では，現実と数学の交渉のあり方を教育的に定式化し，それを数学的活動として提案した島田（1977）の数学的活動を考察する。その上で，学習指導の目的に対する数学的活動の位置付けを明らかにするために，島田（1977）の数学的活動を「数学の方法」という視点から整理している阿部（2010），岩崎ら（2008）と「学習指導の目的」という視点から整理している長崎ら（2009）の議論を考察する。そして，第 2 節において，算数的活動をとらえる枠組みを示す。

## 第１節　数学的活動の基礎的考察

### １．島田の数学的活動

現実と数学の交渉のあり方を教育的に定式化し，それを数学的活動として提案したものとして島田（1977）の数学的活動がある（岩崎，2009）。島田（1977）は，《既成の数学の理論を理解しようとして考えたり，数学の問題を解こうとして考えたり，あるいは新しい理論をまとめようとして考えたり，数学を何かに応用して，数学外の問題を解決しようとしたりする，数学に関係した思考活動を，一括して数学的活動と呼ぶ》（p.14）として，現実の世界と数学の世界との関連という視点から，数学的活動の過程を次のように示している（図 1-1）。

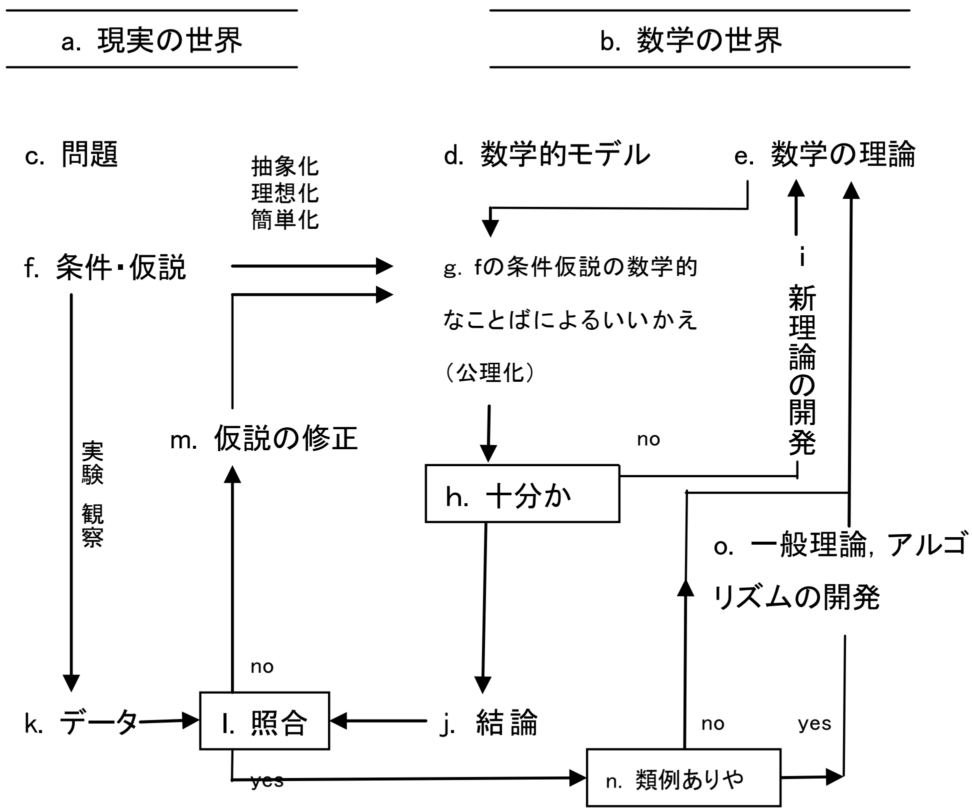



図１－１　現実の世界と数学の世界（島田，1977，p. 15）

図 1-1 においては，現実の問題から数学的モデルをつくって問題の解決が行われ，その中で数学の理論の開発あるいは発展が行われている。

「a.現実の世界」には，何らかの意味で「c.問題」があり，解決が求められている。ここでいう a.の現実の世界というのは，必ずしも物理的な経験世界だけを意味するものと限る必要はなく，b.の数学の世界より抽象度の低い世界であってもよい。c.の問題に対しては，現実の世界の経験から，その f.条件・仮説を設定し，さらに数学の理論が適用可能になるように，条件・仮説を抽象化，理想化あるいは簡単化して，数学のことばによってこれらをいいかえる。条件・仮説の設定や，抽象化，理想化，簡単化ということには，現実の世界についての知識とともに，その活動の主体がその時点までに学んでいる数学の理論が関係してくる。

数学を実際問題に応用する場合には，意識するしないにかかわらず，この f.→g.の過程があるとされ，例として，遠足の休憩後にこどもの人数を数えて全員が集まったか否かを確認する際には，個々のこどもの個性等を捨象して有限集合の理論を適用しているのであり，仕事算によってある工事の見積りをしている時は，仕事量の加法性や，作業員の能率等について理想化ないし簡単化を行って，算数の四則の世界に事柄を移し変えている，ということが挙げられている。g.の段階でまとめられた命題群は，一応検討を要する。これで当面の問題に対する解答を導くに十分なだけの条件がそろったか，いいかえると，現実

の世界の中の命題はすべて g.の公理系の中の命題に翻訳可能か，もしそうでなければ，f.の条件・仮説に追加を要する。

島田の数学的活動は，活動における思考過程を教育的に定式化したモデルである。しかしながら，具体的な学習指導を想定すれば，学習指導の目的に対して，算数的活動がどのように位置付くのかをとらえるための枠組みが必要である。そこで，学習指導の目的となると考えられる数学の内容と方法に関して島田（1977）の数学的活動を整理している先行研究を考察し，算数的活動をとらえる枠組みを構築する。

## ２．学習指導における数学的活動

ここでは，数学的活動を「数学の方法」という視点から整理している阿部（2010），岩崎ら（2008）と，「学習指導の目的」という視点から整理している長崎ら（2009）の数学的活動のとらえ方を考察する。

### 2.1 「数学の方法」としての数学的活動

阿部（2010）は，島田（1977）が示す数学的活動を，「数学の方法」ととらえている。阿部（2008a）は，「数学の方法」について《その対象は，現実上の事象と，そこから抽象された形（対象化された方法）となる。この意味で，数学とは，本質的に応用指向と構造指向の両面を有することとなり，それぞれに対して方法と対象が存在する》（p.130）と述べ，「数学の方法」は数学の本質である構造指向性と応用指向性の両方が備わっていると述べている。

岩崎ら（2008）は構造指向，応用指向における「数学の方法」を以下のようにまとめている（p.374）。

**（1）構造指向における数学の方法；**

現実の事象から数学化し，さらに数学内で数学化することで，数学の概念形成および数学を発展させることに焦点があたる。

**（2）応用指向における数学の方法；**

現実の事象から数学化し，数学的モデルを作り，数学を現実へと応用することに焦点があたる。

数学の方法として，構造指向におけるものと応用指向におけるものの二つがある（阿部，2010）が，既述したように数学は，本質的に応用指向と構造指向の両面を有するものであり，数学の内容も以下の二つにまとめることができると考える。

**（1）構造指向における数学の内容；**

数学（数学世界）を構成と発展させるための数学

**（2）応用指向における数学の内容；**

現実世界を読み解くための数学

これに関して，具体的には，以下に示すように，阿部（2010）が述べていることが挙げられる。

《数学は，その内容（対象）と方法で考えられる。数学においては，数量，図形，変化と関係，データと不確実性といった対象と，一般化に代表される構造指向と数学的モデル化に代表される応用指向の 2 つの方法がある。》（p.109）

このように,それぞれ構造指向における内容と方法,応用指向における内容と方法がある。数学の方法は，それを語る論者の立場により，様々な用語，文脈で語られている（阿部，2008b）が，数学の方法として数学を創造するための方法と数学を応用する方法として大きく二つにとらえることができる。

そして，岩崎（2007）は，数学は歴史的な思考の累積と社会的な思考の組織化によって獲得された知的道具であり，数学にはその方法にふさわしい対象があると指摘する。したがって，数学は対象によって異なるといえ，数学を創造するための数学の方法は対象の性質に依存し，領域固有性をもつととらえることができる。

以上より，数学的活動は数学の方法的側面であるととらえることができ，その一連の活動の中に数学の概念形成および数学の発展へと向かう構造指向的側面の活動と数学を現実へと応用することへと向かう応用指向的側面の活動の大きく二つの活動を想定することができる。

### 2.2 「学習指導の目的」という視点からみた数学的活動

長崎ら（2009）は，数学的活動を，数学の内容と方法との両者に関わる広い意味を持つものとしてとらえ，数学的活動を学習指導の目的の違いによる以下の二つの視点で整理している（pp.44-47）。

**（1）活動を通して数学の内容を理解すること**

子どもにとって，数学の内容を理解するとは，数学的活動を通して自ら数学の世界を豊かにすることである。島田の数学的活動では,「類例」→「一般理論・アルゴリズムの構築」→「数学の理論」という一般化や体系化の活動に位置付けられる。

**（2）活動を通して数学の方法を学ぶこと**

数学の方法は，内容と切り離して学ぶことはできない。島田の数学的活動は，数学の内容と方法を一体のものとしてとらえ，子どもが数学的活動を通して数学の方法を身に付けていくことを示している。

それぞれの具体例として，以下のようなものを挙げている。

**（1）活動を通して数学の内容を理解すること**

正負の数の加法において，例えば－8 と＋5 の和は，－（8－5）と表現できるが，このアルゴリズムは，＋5 を打ち消すために－8 を－5 と－3 に分割し，＋5 と－5 の和が 0 とな

って－3 が残るという思考を整理したものである。このことを，多くの整数，または有理数の場合について経験しながら，有理数を理解しその世界をつくっていく。

（2）活動を通して数学の方法を学ぶこと

「もとの四角形としてどんなものを考えるか」「中点を順に結ぶ四角形はどのようにつくられるのか」「その四角形は何か」等を調べることにより，「四角形の各辺の中点を順に結んでできる四角形は平行四辺形である」という証明において，子どもがこの命題を構成的にとらえ，条件や仮説を自ら整える活動である。このとき，四角形の形を変え，それに伴って何が変わって何が変わらないかを考える活動を通して，命題の意味が分かり，どんな場合にも平行四辺形ができることの不思議さに気付く。また，平行四辺形になることを示すための根拠として何が使えるかを，自分のもつ数学の世界で探っていく活動につながる。「二等辺三角形の底角は等しい」ことの証明と異なるのは，未知の事柄を示すために既知の事柄に置き換えるという側面が強く意識できることである。

このようにみると，数学的活動は，数学的活動（「数学の方法」）を通して「数学の内容」を理解する活動と，「数学の内容」を使って，数学的活動（「数学の方法」）そのものを身に付ける活動とに区分できる。なお，それぞれの活動の目的と方法は逆になっている。

## 第２節　算数的活動をとらえる枠組み

### １．算数的活動をとらえる枠組み

島田（1977）の数学的活動を「数学の方法」という視点から整理している阿部（2010），岩崎ら（2008）と，「学習指導の目的」という視点から整理している長崎ら（2009）の数学的活動のとらえ方をみていくと，数学的活動は，算数的活動（「数学の方法」）を通して「算数の内容」を理解する活動と，「算数の内容」を使って，算数的活動（「数学の方法」）そのものを身に付ける活動とに区分できる[1]。前者を方法型，後者を目的型とし，以下のようにまとめることができる。

①方法型の算数的活動：
　算数的活動（数学の方法）を通して，算数の内容を理解する。
　　学習指導の目的：算数の内容
　　学習指導の方法：数学の方法
②目的型の算数的活動：
　算数の内容を使って，算数的活動（数学の方法）そのものを身に付ける。
　　学習指導の目的：数学の方法
　　学習指導の方法：算数の内容

[1] 本研究は算数教育を対象としているため，本研究での議論の際には，算数教育と数学教育のそれぞれの理念的基盤を考慮し，「算数的活動」，「算数の内容」として示すが，数学の方法については，算数教育と数学教育で程度の差はあるが本質的に異なるとは考えられないため，「数学の方法」として示す。先行研究の引用の際はそこでの用い方にしたがっている。

算数的活動は「数学の方法」としてとらえることができ，構造指向と応用指向の両面を持つ。構造指向においては数学の内容が，応用指向においては方法が，学習指導の前景として現れる（阿部，2010，pp.144-145）。したがって，それぞれの学習指導の場面で，構造指向と応用指向のどちらが強調されるのかに応じて，学習指導の目的と方法は異なり，つまり，どちらの型で学習指導を行うかは，学習目標に応じて異なるといえる。

## ２．算数的活動の具体例

算数的活動をとらえる枠組みを構築したが，それぞれがどのような活動であるかということを，ここでは『小学校学習指導要領解説算数編』（文部科学省，2008）を参照して，以下に示す。

### 2.1　方法型の算数的活動

方法型の算数的活動の例として，第 2 学年の〔C 図形〕をあげることができる。『小学校学習指導要領解説算数編』におけるこの領域の概要をまとめれば次のようになる（pp.81-82）。

ねらい

正方形，長方形，直角三角形を格子状に並んだ点を使ってかいたり，紙を折って作ったりする活動を通して，構成要素に着目して，正方形，長方形の特徴を実感的に理解できるようにすること。

内容

正方形，長方形，直角三角形をかいたり，作ったり，それらで平面を敷き詰めたりする活動

想定される活動

・格子状に並んだ点を結んで，正方形，長方形，直角三角形をかく活動を通して，図形を構成する要素をとらえさせること。
・長方形の紙を折って正方形を作る活動を通して，構成要素に着目して説明する力を育てていくようにすること。
・紙の四か所を直角に折っていって，長方形を作る活動を通して，構成要素に着目させること。
・直角三角形を正方形や長方形を対角線で二つに分けることによって作ったり，同じ大きさの直角三角形で長方形や大きな直角三角形を作ったりすることができること。
・身の回りの具体物の中から，三角形や四角形の形をしたものを取りだしてみる活動も大切である。
・正方形，長方形，直角三角形それぞれで平面を敷き詰める活動を通して，平面の広がりや，一定のきまりにしたがって並べることによってできる模様の美しさについて感じることができるようにすることが大切である。

ここでは，正方形，長方形，直角三角形を格子状に並んだ点を使ってかいたり，紙を折って作ったりする算数的活動を通して，正方形や長方形といった算数の内容を理解するもの

であり，算数的活動を学習指導の方法として，算数の内容を理解することがねらいとされている。

## 2.2 目的型の算数的活動

目的型の算数的活動の例として，第 4 学年の〔D 数量関係〕をあげることができる。『小学校学習指導要領解説算数編』におけるこの領域の概要をまとめれば次のようになる（pp.134-135）。

ねらい

身の回りから，伴って変わる二つの数量を見いだし，それを表や折れ線グラフなどを用いて表し，二つの数量の間にある関係を調べるなど，表やグラフを活用できるようにすること。

内容

身の回りから，伴って変わる二つの数量を見付け，数量の関係を表やグラフを用いて表し，調べる活動

想定される活動

- 数量や図形に関する問題を解決するときに，求めるものは他のどんなものと関係があるか，何が決まれば他のものが決まってくるかというように，求めるものと他のものとを関連付けてみる見方が大切である。
- 二つの変化する数量の間にある関係を明確にすることが必要である。そのためには，対応する値の組を幾つも求め，順序よく表などに整理したり，グラフを用いて表したりして関係を調べる活動を指導する。
- こうした活動を通して，関数の考えや統計的な見方を伸ばすとともに，そのよさや有用性を実感させ，進んで生活や学習に生かそうとする態度を養うよう配慮することが大切である。

ここでは，算数の内容である表やグラフなどを用いて，二つの数量を表し，数量の関係を調べるという算数的活動である。表やグラフを活用する能力を育成するものであり，したがって，算数の内容を用いることを学習指導の方法として，数学の方法を身に付けることがねらいとされている。

## 本章のまとめ

第 1 章では，学習指導の目的に対して，算数的活動の位置付けを明確にするために，算数的活動をとらえる枠組みを構築することがねらいであった。

第 1 節では，数学的活動に関する先行研究を考察した。現実と数学の交渉のあり方を教育的に定式化し，それを数学的活動として提案した数学的活動として島田（1977）の数学的活動がある。しかしながら，島田の数学的活動では，学習指導の目的が明示されていないため，実際の学習指導場面において，その目的に対する数学的活動の位置付けが明確でないと考えられた。そこで，学習指導の目的に対する数学的活動の位置付けを明らかにするために，島田（1977）の数学的活動を「数学の方法」という視点から整理している阿部

（2010），岩崎ら（2008）と「学習指導の目的」という視点から整理している長崎ら（2009）の議論を考察した。その結果，数学的活動には，数学的活動（「数学の方法」）を通して「数学の内容」を理解する活動と，「数学の内容」を使って，数学的活動（「数学の方法」）そのものを身に付ける活動とに区分することができた。

第 2 節において，算数的活動をとらえる枠組みを示した。

**①方法型の算数的活動**：
算数的活動（数学の方法）を通して，算数の内容を理解する。
学習指導の目的：算数の内容
学習指導の方法：数学の方法
**②目的型の算数的活動**：
算数の内容を使って，算数的活動（数学の方法）そのものを身に付ける。
学習指導の目的：数学の方法
学習指導の方法：算数の内容

算数的活動は，「数学の方法」としてとらえることができ，構造指向と応用指向の両面をもつ。構造指向と応用指向それぞれに内容と方法があり，構造指向においては算数の内容が，応用指向においては数学の方法がそれぞれ前景に現れることになる。したがって，学習目標に応じてどちらの型で行うかは異なる，ということを論じた。

## 引用・参考文献

阿部好貴（2008a）.「数学的リテラシー育成の方向性に関する考察」，日本科学教育学会『第 32 回年会論文集』，pp.129-132.

阿部好貴（2008b）.「数学的リテラシーの育成に関する基礎的研究―「数学の方法」としての数学化と数学的モデル化の関係の考察―」，全国数学教育学会『数学教育学研究第 14 巻』，pp.59-65.

阿部好貴（2010）.『数学教育におけるリテラシーの育成に関する研究』，学位論文（未刊行），広島大学大学院教育学研究科.

岩崎秀樹（2007）.「先行する研究と残された課題」，『数学教育学の成立と展望』，ミネルヴァ書房，pp.1-13.

岩崎秀樹（2009）.「リテラシーからみえる数学教育学の課題―中等教育段階における背景的理念―」，日本数学教育学会『第 42 回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録及び要項』，pp.32-37.

岩崎秀樹・阿部好貴・山口武志（2008）.「知識基盤社会におけるリテラシーの課題と展望」，日本科学教育学会『科学教育研究』，Vol.32 No.4. pp.366-377.

島田茂（1977）.『算数・数学科のオープンエンド　アプローチ―授業改善への新しい提案―』，みずうみ書房 pp.9-21.

長崎栄三・國宗進・太田伸也・相馬一彦　（2009）.『豊かな数学の授業を創る』，明治図書.

文部科学省（2008）.『小学校学習指導要領解説算数編』，東洋館出版社.

