新潟大学教育学部数学教室,『数学教育研究』, 第 48 巻, 第 1 号, 6-64, 2013.

算数教育における代数的推論の促進を目指した教授・学習に関する研究

新潟大学大学院　教育学研究科
教科教育専攻　数学教育専修
梅津　祐介

序章　本研究の目的と方法

本章では，本研究の目的と方法を述べ，論文全体の概要を示す。第 1 節では本研究の目的を，第 2 節では本研究の内容を述べる。

第 1 節　本研究の目的

小学校算数における児童の様相として, 高学年になると学習内容の理解に困難が伴う児童が増えていくという実態がある。学習内容を概観してみると，単位量当たりの大きさ，割合，比例のようにかなり概念的な内容や, ひっくり返してかける分数のわり算に代表されるように形式的な処理が施される内容が多く，岡崎（1999）は，こういった内容は既に中学校以上の数学としての性格を帯びているものとみることができると指摘している。

このような学習内容の困難性を，算数と数学の接続の問題からアプローチし，解答を導こうとする研究は多い。岩崎（2007）は，算数と数学の接続という教育的課題の主題として「一般化」をとりあげ，その理論的整備と実践的展開を考察している。また，藤井（1999）は，文字式の指導への示唆として，≪「数字の式」から「文字の式」へと発展するためには「数字の式」のなかに一般性を読みとることが必要となる≫（pp.158-159）と述べ，算数において擬変数を意図的に指導することが，数字の式から文字式に至る指導の契機になると指摘している。

算数と数学の違いを代数領域でみてみると，算術[1]と代数の違いと換言することができる。Ameron（2000）は，算術と代数は互いの内容が分断されていることを指摘し，両者の特徴をまとめている。例えば，算術と代数の目標という視点から比較すれば，算術が数値解の発見に向かうのに対し，代数は問題解決方法の一般化・記号化に向かう点で異なる。また，問題解決方法という視点から比較すれば，算術が既知量を使った推論，終着点としての未知数という特徴があるのに対し，代数は未知数を使った推論，出発点としての未知数という特徴に違いがある。これらの相違から，算術から代数の移行に際し，学習者の中で不和が引き起こされるのは想像に難くない。例えば，手順の結果を表すものとして認識されている算術の「＝（等号)」は，後に代数の学習を妨げることが知られている。

このように, 算術の影響によって起こる代数学習の特定の障害は, 例えば高学年の算数で早期に代数学習を取り入れるというような小さな調整で解消されるとは思えない。中学校以上の数学としての性格を帯びている学習内容であっても，多くの児童は算術的な方法で問題を解決している。しかしながら，算術的な方法ではなく，代数的な方法で解決することも可能であり，むしろ後者の方法が適し

[1] 本研究では「代数」に対する用語として「算術」を用いており，教科としての算数科については「算数」を用いる。

ている場合もある。いつも算術的な方法を扱わなければならないようなことでは，代数を学習するときに，大きな障害のもとになることは明らかである。

算術的な方法が上手く代数的な方法にまでつながっていない現状を顧みるとき，算術と代数を切り離して考えるのではなく，算術は，本質的に代数的特徴を有しており，代数と異なる領域というよりはむしろ代数の一部としてみなすことが有益である。このように，代数の一部として算術があるものとしてとらえる考え方に初期の代数（Early Algebra）があり，ここでは代数的推論（algebraic reasoning）が鍵概念として位置付いている。

このようなことから，算数において代数的推論を促進することが算術と代数を接続すること役割を担うと考えてよいだろう。しかし，算数において，どのように代数的推論を促進させるのか，その指導のあり方については十分に明らかにされているとはいえない。そこで本研究では，算数教育において如何にして代数的推論を促進させるのか，その教授・学習のあり方を明らかにすること目的とする。そして，この目的達成のために，以下の研究課題を設定する。

【研究課題 1】　初期の代数（Early Algebra）に関する先行研究の考察から，代数的推論とは何かを示すこと。

【研究課題 2】　「課題 1」を受けて，教授・学習における代数的推論の課題を明らかにすること。

【研究課題 3】　「課題 2」を受けて，代数的推論を促進する教授・学習のあり方を明示すること。

第２節　研究の内容

前節における研究の目的と研究課題を受けて，本研究の内容を以下のように示す。

【研究内容（1）】代数的推論について先行研究の考察から代数的推論の様相を明らかにし，算数教育における代数的推論の課題性を指摘する。（第 1 章）

【研究内容（2）】具体的な学習内容の事例的考察により，一般化という視点から代数的推論の困難性の所在を明らかにする。（第 2 章）

【研究内容（3）】指摘された代数的推論の困難性を解決するアプローチを明らかにし，代数的推論を促進する教授・学習のあり方を検討する。（第 3 章，第 4 章）

以下では，研究内容の概要及び研究方法について簡潔に説明する。

研究内容（1）では，代数的推論に関する先行研究を文献解釈的な方法によって検討し，その様相を明らかにする。次に，現状の学習指導において代数的推論の大半が自然発生的に表出すること，そして，その多くが「数と計算」領域に関する内容であることから，本研究において焦点化すべき学習内容を明確にする。さらに，代数的推論の促進が算数教育における真正な課題となり得ることを指摘する。

研究内容（2）では，まず，Dörfler（1991）の一般化モデル，岩崎（2007）の一般化分岐モデルを考察し，一般化のプロセスにおいて「記号の対象化」が重要な段階であること，それは代数的推論を促進する足がかりとなるものであることを指摘する。また，具体的な学習内容の事例的考察により，

「記号の対象化」の成立の困難性を指摘し，その課題解決のアプローチを探る視点として，「発見」と「正当化」を設定する。

研究内容（3）では，「発見」と「正当化」という視点で Wittmann（2009）の操作的証明（Operative proof）の事例を考察し，児童が数や式を対象化する必要性を認識する教授・学習のあり方を探る。さらに，操作的証明（Operative proof）と代数的推論の学習構造を比較し，そこで得た示唆をもとに代数的推論を促進する教授・学習のあり方を検討する。

序章における引用・参考文献

Ameron , B . A . van(2000). *Reinvention early algebra: Developmental research on the transition from arithmetic to algebra* , CD-β Press , Center for Science and Mathematics Education.

Carraher , D . W . & Schliemann ,A . D(2007), Early algebra and algebraic reasoning , In Frank K. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* , 669-705. Information Age Publishing.

Dörfler , W.(1991), Forms and Means of Generalization in Mathematics, Bishop, A. J. (Ed.). *Mathematical Knowledge: Its Growth Though Teaching*, 63-85. Kluwer Acade mic Publishers.

Kaput, J. J.(2007). What is Algebra? What is algebraic reasoning? , Kaput, J. J. et al(Eds.), *Algebra in the early grades*, 5-17. Routledge.

Wittmann,E.Ch.(2009),Operative Proof in Elementary Mathematics, Paper presented at the international conference ICMI Study19:Proof and proving in Mathematics Education “Proof and proving in mathematics education”,Taiwan,10-15.May2009,organized by ICMI.

岩崎秀樹(2007),『数学教育の成立と展望』ミネルヴァ書房.

岡崎正和(1999),「算数から数学への移行期における子どもの論理の発達の特徴－除法の一般化を事例としてー」,『上越数学教育研究』,14,39-48.

藤井斉亮(1999),「『数字の式』から『文字の式』に至る指導－擬変数についてー」, 杉山吉茂先生ご退官記念論文集編集委員会編,『新しい算数・数学教育の実践を目指して』東洋館出版社,153-162.

第１章　代数的推論に関する基礎的考察

本章は，代数的推論の概念を明確にし，それが算数教育における本質的な課題として適切に位置付くことを示すことを目的とする。そのために第 1 節では，代数的推論に関する先行研究を考察し，概念規定を行う。第 2 節では，算数教育において代数的推論が教育課題として位置付くことを，現状の算数教育の問題点から述べる。第 3 節では，代数的推論が学習過程に適切に位置付けられるためには，そこに内在する課題を明確にする必要があることを述べる。

第１節　代数的推論の明確化

１．初期の代数（Early Algebra）

Blanton&Kaput（2005a）は，国際教育到達度評価学会（IEA）が，1995 年に行った第 3 回国際数学・理科教育動向調査（TIMSS,1995）において，アメリカ国内の 8 年生が 4 年生と比較して到達度が低かったことから，その原因を小学校と中学校の学習指導の分離に求めている。つまり，小学校算数と中学校数学の接続の問題として捉えたのである。そして，小学校算数においても，数的・幾何学的なパターンを発見したり，文字式の意味をよみ取ったりするような代数的な学習を導入する必要性を述べている。

これまでの算数教育は，算術と代数を切り離して考え，その橋渡しのあり方に焦点があてられてきた。しかし，代数への拡張可能性をもつものとして算術を捉えたならば，算数教育の目標として，本質的に代数的特徴をもつ算術を位置付けることができる。このような見方をすれば，算数教育の目標において，これまでの算術は代数的特徴をもつ算術として拡張される（図 1-1）。

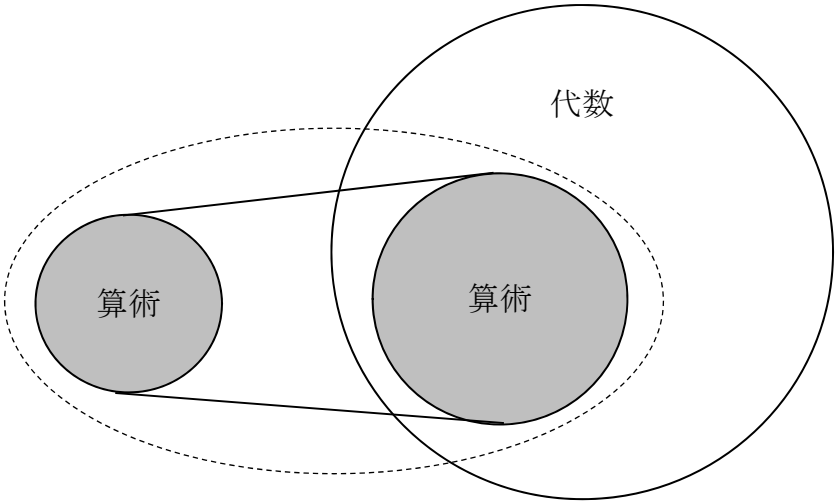


図 1-1　算数教育の目標における算術の拡張

図 1-1 において代数の円の外側にある算術は，これまでの算数教育の目標としての算術であり，内側の算術は代数的特徴をもつ算術を示している。このように，代数の一部として算術があるものとして捉える考え方は初期の代数（Early Algebra）[2]と呼ばれている。これは，およそ 6 歳から 12 歳の学