## 第２章　今日の算数教育からみたこれまでの学習指導の課題

算数的活動をとらえる枠組みを構築したが，今日求められる算数教育を実現するためには，算数的活動のより一層の充実の意味，つまり，今日の算数教育において強調される算数的活動を明らかにし，これまでの学習指導で対応可能であるかどうかを探る必要があると考える。

第 2 章では，今日的な視点より，これまでの学習指導の課題を明確にすることを目的とする。第 1 節では，これまでの学習指導を考察する。第 2 節において，算数教育の理念と今日的動向の視点より，今日の算数教育で強調される算数的活動を明らかにし，第 3 節において，これまでの学習指導を批判的に考察し，課題点を指摘する。

### 第１節　これまでの学習指導

#### １．問題解決の導入理念

今日の学習指導としては，算数的活動のより一層の充実が求められているが、それを実現するためには、これまでの学習指導で対応可能であるかどうかを探る必要がある。したがって、これまでの学習指導を振り返り，そして今日的な視点からこれまでの学習指導を批判的に考察する必要があると考える。そのためにまず,これまでの学習指導をみてみる。

これまでの学習指導は，問題解決で行われてきたと考えられる。今日の日本の問題解決は 1980 年 NCTM（米国）のアジェンダによるところが大きく，現代化によって強調された数学の特性や原理の発達に，子どもの創造性や数学的思考の育成を統合しようとするものであった（Hino，2007）。

これまで，学習指導要領は数回改訂されている中で，目標は様々に変化しているが，数学的な考え方の育成は一貫してみることができる（溝口，2010）。問題解決においても数学的な考え方の育成という理念は引き継がれており，問題解決と数学的な考え方は一体のものとしてとらえられてきた（長崎，1990 ; Hino，2007）。つまり，これまでの学習指導は，「問題解決による数学的な考え方の育成」と集約できる。

また，問題解決を学習指導の場面で用いる目的として，以下の 2 点がある（伊藤,1991）。

| |
|---|
| ・新しい概念や原理・性質などを獲得すること<br>・有効な方法を獲得すること |

「新しい概念や原理・性質などを獲得すること」は,《既知のものと新しいものとを適切に関連づけ，それを組み込むことにより新しい知識の体系を自分の頭の中に作り上げる》(伊藤，1991）ことであり，「内容」としての側面である。また，「有効な方法を獲得すること」は，《ある問題の解決で有効に働いた「方法」に目を向け，その方法を次の問題の解決にも使えるようにしようと考える》（伊藤，1991）ことであり，「方法」としての側面である。したがって，上述した算数的活動と同じように，問題解決においても，内容の理解を目的とする方法型と方法の育成を目的とする目的型の両者があることがわかる。

#### ２．問題解決の実際

上述したように，問題解決においては数学的な考え方の育成が重視されてきた。数学的

な考え方は,《算数・数学教育の目標としての実質陶冶と形式陶冶を総合しようとする中で生まれてきた》（長崎，2007，p.166）とあるように，数学の内容と方法の両方が含まれている。しかし，阿部（2010）が《問題解決の導入理念そしてその本性は応用指向であるが，その目標である数学的な考え方は構造指向である》（p.147）と述べているように，これまでの問題解決における数学的な考え方は，島田（1977）の数学的活動の「数学の世界」に焦点をあてたものであるといえる[2]。

また，これまでの数学教育の現状について長崎（2007a）は，以下のように述べている。

《子どもたちが数を自由に扱え，計算ができ，量の区別ができ，図形の名称が言え，簡単なグラフがかけ，そして日常的な問題を算数で解けるようにすることが大切だと思われ，算数・数学の概念を理解し，知識をきちんと身につけることが最大の目標とされてきた。》（p.19）

《ほとんどの場合，算数・数学の概念を形成し理解を深めるためのものとして扱われ，重点は新しい概念の形成や理解に置かれる》（p.22）

これらの指摘より，これまでの算数教育では，数学的な考え方の育成，つまり数学の方法よりも，丁寧で分かりやすい学習指導が重視され，算数の内容の学習指導，すなわち，方法型の問題解決に重点が置かれていたといえる。そして，そこでは児童自らが知識を構成していくというよりは，教師により分かりやすく教授されることになっていたと考えられる。

また，問題解決は，一般に「問題の提示」,「自力解決」,「解決の練り上げ」,「振り返り・評価問題」といった基本的な流れを踏む（溝口,2010)。この流れは，自力解決により，得られた解答を，集団で練り上げて，その解答に客観性を持たせるというものであり，ここでは算数をつくることが行われていると考える。このような学習指導は，目的型であれ方法型であれ同様に行われていると考える。

この問題解決のプロセスを認識論的にみてみる。これまでの問題解決の認識論について岩崎（2007）は,《個としての認識主体にベースをおき客観的真理の不可知を前提とする急進的構成主義と,集合的な経験や知識のプールを前提とする社会・文化主義との協調》(p.6)が基盤にあることを指摘している。それは例えば,「解決の練り上げ」に至るまでは子ども自身による知識の構成すなわち構成主義がその前提に位置付いているようにみえるが，授業のまとめで取り扱われる知識はあらかじめ教科書で規定されており，すなわち社会文化主義が前提に位置付いていることからもうかがえる。以下のように図示することができる（図 2-5)。

[2] 島田（1977）の数学的活動は,「オープンエンド」すなわち現実の世界の問題解決を目指しており，本来は応用指向をねらうものであった。しかし，実際には構造指向に焦点が当てられ，解法の多様性が強調された（cf.長崎，2007b)。

「問題の提示」
↓
「自力解決」
↓
「解決の練り上げ」
↓
「振り返り・評価問題」

構成主義

社会文化主義

**図２－５　問題解決のプロセスと認識論**

このような展開では，結局は，知識は子どもが自らつくり出しているのではない（Gravemeijer，2002）ととらえることができる。このことは，平林（1987）が構成主義における問題に関して,《数学は，主体の能動的構成物であるにしても，知識の中でも最も客観的なものである》（p.55）と述べているように，個々の活動をベースに主観的に多様な考え方がなされるが，数学の知識はただ一つの客観性をもったものであり，知識の獲得を目標とした場合,ただ一つの知識に集約されるということに起因すると考えることができる。

これに関して馬場ら（2010）は，以下のように述べ，知識の構成過程を整理したものである教科書の展開と生徒の思考過程は必ずしも一致するものではなく，生徒自身が考える授業の構成，つまり数学的活動をいかに行わせるかが教師の課題であることを指摘している。

《教師にとって重要なことは，そのような授業をどのように構成するかということであろう。その基本は，授業とは単なる知識伝達の場ではなく，考えるのは生徒であるというごく当たり前のことである。教科書に書かれていることはすでに整理されているのに対して，生徒の思考は必ずしもそうではない。》（pp.104-105）

## ３．問題解決の成果

ここで，全国学力調査の結果を考察することで問題解決の学習指導の成果を明らかにする。平成 22 年度の調査結果は以下（表 2-1）のようにまとめることができる。

**表２－１　平成２２年度全国学力調査結果**

| 評価の観点 | 学習指導要領の領域 | 正答率（%） | 出題数 |
|---|---|---|---|
| 数量や図形についての表現・処理 | 数と計算 | 87.0， 84.4， 89.7， 83.4， 86.2 | 5 問（A） |
| | 量と測定 | 82.9 | 1 問（A） |
| | 図形 | 88.4 | 1 問（A） |
| | 数量関係 | 66.3，74.0，96.0 | 2 問(A),1 問(B) |
| | | 61.6 | 1 問（B） |
| 数量や図形 | 数と計算 | 54.1，40.6 | 2 問（A） |

| | | | |
|---|---|---|---|
| についての知識・理解 | | 69.0 | 1問（A） |
| | 量と測定 | 70.4 | 1問（A） |
| | | 80.3，55.5，82.3 | 3問（A） |
| | 図形 | 76.3，84.9 | 2問（A） |
| | 数量関係 | 57.8，42.7 | 1問(A),1問(B) |
| | | 69.2 | 1問（B） |
| 数学的な考え方 | 数と計算 | 56.2 | 1問（B） |
| | 量と測定・図形 | 33.5 | 1問（B） |
| | 図形 | 65.9，65.1 | 2問（B） |
| | | 32.0，14.9 | 2問（B） |
| | 数量関係 | 40.2 | 1問（B） |
| | | 17.4 | 1問（B） |

※A，B は，それぞれ A 問題，B 問題を示す。

表 2-1 は国立教育政策研究所が作成した「設問別集計結果」の表に基づき，評価の観点を視点としてまとめ直したものである。これをみてみると，B 問題における数学的な考え方に関する問題において，正答率が低いことがみてとれる。これは，算数の内容的側面においては成果がみられるが，数学の方法的側面に課題があることを示しており，目的型の算数的活動の学習指導における課題を顕在化させているといえる。

さらにこれらを分析的にみてみる。「数学的な考え方」の正答率が低い問題をみてみると，正答率 33.5%の量と測定・図形の問題（図 2-1）を除き，それらの問題の多くは現実の問題の解決を目的とする問題である（例えば，図 2-2，図 2-3）。つまり，それらの多くは応用指向的な方法を問うており，ここに課題があるということがうかがえる。

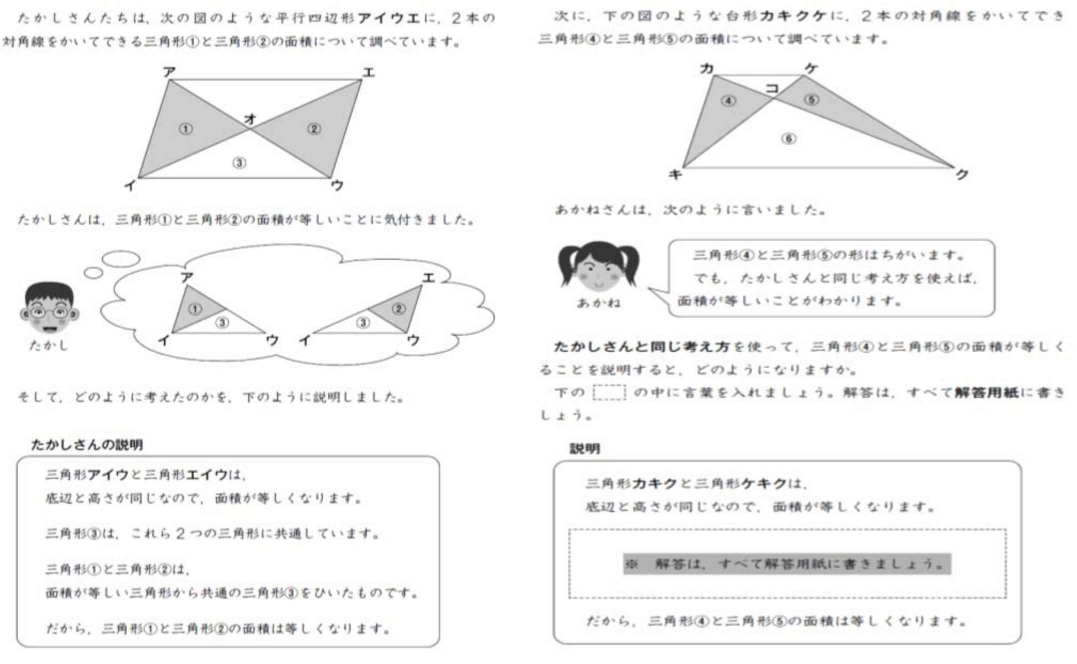
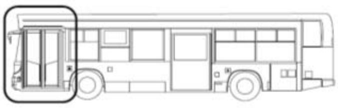



図２−１　「量と測定・図形（正答率：３３．５%）」問題

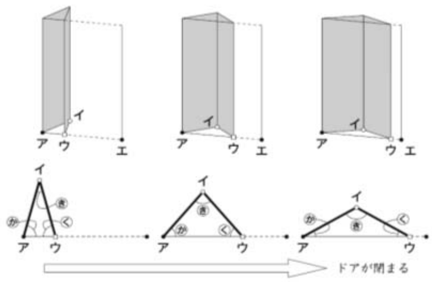
次のようなバスのドア（□の部分）について考えます。このドアは，折りたたんで開け閉めします。



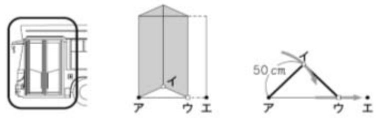
幸子さんと洋平さんは，ドアの閉まる様子を観察して，次のことに気付きました。

ドアは，２つの合同な長方形がつながってできています。ドアが完全に開いているときは，２つの長方形はぴったり重なります。

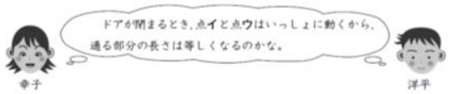
また，ドアが閉まる動きを表すと下の図のようになり，ドアの下には三角形ができます。




(2) ふたりは，次の図のように，点**イ**と点**ウ**はそれぞれ別の部分を通ることに気付きました。

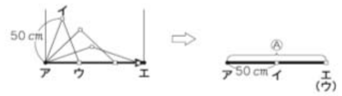



そこで，ふたりは，次のように考えました。



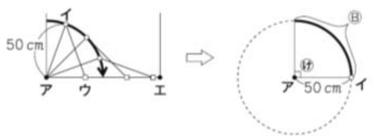

点**ウ**が通る部分の長さと，点**イ**が通る部分の長さを比べます。
辺**アイ**の長さは 50 cm です。

幸子さんは，点**ウ**が通る部分について，次のように考えました。




点**ウ**が通る部分（Ⓐ）は，点**ア**と点**エ**を結んだ直線になります。
Ⓐの長さは，辺**アイ**の長さの２倍になります。
　50 × 2 = 100
Ⓐの長さは，100 cm です。

洋平さんは，点**イ**が通る部分について，次のように考えました。




点**イ**が通る部分（Ⓑ）は，点**ア**を中心として，辺**アイ**を半径とする円周の一部になります。
角けの大きさは 90 度です。

点**イ**が通る部分（Ⓑ）の長さと，点**ウ**が通る部分（Ⓐ）の長さ（100 cm）を比べると，どのようなことが言えますか。

下の **1** から **3** までの中から正しいものを１つ選んで，その番号を書きましょう。また，その番号を選んだわけを，Ⓑの長さを求める式と言葉を使って書きましょう。

ただし，円周率は 3.14 とします。

**1**　Ⓑの長さは，Ⓐの長さ（100 cm）より長い。
**2**　Ⓑの長さは，Ⓐの長さ（100 cm）より短い。
**3**　Ⓑの長さは，Ⓐの長さ（100 cm）と等しい。

図２−２　「図形（正答率：１４．９％）」問題

(2) ひろしさんは，下のような定価で売られているシャツ，ズボン，くつを１品ずつ買います。

| ア | イ | ウ |
|---|---|---|
| シャツ 定価1900円 | ズボン 定価3900円 | くつ 定価5800円 |

ひろしさんは，右の図のような割引券を１枚持っています。その割引券には，「１品に限り，定価の20％引き」と書かれています。

割引券
１品に限り，
定価の20％引き

シャツ，ズボン，くつのうち，どれに割引券を使うと，値引きされる金額がいちばん大きくなりますか。

上の ア から ウ までの中から１つ選んで，その記号を書きましょう。また，その記号の商品に割引券を使うと，値引きされる金額がいちばん大きくなるわけを，言葉や式を使って書きましょう。

図２−３　「数量関係（正答率：１７．４％）」問題

以上のことから,これまでの学習指導としての問題解決の成果から,目的型の算数的活動,さらに言えば，応用指向的な方法に課題がみられるといえる。

## 第２節　今日の算数教育で強調される算数的活動

数学教育における目的・目標の構造について阿部（2010）は，以下のようにまとめている。

人間形成

陶冶的目的　実用的目的　文化的目的

関心・意欲・態度　見方・考え方　表現・処理　知識・技能

図２−４　目的・目標の階層（阿部，2010，p.103）

数学教育の目的は，「人間形成」を頂点とし，その実現のために「陶冶的目的」，「実用的目的」，「文化的目的」が位置づいている。さらに，その下位概念として「関心・意欲・態度」，「見方・考え方」，「表現・処理」，「知識・技能」という観点から目標が位置づいている。カリキュラムはこれら目的・目標を達成するための手段である。

阿部（2010）は,《人間形成を頂点とする目的・目標のあり方は不易であろうが，その一方で人間形成のあり方は不易ではなく，むしろ流行である。つまり，求められる人間像は

その時代や文化に深く依存する。例えば，産業基盤社会においては市民に求められる人間像は識字的リテラシーを有することであり，今日の知識基盤社会において求められるそれとは異なることは明らかである》（p.104）と述べており，数学教育により育成するべきものは社会に依存し，変化することがわかる。よって，数学教育のあり方を考える際は，今日の社会に目を向ける必要があるといえる。ただし，教育の今日的課題という意味での「流行」を常に意識する一方で，時代は変わっても，各教科の本質として常に重視しなければならない「不易」の部分も看過すべきではなく，不易と流行を適切に調和させながら，その時代に見合った数学教育を展開する必要がある（山口，2008）。

今日では，算数的活動はより一層の充実が求められている。既述したように，算数的活動は学習指導の目的に対する位置付けから，方法型と目的型に分けることができた。ここで，算数教育の理念的背景と今日的動向を考察することで，今日の算数教育における算数的活動のあり方を明らかにする。

## １．算数教育の理念

岩崎（2006）は，初等教育について以下のように述べている。

《初等教育は義務教育として一つの完成教育であり，全ての子どもに将来の社会人として不可欠な基本的知識・技能を身につけさせることをその目標としていた。それは本来的に職業的な意味を含め，日常生活の必要性に応ずるものであった。》（p.15）

このようにみれば算数教育の理念的基盤はリアリズムにある（岩崎，2009）といえる。したがって，算数的活動においてもこの理念的基盤が反映されると考えられ，算数的活動ではリアリズムに基づき，現実的な内容が扱われる活動が主たる活動になるといえる。これを本研究の枠組みでとらえると，目的型に対応する。

また，岩崎（2006）は，中等教育について，《一方中等教育は伝統的に人文主義的な教養を授けることを目標とし，初等教育における日常生活的な知識・技能とは無関係なものであった。》（p.15）と述べている。

このことから，算数と数学の理念的基盤は，それぞれリアリズムとアカデミズムにある（岩崎，2009）と解釈することができる。つまり，本質的に算数的活動においては，リアリズムに基づき現実的な内容を，数学的活動においては，アカデミズムに基づき数学的な内容を扱うことが主たる活動になると想定することができる。これを既述の枠組みからみると，前者は目的型に対応し，後者は方法型に対応する。

このことはそれぞれの活動における理念的な基盤を示している。その一方で，算数と数学は連続的に行われており，そこには接続の問題が包含される。つまり，算数的活動はリアリズムを基盤としながらも，アカデミズムを基盤とする数学的活動に接続するための道が開かれていなければならない。そして，数学的活動はリアリズムを昇華させ，アカデミズムへと展開されるべきであろう。つまり，算数的活動と数学的活動は理念的基盤に違いがあるが，両者の接続を考慮し展開される必要があると考える。

## ２．算数教育の今日的動向

今日の社会について，Jablonka&Gellert（2007）やカイテル（1998）は，「数学化」という視点から「数学化された社会と脱数学化された個人」と特徴づけている。カイテル（1998）は，《社会では，数学の重要性は増大し，他方，学校での数学の重要性は減少している，といった相互に矛盾する関係にある》（p.58）と述べており，社会の変化に対して数学教育のあり方も変化が求められることを指摘している。そして，その方向性について以下のように述べている。

《数学教育は，もはや数学そのもの，アカデミックな知識を探究することだとみなすわけにはいかない。学問の個々の断片を，一つ，次に一つと教え，いつまでたっても全体に行き着かない。生徒たちは個々の断片だけしか得ていない。このような体系は，いいカリキュラム構成とはいえない。特に，文脈の中で数学が強調される方向に変えなければならない。・・・科学や数学における未来の有能な労働力を育てるというこれまでの目標は，民主主義社会において，市民として行動する力を与える数学を教えることへ変わっていく必要がある。そして個人的労働力ではなく，市民としての集団的労働力の全体へと変えていく必要がある。》（pp.59-60）

西村（2010）は，このような社会に必要な能力について以下のように述べている。

《数学化された社会に能動的に参加していくためには，「社会の問題」を数学モデル化過程を通して解釈できることや，他者の作成した数学的モデルや判断に対して，「社会の問題」をどのように翻訳し，どのような仮定をおいて定式化した結果なのか等を批判的に評価できることが必要》（pp.25-26）

さらに西村ら（2011）は，《現代社会は，知識が急速に変化し陳腐化する「知識基盤社会」とよばれ，固定的な知識の習得よりも，数学的論拠に基づいて社会を分析し解釈する能力のほうが重要視されている。》（p.2）と述べ，内容よりも方法に注目する必要性を指摘している。また，阿部（2009）も同様に次のように述べている。

《今日そしてこれからの社会に目を向ければ，隅々まで数学が埋め込まれたような社会（「数学化された社会」）では，必要に応じて暗黙的な数学（implicit mathematics）を認識するリテラシーが不可欠になる。社会が数学化されるほどに，社会に実体化（realized）される数学の内容は，質的に高度化し，量的に増加することになる。それ故，これまでと同様に数学の内容という視点からカリキュラムを構成するのであれば，個人が学校において習得すべき内容は，大幅な増加を必要とするであろう。》（p.56）

このように社会が数学化され，知識・情報・技術が変化していく現代においては，数学的に解釈する力や自ら考え判断する力が必要であり，その意味で，固定された内容ではなく，方法に注目することが重要であると考える。つまり，今日の社会の視点からみると，目的型に注目した算数的活動の学習指導が強調されるといえる。

## ３． 強調される算数的活動

以上の考察より，算数的活動の本性そして算数・数学教育の今日的動向の両方から目的型の算数的活動に注目する必要性が示唆され得る。したがって，今日の算数教育のあり方として，数学の方法の育成を目的とする目的型の算数的活動に着目したい。また，このような動向は，学習指導要領の改訂においてもみられ，算数的活動が学習指導の内容として位置づき，他の内容領域と並立されていることからもうかがえる。これまでのカリキュラム構成原理は個別学問領域の知的主題の系統的展開に従うものであり,算数･数学科では,学習指導要領を見れば明らかなように,数学内容の系統的展開を基軸に編成されているが,これからはむしろ数学の方法的側面に注目する学習指導が求められるといえる（岩崎ら，2010)。しかしながら，これは方法型の算数的活動を否定するものではなく，もちろん，そこには方法型との接続の問題が内在していることに留意しなければならない。

これまでの学習指導は数学的な考え方の育成を目標としてきた。そのような学習指導では，構造指向的側面に焦点が当てられ，現実の問題は解決するためのものではなく，算数の内容を理解するためのものとして扱われてきたと考える。そのため，現実の問題を解決する活動にはなりにくく，いかに分かりやすく算数の内容を教授するかということに重点が置かれ，数学の方法の育成までには至らなかったのではないかと考えられる。このことにより，応用指向的側面と構造指向的側面の両方を包含している算数的活動に対しては，構造指向的側面に焦点があたる数学的な考え方だけではなく，新たな目標概念の必要性が示唆される。

この新たな目標に位置づくものとして，長崎ら（2007）の「算数の力」に着目したい。これは,《日本の伝統である数学的な考え方を乗り越えて，算数・数学のより一層広範な考え方や方法を活動を通して身につけ，いろいろな場面で使えるようにすることへと転換する》(長崎，2007a，p.25）ことの必要性によって構成されたものである。また，構造指向的側面での方法といえる数学的な考え方や応用指向的側面の方法といえる数学的モデル化と関連があり,目的型の算数的活動を含んだ目標にもなりうるものと考えることができる。そして，算数のあらゆる活動にかかわる力であり，算数的活動によって育成される力とされている。大きく次の四つの力で構成されている。

**「算数を生み出す力」**

算数の概念を理解し形成するために，算数のきまりや方法を考えたり発展させたりする力

**「算数を使う力」**

算数の概念を現実の世界で使うために，現実の問題を算数の問題としてとらえたり算数で処理したり判断したりする力

**「算数で表す力」**

算数で考えたり算数を使ったりするために，式・表・グラフ・図などの数学的表現を扱う力

**「算数で考え合う力」**

算数を集団で協同して創り上げるために，算数の学習において数学的表現を用いて算数の内容について集団の参加者みんなで考える力

これらの力は関連し合っているものであり，それらの関連付けを行った上で，育成のための学習指導を探る必要があると考える。

本研究においては，算数的活動の目標として，この「算数の力」を育成することを位置づけ，これらの力の育成を通して，算数の内容と数学の方法の習得を図るための学習指導を探ることとする。しかしながら，本研究では，このような力を目標とすることを念頭において考察を進めることとし，具体的な議論までは行わない。