[2] 初期の代数（Early Algebra）に対する考え方として，前代数（Pre-Algebra）がある。これは，算術

習者の代数に関する指導を網羅するために用いられている表現である。初期の代数（Early Algebra）を支持する研究者は，初等数学の現在の内容が充分に代数と区別されていないことを強調している（Mason，1996 など）。例えば，算術の深い理解は，本質的に代数的な数学的一般化を要求するだろうし（Carraher & Schliemann，2007），加数が未知の問題を解決するとき，児童は暗黙的に加法的な逆元の公理を扱うかもしれない。

算術の代数的特徴は，藤井（2002）の擬変数の研究によっても明らかにされている。擬変数とは≪表記としては具体的な数字であるが，表記内容としては一般性が意図的に内包されている数≫（p.164）のことである。この定義に準ずれば，我が国の教科書で用いられている数は，その多くが擬変数であると解釈できるだろう。例えば，ある児童は，73－6 という数式が 73 から 10 を引き 4 を加えることで解決され得ることに気付き，73－6＝73＋（10－6）－10＝（73－10）＋4＝63＋4＝67 と理由を述べるかもしれない。この方法を文字の式で表現すれば，a－b＝a＋（10－b）－10 であり，この式の一般性を認識する鍵は 10 の補数を（10－b）と表現できるかである。実際の調査で児童は「引く数がどんな数でも」と述べ，数を擬変数として解釈したと述べられている。この事例から分かるように，算術には代数的特徴が潜在しており，数を代数的によむことや書くこと，そして処理することを明示的に指導していくことが，算術から代数への移行を滑らかにするだろう。

20 世紀初頭のアメリカ社会においては，初等教育では商売をする上で必要な算術が期待され，代数は中等学校を終えたわずかな生徒のためにあった。代数が一般的な中等教育で展開されることは当たり前のことと考えられていたのである。しかし，算術と代数の分離は多くの生徒の失敗と脱落者を導いた（Kaput，2007）。このような実情を背景に，より難解な数学的リテラシーの社会的必要性に応えて，全ての生徒が今，「みんなのための代数」という理念の下で代数を学ぶことを期待している。初期の代数（Early Algebra）に注目が集まっている背景には，このような時代的要請もある。

２．代数的推論の概念規定

小学校算数における今日的動向として，代数的特徴を明示的に教授・学習する初期の代数（Early Algebra）の重要性を述べた。このことは，算術の深い理解が本質的に代数的な数学的一般化を要求

から代数への飛躍的な移行を容易にすることをねらいとしている。このアプローチを支持する研究者らは，＋，－，×，÷のような数学的記号の使用や意味を代数的表現や方程式に従事させるものとして改良あるいは再定義することを行っている。代数指導の導入部分における適切な介入が，生徒が典型的に示す困難を軽減すると考えているからである。

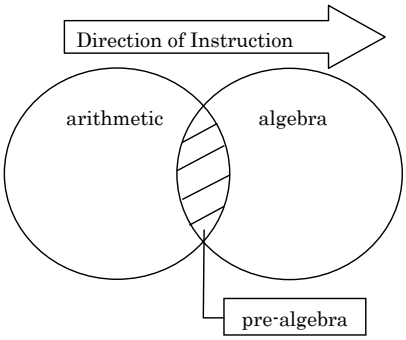


図 1-2　算術と代数の一般的な見方（Schliemann，et al.,2007）

するものであることを示しており，ここで鍵概念として位置付いているのが，代数的推論（algebraic reasoning）である。つまり，算数において，いかにして代数的推論を促進させるのか，その指導のあり方を明らかにすることが重要であるといえる。

代数は文化的産物であり，歴史的に伝達されてきたものである。一方，代数的推論は人々の活動から現れるものであり，数学について実行し，思考し，議論する方法に関するものである。Blanton と Kaput（2005a）は，代数的推論を≪一組の特定の例から数学的アイデアを一般化し，論証に関する議論を通してそれらの一般化を確立して，年齢相応の方法で表現するプロセス≫（p.413）であると捉えている。また，Kaput（2007）は算術から代数への移行を目指すために，小学校で代数的推論を促進することを提案しているが，代数的推論の本質を，≪合目的的な一般化とそれに伴う推論を与える複雑な記号化のプロセス≫（p.9）であると指摘している。そして，代数的推論の中心的側面として，「一般化の体系的記号化」，「統語論的に導かれた推論と活動」を挙げている（pp.10-11）。

代数領域そのものが，数に関わる操作や性質を扱う内容，数のパターンを扱う内容など，多岐に渡っており，代数的推論の明確な定義は難しいかもしれないが，どのような内容であれ，その本質は Kaput が指摘するように「一般化」にあるといってよく，その一般化の過程は児童の議論によって展開していくだろう。そこで，Blanton や Kaput の指摘を参照し，本研究における代数的推論を以下のように規定する。

数に関わる操作や性質，数のパターンを取り扱う学習において，一般化が確立することを代数的表現を用いて説明すること

第２節　教育課題としての代数的推論

１．代数的推論の形態

Blanton と Kaput（2005a）によれば，代数的推論には様々な形態があり，以下のように分類される。

①算術における数に関わる操作や性質の一般化（以下，一般化された算術）
②関数関係を記述する数のパターンの一般化（以下，関数の考え）
③一般化を表現し，形式化する領域としてのモデリング
④計算と関係から抽象化された数学的体系についての一般化

これらの中では，①一般化された算術と②関数の考えが，小学校算数において，より一般的な代数的推論であるとされている。したがって，以下ではこれら 2 つの代数的推論について詳細に述べることとする。

（１）一般化された算術

「一般化された算術」とは，数の性質や計算等に関する数学的アイデアをいくつかの事例から一般化し，それを表現することである。以下に例を示す。

【例１】
3＋8＝11，5＋2＝7，7＋10＝17 等の数式から，奇数と偶数の和は奇数であるという数学的アイデアを見つけ，「奇＋偶＝奇」のように表現する。

【例２】
0＋5869＝5869，0＋7＝7，0＋a＝a 等の式から，0 に何を足しても元の数になるという数学的アイデア（加法の特性）を見つけ，「ある数と 0 を足しても，ある数と同じになる」と表現する。

（２）関数の考え

「関数の考え」とは，数的・幾何学的なパターン等に関する数学的アイデアをいくつかの例から一般化し，それを表現することである。以下に例を示す。

【例１】
台形の机の端と端を横につないで図 1-3 のような座り方をしたとき，任意の数の机に座ることのできる人数を求める問題。児童は 1 台，2 台，3 台の場合から，座れる人数が 7 人，12 人，17 人というように机が 1 台増えるごとに 5 人ずつ増えるというパターンを発見する。そして，座ることができる人数は「5 を机の数だけ倍して 2 を足した数」や「5×□＋2」と表現する。

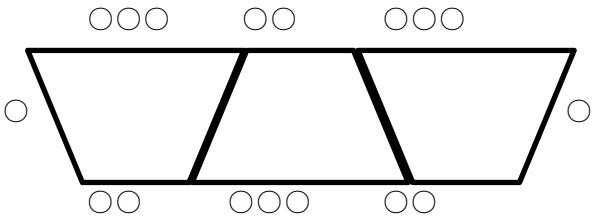


図 1-3　机の数と座る人数の関係

【例２】
一列にキューブを加えていき，色の付いたロッド（棒）を作り，ロッドの上に「スマイル」シールを貼っていく。外に見えているキューブの表面には，必ずシールが付いている（図 1-4）。そして，幾何的なパターンを組み立て，そのパターンを言葉や数式で表現する。
例えば，この長さが 2 のロッドは 10 枚のステッカーを必要とする。いくつかの事例の中から，児童は定数 2 に気付き，シールの枚数は「4×□＋2」と表現することができる。

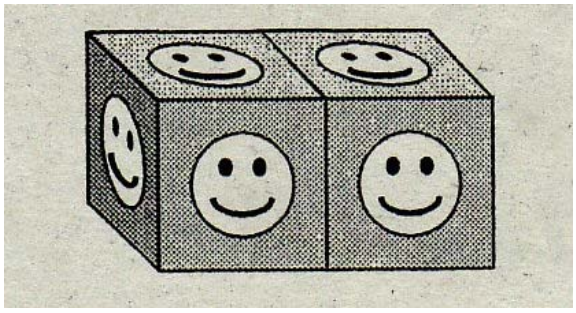


図 1-4　キューブステッカー　（Schliemann et al.,2007）

２．算数教育において焦点化される代数的推論

教室の中の学習指導は，教師と児童の相互作用によって展開されるものであるが，教師はそこに如何にして児童の代数的推論を組織化しているのだろうか。代数的推論を促進していくためには，教師の専門性の発達が重要である。Blanton & Kaput（2005b）は，GEAAR（Generalizing to Extend Arithmetic to Algebraic Reasoning : 算術を代数的推論へ拡張するための一般化）プロジェクトの一員であった一人の女性教師を例に挙げて，教師の専門性発達の重要性を指摘している。このプロジェクトは，幼稚園就学前～小学 5 年生までの教師を対象とし，代数的に推論する児童の試みを特定し，そして代数的推論を促進する学習活動を設計する教師の能力を発達させることを目的に計画された。プロジェクトに参加した教師らは，次のことに従事した。

①チームを組んで代数的推論の課題を解決すること

②自身が担任する学級でこれらの課題を適合させること

③児童と一緒に課題を解決すること

④その課題における児童の思考の分析を同僚と共有すること

彼女はこのような取組を 1 年間続け，Blanton & Kaput は彼女の実践を定期的に観察したり，彼女と児童との会話の記録や児童のノートなどを分析したりした。それにより，彼女の授業における代数的推論の様相が明らかになっていった。

Blanton & Kaput による分析の結果，彼女が児童に求めた代数的推論のタイプには二種類あることが明らかになった。1 つは，自然発生的に生起する代数的推論（Spontaneous Algebraic Reasoning：以下 SAR），もう 1 つは計画して生起する代数的推論（Planned Algebraic Reasoning：以下 PAR）である。SAR は，自然に起こるというより教師が授業中に瞬時に判断して即応的に代数的推論をさせたもの[3]であり，専門性が要求される。PAR は，事前の計画に起因する意図的な代数的推論[4]である。こ

[3] 例えば，簡単なたし算の学習を行っているときに，計算することから 2 つの数の和が偶数になるか奇数になるかを考えることに学習が移行することである。

[4] 例えば，「任意の数のグループで全員が自分以外の全員と 1 回ずつ握手をする場合，グループ内の

れらの出現頻度を調べると，SAR が半数以上を占めており，このことは，代数的推論は多くの学習場面で起こり得るものであり，算数教育における代数的推論の重要性を意味していると考える。

また，算数において，典型的な代数的推論である一般化された算術と関数の考えの出現頻度を調べてみた結果が図 1-5 である。関数の考えが多く出現することは一目瞭然であるが，これは代数的推論に関する多くの研究が，数的・幾何的なパターンを扱う関数の考えを重視（Blanton&Kaput,2005a；Carraher&Martinez　et al.，2008）していることが影響しているのかもしれない。また，その多くは PAR である。

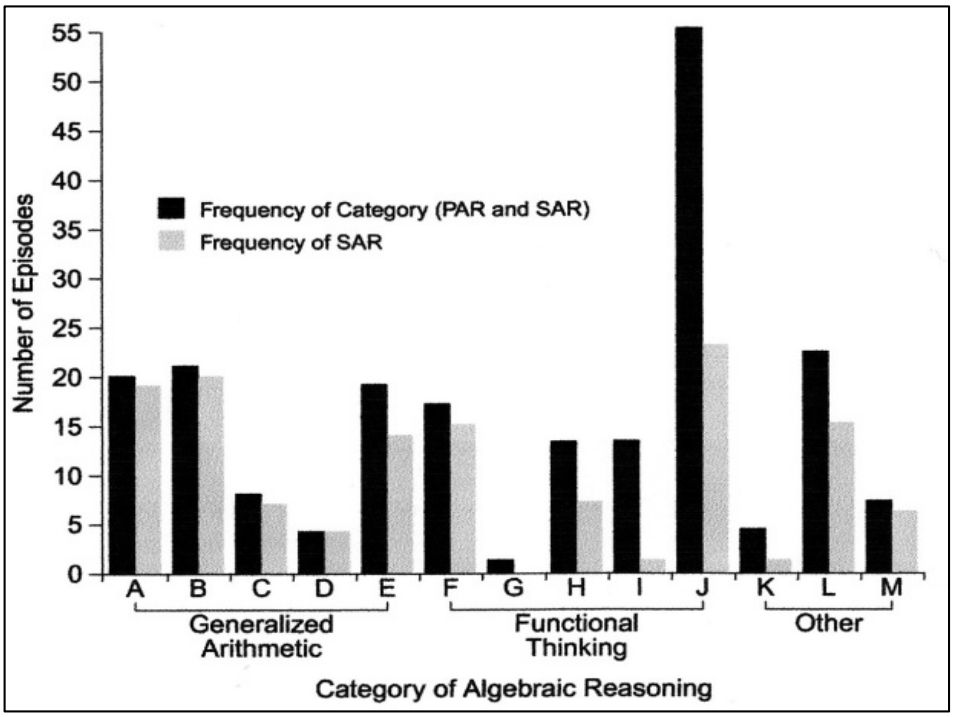


図 1-5　代数的推論の出現頻度[5]（Blanton & Kaput, 2005a, p.429）

一方，一般化された算術としての代数的推論の多くは SAR である。一般化された算術は，零の特性，加法の交換性，2 つの数の和の偶奇性など，数や演算の性質を一般化することを含む。関数の考えに比べ，数や演算の性質を取り扱う学習は，算数教育全般において豊富にある。したがって，本研究では，関数の考えに焦点化するよりは，まず，広く一般化された算術という視点で考えていくこと

握手の総数はいくらか」という問題を用いた学習を行なおうと事前に指導計画を立て，その計画に基づいて行う代数的推論である。

[5] 教師 June による小学 3 年生の授業を長期に渡って観察し，教師と生徒の会話を記録，分析した結果である。分析の結果，204 もの代数的推論が特定され，それらは 3 つのタイプと 13 のカテゴリーに分類された。カテゴリーA～E（A：数の特性と関係の探究，B：数に関する操作の特性の探究，C：量との関係を表す相等性の探究，D：数の代数的な処理，E：欠番文の解決）は一般化された算術に，カテゴリーF～J（F：量の記号化と記号化された表現の操作，G：グラフを用いたデータの表現，H：関数関係の発見，I：既知のデータを用いた未知の予測，J：数的・幾何学的パターンの特定と記述）は関数の考えに，カテゴリーK～M（K：代数的課題の解決の一般化の使用，L：正当化，論証，推測のテスト，M：数学的プロセスの一般化）はその他にそれぞれ分類された。

とする。

３．算数教育において課題となる代数的推論

一般化された算術としての代数的推論の多くは自然発生的に現れるものがほとんどである。このことは，算数教育における代数的推論は教師の瞬時の判断に依存する部分が大きいことを示す。しかし，裏を返せば教師の判断に任せられているが故に，代数的推論が必要とされる場面であっても，それが行われないこともあるということである。このことにより，「数と計算」領域において，「できる」ということと「分かる」ということの乖離が起こる。つまり，「できる」けど「なぜそうなるのかが分からない」という状況に陥ってしまうのである。

例えば，5 学年「小数の除法」においては，除数が 1 より小さくなる場面の理解が困難であるとされている。それは，児童は「商は被除数より小さくなるもの」という暗黙の論理をもっており（岡崎，1999），商が被除数より大きくなる（例えば，9.6÷0.8＝12）ことに困惑するからである。除数が 1 より小さい場合は，商が被除数より小さくなることを児童が理解するためには，暗黙の論理を顕在化させ，計算方法の一般性を検討することが必要であろう。この一般性を検討する場面で必要とされるのが，代数的推論である。しかし，実際の授業では，現実的な場面における意味付けや，数直線上の 2 量の位置関係によって理解を促されることが多く，暗黙の論理が解消され，児童の納得が得られているとは言い難い。

事例として挙げた「小数の除法」は，形式性[6]が際立つ学習内容である。したがって，教師も学習者である児童も形式性を目指す授業展開を求め，アルゴリズムの習熟に向かうことは仕方がないことかもしれない。しかし，児童独自の論理性[7]が現れる学習内容である以上，論理性を対象とすることは必要である。

このように現状の算数教育は，形式性が際立つ学習において論理性を対象とすることを回避する傾向にある。重視すべきはアルゴリズムの理解であり，児童を「分かってできる」状況に導いてあげることであり，論理性を回避することは，算数教育の問題点として指摘できるだろう。論理性とは正しい根拠を説明することに他ならず，論証に関する議論が展開される代数的推論は，指摘した算数教育の問題点に正対するものとなり得るだろう。このようなことから，代数的推論の促進を目指すことは，算数教育における真正な課題として位置付くものと考える。

第３節　代数的推論に内在する課題

本章では，代数的推論を促進することが算数教育における真正な課題となることを指摘した。しかし，現状の学習指導においては，代数的推論が適切に位置付けられているとはいえない。また，代数的推論の概念規定を行ったものの，代数的推論を促進する方法の統一的な見解は未だ存在していない。

既述したように代数的推論は一般化を確立する記号化のプロセスである。そうであれば，学習活動の中に代数的推論が適切に位置付けられるためにも，まずは一般化のプロセスについて考察する必要

---

[6] 清水（1994）は形式性について，≪内容を考えずに処理できるという，数学的処理にしばしばみられる特徴≫（p.54）と表現している。

[7] 清水（1994）は論理性について，≪正しい根拠と筋道を経てことがらを説明することができるという，学習者に求められる特徴≫（p.54）と表現している。

があるだろう。そして，そこに内在する課題を指摘することが，代数的推論を促進する方法を明確にすることにつながると考える。

第１章における引用・参考文献

Carraher , D . W . & Schliemann ,A . D(2007), Early algebra and algebraic reasoning , In Frank K. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* , 669-705. Information Age Publishing.

David W. Carraher , Mara V. Martinez & Analúcia D. Schliemann(2008),Early algebra and mathematical generalization, *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*40, 3-22.

Kaput, J. J.(2007). What is Algebra? What is algebraic reasoning? , Kaput, J. J. et al.(Eds.), *Algebra in the early grades*, 5-17.Routledge.

Maria L. Blanton & James J. Kaput(2005a), Helping Elementary Teachers Build Mathematical Generality into Curriculum and Instruction, *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik* 37(1), 34-42.

Maria L. Blanton & James J. Kaput(2005b), Characterizing a classroom practices that promotes algebraic reasoning, *Jornal for Research in Mathematics Education*36(5), 412-446.

Maria L. Blanton & James J. Kaput(2004), Elementary grades student's capacity for functional thinking, *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 135-142.

Mason,J(1996),Expressing generality and roots of algebra,*Approaches to algebra:Perspectives for research and teaching,65-86.*

Schliemann, A. D. , Carraher, D. W .& Brizuela, B. M. (2007), *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*, Lawrence Erlbaum Associates.

岡崎正和(1999),「算数から数学への移行期における子どもの論理の発達の特徴－除法の一般化を事例としてー」,『上越数学教育研究』,14,39-48.

清水美憲(1994),「分数の除法における『形式性』と『論理性』の問題」,日本数学教育学会,『第 27 回数学教育論文発表会論集』,53-58.

藤井斉亮(2002),「数と計算の学習指導における擬変数の役割に関する研究」, 日本数学教育学会,『第 35 回数学教育論文発表会論集』,163-168.

第２章　数学教育における一般化に関する考察

本章は，代数的推論を一般化の過程に位置付け，算数教育において代数的推論を促進する上で，解決すべき課題を導出することを目的とする。そのために第 1 節では，Dörfler（1991）の一般化モデル，その発展型である岩崎（2007）の一般化分岐モデルを考察する。第 2 節では，両モデルにおいて重要な段階である「記号の対象化」が，代数的推論を促進する足がかりとなることを指摘する。第 3 節では，一般化分岐モデルを用いて「分数の除法（÷分数）」の事例を考察し，「記号の対象化」の困難性を述べ，その困難性を解決するためのアプローチを「学年段階相応の学習活動」という視点から述べる。第 4 節では，「記号の対象化」の成立に向けた方向性について述べる。

第１節　一般化に関する基礎的考察

１．Dörfler の一般化論

本研究は，一般化の認識過程を扱った研究の中でも，認識論的・心理学的な観点から一般化の認識過程を分析し，抽象と一般化を接続してその過程をモデルという形で初めて提示したDörfler（1991）の一般化論を参照する。

これまでの一般化に関する研究は，一般化の部分的な考察に焦点があてられ，全体像，つまり一般化のプロセスを詳細に明らかにしていなかった。その課題に正面から解答を得ようとしたのがDörfler（1991）である。

Dörflerは学習者の一般化過程を詳細に分析し，一般化の特徴を記号の使用とそこに潜む変数性に求めた。Dörflerにとっての記号は2つに分けられており，1つが例えば円周率を「π」と置くような文字や言葉での表現やそれに類するもの。もう1つは「≡」のように関係性を表したり，＋や－のように抽象化された性質を表したりするものである。

Dörflerによれば，数学において活動の要素や活動を記述したり，活動の中の不変性を記述したりするためにこれらの記号が必要となる。また，これらの記号の中でも特に，活動の中の不変性を記述した記号が，活動の要素を置き換えたり，交換したりする可能性をもつことから，これを変数性という言葉でDörflerは捉えている。