## 第３節　これまでの学習指導の課題

これまでの学習指導である問題解決は，理念的には応用指向として導入され，現実の問題を解決する学習指導がねらわれてきた。しかし，そこで目標とされる数学的な考え方は構造指向に重点が置かれており，実際の学習指導は算数の内容の理解に焦点化されていたと考える。これは，本研究で示した枠組みでいうと，方法型の算数的活動が行われてきたことを示している。さらに言えば，分かりやすく教えることに重きが置かれ，児童が自ら算数の内容を理解するようなものではなかったとも考えられる。つまり，方法型ともいいにくいものであったということも想定される。そして，このような学習指導は，全国学力・学習状況調査の結果から，算数の内容の理解に関しては成果がみられるが，数学の方法の育成に関しては課題がみられるということが示唆された。

それでは，このような課題の要因は何であるのか。目的型の算数的活動はなされていないということなのだろうか。第 1 章第 2 節の算数的活動の具体例であげたことからも，学習指導要領において目的型で扱う内容は示されており，目標には位置づけられていることがわかる。しかし，例えば，具体例であげた第 4 学年の数量関係の学習指導において，グラフや表などを用いた算数的活動によって，グラフや表を活用する能力を育てることがねらいとして挙げられているが，教科書をみると，データが与えられ表やグラフを作る活動が中心にある。つまり，グラフや表といった算数の内容が学習指導の焦点となっていることが想定されうる。

既述したように，算数的活動の本性，さらには，算数・数学教育の今日的動向からも，目的型の算数的活動が強調される。しかしながら，これまでの学習指導においては，目的型の内容に対しても方法型の学習指導がなされてきたのではないかと考えられる。ここに，学習指導をあらためて見直す必要がある[3]。

これからは内容の理解だけでなく，内容を使って考えるという方法の習得を目指した学習指導が強調される。そこでは，解が一つということはなく，さまざまな視点からアプローチの仕方を模索し，さまざまな状況を考慮した上で解決方法を決定する力が求められることになる（滝井，2007）。したがって，これまでの学習プロセスとは異なる学習プロセスを探る必要があると考える。そして，全国学力・学習状況調査結果において，これまでの問題解決の「問題の提示」，「自力解決」，「解決の練り上げ」，「振り返り・評価問題」といった学習指導のプロセスは，方法型の学習指導では成功的であったが，目的型の学習指導としては成功的とはいえないものであった。このことは，これまでの学習指導のプロセス，

[3] これに加えて，目的型の算数的活動における学習指導を探った上で，方法型の算数的活動における学習指導と接続させ，算数教育全体の学習指導のあり方を探る必要がある。しかし，このような包括的な議論は今後の課題としたい。

さらにいえば，その背景にある認識論が，目的型の学習指導に対応しうるかどうか，という問題を顕在化させていると解釈することができる。そして，子どもが知識をつくりあげるような活動の必要性は，目的型の学習指導において，より一層求められるといえるであろう。

## 本章のまとめ

第 2 章では，今日的な視点より，これまでの学習指導の課題を明確にすることがねらいであった。

第 1 節では，これまでの学習指導を考察した。これまでの学習指導は,「問題解決による数学的な考え方の育成」と集約でき，数学的な考え方は，実質陶冶と形式陶冶を総合しようとする中で生まれてきたものであるが，実際行われた学習指導は，算数の内容に焦点があったと指摘することができる。つまり，これまでの学習指導は，本研究の枠組みでいえば，方法型で行われてきたといえる。さらにいえば，そこでは，いかにわかりやすく内容を理解させるかに重きが置かれていたことが想定される。このような学習指導は，全国学力・学習状況調査結果からみれば，内容の理解においては成果がみられるが，活用に課題がみられ，さらにその中でも応用指向の内容に関する問題において課題があることがわかった。

第 2 節では，算数教育の理念と今日的動向の視点より，今日の算数教育で強調される算数的活動を明らかにした。算数教育は，リアリズムに基づき，現実的な内容を扱い，生活に必要となる知識・技能を学習することが目的となる。したがって，算数教育の理念からみれば，目的型の算数的活動が基盤となると解釈することができる。また，今日的動向に着目すれば，今日の「数学化された社会」や「知識基盤社会」とよばれる社会へ対応していくためには，数学的に解釈する力や自ら考え判断する力が必要であり，固定された内容ではなく，方法に注目することが重要となる。したがって，目的型の算数的活動に焦点があたる。以上，算数教育の理念と今日的動向の両方の視点から，目的型の算数的活動の必要性が示唆された。さらに，新たな目標概念の必要性を述べた。これまでの学習指導の目標とされた数学的な考え方は，主に算数を理解するためのものとして扱われてきたと考えられる。したがって，現実の問題を算数を使って解決する活動にはなりにくいものであった。このことより，新たな目標概念の必要性が示唆された。そこで，本研究では，長崎らが提唱している「算数の力」をその目標として位置づける必要があるということを論じた。

第 3 節では，これまでの学習指導の課題点を指摘した。これまでの方法型の学習指導では，算数の内容に焦点があり，数学の方法が身についていないことが考えられた。また，学習指導要領をみれば，目的型の学習内容は示されていることがみてとれた。これらのことより，目的型の学習内容に対しては方法型の学習指導では適切でなく，新たな学習指導の必要性が示唆された。このことから，目的型の学習内容に対する学習指導のあり方を探る必要があるということを示した。

## 引用・参考文献

Gravemeijer, K（2002）. From models to modeling, Gravemeijer,K, Lehrer, R., Oers, B. van and Verschaffel, L. （eds.）, *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Educ*

*ation*.Kluwer Academic Publishers, pp.7-22.
Hino, K.（2007）. Toward the problem-centered classroom:trends in mathematical problem solving in japan, *ZDM*, 39, pp.503-514.
Jablonka,E.&Gellert,U.（2007）. Mathematisation-Demathematisation,Gellert,U.&Jablonka,E.（eds.）*Mathematisation-Demathematisation:Social,philosophical and educational ramifications*, Sense Publishers, pp.1-18.
阿部好貴（2009).「数学的リテラシー育成のための教授・学習のあり方に関する一考察：抽象に着目して」, 日本数学教育学会『第 42 回数学教育論文発表会論文集』, pp.55-60.
阿部好貴（2010).『数学教育におけるリテラシーの育成に関する研究』, 学位論文 （未刊行）, 広島大学大学院教育学研究科.
伊藤説朗（1991).「新しい算数科問題解決の指導」,『新教育課程の実践と数学的な考え方・問題解決』, 東洋館出版社.
岩崎秀樹（2006).「算数・数学教育における一般化に関する認知論的・記号論的研究」, 日本数学教育学会『数学教育学論究 86　臨時増刊』, pp.15-24.
岩崎秀樹（2007).「先行する研究と残された課題」,『数学教育学の成立と展望』, ミネルヴァ書房, pp.1-13.
岩崎秀樹（2009).「リテラシーからみえる数学教育学の課題―中等教育段階における背景的理念―」, 日本数学教育学会『第 42 回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録及び要項』, pp.32-37.
岩崎秀樹・真野祐輔・阿部好貴（2010).「今日の数学科の課題と展望」, 岩崎秀樹編著『新しい学びを拓く数学科授業の理論と実践』, ミネルヴァ書房, pp.1-21.
カイテル,C.（狭間節子・日野圭子訳）(1998).「21 世紀の数学教育の展望―数学カリキュラム：だれに対してか, だれの利益か」, 日本数学教育学会『数学教育学論究』, Vol.70, pp.57-64.
滝井章（2007).「算数を生み出す力を育てる授業」, 長崎栄三・滝井章（編著)『算数の力　数学的な考え方を乗り越えて』, 東洋館出版社, pp.116-126.
長崎栄三（1990).「問題解決」, 新算数教育研究会編著『算数授業の新展開講座 8 算数教育の基礎理論』, 東洋館出版 pp.134-146.
長崎栄三（2007a).「今なぜ算数・数学の力が注目されるのか」, 長崎栄三・滝井章（編著）『算数の力　数学的な考え方を乗り越えて』, 東洋館出版社, pp.18-27.
長崎栄三（2007b).「数学的な考え方の再考」, 長崎栄三・滝井章編著『算数の力　数学的な考え方を乗り越えて』, 東洋館出版社, pp.166-183.
長崎栄三・滝井章（編著）(2007).『算数の力　数学的な考え方を乗り越えて』, 東洋館出版社.
西村圭一（2010).『数学的モデル化を遂行する力を育成する教材開発とその実践に関する研究』, 東京学芸大学大学院連合学校教育学研究科 学位論文.
西村圭一・山口武志・清水宏幸・本田千春（2011).「数学教育におけるプロセス能力育成のための教材と評価に関する研究：イギリス「ポーランド数学（Bowland Maths.）」の考察」, 日本数学教育学会『数学教育第 93 巻第 9 号』,　pp.2-12.
馬場卓也・清水浩士（2010).「数学科の授業構成」, 岩崎秀樹編著『新しい学びを拓く数学

科授業の理論と実践』，ミネルヴァ書房，pp.97-126.
平林一栄（1987）.「数学教育における構成主義について」,『第 20 回数学教育論文発表会発表要項』，pp.51-56.
溝口達也（2010）.「指導方法」，数学教育研究会編『算数教育の理論と実際』，聖文新社，pp.172-197.
山口武志（2008）.「知識基盤社会において求められる学力と新教育課程―新しい数学科学習指導要領の検討―」，日本数学教育学会『数学教育第 90 巻第 5 号』，pp.29-36.
文部科学省 HP.「全国的な学力調査　（全国学力・学習状況調査等）　」（http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/gakuryoku-chousa/index.htm）.

## 第３章　目的型の算数的活動の具体化

前章において，今日の算数教育で強調されるべき算数的活動を目的型の算数的活動であると同定し，それに対する学習指導のあり方を探る必要性を述べた。しかしながら，これまでの議論では，目的型の算数的活動の学習活動が不明確である。

したがって，第 3 章では，目的型の算数的活動を具体的に示すことを目的とする。そのために第 1 節では，目的型の算数的活動の学習過程の典型として，数学的モデル化に着目し，第 2 節において，学習内容の典型として「数量関係」領域に着目し，考察する。

### 第１節　数学的モデル化の基礎的考察

算数教育で強調される目的型の算数的活動は，現実の問題を算数で解決する活動であり，この過程は社会の事象に対する「数学的過程」ととらえられる数学的モデル化（西村, 2010）に該当するといえる。数学的モデル化は，現実の問題を算数・数学の問題に直すこと〔数学化，定式化〕，算数・数学の問題を解くこと〔数学的処理〕，算数・数学での問題解決の解を現実における観察・実験のデータと照らし合わせること〔振り返り，照合，検証〕，そして，算数・数学の解がデータと適合するときにはそれが現実の解となり，適合しないときには仮説を修正し新たな数学化を行って，このサイクルを質を高めながら繰り返すものである（長崎，2007）。

ポラック（1980）は,《有意義な実際的応用をもつ数学の種類，数学の応用される分野の数や応用の様態がすべて急速な変化をしている》（p.300）と指摘し，数学の応用について四つの定義を用いて考えるのが有益として示している（p.300）。その四つの定義は，次のようにまとめられる。

**（1）応用数学は古典的応用数学を意味する**

解析学の古典的な分野で，微積分，常ならびに偏微分方程式，関数論やそれらに関連した多くの領域を含むものである。数学のこれらの分野が古典物理学に最もよく応用される分野であるという事実は，通常，上の定義の一部分と解されるが，物理の問題との実際のつながりは少しも含ませていない。

**（2）応用数学は有意義な実際的応用をもつすべての数学を意味する**

この定義は，定義（1）に含まれる数学の諸分野を大きく拡げ，多くの人の見方では，（2）に含まれていて（1）に含まれていない数学の最も重要な領域は，統計，確率，線形代数とコンピュータ・サイエンスである。潜在的に応用可能な分野は物理以外にも広く拡がっているが，ここでも，数学そのものだけが考えられている。

**（3）応用数学は数学以外の分野あるいは実生活のある場面に始まり，数学的解釈つまりモデルを作成し，そのモデル内で数学的作業を行い，そして得た結果をもとの場面に適用することを意味する**

数学以外の分野というのはけっして，物理的科学内に止まるよう限定するものでないことに注意されたい。特に，生物科学，社会科学および経営科学における応用が極めて活発になってきている。そのほかの多くの応用の領域も考えられるであろう。

**（4）応用数学は人々がその暮しの中で数学を応用するとき実際にしていることを意味する**

これは（3）と似ているが，通常，数学以外の世界と数学の間の軸を何回も回ることを含んでいる。

そして，ポラック（1980）は，《数学以外の分野および日常生活への数学の真の応用は，理想的には，定義（3），（4）の性格をもつべきものである。》（p.306）と述べ，これら定義（3），（4）を通して展開されたモデル作成では，数学外の場面と数学化の過程の理解を，数学自身の理解と同じように必要し，場面の理解なしには，それを数学化することは望めないと指摘している。なお，ポラック（1980）は，《数学を正しく応用するには，数学が，いつ，どのように，また，なぜうまく働くかを理解することが必要》（p.309）であると述べているように，ここでは，数学の理解を軽視するということを意味するのではないということに留意したい。

ポラック（1980）が示した定義（3），（4）というのは，数学的モデル化であり，日常生活への数学の真の応用とする場合,《現実問題の解決の中での新しい概念形成は考えられるが，数学として発展することはその主目的ではなく，数学を用いて現実の世界の問題を解決することが主目的になる。》（阿部，2008，p.60）ととらえることができる。

また，数学的モデル化の必要性について，例えば，清野（2007）は以下のように述べている。

《数学の有用性や数学と現実との関連に対する生徒の認識上の問題点は，国内の大規模調査，および国際比較調査によって明らかにされ，我が国の数学教育界が抱える問題点として，従来から指摘されてきた。この問題点を改善するために，近年の数学教育界では，日常事象や自然現象等の「生のデータ」を用いた教材を扱い，数学的モデル化過程の実際を授業の中で展開するという学習指導が進められてきている。こうした意図的な学習指導が展開されているのは，先行研究において指摘されているように，純粋数学を学習していても，自然には，数学を活用する能力が育成されないからである。》（p.5）

このように数学的モデル化においては，生徒に数学と現実のつながりを実感させ，数学の有用性を感得させることがねらわれている。国内での数学的モデル化研究は，主に中等教

育を対象としているととらえられ，数学的概念の導入や新しく開発された概念・方法・結果を応用したりする場として主に用いられている（池田，2010）と指摘されている。

例えば，数学的概念の導入については，清野（2005）が，制動初速度と制動距離に関する題材「スリップ痕は語る」を用いて2次関数の概念を形成することを目的として授業を構想している。具体的には，道路に残されるタイヤの「スリップ痕」から，事故当時の自動車の制動初速度を推定するという場面を扱うものであり，制動初速度と制動距離の実際のデータから,「制動距離は制動初速度の2乗に比例する」という関係を見出し，その数学的モデルを創造する授業である。

**課題**

ある日の快晴の朝，交通事故が発生し，警察官が事故現場に駆けつけました。事故現場には，車の運転手Aさんと道路の脇に脱輪した1台の車がありました。Aさんに事故の状況を聞いてみると，運転中に動物が飛び出してきて，とっさに急ブレーキをかけ，最後には，車が脱輪してしまってというのです。道路には，図に示すように，スリップしたあとがきれいに残されていました。そのスリップ痕を見た警察官は，Aさんに「急ブレーキをかける前,どのくらいの速度で走行していましたか」と尋ねました。するとAさんは,「70kmで走行していました」と答えました。

Aさんは，本当に70kmの速度で走行していたのでしょうか。Aさんの答えの真偽を確かめ，実際の速度を推定してください。

授業の冒頭では，まず，スリップ痕が描かれた図を提示し，交通事故の解明におけるスリップ痕の役割について説明した。次に，問題を提示し，問題を解決するためには，どのような構成要素を特定すべきかを考えさせた。その後，以下に示す図3-1を提示し，自力解決に入った。

スリップ痕の長さを計測すると，33.3mでした。下の表に示されているデータを基に，Aさんがブレーキをかけはじめたときの速度を推定しなさい。また，Aさんが本当に70kmの速度で走行していたのかどうかを判断しなさい。

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 制動初速度：v（km/h） | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
| 制動距離　：y（m） | 0.6 | 2.1 | 4.7 | 8.3 | 13.1 | 18.7 |

図３－１　「スリップ痕は語る」: データ　（清野，2005，p.184）

自力解決後，4人の生徒によって解法が発表された。そして「制動距離は制動初速度の2乗に比例する」という仮説が導かれている。「2乗に比例する」という用語は，変化に着目した解法が発表された後の議論の中で，初めて明文化されたが，この解法では，式表現まで至っていない。続く $y/v^2$ に着目した解法において，式表現としての数学的モデルが導かれた。以下に，その部分のプロトコルを示す。

T：これよく見てみると，2倍すると，2の2乗倍，3倍すると，3の2乗倍，4倍すると4の2乗倍になるんだね。これなんかどっかで勉強しました？2倍，3倍になった場合，2倍，3倍になるのは？
S：比例
T：比例ですね。これは何で言えばいいですか？
S：2乗に比例。
・・・(続いて $y/v^2$ に着目した解法が発表された)
S：えーと，まず，制動距離と初速度に対して比例関係があるかどうかを調べてみて・・・

生徒はまず，y/v，および $y^2/v$ の値に規則性があると仮説を立て，その値を求めている。しかし，いずれも，規則性が見出されなかった。そこで，$y/v^2$ の値に規則性があると仮説を立て，値を求め，規則性を発見した。この後，データを配布し，得られた数学的結論に対する解釈・評価を行った。

また，概念を応用する授業として，清水（2007）は，見えにくい関数関係を見いだし，そのしくみを解明して，問題解決を行う教材として，公共料金である都市ガスの使用量と料金についての関係を探る課題を位置づけ，1次関数についての理解を深める授業を構想している。

**課題**
私の家は都市ガスです。お風呂も温水器もみんなガスを使っています。私の家の6月のガスの使用量が $64m^3$ でした。この月にはどれくらいのガス料金だったのか明細をなくしてしまったので，わかりません。この月のガス料金を求めて下さい。

まず,使用量で料金が決まることを確認し,先生の家の5月と7月と8月の明細(表3-1)から6月の料金を求めようということで授業を始めた。

**表３－１　使用量と料金（清水，2007，p.209）**

| | 5月 | 6月 | 7月 | 8月 |
|---|---|---|---|---|
| 使用量（$m^2$） | 83 | 64 | 51 | 45 |
| 料金（円） | 9,711 | ？ | 6,368 | 5,741 |

生徒は，最初は料金を使用量で割って，$1m^3$ あたりの料金を出して考えるが，それではうまくいかず，この料金のシステムには $1m^3$ あたりの単価と基本料金を持っている1次関数の式であることを見出した。その式が，$y=104.47x+1040$ であることを様々な方法で求めた。この課題では，生徒はまず，これまで知っている比例を用いようとし $1m^3$ あたりの単価をそれぞれ計算しようとした。しかし，うまくいかないことに気づき，しばらく考えた後，基本料金のある一次関数であることを見いだした。

このように，数学と現実のつながりの解釈においては，二つの立場があるように考えられる。一つは，現実場面の問題を数学を使って解決することを重視する立場，もう一つは，数学を現実場面から取り出すことを重視する立場である。前者はポラック（1980）が示し

ている数学的モデル化，後者は国内で主流である数学的モデル化ととらえられる。この国内の動向については，以下に示す平林（1987）の指摘がその根拠になると考えられる。

《「数学は，問題解決の方法・道具として生まれた」という命題は，歴史的にも，心理発生的にも正しいにも拘らず，数学教育でしばしば無視されてきた。それは，人間には道具を道具として使うだけでは満足せず，それを知識として洗練したり，体系化したりすることに強い興味をもっているからであろう。》（p.10）

つまり，方法としての数学が，対象としての数学へと変換される場合，現実の文脈から切り離されて解釈されうると考えられる。ここでは，数学と現実とのつながりが薄れ，数学の有用性が感じられないことになるという危険が想定されうる。

しかしながら，数学教育と算数教育では学習内容が異なるため，数学的モデル化についてもその特徴は異なるものであると考えられる。その一方で，どちらも今日の社会への対応を考え，現実の問題を解決することを主目的とするならば，その違いはあまりみられないのかもしれない。つまり，数学教育での数学と現実のつながりをもたせるということが，現実での問題解決において数学を使うということであるととらえるということである。しかし，先行研究でも多くみられるように，現実の問題を使って数学をつくるということとしてとらえるならば，算数教育と数学教育には違いがあると考える。

数学的モデルをつくることに関心のある数学的モデル化研究を否定するわけではないが，ポラックによって示されている導入理念をみれば，数学的モデル化は現実の問題を数学を使って解決することが主目的となる活動であるといえる。つまり，数学的モデル化は目的型の算数的活動，さらにいえば，算数的活動そのものであるととらえることができる。

このような考えに基づいて，以下では，現実の問題を算数をつかって解決するという算数教育における数学的モデル化と整合的である数学的モデル化研究を中心に考察し，目的型の算数的活動を具体的に考察する。

## １．数学的モデル化

目的型として考えると，現実の問題を算数を使って解決することが主目的の活動である数学的モデル化が考察対象となる。この活動の過程の具体例として，数学的モデル化を，様々な現実上の目的に根ざす応用的な面に関する数学的過程，数学の方法ととらえている西村（2010）の数学的モデル化過程を挙げる（pp.17-18，図 3-2）。