この様に特徴的な記号を用いて，数学的に不変な状態を記述する構成的抽象を一般化の基盤となる重要なプロセスとして位置付けている。Dörfler は，これらの考察を基に抽象と一般化を接続した「一般化モデル」（図 2-1）を提示した。

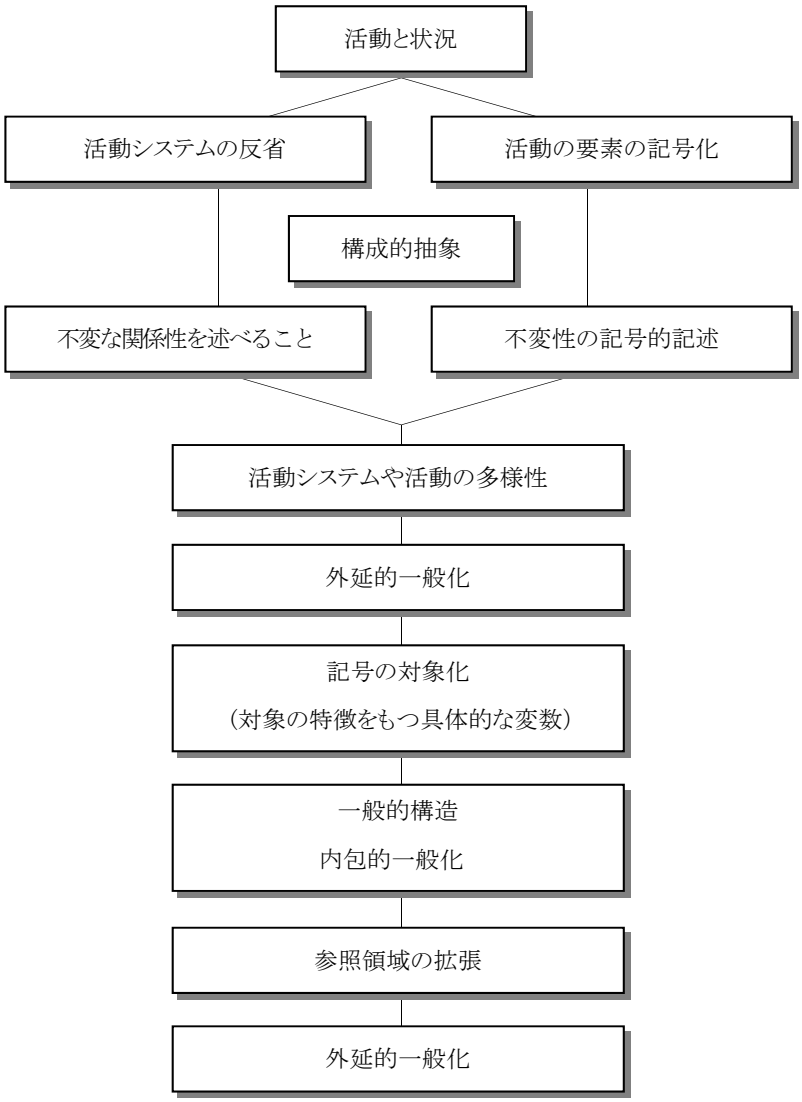


図 2-1　一般化モデル（Dörfler, 1991, p.74）

岩崎（2007）は Dörfler の一般化モデルの特徴を次のように述べている。

≪Dörfler の一般化の特徴は，第 1 に活動から始まる点にある。第 2 にその記号過程を「構成的抽象」とし，これを基盤に一般化が展開される点にある。≫（p.122）

既述したように，これまでの一般化に関する研究は，一般化の部分的な考察に焦点があてられてきた。つまり，構成的抽象の次の段階である，「内包的一般化」や「外延的一般化」について考察されていたに過ぎない。岩崎（2007）が指摘するように，一般化のプロセスが活動から始まる点，そして構成的抽象が 2 つの一般化に接続する点は，極めて示唆的だといえる。

一般化モデルで表現されているプロセスについては少し説明が必要であろう。活動から始まる一般化のプロセスは構成的抽象によって操作に変換される。操作は記号的記述によって表象され，記号化された不変性が一般性をもつようになる。やがて，記号が様々な活動の代替性をもつことが必要にな

る（岩崎，2007）。これが「外延的一般化（extensional generalization）」である。

やがて，記号は参照領域から切り離されて，記号自体が対象化される。この段階が「記号の対象化（symbols as objects）」であり，これをもって構成的抽象は終了する。Dörfler は記号の対象化について，次のように述べている。

≪記号は対象の性質を獲得する。つまり記号は活動自体の成分になるか，不変な関係の代理あるいは運搬車（carriers）になる。ある種の見方においては，記号はその指示対象から分離するといえるかもしれない。分離した記号は独立した対象となる。記号は不変的関係と操作から，意義（significance）と意味（meaning）を得て，記号的対象となる。≫（Dörfler，1991，p.72）

記号の対象化は，構成的抽象の終着点でもあり，その後に続く一般化の出発点でもあるため，一般化モデルにおいては重要な段階であるといえる。

記号の対象化に続く「内包的一般化（intensional generalization）は，対象とする概念の内包が一般性をもった段階であるといえる。ここで構成された一般性は，参照領域を拡張し，上位の外延的一般化へと続き，記号の対象化，内包的一般化，参照領域の拡張が繰り返される。こうした一連の一般化のプロセスを表現したものが，一般化モデルである。

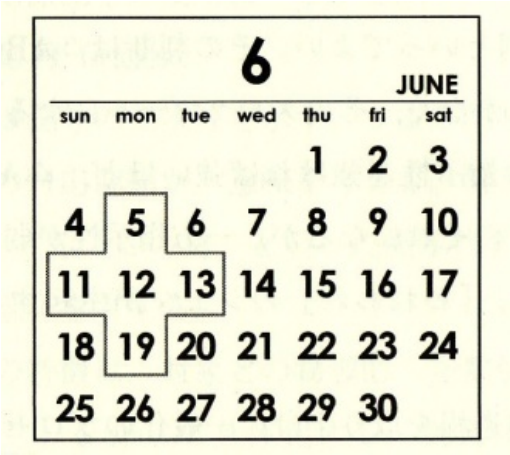
２．一般化モデルに基づく授業デザイン

一般化モデルについては，記述した通りであるが，このモデルに基づくと，授業がどのように設計されるのだろうか。岩崎（2007）は，形に基づき図を通じてなされる一般化と，数に基づき文字によってなされる一般化[8]とでは，認知プロセスや記号過程に差異があると指摘している。本研究は「一般化された算術」に焦点化して代数的推論を考察していくことを目的としているので，代数領域における一般化の学習を岩崎（2007）が事例として適用した「カレンダー問題」についてみていく。学習の対象者は中学生である。

[8] 岩崎（2007）は，代数記号と幾何記号とでは，「記号の対象化」に質的な違いがあることから，代数記号の「記号の対象化」を≪対象の特徴をもつ具体的変数の構成≫（p.149）と留保を付けている。

【問題】

下のカレンダーについて考えましょう。



(1) カレンダーの中の 5 つの数を十字の形の枠で囲みました。この枠の中の 5 つの数にはどんな関係があるでしょうか。

(2) 十字の枠の位置をいろいろ動かしてみましょう。(1) で見つけた関係はどうなるでしょうか。

(3) 枠の形や位置を自由に変えて，カレンダーの数の中にある関係をいろいろ見つけましょう。

まず，「活動システムの反省」において，「3 つの数を足す」，「和を比べる」という活動がなされるだろう。そして，その活動により，「縦と横の 3 つの数の和はどちらも 36」や「縦と横の 3 つの数の和は等しい」という関係性を述べる生徒が現れる。前者の発言を記号化すれば，「11＋12＋13＝36，5＋12＋19＝36」であり，後者は「11＋12＋13＝5＋12＋19」となり，後者の方がより不変性をより意識しているといえるだろう。この活動の不変性が，枠内の他の数的な関係性（「縦と横の 3 つの数の和は等しい」以外の関係。例えば，「周りの 4 つの数の和は，真ん中の数の 4 倍になる）への考察に移ることが「活動システムや活動の多様性」である。ここまでの活動が課題（1）である。

課題（2）は，十字の枠を動かすことで，見つけた関係性が他の場所でも成り立つことを確認させる問いである。この問いにより「外延的一般化」に進む。他の場所でも見つけた関係性が確認されたならば，児童から「これらの和はなぜ等しくなるのか」という問いが生まれる。この問いを解決するために，「11＋12＋13＝5＋12＋19」という数式が思考の対象として据えられる。この段階が「記号の対象化」である。いくつかの事例を考察することにより，「1」と「7」という不変の数を見つけ，「11＋12＋13＝5＋12＋19」を「(12－1)＋12＋(12＋1)＝(12－7)＋12＋(12＋7)」と表現し直す。さらに，真ん中の数を記号 n に置き換えることで，「(n－1)＋n＋(n＋1)＝(n－7)＋n＋(n＋7)」という関係性を捉えることができる。この段階が「内包的一般化」である。課題（3）は内包的一般化に続く「参照領域の拡張」，「外延的一般化」へと進むための問いであるが，ここでの記述は省略する。

既述した「カレンダー問題」の一般化のプロセスを一般化モデルに照らし合わせて表すと，図 2-2 のようになる。

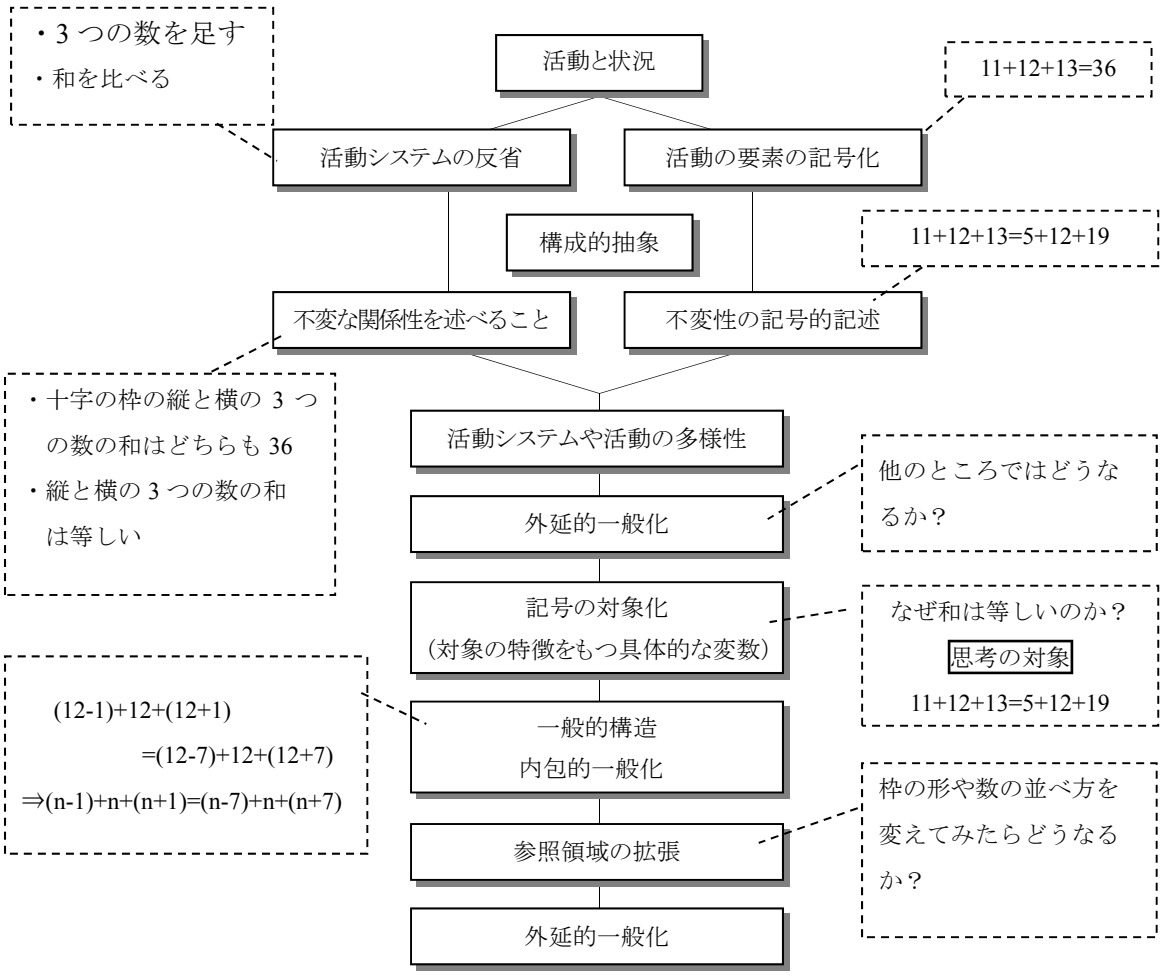


図 2-2　一般化モデルとカレンダー問題

図 2-2 からも分かるように,「記号の対象化」を契機に，児童の関心が演繹的推論へ移行している。このことから，一般化のプロセスにおいて「記号の対象化」が最も重要な段階になっていることが窺える。

３．一般化モデルの発展

岩崎（2007）は，Dörfler の一般化モデルについて批判的な考察を行っている。岩崎は従来の一般化研究が論理学的に制約されていたのに対し，Dörfler の一般化モデルは一般化が「活動」から始まる点と，その記号過程である「構成的抽象」をもつ点を特徴に挙げているが，その上で，大きくまとめれば 4 つの不十分な点を指摘している。

①「外延的一般化」と「内包的一般化」の本質的な相違について言及しない点

②記号過程を重視しながら記号の質的相違に言及していない点

③「外延的一般化」と「参照領域の拡張」の区別が明確ではない点

④Dörfler の一般化モデルが認知モデルでありながらメタ認知的視座をもたない点

そして，記号・認知に関する議論を踏まえた上で「内包的一般化」と「外延的一般化」を以下のように再定義した（岩崎，2007，p.165）。

【内包的一般化[9]】

既知の対象を普遍化することによる一般化。対象となっている記号に含まれた意味を，既有の知識に関連付けながら同化し，既有の知識を発展させる認知プロセスとして捉えられる一般化。

【外延的一般化[10]】

記号の内部構造に基づいて，未知の対象を構成するような一般化。記号に内在する意味を既有の知識に同化させることができないので，新たな知識を構成し，その知識の下で，既有の知識を統合する認知プロセスとして捉えられる一般化。

Dörfler の一般化モデルにおいては，外延的一般化が内包的一般化に先行するものとして位置付いていたが，上記のような再定義により，一方の一般化が他方に先行するものではなくなっている。

また，同時に，第 1 の「外延的一般化」は「参照領域の拡張」へと置き換えられた。これらの考察を基に，岩崎は図 2-3 のような「一般化分岐モデル」を提案している。

9 「見慣れないものを見慣れたものにすること」とも言い表されている。

10 「見慣れたものを見慣れないものにすること」とも言い表されている。

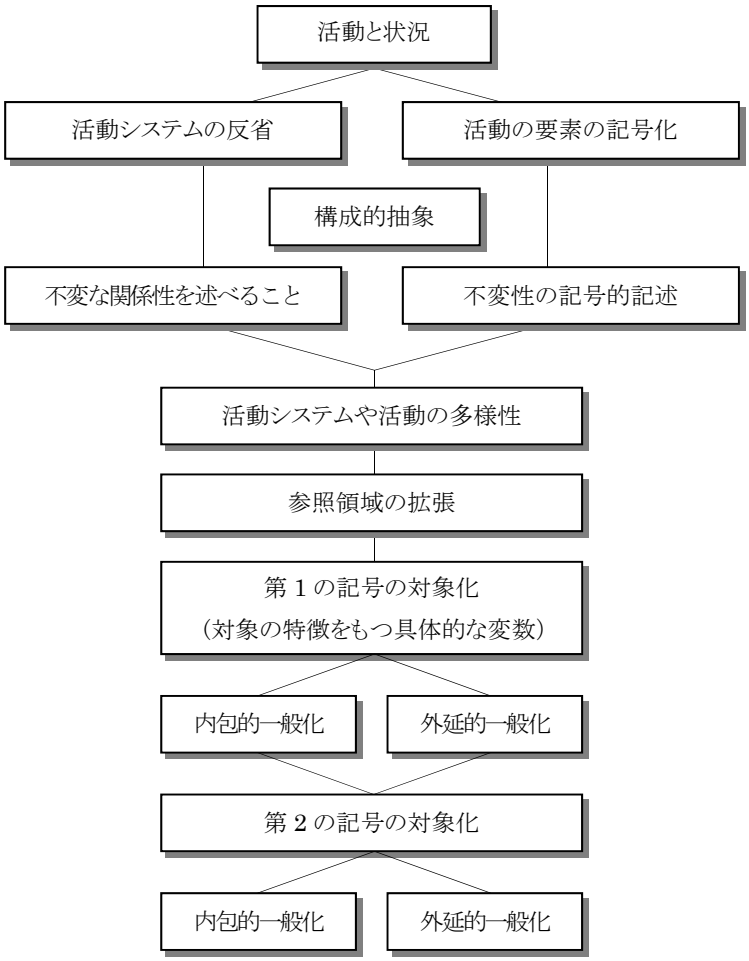


図 2-3　一般化分岐モデル（岩崎,2007,p.166）

岩崎（2007）の研究は，算数と数学の接続という課題に，主観的認識から客観的認識への変容という問題を重ねて，「一般化」という視点から解答を得ようとしたものである。

岩崎の一般化論では，メタ認知概念の拡張が提案されているが，その研究は Dörfler（1991）の一般化モデルの発展型である一般化分岐モデルに集約される。一般化分岐モデルの特徴は，Dörfler の一般化モデル同様，一般化が「活動」から始まる点と，その記号過程である「構成的抽象」をもつ点にあるが，それに加えて，「記号の対象化」の後に「内包的一般化」と「外延的一般化」と呼ばれる質的に異なる一般化を分岐的に配置した点にある。これにより学習内容や「記号の対象化」における記号の質的な差異に応じて，どちらかの一般化に進むという説明が可能になっている。

しかしながら，Dörfler の一般化モデルにしろ，岩崎の一般化分岐モデルにしろ，その重要な段階として「記号の対象化」が位置付けられていることは注目すべき点である。代数的推論が現れる学習過程とも整合する点もあるだろう。したがって，以下では，一般化の過程における「記号の対象化」に着目し，考察する。

第２節　記号の対象化

１.「記号の対象化」の概念規定

「記号の対象化」を記号レベルで説明すれば，「構成的抽象」で得られた活動の不変性の記述を新たな記号の対象に据えつつ，その不変性を記号の変数性を用いて表現すること（岩崎，2007），と捉えられる。この点について，インフォーマルな表現からフォーマルな表現への変容過程を表す「意味の連鎖」（Gravemeijer，2002）を参照することができる。

記号論を基礎付けたのは言語学者のソシュールである。ソシュールの記号の定義は，概念と音韻の組み合わせであり（図 2-4），彼はこの言語的記号の考えを一般的記号の考えへと広げた。

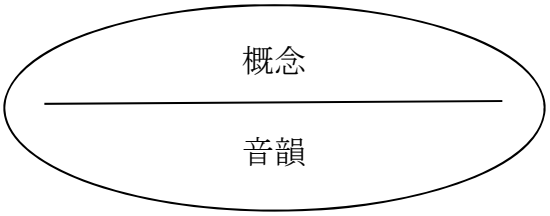


図 2-4　言語的記号（Gravemeijer，2002）

概念と音韻はフランス語では，それぞれ所記（シニフィエ）と能記（シニフィアン）として翻訳される。シニフィエは記号内容，シニフィアンは記号表現のことである。記号はシニフィエとシニフィアンの対から成るとされている。意味の連鎖とは，前の記号の組み合わせが，次いで起こる記号の組み合わせの所記（シニフィエ）になるという考えである。（図 2-5）

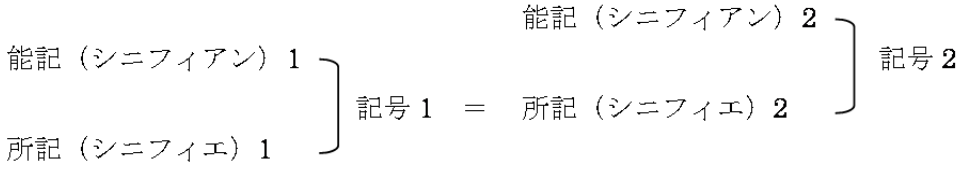


図 2-5　意味の連鎖：新たな記号の下で動く（スライドする）既存の記号
（Gravemeijer，2002，p.17）

したがって，「記号の対象化」とは，インフォーマルな表現を思考の対象に据え，フォーマルな表現へと洗練していく契機になるものであると言い換えることができる。

２.「記号の対象化」と代数的推論

「代数的」と呼ばれるとき，それは児童が数学的なアイデアをなんとなく用いるときではない。数や演算の性質を取り扱う学習では，１つの事例を帰納的に一般化することが多いが，論証に関する議論を通して一般化を確立することが代数的推論であれば，その議論は必然的に演繹的なものが求めら

れる。では，児童相互の議論が演繹的な説明に転換されるのはいつであろうか。それは，個々の数学的な表現や思考の根拠を，他者へ説明する必要性が生じたときと考える。数学的な表現や思考を他者と共有するためには，主観的でインフォーマルな表現を客観的でフォーマルな表現へと発展させる必要があり，これはつまり一般化への志向である。