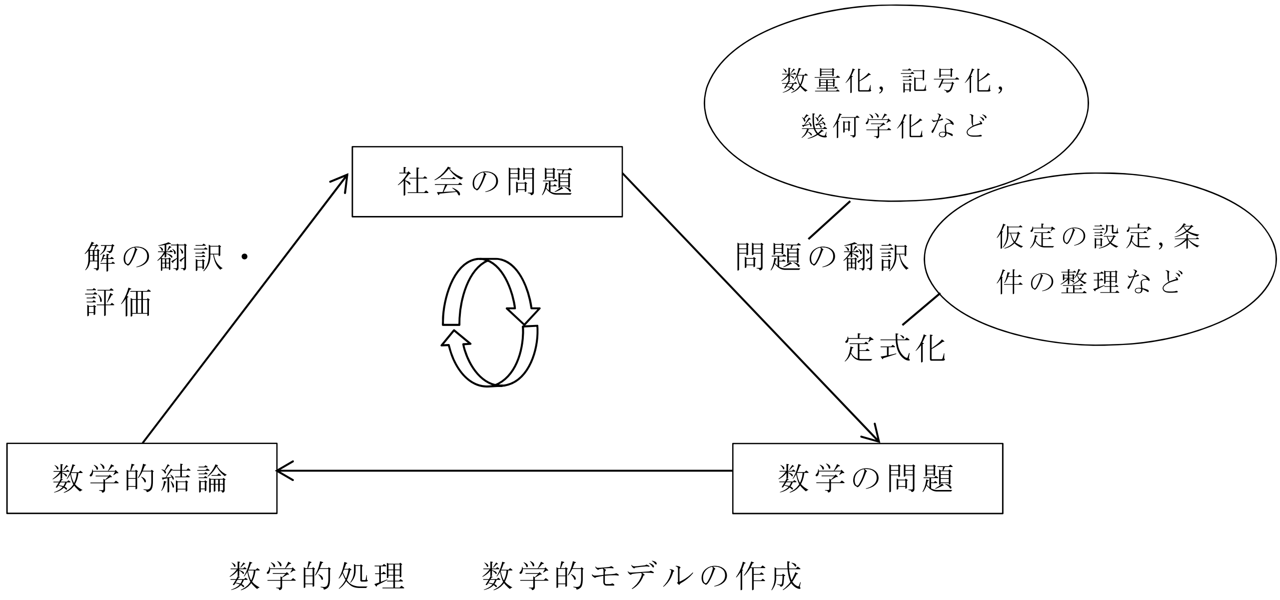



**図３－２　西村（2010）の数学的モデル化過程（p.18）**

社会の問題

①解決したい，理解したい「社会の問題」に対して，数量化や幾何学化などをし，数学を適用しやすくする。（問題の翻訳）

②重要と思われる対象や関係を見いだすとともに，保つべきことは何か，無視すべきことは何かを決定する。また，必要なデータがあれば，収集する。（定式化）

数学の問題

③定式化した数学の問題に対して，関連のある数学の分野を同定し，それに対する直観や知識を働かせ，数学的モデルを作成する。（数学的モデルの作成）

④数学的方法により，結論を得る。この過程で，新しい概念や手法，アルゴリズムなどを得ることもある。（数学的処理）

数学的結論

⑤数学的方法により得た結論を，社会へ訳し戻す。（解の翻訳）

⑥結論は実際的か，合理的か，受け入れられるか等を検証する。（評価）

a）もし十分ならば，他者に的確に伝える。

b）もし不十分だったり満足がいかなかったならば，①に戻り，その原因を突き止め，再び始める。

西村（2010）は，数学的モデルを以下のようにとらえている。

《事象を，ある目的に従って，数学的処理が可能な，数値的表現や代数的表現，グラフ表現，幾何的表現，離散グラフ表現をしたもの》（p.9）

これらは，現実世界の事象に対するものである。例として，ガリレイの落体現象の実験で

いえば，鉛直方向の落下距離 y が落下時間 t の 2 乗に比例することを表した $y=at^2$ という式が，落体現象の一つの数学的モデルとなると示している。一方で，西村（2010）は，数学的概念や数学的理論に対する数学的モデルも存在すると述べ，例として，$x^2+y^2=r^2$ は，「円」という数学的概念に対する一つの数学的モデルであると示している。

上で示したような活動の具体例として，西村（2010）の研究で用いられている調査問題を挙げる。

**調査問題**

区役所は，駅前にある駐車場に，自転車ラックを設置することにした。自転車が乱雑に置かれたり，将棋倒しが起こったりするのを防ぐためである。ラックにはさまざまなタイプがあるが，ラックの向きやラックの間隔は指定したとおりに設置できるタイプを使用する。どのようなラックを，どのように配置するとよいだろうか。あなたの案を作成し，そのよさを説明しなさい。

ただし，駐車場は縦 30m，横 20m の長方形で，出入口は 4 隅に設けることにする。

この問題の解決においては，さまざまな数学の内容，例えば，方程式，三平方の定理，相似等を，各々の解決に応じて用いることが期待される。なお，長崎ら（2007）の「算数・数学の力」や西村ら（2008）の「算数・数学と社会をつなげる力の精緻化した構造」をみれば，それぞれの算数・数学の内容は，問題状況ごとに，そして過程のどの部分で用いられるかが異なるといえる。つまり，数学的概念や数学的理論に対する数学的モデルを含め，数学的モデルは，数学的モデル化過程の様々な段階で用いられると考えられる[4]。

調査問題について，具体的には，次のような解決が考えられている。

**社会の問題**

**（問題の翻訳）**

どのような方針で駐車場（例えば，利用者にとっての使いやすさを優先した駐車場，たくさんの自転車が収容できる駐車場等）を作るかを決める。

**（定式化）**

駐車場の設計に必要な変数（例えば，自転車の大きさ，通路の幅，ラックの種類等）を取り出したり，ブロックの配置の概略を考えたりする。そして，翻訳した問題に応じて，自転車の大きさや通路の幅等に関する仮定（例えば，自転車の大きさはすべて等しいとする，道路の幅は自転車を押している人同士が十分すれ違える幅とする等）をおく。

[4] 本研究では，数学的モデルは現実世界の事象に対するものと，数学的概念や数学的理論に対するものの両方を含むものとしてとらえるが，西村（2010）の数学的モデル化過程を参照する際には，西村（2010）の数学的モデルの規定にしたがうこととする。また，モデルとは，それら数学的モデルを含む数学的モデル化過程で対象となるものとしてとらえる。これには，数学的モデルの他に，西村（2010）の数学的モデル化過程でいえば，社会の問題，数学の問題，数学的結論が該当する。なお，数学的モデルやモデルの詳細な議論はここでは行わない。

数学の問題

（数学的モデルの作成）

自らおいた仮定に基づき，ラックの向きやブロックの配置を考える。

（数学的処理）

作成した数学的モデルにおいて，収容台数を求めたり，デッドスペースについて検討したりする。そして，翻訳した問題に照らして適切な駐車場を決める。

数学的結論

（解の翻訳）

数学的に得た駐車場を現実に照らして検討する。

（評価）

作成した駐車場のよさを説明する。必要に応じて，案を修正する。

生徒の具体的な活動としては以下のようなものが挙げられている（表 3-2，表 3-3)。

表３－２　ペア１の活動（西村，2010）

| | |
|---|---|
| 問題の翻訳 | たくさんの収容できる駐車場を設計する問題としてとらえた。 |
| 定式化① | 問題場面に関わる変数（ラックの種類，1 台分のスペース，出入口の大きさ，自転車の大きさ）を取り出した。その後，1 台分のスペース，出入口の大きさ，自転車の大きさに関する仮定を，現実に照らしながらおいた。 |
| 数学的モデルの作成① | ブロックの配置を考えた。 |
| 定式化② | ラックの種類や間隔,一方通行,道路の幅に関する仮定をおいた。 |
| 数学的モデルの作成② | ブロックの配置を 2 案作成し,どちらがたくさん収容できるかを考えた。 |

数学的モデルの作成①で，ブロックの配置を考えた過程で，ラックの種類や間隔，一方通行，道路の幅などの仮定を置く必要性に気付いた。そして，たくさん収容できるようにするという目的に即して，間隔を詰めて駐輪するために「上下式」のラックを使用することにしたり，道路の幅が狭くてすむように一方通行にしたりするなどの仮定をおいた。

表３－３　ペア２の活動（西村，2010）

| | |
|---|---|
| 問題の翻訳 | 問題文を解釈した後，身近にある上下式のラックを想起した。 |
| 定式化① | 問題場面に関わる変数として，自転車の大きさを取り出し，仮定をおいた。同時に，配置，ラックの向き，出入口の位置，道路の幅を取り出し，仮定をおくことを繰り返した。 |
| 数学的モデルの作成① | たくさんの自転車を収容できる「効率のよい」配置を考え，「横置き」にすることを決めた。 |
| 定式化② | 「ラックの向き」の仮定を再考するとともに 1 台分の幅と間隔を取り出し，仮定をおいた。 |

| | |
|---|---|
| **数学的モデルの作成②** | 道路とラックの順序を中心に配置を考えた。 |
| **解の翻訳・評価** | 使いやすさを考えながら，仮定の妥当性を検討した。また，一般化を試みようとした。 |

はじめ，どのような方針で駐車場を設計するかが不明確なまま，変数を取り出し，仮定をおいた。その過程で，徐々に，たくさんの収容できる駐車場にする（効率のよい駐車場にする）という目的を明確にしていった。また，通路とラックのブロックの順についても，はじめは利便性の観点から考えたが，「何を優先するかが，結構途中まで定かじゃなくて，でも，使い勝手とかを良くするんだったら，そんなの永遠に良くできるから，数を優先しよ」という考えにより，あとから，「自転車の置ける面積を増やすこと」として数学的にとらえ直していた。

また，数学的モデル化の過程を数学の視点から詳細に示しているものとして，数学化の視点から述べている Lange（1996）[5]によって示されている活動がある。数学化の過程は，子どもたちに状況を探究したり，関連のある数学を見つけたり同定したり，規則正しさを発見させる。そして，一般的な文脈での固有な数学を同定するために図式化したり視覚化したり，数学的概念に帰着するモデルを発達させたりすることを強要する。最初に共通の問題を数学化し，その後で，数学的問題の数学化をするという活動とされている。この活動は，水平的な数学化と垂直的な数学化を含んでいるとしており，具体的に以下のような活動を挙げている。

**水平的な活動**
－一般的な文脈に固有の数学を同定すること
－図式化すること
－異なる方法で問題を形式化したり視覚化したりすること
－関係を発見すること
－規則正しさを発見すること
－異なる問題での同一構造の側面を認識すること
－現実世界の問題を数学の問題へ変形すること
－現実世界の問題を知っている数学のモデルへ変形すること
**垂直的な活動**
－式で関係を表現すること
－規則正しさを証明すること
－モデルを洗練したり，整えたりすること
－異なるモデルを使うこと
－モデルを結合したり，統合したりすること
－新しい数学的概念を定式化すること
－一般化すること

[5] 阿部（2008）は，数学の方法としての数学化と数学的モデル化を考察し，島田の数学的活動と Lange の数学化は数学の応用と数学の概念形成を含んでいるという点から，これらは整合するとしている。

水平的な活動は，応用指向的側面の活動であり，垂直的な活動は構造指向的側面の活動であるととらえられ，水平的な活動を基盤として垂直的な活動を取り入れることが目的型の算数的活動に相当すると考えられる。

## ２．目的型の算数的活動としての特徴

目的型は，現実の問題を算数を使って解決する活動であり，現実世界の中で何か問題や目的があって，はじめて活動が始まり，それ以降の活動は，現実世界の場面に照らし合わせて，考えたことが妥当かどうかを検討することになる（池田，2007）ととらえることができる。ここでは，先に述べた西村（2010）の数学的モデル化過程に沿って，その特徴を述べる。

現実の問題の解決では，まず始めに「社会の問題」から始まり，「数学の問題」へと翻訳する必要がある。現実の状況から問題をとらえるために，「問題の翻訳」と「定式化」をしなければならない。このことについて大谷（2002）は，《人が未解決の問いに対して十分な直接的方法を持っていない状況，すなわち，ある程度問題意識は持っているが，解決のためにどのような条件が必要かつ十分であるかが分からない状況では,適当な条件を設定し，問題を確定することが必要となる。問題の理解には，解決者が持ち合わせている問題状況に関連する現実世界の知識や，数学的知識や言語の豊かさが問題となる。》（p.74）と指摘している。このことに関して，Mousoulides & English（2011）が述べている天然ガスの消費と埋蔵量に関係した工学のモデル導出活動に着目し，具体的にみてみる。

**「天然ガス問題」**

1993 年の世界的な天然ガスの埋蔵量は 141.8 兆 m³であると見積もられていた。そして，2.5 兆 m³が平均毎年使われている Communications and Works 省は，天然ガスと精油所を建てる大きな投資を申し込むことについて考えている。彼らに投資を続行するべきかどうかをアドバイスするために，天然ガスの埋蔵量が使い果たされるときを計算しなさい。

この活動をするにあたっては，種々の仮定の使用と天然ガスの埋蔵量が使い尽くされると考えられるときを計算するモデルをつくりだす必要があるとされている。例えば，現在の埋蔵量やどのように天然ガスの消費が増加させられるか，どのように再生可能なエネルギー源の使用が天然ガスの消費に影響を及ぼすかどうかを考慮に入れることで，より適切なモデルを開発することができる。大谷（2002）が指摘するように，現実の状況の解釈には，問題状況から条件を設定し問題を確定することが必要となり，その際，数学の知識だけでなく，現実の知識も必要であることがうかがえる。そして，問題を解決したことで生活へ直接生かすことができるかどうかは，現実の知識が実際に役立つものであるかどうかに関係してくると考えられる。

また，現実と数学のつながりについて，大谷（2002）は次のように述べている。

> 《現実から数学的モデルへと至る際に重要な構成要素であるのは，「条件・仮説」の設定であった。この条件・仮説は，最初は，現実場面に関するものであり，後には（もし成功裏に問題が解決された場合には），観念的世界である数学（理論）のモデルとなるもの

であった。このように，条件・仮説は，一方で現実世界において活動する主体を取りまく社会的環境によって制約され，他方で数学の論理・演繹的世界の大前提として数学的結論を制約する。その意味で，「条件・仮説」は，現実の世界と数学の世界の連結環，2つの世界のいわば「緩衝地帯」となっている。すなわち，現実の世界と数学の世界はそれぞれ独立に存在するというよりも，相手の存在によって自らの特徴が際立つという弁証法的な関係をなしている。》（p.295）

このように，現実の知識は，現実の状況を解釈する際に必要となり，数学の知識との関係に目を向ける必要があるといえる。したがって，現実の問題を解決する際には，数学の知識だけでなく，現実的な文脈についても考慮に入れる必要があり，これらの間の解釈を必要とすることに特徴がみられるといえる。

このように「社会の問題」を「数学の問題」へと翻訳した後,「数学的モデル」を作成することになる。したがって，ここでは，算数は解決方法として用いられる[6]。このことに関して，飯田（1995）の議論を参照したい。飯田（1995）は，文脈依存的でオープンエンドの問題の必要性を述べる中で，記号論的特徴を指摘している。そこでは，具体例として，次の「メロンの問題」を挙げている。

**「メロンの問題」**

A，B，C の 3 つのチームがゲームをしました。このゲームには 10 個のメロンが賞品になっています。ゲームの結果は次の表のようになりました。あなたならどのように賞品を分けますか。分け方をいろいろ考えてみましょう。

| A チーム | B チーム | C チーム |
|---|---|---|
| 45 点 | 27 点 | 18 点 |

これは，価値観や倫理観が介在し，解決者の経験に基づく文脈によって，正答がいくつも存在する問題である（山田，1999）。子どもの反応として，例えば,「メロンを余らせてはいけないのか」,「半分に切ってもいいのか」,「メロンを 1 チームにあげていいのか」などが挙げられている（山田，1999）。この問題を考える際,「得点と同じ比で分ける」という条件が加われば,「比」や「比例」の単元で扱える問題となり，以下のような水準でとらえることができる（飯田，1995）。

| | | |
|---|---|---|
| 10 個のメロンを 45 点, 27 点, 18 点という得点の 3 チームに分ける。<br>語用論的水準<br>pragmatics | 10 個のメロンを 45 点, 27 点, 18 点という得点と同じ比に分ける。<br>意味論的水準<br>semantics | 10 を 5 : 3 : 2 に分解する。<br>構文論的水準<br>syntax |

[6] ここでの算数とは，西村（2010）の数学的モデル化過程における数学的モデルだけではなく,「社会の問題」から「数学の問題」へと翻訳する際にも用いられているととらえている。

飯田（1995）は，通常，各単元の中では，意味論的水準における問題解決によって意味理解が図られ，構文論的水準における水準によって技能の習得がなされ，その記号の使用者の観点まで含める語用論的水準における問題解決は，通常の単元の中ではほとんど考慮されないと指摘している。このことが，方法として数学を認識することの困難性を生じさせている原因であると考えられる。したがって，解決方法として算数をつかうには，語用論的水準を含めることが必要であると考える。

ここには阿部（2011）が，《…応用指向的方法は真理ではなく，合理であり，したがって「現実の世界」を解釈する道具としての数学をどのように理解させるか，ということは授業において本質的な問題となる。》（p.552）と述べているように，解決方法として，算数の内容をどのように理解させるかという問題が内包されている。

その後，「数学的モデル」を用いて「数学的処理」を行い「数学的結論」を得るが，このときには，多様な解が存在することになると想定される。現実の問題の解決では，《解決者が問題の存在を認識することから始まる。そして，解決者の想定する文脈で問題場面を解釈し，問題の定式化を行う。また，その解決に必要な情報は，解決者自身が収集しなければならない》（山田，1999，p.70）。つまり，与えられた文脈や解決者の意図や関心，個人の経験，問題場面の解釈の違いや，意思決定を行う際に重視する視点の違いから多様な解釈が生じる（Blum,1993；Doerr & Lesh,2011；山田，1999）。それぞれの人々は，すでに自分自身の現実世界の暗黙の描写を持っており，同じ言語を異なる概念に使用する傾向がある（Lange，1996）ため，これらの暗黙の描写を明らかにして議論することが必要となると考えられる。

算数の問題を解決する際にも多様性はみられる。しかし，現実の問題を解決する際の多様性は，問題の状況を解釈する際の多様な解釈に基づいたものであり，解法の多様性を強調する算数の問題の解決とは多様性の強調点が異なると考える。このことを図示すれば，図 3-3，図 3-4 のようになる。なお，現実の問題を解決する際には，問題状況によって，つまり，問題状況に関係のある算数の内容の個数や条件の設定により，最終的に得られる解の個数が異なると考える。

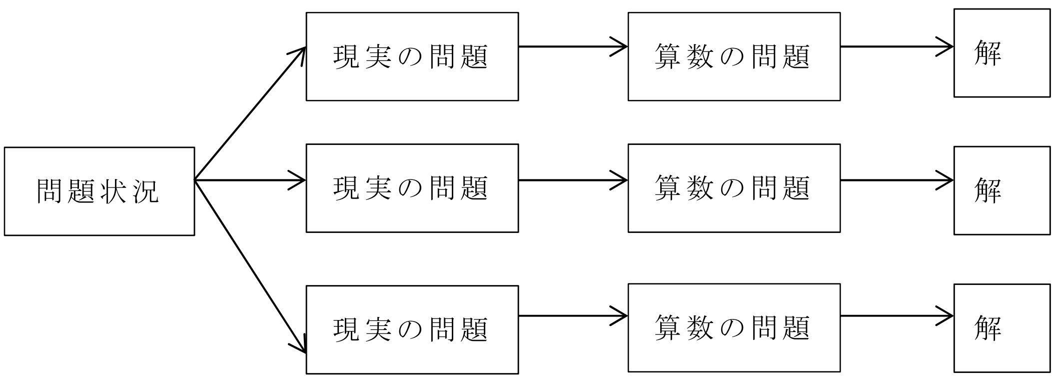



図３－３　現実の問題の多様性

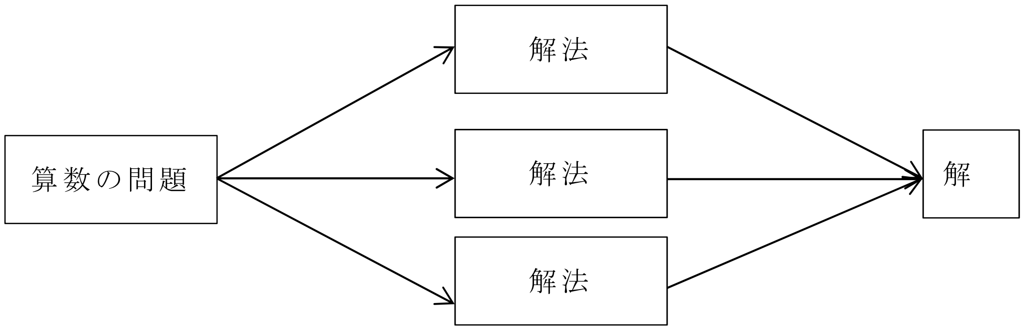



図３－４　算数の問題の多様性

現実の問題の解決での多様な解とは，主として条件の設定により影響を受けると考えられる。

最後に，もとの「社会の問題」と照らし合わせて「解の翻訳・評価」をすることになる。このときの解は，解決者が設定した条件に基づいて得られたものであり，その解は必ずしも適切なものであるとは限らない。したがって，開発したモデルを修正する必要がでてくる。このときの修正は問題状況や設定した条件と照らし合わせることで行われると考えられる。そして，条件の修正に伴ってモデルの修正が生じることとなるととらえることができる。また，モデルの修正の契機にはもう一つあると考えられる。それは，数学的解答に至る前に，社会の問題を数学の問題へ翻訳する際に起こる修正である。これを西村（2010）の数学的モデル化のプロセスで考えると，前者は〔解の翻訳・評価〕の段階，後者は〔問題の翻訳，定式化〕の段階でのモデルの修正であると考えられる。