一般化モデルにおいては，≪「記号の対象化」を契機として，演繹的推論がなされるようになる≫（岩崎，2007，p.150）。「記号の対象化」の段階で対象化されるのは，式であったり，図形であったりするが，それらは児童の思考を表現したものであり，意味の連鎖（Gravemeijer，2002）もその本質は，児童・生徒の表現や思考の対象化である。代数的推論が数や式を考察の対象に据え，一般化を確立する記号化のプロセスであれば，代数的推論を促進する 1 つの足がかりとして「記号の対象化」を位置付けることができると考える。

では，実際の授業において，代数的推論はどのように現れているのか。または，一般化に向かう過程に「記号の対象化」は位置付けられているのか。これらの点について，次節より事例に基づいて考察する。対象教材は，第 6 学年の分数の除法である。

第３節　代数的推論の事例的考察

１．分数の除法

実際の授業において，代数的推論はどのように現れているのか。または，一般化に向かう過程に「記号の対象化」は位置付けられているのか。これらの点について，事例に基づいて考察する。対象教材は，第 6 学年の分数の除法である。

岩崎・岡崎（1999）は分数の除法について，≪÷（分数）は，数が量を参照する最後の内容であり，（中略）それまでの算数的枠組みを代数的なそれに切り替える内容といえる≫（p.85）と述べている。分数の除法では，除法を乗法に統合させることが主な目的である。そして，計算方法を導く過程で，次第に式そのものが対象化される。つまり，数が量を参照することから離れて，代数的に表現されるようになる。数が量に対する方法としての意味を失い，それ自身の対象化へ踏み出すとき，算数が数学へ方向付けられる（岩崎・岡崎,1999）と指摘されていることからも，分数の除法は代数的推論が必要とされる典型的な教材であるといえよう。

教科書（一松ら，2010）を参照してみると，導入場面で以下のような課題が提示されている。

> $2/5m^2$ のへいをぬるのに，青いペンキを 3/4dL 使います。このペンキは 1dL 当たり何 m^2 ぬれるでしょうか。

課題が提示された後，児童はまずフレーズ型の式を立てることを求められる。分数の除法では，立式の困難性も指摘されるが（中村，2000；田端・石田，2011），□を用いて乗法の式に表したり，面積図や 2 量の比例関係を表す数直線を用いたりすることにより，×逆数を導くことができる。教師用指導書を読むと，ここまでが指導計画の 1 時間目とされる。

指導計画の 2 時間目と 3 時間目は，÷（分数）の計算方法について考え，その方法を理解してい

く。2/5÷3/4 の計算方法を明らかにすることについて，児童が次の 3 つの方法でアプローチすることが考えられよう。

①2 量の比例関係を表す数直線を用いた方法 ②面積図を用いた方法 ③分数や除法の性質を用いた方法

これらの方法は，教科書では，それぞれ，「あおいさんの考え」，「ゆうとさんの考え」，「ゆりさんの考え」として紹介されている（図 2-6）。

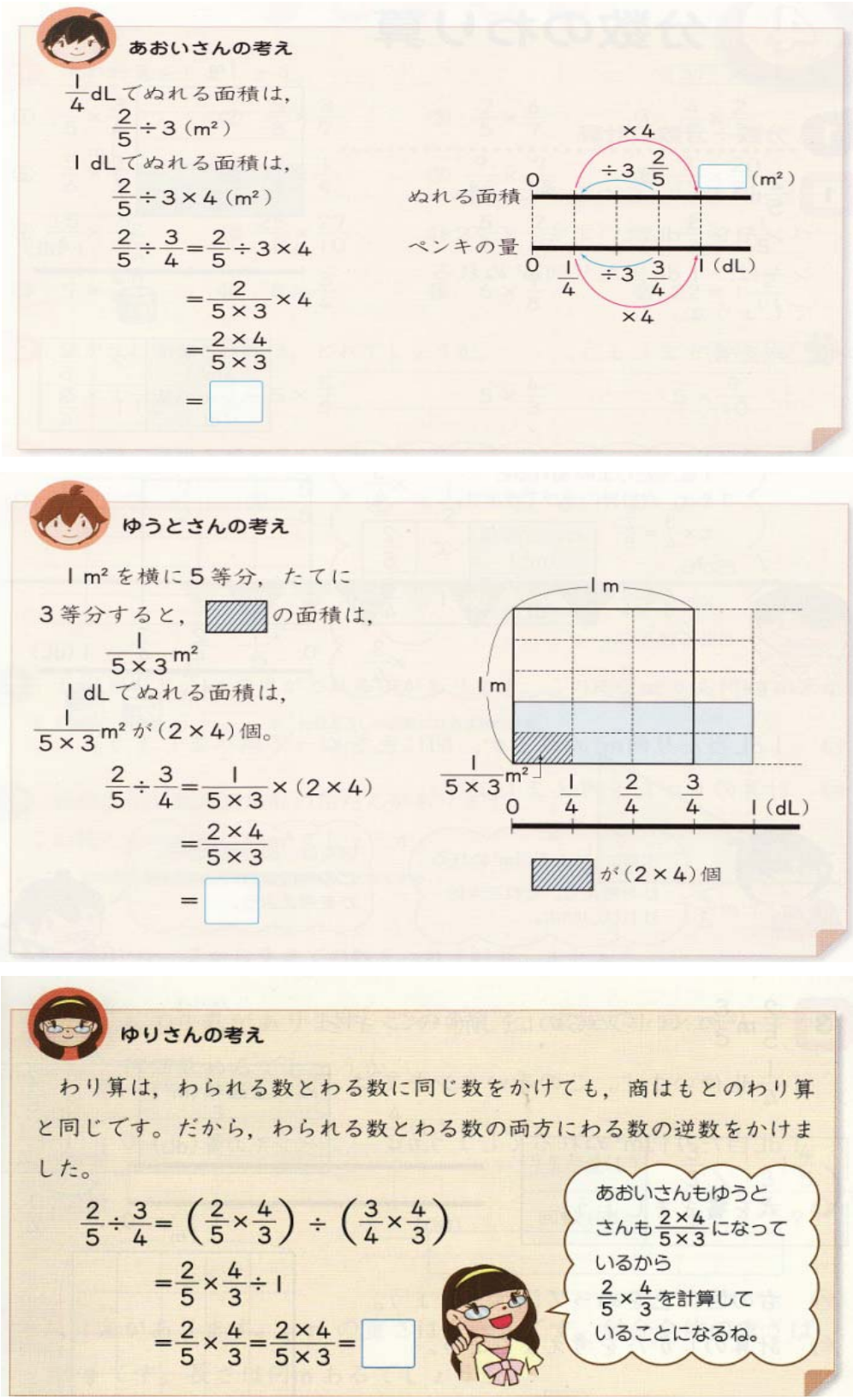


図 2-6　分数の除法の解法（一松ら，2010，pp.44-45）

数直線を用いた方法は，1dL で塗ることができる面積を考えるのだから，1/4 dL で塗ることができる面積を求め，それを 4 倍すればよいと考える。

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \div 3\times4$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times4$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{4}{3}$$

面積図を用いた方法は，1 m^2 を横に 5 等分，縦に 3 等分した 1 つ分の面積が 1/15（1/5×3）m^2 になる。1dL で塗れる面積は，1/15 の何個分であるかを考えればよいわけである。面積図から 1/15 m^2 が（2×4）であることが分かる。

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{5\times3} \times(2\times4)$$

$$= \frac{2\times4}{5\times3}$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{4}{3}$$

分数や除法の性質を用いた方法は多様である。代表的なものとして，2 つの方法を挙げる。まず，教科書のように，逆数を用いた方法である。

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} =\left(\frac{2}{5} \times \frac{4}{3}\right)\div\left(\frac{3}{4} \times \frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{4}{3} \div 1$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{4}{3}$$

また，除数と被乗数を整数化するために，分母の最小公倍数をかける方法もある。

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \left(\frac{2}{5} \times 20\right)\div\left(\frac{3}{4} \div 20\right)$$

$$= (2\times4)\div(3\times5)$$

$$= \frac{2\times4}{3\times5}$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{4}{3}$$

このように「×逆数」を導く方法は様々ある。ただ，方法が様々であるがゆえに，教科書では，どの方法も「×逆数」が共通していることを理由に，帰納的な一般化がなされている。しかし，中村（1999）

が，≪計算手続きが「分かる」ということは，ある数だけでなく他の数でも使えることや反例がないことを示すことである≫（p.26）と指摘しているように，この展開には，計算方法の一般性を検討する場面はない。このように，一般性の根拠を問わないまま一般化し，考え方が伴わずにそのアルゴリズムのみを認識している段階では，成功的な一般化がなされたとはいえない。このことに関わって和田（2007）も，はじめにある程度の結果が分かっていなければ学習にならず，一応の結論を出してから，その合理性を保証することの重要性を指摘している。代数的推論が必要とされるのは，「なぜ逆数になるのか」という根拠を問うときであるといえる。

また，児童が「×逆数」になることを理解するためには，教科書の展開のような帰納的な説明ではなく，演繹的な説明が求められよう。その際，岩崎（2007）が，≪理解を支える数領域を欠いたまま論理だけを頼りに「×逆数」を導き，かけ算になることを納得したとしても，理解の場がなければ，技能の習熟だけが強調され意味理解の決定的な阻害要因になるであろう≫（p.168）と指摘するように，ここで求められるのは分数や除法の性質を用いた演繹的な説明であり，数直線や面積図による説明はそれを補完するかたちとなるだろう。

和田（2011）は，三輪（1996）の文字式利用の図式を用いて，分数の除法の授業を代数的推論の視点から考察している。図 2-6 が分数の除法の立式からその計算方法の定式化までの一連の流れ（4 時間分）を図式化したものである。

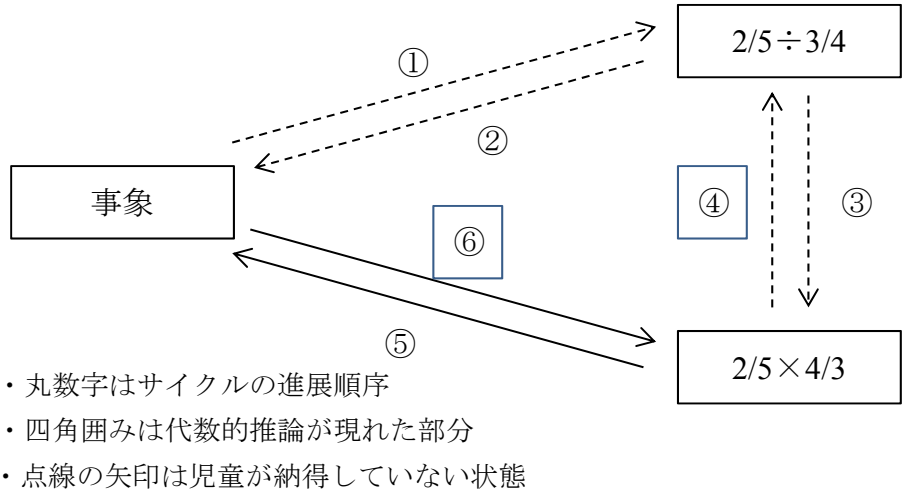


図 2-6　分数の除法のサイクル（和田，2011，p.444）

このモデルは，①はじめの問題状況から直観的に式が導かれ，②それを数直線図を用いてよむことによって正当化しようとしたが，数直線図の解釈として，乗法の逆操作が除法になるということが理解されておらず，うまくいかなかった。そこで，除法であるということを仮説とした上で，③類推的に乗法の性質を適用したり，仮説的に逆数の乗法になることを導いたりした。これらを踏まえ，④除法の性質に基づいて演繹的に正当化が行われたけれども，多くの児童はまだ納得していなかった。そこで，⑤その式を面積図で表すことを試み，⑥それを解釈することによって演繹的に正当化した。

この授業では，除法の性質に基づいて演繹的に正当化が行われたが，多くの児童が納得せず，その式を面積図で表すことを試み，それを解釈することによって演繹的に正当化したという。児童は仮説的に導かれた「×逆数」の正当性を確かめるときに代数的推論を働かせている。

ただし，この授業では，分数の除法の式も仮説的に導かれており，児童が除法の式になることを十分に納得していないまま「×逆数」になることを正当化している。「記号の対象化」の段階では式そのものが明確な考察対象とされるのであるから，除法の式になることに確信をもっていない状態では「記号の対象化」が成立しているとはいえないだろう。したがって，児童は「記号の対象化」を飛び越えて一般化に向かったといえ，このことは，代数的推論が「記号の対象化」を伴わなくても働くことを示している。しかし，代数的推論が働いたものの，児童の理解は具体による意味付けで行われており，児童の納得を得ることは容易ではなかったようである。

以上の考察から，代数的推論は「記号の対象化」を伴うことで，成功的な一般化へ向かうことが指摘できる。同時に，「記号の対象化」が伴わなくても代数的推論が働くことが明らかになったわけであるが，「記号の対象化」を成立させることには困難が伴うことが予想される。それは，代数記号の「記号の対象化」は≪対象の特徴をもつ具体的変数の構成≫（岩崎，2007 ，p.149）であるが，小学校段階の児童は数字を用いて学習することが大半を占めるからである。

２．「記号の対象化」の困難性の解決に向けて

分数の除法（÷分数）の困難性の 1 つに，立式の理解とアルゴリズムの理解の不可分性がある。分数の除法にとって，立式の理解とアルゴリズムの理解が不可分であるということは，立式とアルゴリズムの双方にとって，その理解が必要不可欠であるといえよう。換言すれば，アルゴリズムの不十分な理解は，立式の不十分な理解へと派生するといえる。

一般化分岐モデルにおいては，「立式の理解」が「構成的抽象」に対応し，「アルゴリズムの理解」は「記号の対象化」以降の，一般化へ向かうプロセスが対応する。岩崎ら（2008）は，立式の理解とアルゴリズムの理解の不可分性について，次のように考察している。

≪「構成的抽象」のない一般化は一階のない二階家屋にたとえられる。無論そのような建築物は物理的にありえないが，数学的認識においても成立しない。それでは，「÷分数」の計算問題の高正答率をどのように説明するのかと聞かれても，それはドリルによる定着の成果であって，アルゴリズムの理解でも一般化の結果でもないことは明らかであろう。次に，一般化のない「構成的抽象」は，いわば二階への通路のある一階建てのようなものであるが，物理的にはそうした建築物は可能であり，数学的認識の展開においても成立する。「÷分数」のアルゴリズムは，教科書の記述を歴史的に比較しても，「記号の対象化」を契機とする一般化ではなく，立式の意味理解同様，それは「構成的抽象」の繰り返しといってよい。≫（p.347）

岩崎らの比喩を借用すれば，一般化分岐モデルにおいて，立式の理解からアルゴリズムの理解へ向かう階段の役割を果たすのが「記号の対象化」であり，現在の分数の除法の学習指導は，二階家屋としてその体を成していないということであろう。このことは，記号の対象化を成立させることの困難性を指摘している。では，その困難性はどこにあるのだろうか。

「記号の対象化」は分数の除法で初めて顕在化するものではなく，他の学習場面（例えば，小数の乗法・除法）でも現れ得るものである。その際，小学 3 年生と 5 年生とでは質的に同じ「記号の対象化」が成立しているとは考えにくく，「記号の対象化」には，学年段階に応じた水準があると考えることができる。しかしながら，一般性の根拠を問わないまま一般化を図る指導が学年を問わずに行わ

れている。つまり，現状は，「記号の対象化」に伴う困難性を回避しているのである。したがって，「記号の対象化」の困難性の解決に向けた方策として，学年段階相応の学習活動の設定が挙げられる。どのような学習で，どのような「記号の対象化」を成立させればいいのか，適切な学習活動とは何なのかを明らかにする必要がある。

（１）一般化の視点から

代数的推論の本質は一般化にあるが，一般化分岐モデルの方法的原理となっている一般化モデルを提唱した Dörfler（1991）は，2 つの一般化について述べている。1 つは「経験的一般化」といわれるものであり，これは多数の具体的な事例から共通する性質を発見する一般化，つまり外面的な類似性に基づく対象の概括である。もう 1 つは「理論的一般化」といわれるものであり，これは経験的一般化の結果である対象とその性質を出発点とする一般化，つまり本質的に一般的な関係に基づく対象の概括である。算数において典型的な帰納的に何かの数学的規則を発見するような一般化は，経験的一般化といえるだろう。一方，「記号の対象化」を契機とする一般化は，理論的一般化といえるだろう。分数の除法を対象として考察すれば，児童が「÷分数」は「×逆数」になることを発見する段階と，その正当性を確かめる段階にそれぞれを当てはめることができ，これら 2 つの一般化は段階的なものであると捉えられる。

真野（2006）は，知識の習得には 2 つの段階があるとする同様な見方で，教材分析の視点を考察している。そして，教材を数学的な立場から考察する場合，その教材の歴史的な背景を考察することが重要であることを指摘し，≪ある数学的概念の歴史的発生を考察するときは，その知識が創出された個人的な文脈（発見の文脈）とその知識が伝えられるために，それが組織付けられ，形を与えられる文脈（正当化の文脈）を参照する必要がある≫（p.53）と述べている。

以上のことから，一般化には 2 つの段階があり，第一段階を発見の文脈から導かれる経験的一般化，第二段階を正当化の文脈から導かれる理論的一般化と捉えることができる。算数においては経験的一般化に留まることが多いが，杉山（2009）が≪ある命題が正しいことを説明するために行う活動が「証明」であるとすれば，小学校算数科においてもよく見られる≫（p.572）と述べているように，算数においても理論的一般化への移行が望むことは，行き過ぎた指導にはならないだろう。

したがって，「記号の対象化」を伴う代数的推論への接続とは，経験的一般化と理論的一般化の接続の問題であり，この問題について考えることは，発見と正当化をつなぐ学習活動について明らかにすることと同義であると考える。

（２）正当化の場面における学習活動

代数的推論を主題とした研究の多くが関数概念の導入に焦点化しているが，Russell ら（2011）は，数や演算の一般化にかかわる内容に焦点化した研究を行っている[11]。そして，算術と代数の架け橋となる 4 つの数学的活動を確認し，提案している。

[11] Russell ら（2011）の研究は，「代数的思考」の視点で行われたものであるが，本研究では一貫して「代数的推論」という表現を用いる。

①演算の性質の理解
②一般化と正当化
③数体系の拡張
④意味を伴う表記法の使用

これらの活動を行うことは，算術から代数への移行を可能にし，演算の理解と計算の流暢性を強化することになるという。これらの活動について少し説明を加えれば，「演算の性質の理解」とは例えば交換法則や分配法則を扱う学習であり，これらの法則が成り立つ根拠を考える学習が「一般化と正当化」である。また，「数体系の拡張」は例えば，数の概念を分数や小数，負の数へ拡張する学習であり，「意味を伴う表記法の使用」は，具体的な数の表現から記号への推移を目指した学習である。これらの数学的活動は，我が国のカリキュラムでは一部中学校の学習内容を含むが，ほとんどが算数の範囲に十分納まるものである。本研究では，代数的推論の視点から，発見と正当化の接続に焦点をあてているので，特に「一般化と正当化」について詳しくみていく。

「一般化と正当化」の事例としては，5 学年の乗法の性質の学習活動が挙げられている。乗法は，一方の数を 2 倍しても，もう一方の数を 1/2 倍にすれば積は変わらないという性質をもつ[12]。児童はこの性質を発見した後，教師からこの性質が他の数においても成り立つことを，具体的な数を用いずに示すよう求められる。これに応じて，児童は図 2-7 のような長方形をかいた。

児童は長方形の縦の長さを E ，横の長さを T とし，長方形の面積を T×E で表した。次に，長方形を縦に半分に切って横の長さを 1/2T とし，半分にした長方形をもう一方の下に動かすことによって，長さが 1/2T と 2E の長方形を表した。その面積は元の長方形と等しく，そのことを児童は 1/2T×2E＝T×E と式で表し，発見した性質が他の数においても成り立つことを正当化することができた。

[12] 例えば，「6×8＝12×4」。我が国のカリキュラムでは，4 学年の学習内容にあたる。

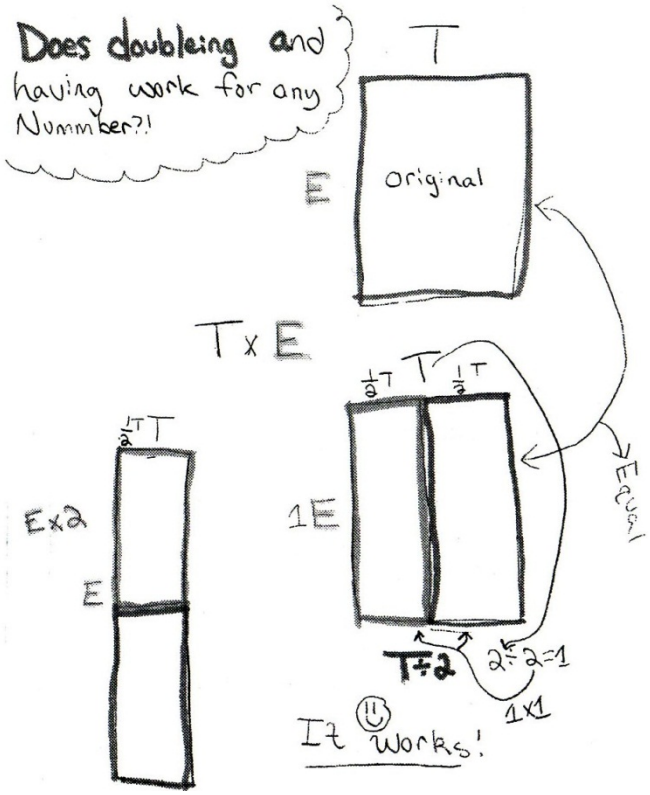


図 2－7　児童が正当化に用いたモデル（Russell et al.,2011,p.58）

このような操作表現の進展は，「発見」と「正当化」の接続にとって重要である。数学的命題を正当化するための絵や図などのモデルは，小学校の児童にも十分接近可能であり，生成的に現れるかもしれない。このような操作表現による正当化は,「前形式的証明」(國本, 1992) や「操作的証明 (Operative proof)」（Wittmann，2009）と呼ばれており，形式的な証明に先立つ学習活動だと考えられている。