さらに，モデルの修正には方向性が二つあると考えられる。一方は，未知のモデルをつくるもので，概念形成につながるものであり，他方は，異なる既知のモデルの適用である。以下，表 3-4 のようにまとめられる。

表３－４　モデルの修正の分類

| | | 修正の過程 | |
|---|---|---|---|
| | | 〔問題の翻訳，定式化〕の段階 | 〔解の翻訳・評価〕の段階 |
| 修正の方向 | 概念形成 | | |
| | 適用 | | |

〔問題の翻訳，定式化〕の段階，つまり現実の世界から数学的モデルをつくる段階において修正を行うことを意図した授業では，数学的モデルをつくることに焦点があると考えられる。一方で，〔解の翻訳・評価〕の段階，つまり数学的モデルで現実の世界を解釈する段階において修正を行うことを意図した授業では，数学的モデルをつかうことに焦点があると考えられる。この活動では，どのような状況で，何を目的としているのかが重要となり（池田，2007），数学の学習のように真理ではなく，合理を求めて解決していくことになると考えられる。

現実の問題を数学をつかって解決するためには，数学的に考えようとすることが必要と

され，ただ単に上手に規則や手続き，技能を実行することではなく，数学的解釈を表現すること，テストすること，修正すること，これらを含む反復のサイクルを必要とし，数学的に状況を解釈する（Lesh & Zawojewski，2007[7]）ことが求められるといえる。

## 第２節　関数の考えの基礎的考察

目的型は数学の方法を育成することが目的となる活動である。したがって，学習内容としては,「数量関係」領域が目的型で展開される典型的な領域と考えられる。ここでは，学習内容が三つに分けて示されている（文部科学省，2008）。それぞれの内容とねらいは，次のようにまとめることができる。

**「関数の考え」**
伴って変わる二つの数量の関係を考察し，特徴や傾向を表したり読み取ったりできるようにする。
**「式の表現と読み」**
事柄やその関係などを正確に分かりやすく表現したり，式を読み取ったり，言葉や図と関連付けて用いたりする。
**「資料の整理と読み」**
目的に応じて資料を集めて分類整理したり，それを表やグラフなどに分かりやすく表現したり，特徴を調べたり，読み取ったりすることができるようにする。また，目的に応じて表やグラフを選んだり，関連付けたり，読み取ったり，活用したりする。

「数量関係」領域においては，事象を考察対象としたときの方法という視点から学習内容が分けられているととらえることができる。この領域は，事象を考察する方法の育成がねらいであるという点においては共通だが，三つに分けられており，用いられる内容が異なるため，それらは本質的には異なるものであるといえる。したがって，これらの違いを考慮して考察する必要があると考える。

目的型は現実事象を扱い，数学の方法の育成を学習指導の目的とするものであり，応用指向的方法を育成することが主目的となる活動である。阿部（2012）は，カリキュラムの内容を応用指向的方法の育成という視点からみれば，強調されうる領域は「関数」と「資料の活用」であるととらえている。そして,「関数」について，関数はその本性として関係を探るという「関数の考え」(方法）が強調されると指摘している。また，関数の典型としての比例，一次関数，二次関数があり，それらについての学習も必要不可欠である。したがって,「関数」は，応用指向を基盤とし，そこに構造指向を組み込む領域であるととらえられる。よって,「関数」の学習内容は数学の方法の育成だけでなく，算数の内容の理解も含んでいる目的型の算数的活動と整合的であるといえる。このことより本研究では，目的型の学習内容の典型として「関数の考え」に着目し考察する。

[7] Lesh&Zawojewski（2007）は，問題解決者が数学的解釈や思考方法，手続きを創造したり，洗練したり，適合させたりする状況を強調しており，数学的モデルを数学的な考え方としている点で，方法の育成と整合的であると考える。

## １．関数の考え

関数の考えとは，ある目的から一つの数量 A を考察しようとするとき，それと関連のあるほかの数量 B を見出し，その数量 B をとらえることで，もとの数量 A が決められないかという考えとして基本的にとらえられる（中島，1991)。ここでの 2 量は，例えば，はっきりわかっていない変量や測ることの困難な変量をよくわかっている変量や測りやすい変量に関係づけようとするという立場で取り出されているものであり，関数の考えとは何か新しいものをとらえようとするときの思考の仕方であるといえる（中島，1978)。このように考えると，問題解決において，事象を算数の問題にしたり，よりよい解決を求めて異なる算数の問題に表現を変えたり，数学的処理をしたりといった，様々な段階で関数はかかわっていると考えることもできる（長崎，1995)。このように，関数の考えは，問題解決において重要な考えの一つであるといえる。

関数の考えについて，越村（2012）は，関数の考えに関する先行研究を整理し，学習指導における関数の考えのとらえ方には次の二つの立場があるとまとめている。一つは，関数の考えを依存関係の着目，変化と対応の規則性の発見，規則性を用いた問題解決のように段階的にとらえている立場であり，もう一つは，変化と対応の関係ととらえる立場である。変化と対応というのは，関数の特徴を表すものである（三輪，1974)。したがって，前者は問題解決，後者は算数の内容にかかわるものであるといえ，それぞれ目的型と方法型におけるものと考えることができる。このように，「関数の考え」の学習内容は，関数の考えの本質に着目すれば，目的型で展開される学習内容であると考えられるが，学習指導においては目的型と方法型の両方の立場でとらえられているといえる。これは，関数の考えの学習において，関数の考えと関数の学習が必要であるということを示していると解釈できる。

関数の考えは目的型においては問題解決の方法となり，方法型においては考察対象になると解釈できる。本研究では，目的型の典型として「関数の考え」の学習に焦点をあてるため，問題解決の方法として関数の考えを用いることを主目的とする。

## ２．変化と対応

関数の考えの特徴を表すものとして，変化と対応がある。三輪（1974）が，《1 つの量の変動に伴う他の量の変動とはいうものの，実際の事象を見ると，そのように単純なものはあり得ないはずである。事象では，常に，多くの量が関連しあい，関係をもっているのである。》（p.212）と述べているように，事象は多くの量が関係をもっているものである。したがって，現実の事象を扱う際には，まずは様々な対応関係や依存関係が取り出されるはずである。そして，変化させてみることで，その中から，規則性をもった関係が明らかになる。現実の事象を用いた問題解決を目的とした場合，対応関係や依存関係にあるものについて考察するだけでなく，何と何を対応づけることができるかを考察することから入る必要があるといえる。

また，三輪（1974）は，以下のようにも述べている。

《$x_1 \rightarrow y_1$，$x_2 \rightarrow y_2$という値の対応を明確にしなければ，$x_1$から $x_2$まで変わったときに $y_1$から $y_2$まで変わったという，変化のようすは明らかにすることはできない。つまり，

変化というとき，既に対応を前提にしているのである。いっぽう，対応といっても，単に，数量の対応であってはそのようなものを考える必然性あるいは必要性はうすい。数量についての変動の法則性をつかんで課題の解決に利用したり，将来の予測をしたりするのに，数量の対応関係を利用するものでなくてはならないだろう。つまり，対応というものも実は変化を予想し，それあるが故に意味をもつものといえるわけである。このように，変化と対応というのは，一応異なる側面のように見えるが，不即不離，分かつべからざるものといえるのである。》（pp.213-214）

関数における変化と対応は，一方をとらえる際は他方を前提としており，別々にとらえることはできないものであるといえる。越村（2012）は，変化と対応は切り離せないものであるとして，変化と対応のつながりに着目した学習を提案している。

越村（2012）は，変化と対応それぞれを前提とした文脈が存在するとして，「変化を前提とした文脈」と「対応を前提とした文脈」として特徴づけている。「変化を前提とした文脈」は，関数関係にある 2 量を考察する活動であり，《2 つの数量 A，B があって，伴って変わっている状況を表した文脈を意味する。》（p.17）としている。ここでは，変化の文脈から依存関係にある 2 量に着目し，表を用いて表現され，グラフや式へ変換されることが想定されている。対応を顕在化させることに向かっており，関数の理解へと焦点化されている学習であると解釈できる。したがって，方法型を示しているととらえることができる。このような学習を越村（2012）は，以下のように示している（図 3-5）。

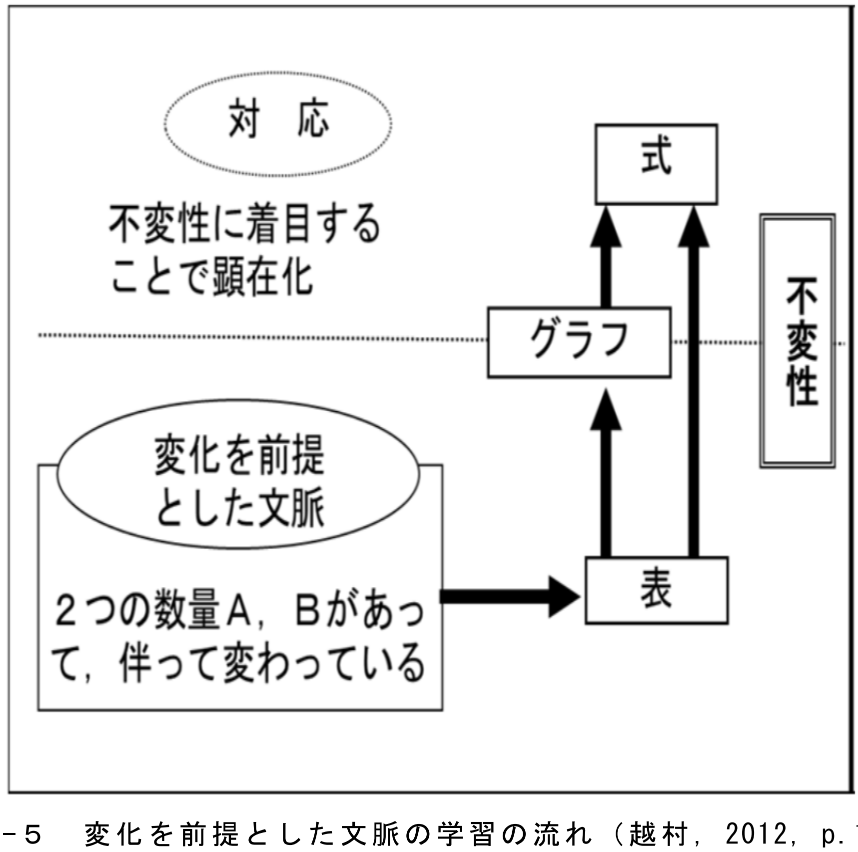



図３－５　変化を前提とした文脈の学習の流れ（越村，2012，p.17）

その一方で，越村（2012）は，《未知の数量 B を，既知の数量 A をもとにして考えるような文脈》（p.20）として，「対応を前提とした文脈」を挙げている。このことは，依存関係に着目することを示しており，したがって，目的型に該当する文脈であると解釈できる。ここでは，未知の数量 B を求めるための式で表現され，これを変数的にみることが要求される。このときに，割合の式から関数の式へと変換され，変化が顕在化する。この変数性を意識するために，式だけでなく，数直線などの他の表現を用いることが想定されている。このような学習は，以下のように示されている（越村，2012，図 3-6）。

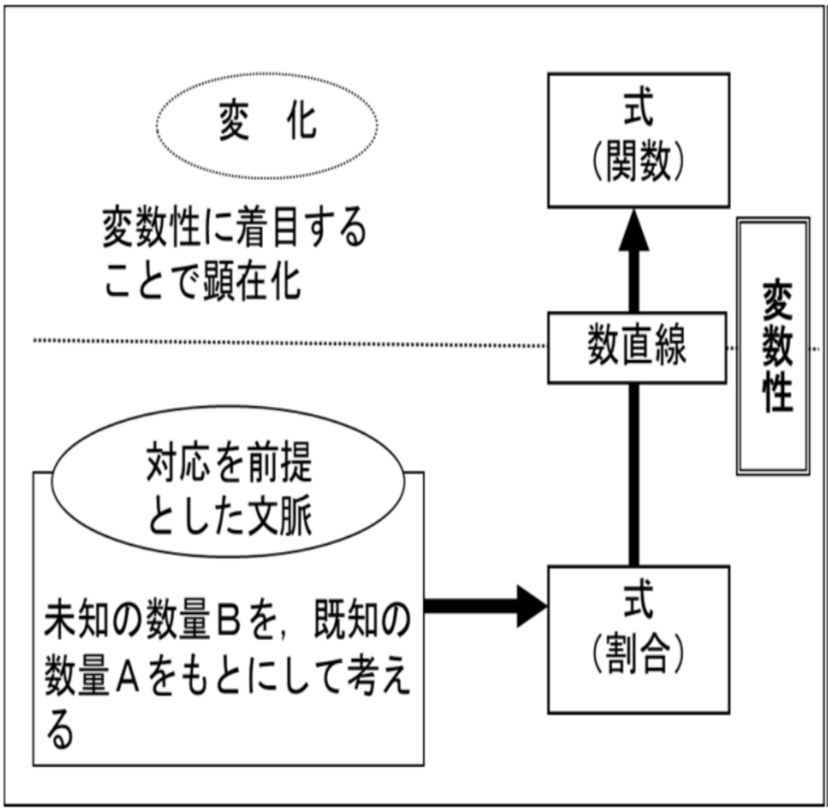


図３－６　対応を前提とした文脈の学習の流れ（越村，2012，p.20）

ここでは，始めに依存関係にある 2 量を取り出す活動があるが，このとき児童の認識としては 2 通りあると考える。それは，依存関係であることを認識している場合と認識していない場合である。言い換えれば，現実の場面を想起し，経験から依存関係であることがわかる場合と，関係するとは考えられるが伴って変わるかどうかはわからない場合である。式に表すということは，2 量の関係が分かっているということであると考えられ，越村（2012）の図 3-6 で示されているものは，この二つのうち前者に相当すると解釈できる。このとき，比例モデル適用の乱用（Van Dooren.W el al，2011）が指摘されているように，問題解決の際に用いる仮定や仮説は無意識的に用いられている可能性があり（島田・西村，2006），比例でない場合に比例であると誤解してしまうことが危惧される。これは，変化させてみていないことが原因であると考える。したがって，仮に依存関係であると考えられる場合でも，変化させてみることが必要であるといえる。

一方，後者の 2 量を取り出したがその関係性については認識していない場合における学

習活動はどのようになるかを考えると，始めに 2 量を取り出す活動が行われた後，先に示した「変化を前提とした文脈の学習の流れ」（越村，2012）になると考えられる。つまり，変化させてみることで，関係性を明らかにする活動が行われると考える。

まとめると，依存関係を認識しているとしていないとに関わらす，問題の解決で必要な関係のある 2 量を取り出す活動と，その 2 量が依存関係にあるということを判断するためには，変化させてみているはずであり，変化させる活動が必要であるといえる。このとき，表・式・グラフの表現を用いる順序は決まっているわけではなく，必要に応じて選択することになると考える。

以上より，現実の事象を扱う際には，まず関係のある 2 量をみつけるという対応に着目する活動が位置づき，そして，それらの関係の考察，つまり，規則性を発見する際に，変化に着目することになると考えられる。したがって，問題解決では，互いに他方を前提としながらも，対応への着目から変化への着目へと意識が変わるプロセスを踏むととらえることができる。その際に，必要に応じて表現を用いることになると考える。

## ３．関数の表現（表・式・グラフ）

関数を視点として実際の問題解決をおこなう際には，伴って変わる数量を用いることになるが，その伴って変わる数量は直接比較することができず，そこで表・式・グラフが必要となる（大谷ら，2001)。表・式・グラフは，事象を表したものであり，事象の探求を可能とする。そして，表わすだけでなく，表わすという手段が具体的な手だてとなって，関数的な見方を伸ばしていく（三輪，1974)。

### 3.1　表

表は，独立変数を組織的に変えた場合の従属変数の値の集合を規則的に配列する道具であり（大谷ら，2000)，対応や変化のようすを具体的な数値によって示したものである（三輪，1974)。グラフや式にくらべ，それ自体で比例の特徴を明示化せず，比例の性質を顕在化するには，言語等の他の手段を必要とする（大谷ら，2004)。したがって，表からは，より現実的に事象を考察することができるといえる。

### 3.2　式

式は，対応のしかた（規則）を一般的に明示したものであり，対応する値の組は表面から姿を消すことになる（三輪，1974)。比例の y=x×（きまった数）という式は，比例する数量関係の構造そのものを簡潔・明瞭に表現するものであり，問題場面の根底に横たわる本質的な仕組みを顕在化することができる（大谷ら，2000)。つまり，式からは対応の規則性を読み取ることが容易であり，より数学的に事象を考察できるといえる。

### 3.3　グラフ

グラフは，表と同じくよく使われ，対応する組のすべてを外延的に表現するものであり（三輪，1974)，2 変量の間の関係を平面上に図形的に表したものである（大谷ら，2001)。また，表が有限個の値しか表現し得ないのに対して，連続的な値の組であっても表現し得る（三輪，1974)。しかしながら，視覚的にはわかりやすい表現であるが，その内容が非常

に抽象的であるがゆえに，その読み書きの難しさを有する（大谷ら，2001）。

以上，関数の表現について述べたが，三輪（1974）が，《関数の表現はあくまで表現であって，関数そのものではない。・・・関数的考察はいきなり表現にはじまるものでないことを，当然のことながら注意しておかなくてはならない。事象において変わる量を意識し，見つけること，いくつかの変る量についての依存関係を見出すことが，まずなされなくてはならない。これなくしては，たとえば数表でいえば，項目の選択ができず，その必要性を理解することができないはずである。このような変量の意識，依存関係への着目が関数の考えの出発点であり，また，その方向へ指向する態度が重視される必要がある。》（p.218）と述べているように，関数を視点とした問題解決では，関数の表現を対象とするのではなく，現実の場面との関連を図り，問題解決の際に必要に応じて児童が表現を用いることができるようにすることが望ましいと考える。

## 第３節　指導方法の方向性

ここでは，先行研究をもとに，目的型の算数的活動の指導方法の方向性を述べる。

English（2003）は，数学的モデル化課題を用いてその活動の分析を行った。そこでは，グループ活動をした後，学級全体で，問題解決の方法を共有し，つくったモデルを説明し，正当化し，そしてフィードバックを促している。この活動の分析により，English（2003）は，数学的モデル化活動は重要な数学的な考えを顕在化させるために，教師の直接の介入なしで，子どもたちに問題の文脈に相互に作用し，仲間と取り組ませる必要があることを示唆している。

数学的モデル化に含まれる，水平的，垂直的な数学化に着目した Lange（1996）は，これらの数学化は，子どもたちの活動や活動の反省を通して実現するものであり，この反省は数学化のすべての段階で起こらなければならないと指摘している。そして，子どもたちは，数学化の個人的な過程をよく考え，ほかの子どもたちと活動について議論したり，数学化の所産を評価したり，結果を解釈しなければならないと言及している。

また，馬場（2009）は，社会的オープンエンドな問題と数学的オープンエンドな問題を比較し，以下の表 4-1 にまとめている（p.52）。

**表３－１　オープンエンドな問題の比較（馬場，2009，p.52）**

| | 数学的オープンエンドな問題 | 社会的オープンエンドな問題 |
|---|---|---|
| 目標 | 数学的考え方の育成 | 数学的考え方を用いた社会的判断力の育成 |
| 問題 | 数学的多様な解を有する | 数学的・社会的多様な解を有する |
| 方法 | 数学的多様な解と一般化，記号化による数学の深まり | 数学的・社会的多様な解と価値観に基づく議論による |

ここでの「社会的多様な解」とは，与えられた枠内で様々に解釈することで得られる多様な解を指すとしている。「社会的判断力」というのは，条件や解を含めて議論したり選択し

たりすることができる力を指している。馬場（2009）は，算数・数学授業では，多くの場合，問題の前提条件は固定的であるが，前提条件を問題とする社会的判断力を育成する事例をみてみると，問題解決の中で様々な条件を取り上げてみると価値的側面が浮かび上がること，そしてその問題解決には数学の価値観を踏まえ，社会と個人の関係性にまで言及する議論が不可欠であったと指摘している。数学の価値観について，以下の表 4-2 のようにまとめている。

**表３−２　数学における価値観（馬場，2009，p.54）**

| | 技術的アプローチ | 文化的アプローチ |
|---|---|---|
| イデオロギー的レベル | 客観主義 | 理性主義 |
| 感情的レベル | 制御 | 進展 |
| 社会学的レベル | 神秘性 | 開放性 |

馬場（2009）は，ケーキを分割する事例を挙げ，次のように説明している。

**「ケーキ分割の問題」**

ケーキが 5 こあります。私の家族はおじいさん，おばあさん，お父さん，お母さん，妹と私です。どのように分けたでしょうか。

《等しくない分け方は通常の授業の中では表れにくく，しかし現実場面では等しい分け方と同様に見られる。授業の中で，これらを取り上げていくには，〈理性主義〉に基づき，問題の背景にひそむ条件とそれに対応する数学（的解答）について説明したり，議論したりすることを必要とする。ここでの議論は，答えを 1 つに絞るための議論ではなく，各々の考え方をよりよく理解・鑑賞することを目指すので，〈進展〉と特徴付けることができる。また多様性を認めるという意味で，このような取り組みは〈開放性〉を有している。》(p.54)

以上より，目的型の算数的活動を行うためには，他者と議論させることで，問題や解決者がもつ前提を明らかにし，解決の目的に合うような解を求めることを促すこと，そしてその活動を反省させることで解決過程を振り返り，モデルの修正を行い，適切な解と算数の構成・発展へと至らせることが必要になると考えることができる。議論することで，様々な視点から問題場面の解釈や解決方法を検討し（山田，1999），反省することができ，数学の方法の習得，そして解決方法としての算数の内容の理解へとつなげることができると考える。

## 本章のまとめ

第 3 章では，目的型の算数的活動を具体的に示すことがねらいであった。

第 1 節では，目的型の算数的活動の学習過程の典型として，数学的モデル化に着目し，考察した。目的型の算数的活動は算数を使って現実の問題を解決する活動である。この点で，数学的モデル化が整合すると考えた。数学的モデル化は，現実の世界の中での問題や目的を認識することで活動が始まり，数学的に解釈することを通して，現実の世界に照らし合わせながら解決に向かうプロセスを踏む。そして，そのプロセスにしたがえば，特徴

として，現実的な文脈の必要性，算数を解決方法としてとらえること，多様な解が存在しうること，モデルの修正が挙げられた。

第 2 節では，学習内容の典型として，方法の育成を目的とする内容である「数量関係」領域に着目し，その中でも応用指向を基盤とし，構造指向へと接続される「関数の考え」の内容に焦点化し，考察した。関数の考えはその本質をみれば，問題解決の方法としてとらえられる。関数の考えを問題解決の方法として扱うためには，まず始めに依存関係にある 2 量を取り出す活動が行われる必要があり，その上で，規則性を発見し，その規則性を用いて問題を解決する活動が位置づけられ,したがって,互いに他方を前提としながらも，対応への着目から変化への着目へと意識が変わるプロセスを踏むととらえることができる。その際に，必要に応じて表現を用いることになる，ということを論じた。

第 3 節では，現実の問題を解決し，数学の方法を育成することを目的とする際の指導方法の方向性を提示した。

## 引用・参考文献


Blum.W（1993）. Mathematical modeling in mathematics education and instruction, Teaching and learning mathematics in context, Breiteig（eds.）,Ellis Horwood Limited, Chichester,pp.3-14.

Helen M.Doerr,H, M. & Lesh, R（2011）. Models and Modelling Perspectives on Teaching and Learning Mathematics in the Twenty-First Century, G.Kaiset et al.（eds.）,*Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling,Springer, pp.247-268.

Lange.J.de.（1996）. Using and Applying Mathematics in Education, Bishop, A. J. et. al.（eds）, *International Handbook of Mathematics Education*, Kluer Academic Publishers,pp.49-97.

Lesh, R. & Zawojewski, j.（2007）. Ploblem Solving and Modeling, Lester, F. K. （ed.）, *Second handbook of research on teaching and learning*, vol2, Information Age Publisher, pp.763-804.

Mousoulides, N, G.& English , L, D.（2011）. Engineering Model Eliciting Activities for Elementary School Students, G.Kaiset et al.（eds.）,*Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling,Springer, pp.221-230.

Van Dooren.W, De Bock.D, Vleugels.K., and Verschaffel.L（2011）. Word Problem Classification: A Promising Modelling Task at the Elementary Level, G.Kaiser et al.（eds.）, *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, International, Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling, Springer,pp.47-55.

阿部好貴（2008）.「数学的リテラシーの育成に関する基礎的研究―「数学の方法」としての数学化と数学的モデル化の関係の考察―」，全国数学教育学会『数学教育研究第 14 巻』，pp.59-65.

阿部好貴（2011）.「関数の教授・学習に関する一考察：数学的リテラシーの視点から」，日本数学教育学会『第 44 回数学教育論文発表会論文集（第 1 巻)』pp.549-554.

阿部好貴（2012）.「数学的リテラシーという視点からの教授・学習内容の考察―関数領域に焦点をあてて―」全国数学教育学会『数学教育学研究第 18 巻第 1 号』，pp.23-29.

飯田慎司（1995）.「オープンエンドの問題解決と Humanistic Mathematics について」，日本

数学教育学会『第 28 回数学教育論文発表会論文集』，pp.243-248.
池田敏和（2007).「数学的モデリングと算数教育」，日本数学教育学会『算数教育第 89 巻第 4 号』，pp.2-10.
池田敏和（2010).「数学的モデル化」，日本数学教育学会『数学教育学研究ハンドブック』，東洋館出版社，pp.272-281.
大谷実・中村雅恵（2000).「数学的活動におけるシンボル化と談話の役割：小学校 6 年比例の教授実験」，日本数学教育学会『第 33 回数学教育論文発表会論文集』，pp.101-106.
大谷実・中村雅恵・漢野有美子（2001).「比例の指導におけるグラフのシンボル化と談話の機能：小学校と中学校の関数指導の接続性に向けて」，日本数学教育学会『第 34 回数学教育論文発表会論文集』，pp.151-156.
大谷実（2002).『学校数学の一斉授業における数学的活動の社会的構成』，風間書房.
大谷実・中村雅恵（2004).「比例の指導における数表・グラフ・式のシンボル化過程―教授実験における教師と児童の談話の質的分析―」，日本数学教育学会『算数教育第 86 巻第 4 号』，pp.3-13.
越村尚貴(2012).『小学校算数における関数の考えの育成に関する研究』，修士論文（未刊行），新潟大学大学院教育学研究科.
島田功・西村圭一（2006).「算数と社会をつなげる力の育成をめざす授業に関する研究―「仮定をおく」「仮説を立てる」「検証する」に焦点を当てて―」，日本数学教育学会『算数教育第 88 巻第 2 号』，pp.2-11.
清水宏幸（2007).「日常場面で関数を活用させる指導」，日本科学教育学会『年会論文集 31』pp.207-210.
清野辰彦（2005).「「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化の学習指導に関する研究―2 乗に比例する関数に焦点をあてて―」日本科学教育学会『年会論文集 29』pp.183-186.
清野辰彦（2007).「学校数学における数学的モデル化の学習指導に関する研究―「仮定の意識化」に焦点をあてて―」日本数学教育学会『数学教育学論究』臨時増刊 87 pp.5-11.
長崎栄三（1995).「関数の本質と考えさせる授業」，半田進（編著）『考えさせる授業算数・数学―実践編』pp.252-265.
長崎栄三（2007).「算数・数学の力の構造化」，長崎栄三・滝井章（編著）『算数の力数学的な考え方を乗り越えて』，東洋館出版社，pp.40-61.
長崎栄三・滝井章（編著）（2007).『算数の力数学的な考え方を乗り越えて』，東洋館出版社.
中島健三（1978).「集合や関数の考えを生かした指導」，伊藤一郎・片桐重男・沢田和佐・中島健三・平林一栄（編著）『新・算数指導講座 1』，金子書房，pp.211-256.
中島健三（1991).「数量関係の指導内容の概観」，『新・算数指導実例講座 9 数量関係』，金子書房，pp.3-34.
西村圭一・島田功・長崎栄三（2008).「算数・数学と社会をつなげる力の構造の精緻化に関する研究」，日本数学教育学会『第 41 回数学教育論文発表会論文集』，pp.231-236.
西村圭一（2010).『数学的モデル化を遂行する力を育成する教材開発とその実践に関する研究』，東京学芸大学大学院連合学校教育学研究科 学位論文.
平林一榮（1987).『数学教育の活動主義的展開』，東洋館出版社.
ポラック，H.O.（三輪辰郎・川越一夫訳）（1980).「数学と他の学科との相互作用」，数学教育国際委員会（ICMI） 編 数学教育新動向研究会訳『世界の数学教育　その新しい動

向』，共立出版株式会社，pp.299-320.
三輪辰郎（1974）.「関数的思考」，中島健三・大野清四郎（編著）『数学と思考』，第一法規，pp.210-225.
山田祐樹（1999）.「数学的知識の活用に関する一考察―現実世界での活用に対する生徒の姿勢を中心に―」，全国数学教育学会『数学教育学研究第 5 巻』，pp.69-75.
文部科学省（2008）.『小学校学習指導要領解説算数編』，東洋館出版社.

## 第４章　目的型の算数的活動のあり方

目的型の算数的活動を，学習過程の視点から「数学的モデル化」，学習内容の視点から「関数の考え」に焦点化して具体的に考察した。

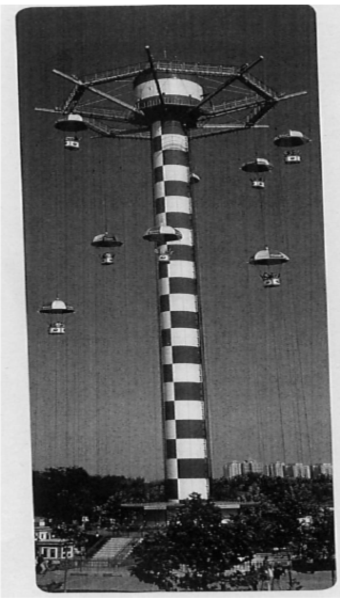
第 4 章では，比例の学習に着目して，学習過程と学習内容の二つの視点を合わせ，目的型の算数的活動のあり方を述べ，授業構想を示すことを目的とする。第 1 節では，比例の学習を対象として，算数的活動のあり方を述べる。第 2 節では，比例の学習における授業構想を示す。

### 第１節　比例における算数的活動のあり方

本研究では，比例の学習に着目し，具体的に目的型の算数的活動のあり方を述べる。その理由としては，目的型の算数的活動は，数学の方法の育成だけでなく，算数の内容の理解も含んでおり，比例の学習は関数の考えの育成と比例の学習の両方が含まれており，この点で目的型の算数的活動の典型であると考えられたからである。

#### １．比例におけるこれまでの学習指導

これまでの学習指導について先行研究をみてみると，変量をみつける活動がなされておらず，そこでは着目すべき 2 量が与えられ，その 2 量の関係を表や式に表したり，きまりを発見して問題を解決したりするだけの学習活動が多いことが課題として挙げられている（高見，1996；黒澤，2009 など）。このことは，現行の検定教科書（一松ら，2010）における，比例の導入場面（図 4-1）と活用場面（図 4-2）でもみることができ，関数の考えを用いて問題を解決する活動ではなく，表や式，グラフを考察する活動が中心となっていることがわかる。つまり，変化と対応の考察に焦点があり，比例の学習へと向かう方法型の算数的活動が主たる活動となっているといえる。

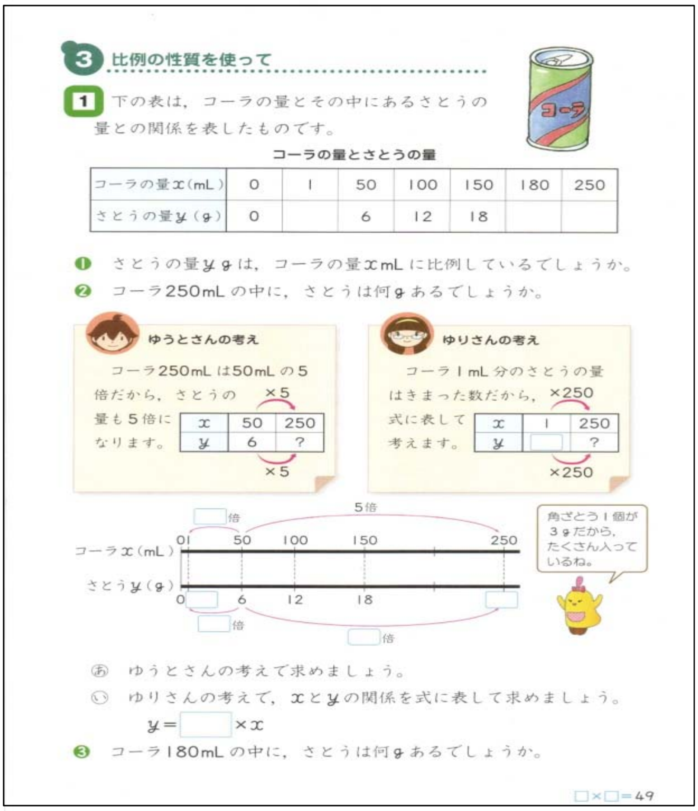


遊園地には，左の写真のように上がり下がりするパラシュートがあります。
パラシュートタワーの高さは，60m あります。パラシュートが上がるとき，時間と高さを調べて表にしました。

上がるのにかかる時間と高さ

| 時間（秒） | 0 | 3 | 5 | 9 | 10 | 16 | 18 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 高さ（m） | 0 | 9 | 15 | 27 | 30 | 48 | 54 | 60 |

図４－１　比例の導入場面（一松ら，2010）



3 比例の性質を使って

1 下の表は，コーラの量とその中にあるさとうの量との関係を表したものです。

コーラの量とさとうの量

| コーラの量 $x$（mL） | 0 | 1 | 50 | 100 | 150 | 180 | 250 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| さとうの量 $y$（g） | 0 | | 6 | 12 | 18 | | |

❶ さとうの量 $y$ g は，コーラの量 $x$ mL に比例しているでしょうか。
❷ コーラ250mL の中に，さとうは何 g あるでしょうか。



あ ゆうとさんの考えで求めましょう。
い ゆりさんの考えて，$x$ と $y$ の関係を式に表して求めましょう。
$y=\square\times x$
❸ コーラ180mL の中に，さとうは何 g あるでしょうか。

□×□=49

図４－２　比例の活用場面（一松ら，2010）

このような学習指導の現状は，次の阿部（2011）の記述に集約されると考える。

《関数はその本性として関係を探るという「関数の考え」（方法）が強調され，この点では応用指向的方法の視点から語られている。しかしその一方で，その教授・学習内容

は，関数の典型としての比例，一次関数といった性質に着目し，それらの表・式・グラフの考察・探求が主たる教授・学習活動となっている。つまり，関数領域においても，数と式や図形の領域と同様に，構造指向的な展開をおこなっている。》（p.552）

方法型の算数的活動での展開の根底には，表が 2 量間の対応を基に作成されるものであり，表の考察において関数的見方がなされる（布川，2010）など，関数の概念であるといわれている変化や対応の見方に着目し，関数の表現の考察を通して関数の考えを育成しようという考えがあると考える。つまり，方法型の算数的活動においては，表現を用いて，変化の見方や対応の見方をさせること，つまり関数の考えによって，関数を理解する活動であるといえる。このときの考察対象は，関数関係にある 2 量である。始めにあるべきとされる対応づけの活動が弱く，「変化」から「対応」へという活動がなされることになる。既述したように，現実事象を考えれば，関数における変化と対応は，三輪（1974）の言葉を借りれば，「不即不離」であり，分かつべからざるものであるにもかかわらず，このような展開によって，現実事象の考察のための変化と関数の理解のための対応というように，変化と対応が別々にとらえられてしまうと考える。したがって，学習指導の場では児童に，いかに変化と対応を関係づけさせてみさせるかに重点が置かれていると考える。

また，これまでの学習指導を数学的モデル化のプロセスでみれば，〔数学的処理〕に焦点があり，〔数学化，定式化〕,〔振り返り，照合，検証〕があまりなされていないといえる。つまり，問題状況から条件の設定を行い，解決しなければならない問題として算数の問題を児童がつくりだす活動がなく，得られた解をもとの問題状況や設定した条件と照らし合わせる必要がない。したがって，児童にとっては 2 量の関係を考察することが主目的となり，ただ規則性を発見するだけで，何か問題を解決するという目的となっていない活動であると想定することができる。このような活動では，現実と数学とのつながりが弱く，数学を使って現実の問題を解決する活動とは言い難いといえる。

## ２．比例における目的型の算数的活動

現実の問題を比例をつかって解決するためには，まず依存関係にある 2 量をみつける活動が必要である。そして，2 量の関係を明らかにし，比例であるととらえる。その後で，規則性（比例関係）を用いて解を得るという活動が想定される。これを西村（2010）の数学的モデル化のプロセスでみれば，〔問題の翻訳・定式化〕の段階で，比例であるという仮説を立て，その規則性にしたがって数学的モデル（表・式・グラフ）を用いて，数学的処理を行うことで解を得るという活動であると考える。設定された条件によっては，比例関係を用いて問題を解決する活動にならず，修正する必要がでてくる。これを図示すると，以下のようになる（図 4-3）。

なお，西村（2010）の数学的モデル化過程にしたがえば，「数学の問題」から「数学的結論」を得るまでに，現実事象の表現としての数学的モデルが作成される。しかし，比例を仮説として用いるためには，それ以前の「社会の問題」から「数学の問題」の段階でも現実事象の表現としての数学的モデルを作成する必要がある。「社会の問題」から「数学の問題」の段階での数学的モデルは，現実事象を解釈することに主目的があり，「数学の問題」から「数学的結論」の段階での数学的モデルは数学的処理を可能にするということに主目

的があるととられることができるが，これらは同じ数学的モデルである。したがって，比例の学習においては，「社会の問題」から「数学の問題」において数学的モデルを作成し，「数学の問題」から「数学的解答」の段階において作成した数学的モデルを用いて数学的解答を得るということになり，二つの段階において同様の数学的モデルがみられることになると考える。これは，関数が表現によって表されるものであるということに起因すると考えられる。

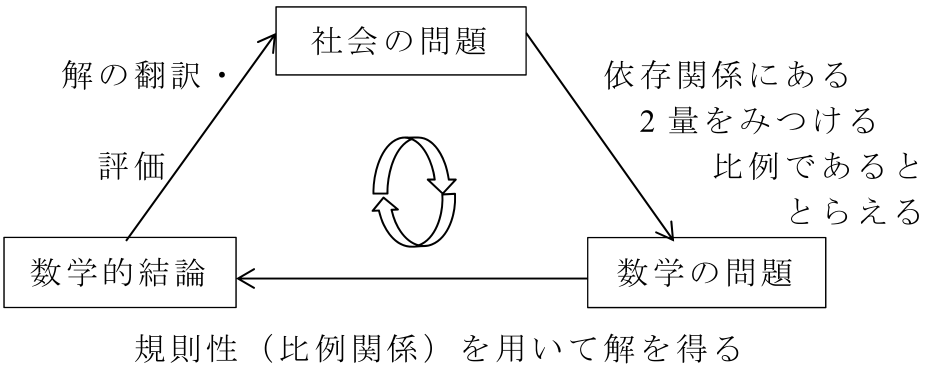



図４-３　比例における目的型の算数的活動（cf.西村，2010）

第 3 章で既述した目的型の特徴をもとに活動のあり方を具体的に述べる。まず，条件を設定することで比例をつかう状況を導く必要があり，つまり，依存関係にある 2 量に着目することが必要である。そして，比例を解決方法としてどのように理解させるかが問われることになる。解には，現実にある量について，どの量に着目するか，また問題状況をどのように解釈するかで多様な解が生じる。始めに得られた解が適切であるとは限らず，問題状況や設定した条件と照らし合わせることで，修正する必要がでてくる。扱う問題は比例関係を用いて解決する問題であるため，比例関係にある 2 量に着目するまで，修正を繰り返すことになると考える。

## 第２節　授業構想

これまでの議論を踏まえて，比例の学習において，目的型の算数的活動の授業を構想する。なお，比例の導入の授業として位置づける。子どもたちが経験したことのあるランドルト環を用いた視力検査を題材とし，視力検査に潜んでいる規則性（比例関係）を見つけ，この規則性を用いて問題を解決する授業である。

### １．比例における目的型の算数的活動

既述したように，現状では，比例の学習において，比例それ自体を理解する活動が展開されていると考える。しかし，方法の育成の観点から授業を構想すれば，比例を用いて問題を解決する活動，つまり関数の考えを用いた活動が展開される必要がある。

展開される活動を具体的に述べれば，まず関係のある 2 量をみつけるという対応に着目する活動が位置づき，変化に着目することで比例関係を見出す活動が想定される。これは，数学的モデル化の視点からみれば，条件を設定することにあたると考える。その後，その

規則性（比例関係）を使って問題を解決する活動が位置づくと考える。なお，設定された条件によっては，比例関係を用いて問題を解決する活動にならず，修正する必要がでてくる。

児童の活動としては，比例関係にある 2 量を選択する活動，それらの規則性（比例関係）を発見する活動，規則性（比例関係）を用いて解を得る活動が想定できる。以下に活動の内容を示す。また，これを西村（2010）の数学的モデル化の過程を基にして表すと，次のように図示できると考える（図 4-4）。

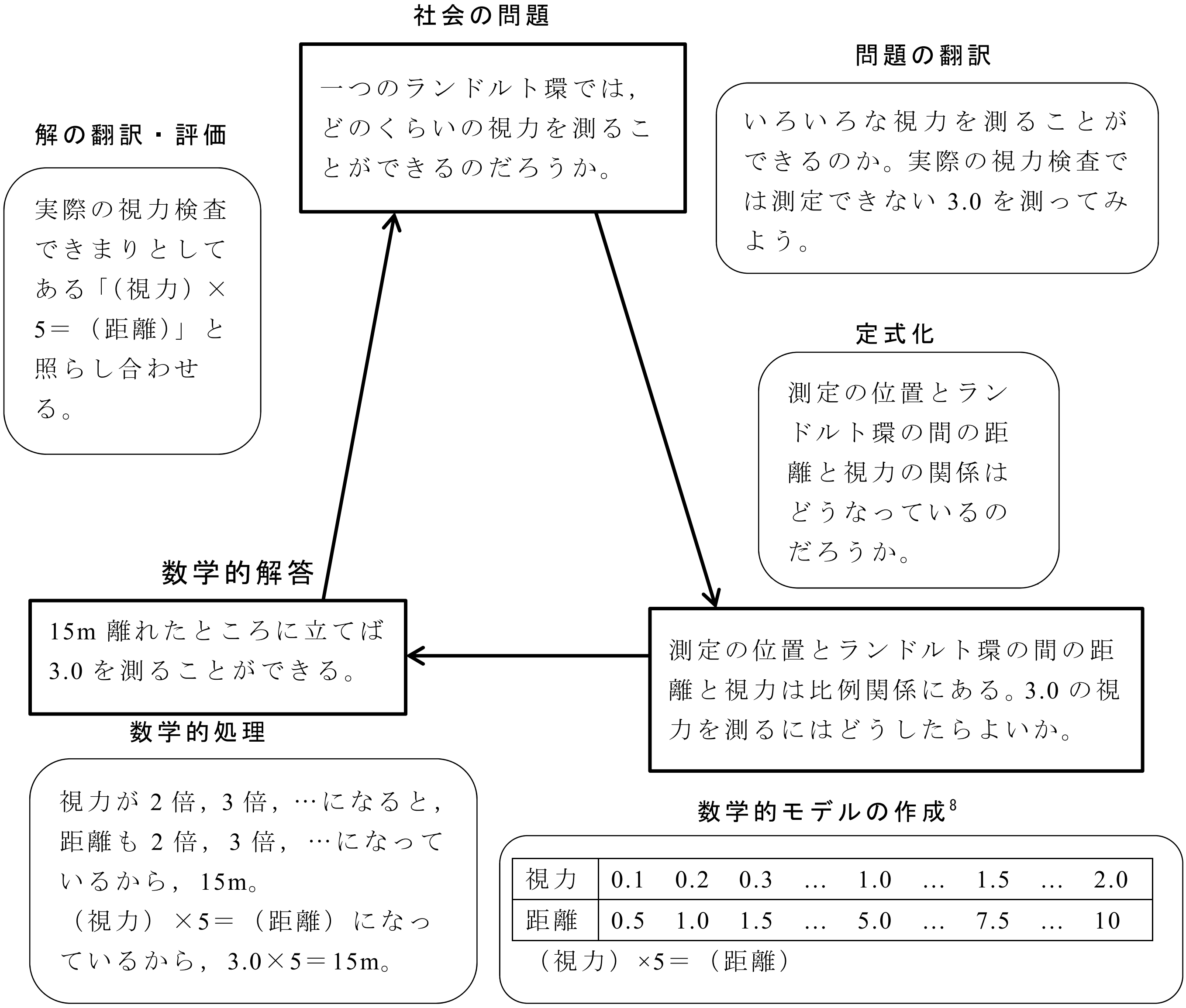



図４−４　本授業の活動内容（cf.西村，2010）

[8] 既述したように，ここで示した数学的モデルは「社会の問題」から「数学の問題」の段階において作成されていると考えるが，ここでは西村（2010）の数学的モデル化過程に沿って示している。

（1）比例関係にある 2 量を選択する活動

視力検査の際には，視力とランドルト環の大きさの 2 量によって測定される。これらが比例の関係にある。視力を捉える際に，何が関係しているかを考えることがまず始めの活動として位置づいている。この時には，従来行われている視力検査を想起し，関係を見つけることになる。従来の視力検査では，「ランドルト環の大きさ」と「視力」の関係であったが，本実践では，「ランドルト環と測定位置の間の距離」と「視力」の関係であり，変化するものが変わっているが，結局は，見ているランドルト環の大きさの変化へと収束でき，同様の比例関係を用いて測定できる。

（2）規則性（比例関係）を発見する活動

「ランドルト環と測定位置の間の距離」の 2 量を現実場面を想定して取り出した後，これらの関係をみるが，ここでは表，式，グラフを用いて規則性を発見する活動が想定される。その場合，変化に着目して「視力が 2 倍，3 倍，…になると，距離も 2 倍，3 倍，…になっている」ことを発見する場合と，対応に着目して「（視力）×5＝（距離）になっている」ことを発見する場合との 2 通りが想定できる。

（3）規則性（比例関係）を用いて解を得る。

発見した規則性を用いて，3.0 の視力を測ることができる距離を求める活動である。このとき，現実場面と照らし合わせることで，解の妥当性を検証する。本授業では，実際の視力検査できまりとしてある「（視力）×5＝（距離)」の関係との整合性を検証する。

また，授業展開としては，班活動を中心に行い，児童に問題状況を捉えさせ，数学的に解釈する過程を踏ませる。その後，学級全体で解決の過程を振り返ることで，解決方法の検討し，関数の考えや比例を用いて問題を解決できることを認識させる。

## ２．学習指導案

### 2.1　単元

第 5 学年「比例」

### 2.2　本時のねらい

関数の考えを用いてランドルト環と測定の位置の間の距離と視力の 2 量に着目し，規則性（比例）を用いて測定方法を考え，どんな視力も測定することができることがわかる。

### 2.3　本時の展開

| | 学習内容（教師の働きかけ（T)と児童の反応（C)） | 留意点（☆） |
|---|---|---|
| 導<br>入 | １．問題をとらえる。<br>ランドルト環を提示する。<br>T：これをみたことありますか。<br>C：（英語の）シーだ。 | |

| | | |
|---|---|---|
| | C：視力を測るときにみたよ。<br>T：いろいろなものを想像することができましたね。<br>これは，視力を測るときに使っているものとして今日は話を進めます。実は名前があって，「ランドルト環」といいます。<br>C：かっこいい。<br>C：名前なんてあったんだね。<br>T：みんなはこのランドルト環をつかって視力検査をしているんだよね。どうやって検査していましたか。<br>C：片目を隠して検査しました。<br>C：ランドルト環の大きさが違っていて，どこまでみえるかで検査しました。<br>T：そうですね。みんなが視力検査をするときは，ランドルト環の大きさが違っていて，どこまでみえるかで測定されていますね。<br>T：では，ランドルト環一つでは，視力検査はできるでしょうか。隣の人と話でみましょう。<br>C：えっ，たった一つで？<br>C：一つでは，測ることはできないよ。だって，視力の値はたくさんあるもの。<br>C：一つの視力なら，できるんじゃないかな。<br>C：いろいろ測ることができると思う。<br><br>**問題を提示する。**<br>**問題**<br>私たちは視力を測る際に「ランドルト環」を使用します。一つのランドルト環では，どのくらいの視力を測ることができるのだろうか。<br><br>**ランドルト環** | ☆本時では，通常のランドルト環の大きさの違いで視力を測るのではなく，一つのランドルト環で視力を測ることを認識させる。 |
| **展開①** | **２．測定方法を班毎に考え，実際に測定する。**<br>T：できそうだという意見もありますね。では，どうやったら測ることができるでしょうか。<br><br>**「どのくらい視力を測ることができるか」ということについて考える（問題の翻訳）。**<br>C：どのくらいの視力ってどういうことだろう。<br>C：一つだけかどうかということかな。 | ☆班ごとに問題をとらえさせる。 |

C：たくさんの視力を測ることができればいいのかな。
C：いつもやっている視力検査の 2.0 まで測ることができるかどうかを調べればいいのかな。
C：いつもやっているもの以上の視力が測れたらすごいと思う。
C：いつもやっているもの以上の視力を測れるかどうかを調べてみようか。
C：じゃあ，3.0 が測れるかどうかを調べてみよう。

**視力検査に関係している変数を考え，比例関係を導く（定式化・数学的モデルの作成・数学的処理）。**

C：なんでこのランドルト環で視力が測れるのだろう。
C：自分が動けばいいんじゃないかな。
C：ランドルト環を動かしてみたらどうだろう。
C：いつもはランドルト環自体の大きさが変わっていたけどな。

☆関係をみることに至らない班に対しては，従来の視力検査を想起させ，何が分かれば視力を測ることができるかを考えさせる。

**①自分が動くと考えている場合**

C：自分が動けば，視力が測れるのではないか。
C：みんなで，自分の視力に見合った位置を探してきまりがあるかどうかを調べればいい。
C：僕はこれより後ろだと見えない。
C：私は 0.6 だけれど，この距離は見えるから，3m だ。
C：表を作ることができた。

☆測定者には，自身の視力を伝える。
☆実際に見える位置を確かめさせる。
☆測定のために必要になった用具は与える。（メジャーなど）

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 視力 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | … | 1.0 | … | 1.5 | … | 2.0 |
| 距離 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | … | 5.0 | … | 7.5 | … | 10 |

C：表をみると，視力が 2 倍，3 倍，…になると，距離も 2 倍，3 倍，…になっている。
C：（視力）×5＝（距離）になっている。
C：15m 離れたところに立てば 3.0 を測ることができる。

**②ランドルト環を動かす場合**

C：ランドルト環を動かせば視力を測れるのではないか。
C：ランドルト環を動かして見えるところを探せば良い。
C：僕はこれよりランドルト環を遠ざけると見えない。
C：私は 0.6 だけれど，この距離は見えるから，3m だ。

<table>
<tr>
<td></td>
<td>C：表を作ることができた。<br><br>
<table>
<tr><td>視力</td><td>0.1</td><td>0.2</td><td>0.3</td><td>…</td><td>1.0</td><td>…</td><td>1.5</td><td>…</td><td>2.0</td></tr>
<tr><td>距離</td><td>0.5</td><td>1.0</td><td>1.5</td><td>…</td><td>5.0</td><td>…</td><td>7.5</td><td>…</td><td>10</td></tr>
</table>
<br>
C：表をみると，視力が 2 倍，3 倍，…になると，距離も 2 倍，3 倍，…になっている。<br>
C：（視力）×5＝（距離）になっている。<br>
C：ランドルト環を 15m 離せば 3.0 を測ることができる。</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>展開②</td>
<td>３．視力の測定方法について考える。<br>
T：どのように考えたか教えてください。<br><br>
「どのくらい視力を測ることができるか」ということについて述べる（問題の翻訳）。<br>
C：「どのくらいの視力」というものを，私たちの班では，「いつも以上の視力」と考えて，具体的に 3.0 の視力が測れるかどうかを調べることにしました。<br><br>
視力検査に関係している変数を考え，比例関係を導き，解をもとめたことを述べる（定式化・数学的モデルの作成・数学的処理）。<br>
C：自分が動けばいいと考えました。<br>
C：ランドルト環を動かせばいいと考えました。<br>
C：自分が動く場合とランドルト環を動かす場合がある。<br>
C：表をつくって考えました。<br><br>
<table>
<tr><td>視力</td><td>0.1</td><td>0.2</td><td>0.3</td><td>…</td><td>1.0</td><td>…</td><td>1.5</td><td>…</td><td>2.0</td></tr>
<tr><td>距離</td><td>0.5</td><td>1.0</td><td>1.5</td><td>…</td><td>5.0</td><td>…</td><td>7.5</td><td>…</td><td>10</td></tr>
</table>
<br>
C：表をみると，視力が 2 倍，3 倍，…になると，距離も 2 倍，3 倍，…になっていることがわかります。<br>
C：（視力）×5＝（距離）になっていることがわかります。<br>
C：ランドルト環を 15m 離せば 3.0 を測ることができる。</td>
<td></td>
</tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| | **実際の視力検査できまりとしてあるものとの整合性を確認する（解の翻訳・評価）。**<br>T：実は，視力検査には，みんながみつけたようにきまりがあるのです。それは,「距離は視力の 5 倍の値」とされています。<br>C：あたっている。<br>C：そのきまりはみつけることができなかった。どこが間違っているのだろう。<br><br>**解決方法を振り返る。**<br>T：どうして，このように解決できたと思いますか。<br>C：いつもの視力検査では，ランドルト環の大きさの違いで測っていて，今回は，一つのランドルト環で測らなければならないというので違うけれど，結局見えるランドルト環の大きさで視力は変わるから。<br>C：測定の位置とランドルト環の間の距離と視力は関係するから，それらの関係を調べればいい。<br><br>T：まとめるとどんなことがいえるかな。<br>C：視力が立つ位置で変わるのだから，視力と距離の関係を調べればいい。<br><br>T：なるほど。では，一つのランドルト環では，どのくらいの視力を測ることができることになるでしょうか。<br>C：きまりをつかったら，たくさん測ることができる。<br>C：もとの一つのランドルト環の大きさによって，測ることができる範囲が変わってきそうだ。<br>C：きまりをつかえば，ランドルト環がどんな大きさでも，測ることができると思う。<br>C：きまりをつかえば，どんな視力も測ることができるということになる。 | ☆ランドルト環と測定の位置との距離と視力との関係に着目すればよいことを認識させる。<br>☆伴って変わる数量に着目して規則性を発見すればよいということを認識させる。<br><br>☆3.0 ではない場合を考えている班もあるため，いろいろな班の考えをまとめて解を導く。 |
| まとめ | **４．視力の測定方法を考えることでわかったことを考える。**<br>T：今日学習したことは何ですか。<br>C：2 倍，3 倍，…になると，距離も 2 倍，3 倍，…になっているという関係を使えば，わからない部分まで予測することができた。<br>C：視力×5＝距離というきまりを用いることで，わか | |

| | | |
|---|---|---|
| | らない部分まで予測することができた。<br>C：伴って変わる二つのものは，その間のきまりを見つければ，どちらかの数値を使って，もう一方の数値を求めることができる。<br>C：一方が 2 倍，3 倍になると，もう一方も 2 倍，3 倍，…になるという関係を用いることで，わからない部分まで予測することができた。 | |

## ３．課題点

本授業で用いた問題状況では，現実場面の解釈が限定されており，多様な解釈が出にくいものであると考える。したがって，問題状況をさらに検討することが今後の課題であると考える。なお，本授業は実践しておらず，今後，実践を行い，修正していく必要がある。

問題状況を検討する際，扱う量に着目する必要があると考える。本研究では，関数の考えを，「ある目的から一つの数量 A を考察しようとするとき，それと関連のあるほかの数量 B を見出し，その数量 B をとらえることで，もとの数量 A が決められないかという考え（中島，1991)」としてとらえている。関係のある 2 量は，いくつかの中から選択されることになるが，対象となるのは，2 量である。量とは，対象とするものが内包するいろいろな性質の 1 つの側面を表したものである（古藤，1991)。例えば，円の周の長さを半径または直径をもとにきめようとする場合である（中島，1978)。この場合は，これら 2 量が同種の量であるとわかっているため，X＝A×k として表すことができる（中島，1978)。量の測定とは,《対象とする物体のもっている性質のうちのある一つの性質に着目して，それを適当に単位をきめて数値化すること》（古藤，1971，p.85）である。数学的にいえば，量は n 次元的構造をもっており，量の測定とは，n 次元の構造をもっている物体を 1 次元（数直線上）に射影することである（古藤，1971）となる。関数の考えにおいて，2 量を関係づけるということは，量の測定をし，1 つの側面に着目し，それを測定するために，別の側面に着目することととらえることができる。これは同種の量について考える場合である。そして量の関係には，異種の量もある。これは，平行四辺形の面積＝底辺×高さの公式の場合などがあり, X＝A×B(または, X＝k×A×B)として表されるものである(中島, 1978)。したがって，2 量の関係が同種と異種で異なり，特に異種の場合はどのようにして関連づけさせるかがより問題となると考える。その一つとして，本研究で構想したランドルト環を題材とした授業のように，比例関係が用いられている現実の事象を題材として扱うことが考えられる。この場合，現実場面を想起することで，比例関係を見出すことにつながると考えられるからである。

## 本章のまとめ

第 4 章では，学習過程の典型である「数学的モデル化」と学習内容の典型である「関数の考え」の二つの視点を合わせ，目的型の算数的活動の学習指導のあり方を述べ，授業構想を示すことがねらいであった。

第 1 節では，比例の学習に着目し，これまでの学習指導を批判的に考察した上で，そのあり方を述べた。これまでの学習指導では，関数の考えは比例を理解するためのものとし

て扱われていることが指摘できた。関数の考えを解決方法として用いて，現実の問題を比例をつかって解決するためには，まず依存関係にある 2 量をみつける活動が必要である。そして，2 量の関係を明らかにし，比例であるととらえる。その後で，規則性（比例関係）を用いて解を得るという活動が想定される。これを数学的モデル化のプロセスでみれば，〔問題の翻訳・定式化〕の段階で，数学的モデルを作成し，それによって比例であるという仮説を立て，その規則性にしたがって数学的モデルを用いて，数学的処理を行うことで解を得るという活動であると述べた。また，第 3 章で述べた目的型の算数的活動の特徴から，具体的に比例の学習で想定される活動を述べた。

第 2 節では，目的型の算数的活動の授業構想を提示した。ランドルト環を用いた視力検査を題材として，比例の導入部分の授業を構想した。従来の視力検査を想起することで，依存関係の 2 量を取り出し，視力を測定する方法を考え，規則性を用いればどんな視力も測定できることを発見するという活動である。しかしながら，問題状況が制限されたものであり，この活動では多様な解釈が出にくいことが課題として挙げられた。

## 引用・参考文献

English,L.D（2003）. Reconciling Theory, Research, and Practice:A Models and Modelling Perspective, Educational Studies in Mathematics, Kluer Academic Publishers, pp.225-248.

Lange.J.de.（1996）. Using and Applying Mathematics in Education, Bishop, A. J. et. al.（eds）, *International Handbook of Mathematics Education*, Kluer Academic Publishers,pp.49-97.

阿部好貴（2011）.「関数の教授・学習に関する一考察：数学的リテラシーの視点から」，日本数学教育学会『第 44 回数学教育論文発表会論文集（第 1 巻）』pp.549-554.

一松信ほか（2010）.『みんなと学ぶ小学校算数』，学校図書.

黒澤俊二（2009）.「『関数の考え』を誘発する提示物の条件と効果」,『日本教育心理学会総会発表論文集』，p.325.

古藤怜（1971）.「数学的な考え」，古藤怜・羽二生恵太郎・近藤恒夫（編著）『新しい算数授業の創造』，近代新書出版社，pp.69-119.

古藤怜（1991）.「量と測定（低・中学年）の指導内容の概観」,『新・算数指導実例講座第 5 巻』，金子書房，pp.3-40.

高見資宏（1996）.「依存関係を認識する過程に関する研究」，日本数学教育学会『第 29 回数学教育論文発表会論文集』，pp.85-90.

中島健三（1978）.「集合や関数の考えを生かした指導」，伊藤一郎・片桐重男・沢田和佐・中島健三・平林一栄（編著）『新・算数指導講座 1』，金子書房，pp.211-256.

中島健三（1981）.「関数の考えとその創造的な活用」,『算数・数学教育と数学的な考え方』，金子書房，pp.173-242.

中島健三（1991）.「数量関係の指導内容の概観」『新・算数指導実例講座 9 数量関係』，金子書房，pp.3-34.

西村圭一（2010）.『数学的モデル化を遂行する力を育成する教材開発とその実践に関する研究』，東京学芸大学大学院連合学校教育学研究科 学位論文.

布川和彦（2010）.「数量関係の学習と背後の現象や共変性の意識化」，上越教育大学数学教

室『上越数学教育研究』, pp.1-10.
馬場卓也（2009).「算数・数学教育における社会的オープンエンドな問題の価値論からの考察」, 全国数学教育学会『数学教育学研究第 15 巻第 2 号』, pp.51-57.
三輪辰郎（1974).「関数的思考」, 中島健三・大野清四郎（編著)『数学と思考』, 第一法規, pp.210-225.
山田祐樹（1999).「数学的知識の活用に関する一考察―現実世界での活用に対する生徒の姿勢を中心に―」, 全国数学教育学会『数学教育学研究第 5 巻』, pp.69-75.

## 終章　本研究の総括と今後の課題

本研究の主題である「目的型の算数的活動のあり方」に関するこれまでの理論的検討を振り返り，得られた知見を整理する。

### 第１節　本研究の総括

本研究における研究目的は，以下のとおりであった。

> 今日の算数教育で強調される算数的活動を明らかにし，これまでの学習指導で対応しえない算数的活動に対する学習指導のあり方を明らかにすること。

この目的に対して，本研究では以下の三つの研究課題を設定し，その解決を試みた。

| | |
|---|---|
| （研究課題 1） | 算数的活動をとらえる枠組みを構築すること。 |
| （研究課題 2） | 「課題 1」をうけて，構築した枠組みをもとに，今日の算数教育で強調される算数的活動のあり方を明らかにし,その実現に向けた課題を明示すること。 |
| （研究課題 3） | 「課題 2」をうけて，今日の算数教育で強調される算数的活動を実現するための学習指導のあり方を明らかにすること。 |

これらの課題に対する取り組みならびにその成果を各章ごとにまとめ，最終的に論文全体を俯瞰したい。

#### １．算数的活動をとらえる枠組みの構築

第 1 章では，学習指導の目的に対して，算数的活動の位置付けを明確にするために，算数的活動をとらえる枠組みを構築することがねらいであった。

第 1 節では，数学的活動に関する先行研究を考察した。現実と数学の交渉のあり方を教育的に定式化し，それを数学的活動として提案した数学的活動として島田（1977）の数学的活動がある。しかしながら，島田の数学的活動では，学習指導の目的が明示されていないため，実際の学習指導場面において，その目的に対する数学的活動の位置付けが明確でないと考えられた。そこで，学習指導の目的に対する数学的活動の位置付けを明らかにするために，島田（1977）の数学的活動を「数学の方法」という視点から整理している阿部

（2010），岩崎ら（2008）と「学習指導の目的」という視点から整理している長崎ら（2009）の議論を考察した。その結果，数学的活動には，数学的活動（「数学の方法」）を通して「数学の内容」を理解する活動と，「数学の内容」を使って，数学的活動（「数学の方法」）そのものを身に付ける活動とに区分することができた。

第 2 節において，算数的活動をとらえる枠組みを示した。

| |
|---|
| **①方法型の算数的活動**：<br>算数的活動（数学の方法）を通して，算数の内容を理解する。<br>学習指導の目的：算数の内容<br>学習指導の方法：数学の方法<br>**②目的型の算数的活動**：<br>算数の内容を使って，算数的活動（数学の方法）そのものを身に付ける。<br>学習指導の目的：数学の方法<br>学習指導の方法：算数の内容 |

算数的活動は，「数学の方法」としてとらえることができ，構造指向と応用指向の両面をもつ。構造指向と応用指向それぞれに内容と方法があり，構造指向においては算数の内容が，応用指向においては数学の方法がそれぞれ前景に現れることになる。したがって，学習目標に応じてどちらの型で行うかは異なる，ということを論じた。

## ２．今日の算数教育からみたこれまでの学習指導の課題の明確化

第 2 章では，今日的な視点より，これまでの学習指導の課題を明確にすることがねらいであった。

第 1 節では，これまでの学習指導を考察した。これまでの学習指導は，「問題解決による数学的な考え方の育成」と集約でき，数学的な考え方は，実質陶冶と形式陶冶を総合しようとする中で生まれてきたものであるが，実際行われた学習指導は，算数の内容に焦点があったと指摘することができる。つまり，これまでの学習指導は，本研究の枠組みでいえば，方法型で行われてきたといえる。さらにいえば，そこでは，いかにわかりやすく内容を理解させるかに重きが置かれていたことが想定される。このような学習指導は，全国学力・学習状況調査結果からみれば，内容の理解においては成果がみられるが，活用に課題がみられ，さらにその中でも応用指向の内容に関する問題において課題があることがわかった。

第 2 節では，算数教育の理念と今日的動向の視点より，今日の算数教育で強調される算数的活動を明らかにした。算数教育は，リアリズムに基づき，現実的な内容を扱い，生活に必要となる知識・技能を学習することが目的となる。したがって，算数教育の理念からみれば，目的型の算数的活動が基盤となると解釈することができる。また，今日的動向に着目すれば，今日の「数学化された社会」や「知識基盤社会」とよばれる社会へ対応していくためには，数学的に解釈する力や自ら考え判断する力が必要であり，固定された内容ではなく，方法に注目することが重要となる。したがって，目的型の算数的活動に焦点があたる。以上，算数教育の理念と今日的動向の両方の視点から，目的型の算数的活動の必

要性が示唆された。さらに，新たな目標概念の必要性を述べた。これまでの学習指導の目標とされた数学的な考え方は，主に算数を理解するためのものとして扱われてきたと考えられる。したがって，現実の問題を算数を使って解決する活動にはなりにくいものであった。このことより，新たな目標概念の必要性が示唆された。そこで，本研究では，長崎らが提唱している「算数の力」をその目標として位置づける必要があるということを論じた。

第 3 節では，これまでの学習指導の課題点を指摘した。これまでの方法型の学習指導では，算数の内容に焦点があり，数学の方法が身についていないことが考えられた。また，学習指導要領をみれば，目的型の学習内容は示されていることがみてとれた。これらのことより，目的型の学習内容に対しては方法型の学習指導では適切でなく，新たな学習指導の必要性が示唆された。このことから，目的型の学習内容に対する学習指導のあり方を探る必要があるということを示した。

## ３．目的型の算数的活動の具体化

第 3 章では，目的型の算数的活動を具体的に示すことがねらいであった。

第 1 節では，目的型の算数的活動の学習過程の典型として，数学的モデル化に着目し，考察した。目的型の算数的活動は算数を使って現実の問題を解決する活動である。この点で，数学的モデル化が整合すると考えた。数学的モデル化は，現実の世界の中での問題や目的を認識することで活動が始まり，数学的に解釈することを通して，現実の世界に照らし合わせながら解決に向かうプロセスを踏む。そして，そのプロセスにしたがえば，特徴として，現実的な文脈の必要性，算数を解決方法としてとらえること，多様な解が存在しうること，モデルの修正が挙げられた。

第 2 節では，学習内容の典型として，方法の育成を目的とする内容である「数量関係」領域に着目し，その中でも応用指向を基盤とし，構造指向へと接続される「関数の考え」の内容に焦点化し，考察した。関数の考えはその本質をみれば，問題解決の方法としてとらえられる。関数の考えを問題解決の方法として扱うためには，まず始めに依存関係にある 2 量を取り出す活動が行われる必要があり，その上で，規則性を発見し，その規則性を用いて問題を解決する活動が位置づけられ，したがって，互いに他方を前提としながらも，対応への着目から変化への着目へと意識が変わるプロセスを踏むととらえることができる。その際に，必要に応じて表現を用いることになる，ということを論じた。

第 3 節では，現実の問題を解決し，数学の方法を育成することを目的とする際の指導方法の方向性を提示した。

## ４．目的型の算数的活動のあり方の明確化

第 4 章では，学習過程の典型である「数学的モデル化」と学習内容の典型である「関数の考え」の二つの視点を合わせ，目的型の算数的活動の学習指導のあり方を述べ，授業構想を示すことがねらいであった。

第 1 節では，比例の学習に着目し，これまでの学習指導を批判的に考察した上で，そのあり方を述べた。これまでの学習指導では，関数の考えは比例を理解するためのものとして扱われていることが指摘できた。関数の考えを解決方法として用いて，現実の問題を比例をつかって解決するためには，まず依存関係にある 2 量をみつける活動が必要である。

そして，2 量の関係を明らかにし，比例であるととらえる。その後で，規則性（比例関係）を用いて解を得るという活動が想定される。これを数学的モデル化のプロセスでみれば，〔問題の翻訳・定式化〕の段階で，数学的モデルを作成し，それによって比例であるという仮説を立て，その規則性にしたがって数学的モデルを用いて，数学的処理を行うことで解を得るという活動であると述べた。また，第 3 章で述べた目的型の算数的活動の特徴から，具体的に比例の学習で想定される活動を述べた。

第 2 節では，目的型の算数的活動の授業構想を提示した。ランドルト環を用いた視力検査を題材として，比例の導入部分の授業を構想した。従来の視力検査を想起することで，依存関係の 2 量を取り出し，視力を測定する方法を考え，規則性を用いればどんな視力も測定できることを発見するという活動である。しかしながら，問題状況が制限されたものであり，この活動では多様な解釈が出にくいことが課題として挙げられた。

## ５．本研究の成果

本研究の主要な成果は，次の 3 点である。

研究成果 1：算数的活動をとらえる枠組みの構築

今日の算数教育では，算数的活動が強調されている。しかしながら，算数的活動は広く規定され，とらえがたい。教育とは合目的な営みであることを考えれば，学習指導の目的という観点から算数的活動をとらえる枠組みを構築する必要があると考えた。そのために，現実と数学の交渉のあり方を教育的に定式化し，それを数学的活動として提案した（岩崎，2009）ものである島田（1977）の数学的活動を考察し，その上で，島田（1977）の数学的活動を「数学の方法」という視点から整理している阿部（2010），岩崎ら（2008）と「学習指導の目的」という視点から整理している長崎ら（2009）の議論を考察することで，算数的活動をとらえる枠組みを構築した。

研究成果 2：目的型の算数的活動の実現に向けた課題の同定

今日求められる算数教育を実現するためには，強調される算数的活動を明らかにし，これまでの学習指導で対応するかどうかについて議論し，その上で，対応しえない部分に対して新たな学習指導を探る必要があると考えた。

そこで，算数教育の理念と今日的動向を明らかにし，今日の算数教育で強調される算数的活動をとらえた。それを踏まえて，これまでの学習指導を批判的に考察し，課題点を指摘した。

研究成果 3：目的型の算数的活動のあり方の明確化

目的型の算数的活動の学習過程の典型として数学的モデル化，学習内容の典型として「数量関係」領域の「関数の考え」の学習内容に着目し，考察した。現実の問題を解決する活動とは，問題状況を数学的に解釈していく過程としてとらえることができ，その特徴として，現実的な文脈の必要性，算数を解決方法としてとらえること，多様な解が存在しうること，モデルの修正があることを述べた。関数の考えの具体的な学習においては，特に比例の学習に焦点をあてて考察した。関数の考えを問題解決の方法として扱うためには，依

存関係の着目，規則性の発見，規則性の適用という活動となり，対応への着目から変化への着目へと意識が変わるプロセスを踏む必要があるということを述べた。そして，授業を構想した。

### ６．本研究の独自性・意義

本研究は,「算数的活動をとらえる枠組みの構築」,「目的型の算数的活動の実現に向けた課題の同定」,「目的型の算数的活動のあり方の明確化」という主要課題に取り組む中で，漠然ととらえられる算数的活動を学習指導の目的に対して明確に区分し，算数教育の理念と今日的動向の「不易」と「流行」の視点より今日強調される算数的活動を同定し，そのあり方を明らかにすることで，今日求められる算数教育の方向性を示したと考える。

## 第２節　今後の課題

本研究では，これから強調される算数教育のあり方を算数的活動の視点から明らかにした。この実現へ向けた方策を今後の課題として以下に 4 点述べる。

第 1 に，目的型の算数的活動の授業実践が挙げられる。本研究では，第 4 章第 2 節で授業の構想を述べた。授業実践を行い，検証する必要がある。

第 2 に，他の学習内容での考察が挙げられる。本研究では，目的型の算数的活動を数学的モデル化ととらえ，さらに「数量関係」領域の特に「関数の考え」に焦点化して考察した。したがって，他の学習内容においても今日的な視点より考察することが求められる。

第 3 に，指導方法の開発が挙げられる。本研究で述べた目的型の算数的活動は，主に活動内容の視点から述べたものである。したがって，活動をどのように組織するかという指導方法を考えることが求められる。

第 4 に，方法を基軸にしたカリキュラムの開発が挙げられる。現在のカリキュラムは内容の系統的展開を基軸に編成されている。そのため，方法の育成を目的とした場合，不整合が生じると考える。したがって，方法を基軸にしたカリキュラムを構成し，それに沿った単元構成が求められると考える。

## 引用・参考文献

Blum.W（1993）. Mathematical modeling in mathematics education and instruction, Teaching and learning mathematics in context, Breiteig（eds.）,Ellis Horwood Limited, Chichester,pp.3-14.

English,L.D（2003）. Reconciling Theory, Research, and Practice:A Models and Modelling Perspective, Educational Studies in Mathematics, Kluer Academic Publishers, pp.225-248.

Gravemeijer, K（2002）. From models to modeling, Gravemeijer,K, Lehrer, R., Oers, B. van and Verschaffel, L. （eds.）, *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education*.Kluwer Academic Publishers, pp.7-22.

Helen M.Doerr,H, M. & Lesh, R（2011）. Models and Modelling Perspectives on Teaching and Learning Mathematics in the Twenty-First Century, G.Kaiset et al.（eds.）,*Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, International Perspectives on the Teac

hing and Learning of Mathematical Modelling,Springer, pp.247-268.
Hino, K.（2007）. Toward the problem-centered classroom:trends in mathematical problem solving in japan, *ZDM*, 39, pp.503-514.
Jablonka,E.&Gellert,U.（2007）. Mathematisation-Demathematisation,Gellert,U.&Jablonka,E.（eds.）*Mathematisation-Demathematisation:Social,philosophical and educational ramifications*, Sense Publishers, pp.1-18.
Lange.J.de.（1996）. Using and Applying Mathematics in Education, Bishop, A. J. et. al.（eds）, *International Handbook of Mathematics Education*, Kluer Academic Publishers,pp.49-97.
Lesh, R. & Zawojewski, j.（2007）. Ploblem Solving and Modeling, Lester, F. K. （ed.）, *Second handbook of research on teaching and learning*, vol2, Information Age Publisher, pp.763-804.
Mousoulides, N, G.& English , L, D.（2011）. Engineering Model Eliciting Activities for Elementary School Students, G.Kaiset et al.（eds.）,*Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling,Springer, pp.221-230.
Van Dooren.W, De Bock.D, Vleugels.K., and Verschaffel.L（2011）. Word Problem Classification: A Promising Modelling Task at the Elementary Level, G.Kaiser et al.（eds.）, *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, International, Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling, Springer,pp.47-55.
阿部好貴（2008）.「数学的リテラシー育成の方向性に関する考察」，日本科学教育学会『第32回年会論文集』，pp.129-132.
阿部好貴（2008）.「数学的リテラシーの育成に関する基礎的研究―「数学の方法」としての数学化と数学的モデル化の関係の考察―」，全国数学教育学会『数学教育学研究第 14巻』，pp.59-65.
阿部好貴（2009）.「数学的リテラシー育成のための教授・学習のあり方に関する一考察：抽象に着目して」，日本数学教育学会『第42回数学教育論文発表会論文集』，pp.55-60.
阿部好貴(2010).『数学教育におけるリテラシーの育成に関する研究』,学位論文(未刊行)，広島大学大学院教育学研究科.
阿部好貴（2011）.「関数の教授・学習に関する一考察：数学的リテラシーの視点から」，日本数学教育学会『第44回数学教育論文発表会論文集第1巻』pp.549-554.
阿部好貴（2012）.「数学的リテラシーという視点からの教授・学習内容の考察―関数領域に焦点をあてて―」全国数学教育学会『数学教育学研究第18巻第1号』，pp.23-29.
飯田慎司（1995）.「オープンエンドの問題解決と Humanistic Mathematics について」，日本数学教育学会『第28回数学教育論文発表会論文集』，pp.243-248.
池田敏和（2007）.「数学的モデリングと算数教育」，日本数学教育学会『算数教育第89巻第4号』，pp.2-10.
池田敏和（2010）.「数学的モデル化」，日本数学教育学会『数学教育学研究ハンドブック』，東洋館出版社，pp.272-281.
一松信ほか（2010）.『みんなと学ぶ小学校算数』，学校図書.
伊藤説朗（1991）.「新しい算数科問題解決の指導」,『新教育課程の実践と数学的な考え方・

問題解決』，東洋館出版社．
岩崎秀樹（2006）．「算数・数学教育における一般化に関する認知論的・記号論的研究」，日本数学教育学会『数学教育学論究 86　臨時増刊』，pp.15-24．
岩崎秀樹（2007）．「先行する研究と残された課題」，『数学教育学の成立と展望』，ミネルヴァ書房，pp.1-13．
岩崎秀樹（2009）．「リテラシーからみえる数学教育学の課題―中等教育段階における背景的理念―」，日本数学教育学会『第 42 回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録及び要項』，pp.32-37．
岩崎秀樹・阿部好貴・山口武志（2008）．「知識基盤社会におけるリテラシーの課題と展望」，日本科学教育学会『科学教育研究』，Vol.32 No.4．pp.366-377．
岩崎秀樹・真野祐輔・阿部好貴（2010）．「今日の数学科の課題と展望」，岩崎秀樹編著『新しい学びを拓く数学科授業の理論と実践』，ミネルヴァ書房，pp.1-21．
岩崎浩（2001）．「「算数・数学的活動」とそれを実現することの意味について」，上越教育大学数学教室『上越数学教育研究第 16 号』，pp.37-46．
大谷実・中村雅恵（2000）．「数学的活動におけるシンボル化と談話の役割：小学校 6 年比例の教授実験」，日本数学教育学会『第 33 回数学教育論文発表会論文集』，pp.101-106．
大谷実・中村雅恵・漢野有美子（2001）．「比例の指導におけるグラフのシンボル化と談話の機能：小学校と中学校の関数指導の接続性に向けて」，日本数学教育学会『第 34 回数学教育論文発表会論文集』，pp.151-156．
大谷実（2002）．『学校数学の一斉授業における数学的活動の社会的構成』，風間書房．
大谷実・中村雅恵（2004）．「比例の指導における数表・グラフ・式のシンボル化過程―教授実験における教師と児童の談話の質的分析―」，日本数学教育学会『算数教育第 86 巻第 4 号』，pp.3-13．
岡崎正和（2011）．「算数的活動を活かした授業づくり」，中原忠男（編著）『新しい学びを拓く算数科授業の理論と実践』，ミネルヴァ書房，pp.63-75．
カイテル,C.（狭間節子・日野圭子訳）（1998）．「21 世紀の数学教育の展望―数学カリキュラム：だれに対してか，だれの利益か」，日本数学教育学会『数学教育学論究』，Vol.70，pp.57-64．
黒澤俊二（2009）．「『関数の考え』を誘発する提示物の条件と効果」，『日本教育心理学会総会発表論文集』，p.325．
越村尚貴（2012）．『小学校算数における関数の考えの育成に関する研究』，修士論文（未刊行），新潟大学大学院教育学研究科．
古藤怜（1971）．「数学的な考え」，古藤怜・羽二生恵太郎・近藤恒夫（編著）『新しい算数授業の創造』，近代新書出版社，pp.69-119．
古藤怜（1991）．「量と測定（低・中学年）の指導内容の概観」，『新・算数指導実例講座第 5 巻』，金子書房，pp.3-40．
島田功・西村圭一（2006）．「算数と社会をつなげる力の育成をめざす授業に関する研究―「仮定をおく」「仮説を立てる」「検証する」に焦点を当てて―」，日本数学教育学会『算数教育第 88 巻第 2 号』，pp.2-11．
島田茂（1977）．『算数・数学科のオープンエンド　アプローチ―授業改善への新しい提案―』，みずうみ書房 pp.9-21．
清水宏幸（2007）．「日常場面で関数を活用させる指導」，日本科学教育学会『年会論文集

31』pp.207-210.
清野辰彦(2005).「「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化の学習指導に関する研究―2乗に比例する関数に焦点をあてて―」日本科学教育学会『年会論文集 29』pp.183-186.
清野辰彦(2007).「学校数学における数学的モデル化の学習指導に関する研究―「仮定の意識化」に焦点をあてて―」日本数学教育学会『数学教育学論究』臨時増刊 87 pp.5-11.
高見資宏(1996).「依存関係を認識する過程に関する研究」，日本数学教育学会『第 29 回数学教育論文発表会論文集』，pp.85-90.
滝井章(2007).「算数を生み出す力を育てる授業」，長崎栄三・滝井章(編著)『算数の力 数学的な考え方を乗り越えて』，東洋館出版社，pp.116-126.
長崎栄三(1990).「問題解決」，新算数教育研究会編著『算数授業の新展開講座 8 算数教育の基礎理論』，東洋館出版 pp.134-146.
長崎栄三(1995).「関数の本質と考えさせる授業」，半田進(編著)『考えさせる授業算数・数学―実践編』pp.252-265.
長崎栄三(2007).「今なぜ算数・数学の力が注目されるのか」，長崎栄三・滝井章(編著)『算数の力 数学的な考え方を乗り越えて』，東洋館出版社，pp.18-27.
長崎栄三(2007).「算数・数学の力の構造化」，長崎栄三・滝井章(編著)『算数の力数学的な考え方を乗り越えて』，東洋館出版社，pp.40-61.
長崎栄三(2007).「数学的な考え方の再考」，長崎栄三・滝井章編著『算数の力 数学的な考え方を乗り越えて』，東洋館出版社，pp.166-183.
長崎栄三・國宗進・太田伸也・相馬一彦(2009).『豊かな数学の授業を創る』，明治図書.
長崎栄三・滝井章(編著)(2007).『算数の力 数学的な考え方を乗り越えて』，東洋館出版社.
中島健三(1978).「集合や関数の考えを生かした指導」，伊藤一郎・片桐重男・沢田和佐・中島健三・平林一栄(編著)『新・算数指導講座 1』，金子書房，pp.211-256.
中島健三(1981).「関数の考えとその創造的な活用」，『算数・数学教育と数学的な考え方』，金子書房，pp.173-242.
中島健三(1991).「数量関係の指導内容の概観」，『新・算数指導実例講座 9 数量関係』，金子書房，pp.3-34.
西村圭一(2010).『数学的モデル化を遂行する力を育成する教材開発とその実践に関する研究』，東京学芸大学大学院連合学校教育学研究科 学位論文.
西村圭一・島田功・長崎栄三(2008).「算数・数学と社会をつなげる力の構造の精緻化に関する研究」，日本数学教育学会『第 41 回数学教育論文発表会論文集』，pp.231-236.
西村圭一・山口武志・清水宏幸・本田千春(2011).「数学教育におけるプロセス能力育成のための教材と評価に関する研究：イギリス「ポーランド数学(Bowland Maths.)」の考察」，日本数学教育学会『数学教育第 93 巻第 9 号』， pp.2-12.
布川和彦(2010).「数量関係の学習と背後の現象や共変性の意識化」，上越教育大学数学教室『上越数学教育研究』，pp.1-10.
馬場卓也(2009).「算数・数学教育における社会的オープンエンドな問題の価値論からの考察」，全国数学教育学会『数学教育学研究第 15 巻第 2 号』，pp.51-57.
馬場卓也・清水浩士(2010).「数学科の授業構成」，岩崎秀樹編著『新しい学びを拓く数学

科授業の理論と実践』，ミネルヴァ書房，pp.97-126.
平林一栄（1987).「数学教育における構成主義について」,『第 20 回数学教育論文発表会発表要項』，pp.51-56.
平林一榮（1987).『数学教育の活動主義的展開』，東洋館出版社.
ポラック，H.O.（三輪辰郎・川越一夫訳）（1980).「数学と他の学科との相互作用」，数学教育国際委員会（ICMI） 編 数学教育新動向研究会訳『世界の数学教育　その新しい動向』，共立出版株式会社，pp.299-320.
溝口達也（2010).「指導方法」，数学教育研究会編『算数教育の理論と実際』，聖文新社，pp.172-197.
三輪辰郎（1974).「関数的思考」，中島健三・大野清四郎（編著)『数学と思考』，第一法規，pp.210-225.
山口武志（2008).「知識基盤社会において求められる学力と新教育課程―新しい数学科学習指導要領の検討―」，日本数学教育学会『数学教育第 90 巻第 5 号』，pp.29-36.
山田祐樹（1999).「数学的知識の活用に関する一考察―現実世界での活用に対する生徒の姿勢を中心に―」，全国数学教育学会『数学教育学研究第 5 巻』，pp.69-75.
文部科学省（2008).『小学校学習指導要領解説算数編』，東洋館出版社.
文部科学省 HP.「全国的な学力調査　（全国学力・学習状況調査等）　」（http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/gakuryoku-chousa/index.htm).