第４節　「記号の対象化」の成立に向けて

本章では，Dörfler（1991）の一般化モデル，岩崎（2007）の一般化分岐モデルを考察し，代数的推論は「記号の対象化」を伴うことで，成功的な一般化へ向かうことを指摘した。記号の対象化を成立させることには困難が伴うことが予想されるが，記号の対象化の困難性の解決に向けた方策として，学年段階相応の学習活動の設定が挙げられる。そのような学習になり得ると考えられるのが操作的証明である。

代数的推論には「発見」する段階と「正当化」する段階があるが，その接続のあり方を考えることが，記号の対象化の成立のあり方を明らかにすることにつながる。そこで次章では,「発見と正当化」という視点で，操作的証明について考察する。

第２章における引用・参考文献

Dörfler , W.(1991), Forms and Means of Generalization in Mathematics, Bishop, A. J. (Ed.). *Mathematical Knowledge: Its Growth Though Teaching*, 63-85. Kluwer Acade mic Publishers.

Gravemeijer, K.(2002), Preamble: From model to modeling, In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel(Eds.), *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education,* 7-22. Kluwer Academic Publishers.

Russell,S.J., Schifter,D. & Bastable,V.(2011), Developing Algebraic Thinking in the Context of Arithmetic, Jinfa Cai.et al.(Eds.),*Early Algebraization:A Global Dialogue from Multiple Perspectives*,　Springer.

一松信・岡田禕雄他(2010),「みんなと学ぶ算数　小学校算数６ 年上」,学校図書株式会社.

岩崎秀樹・岡崎正和(1999),「算数から数学への移行について(1)－代数和の位置づけとその指導」,全国数学教育学会,『数学教育学研究』,5,85-90.

岩崎秀樹(2007),『数学教育の成立と展望』ミネルヴァ書房.

岩崎秀樹・山口武志(2008),「比例的推論に基づく分数除の教授・学習に関する批判的考察」, 日本数学教育学会,『第 41 回数学教育論文発表会論文集』,　345-350.

真野祐輔（2006）,「数学学習における概念変容に関する研究」,修士論文（未刊行）,広島大学大学院教育学研究科.

杉山佳彦（2009）,「数学教育における『証明』についての基礎的研究－『定理』と『証明』についての考察(2)－」,日本数学教育学会,『第 42 回数学教育論文発表会論文集』,571-576.

田端輝彦・石田雄一(2011),「分数の乗除法の演算決定に関する一考察－数直線を用いた指導を通して－」,日本数学教育学会,『第 44 回数学教育論文発表会論文集』,411-416.

中村亨史(1999),「分数の除法における子どもの思考の様相」,『山梨大学教育人間科学部研究報告,(第二分冊, 自然科学系)』,49,23-30.

中村亨史(2000),「分数の除法における立式の困難性」,『山梨大学教育人間科学部紀要』,1(2),6-13.

三輪辰郎(1996),「文字式の指導序説」,『筑波数学教育研究』,15,1-14.

ルビンシュテイン（石田幸平訳）（1966）,「思考心理学」,明治図書,36-80.

和田義信(2007),「式とその指導」,和田義信著作・講演集刊行会編,『和田義信　著作・講演集 2　論文集(軽装版)』,97-112.

和田信哉(2011),「分数の乗法・除法に関する代数的思考の様相－代数的推論の観点から－」, 日本数学教育学会,『第 44 回数学教育論文発表会論集』,441-446.和田信哉(2012),「分数の乗法・除法に関する代数的推論の明確化－記号論的視座から－」,全国数学教育学会,『数学教育学研究』,18(1),31-41.

第３章　操作的証明に関する基礎的考察

本章は，発見の文脈と正当化の文脈を接続する学習として操作的証明に着目し，その教育的意義について明確にすることを目的とする。そのために第 1 節では，國本（1992）の前形式的証明と Wittmann（2009）の操作的証明（Operative proof）について考察する。特に操作的証明（Operative proof）の事例の詳細な考察から，「発見」することと「正当化」することがどのように表出するのかを導く。第 2 節では，操作的証明（Operative proof）の教育的な意義について述べる。第 3 節では，代数的推論を促進するための指導の方向性について述べる。

第１節　操作的証明の概念

１．國本の前形式的証明

國本（1992）は，数学的証明の本質は，記号や言語だけを用いた形式的なものだけにあるのではないという立場から，「前形式的証明」に焦点をあて，その教育的意義を歴史的順序に従って考察している（図 3-1）。このように，前形式的証明に関しては，Semadeni の前数学的証明（1976），操作的証明[13]（Action proof）（1984）をはじめとして，Stein の具体的証明（1981），Wittmann，Müller の内容的－直観的証明（1988）など様々な表現が用いられている。それは，それぞれの証明の重点の置き方が違うからであり，國本はそれらの違いも考察により明らかにしている。

[13] Wittmann の操作的証明と区別するため，操作的証明（Action proof）という表現を用いる。

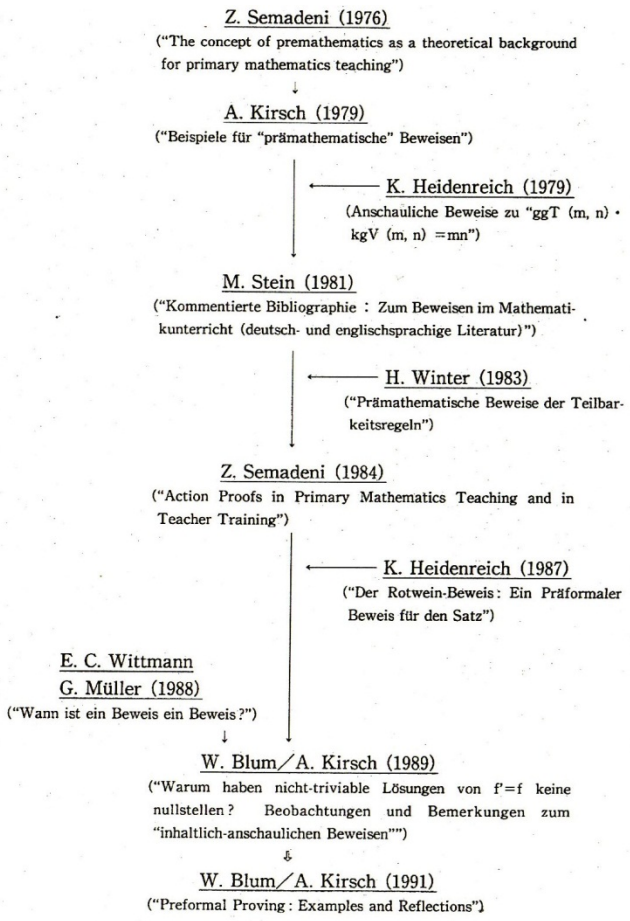


図 3-1　前形式的証明の系譜（國本，1992，p.5）

さらに國本は，これらの先行研究を整理し，前形式的証明を

「操作的証明（Action proof）[14]」

「幾何的－直観的証明[15]」

「現実に方向づけられた証明[16]」

「範例による証明[17]」

にカテゴリー化し，その教育的意義として次の 3 つを挙げている（國本，2009，p.57）。

---

[14] 具体的に与えられた，範例的で，属に通用する例に対する具体的行動（実際に行われるか，あるいは表象でのみ行われるかは別として）から成立する証明。

[15] 基本的な幾何学的概念，面積とその性質のような直観的に明らかな事実を参照する証明。

[16] 現実において意味があり，学習者にたやすく受け入れられる基本的アイデアを用いる証明。

[17] 上記のどの証明にも含まれない証明。例えば，数に基づく証明，間接的証明など。

①証明に対する形式主義的な見解から脱却できること。つまり，証明の本質は，数学的アイデアや命題間の関係の洞察にあるということが理解できる。

②記号的・言語的水準でのみ証明を捉えるのではなく，行動的・図的水準からも証明を捉えることができる。

③前形式的証明は形式的証明を納得させたり，確信させたりすることができる。

代数的推論が「記号の対象化」を伴うことは，必然的に正当化を求めることになる。しかし，小学校算数において正当化の学習を求めることは，過度に形式性や論理性を求める学習に陥る可能性もある。これらの指摘は，前形式的証明がそのような状況に陥らないようにするための教授・学習となることを示すものである。

ただし，前形式的証明について，次の 3 つの点に留意しておく必要があると付け加えている。前形式的証明がどの形式的証明にも存在するとは限らないこと，前形式的証明が形式的証明よりも理解しやすいとは限らないこと，そして，代数的命題の証明には操作的証明（Action proof）や図的証明が適していることである。特に 3 つ目の指摘は，代数的推論を主題とする本研究においては着目すべき点である。実際，國本（2009）は，前形式的証明の 4 つの証明の中でも，特に操作的証明（Action proof）の重要性を強調している。それは，操作的証明（Action proof）では「操作の一般性」の認識が重要であり，おはじきなどの操作が，児童の理解を促すからである。

２．Wittmann の操作的証明（Operative proof）

形式性や論理性に重点を置く形式的な証明ではなく，操作などの具体的行動に基づいた証明の考え方について，Wittmann（2009）は，操作的証明（Operative proof）の概念を提唱している。Wittmann（2009）によれば，操作的証明は，次のような性質をもつものとされている。

≪数学的な問題の探究から発生し，準現実的な数学的対象にかかわる操作に基づき，わずかな記号体系をもつ問題指向の言語において伝えられ得るもの≫（p.254）

また，操作的証明は，数学的対象の適切な表現に依存しているとされており，このことについて佐々ら（2010）は，≪子どもが操作を通して証明を行うためには，抽象的な数学的対象は，操作を可能にするように具体的に表現されなければならない≫（p.13）と指摘し，操作的証明を≪適切に表現された数学的対象に対する操作の結果に基づく証明≫（p.14）であると述べている。

このように，証明指導の脱形式化とでもいうべき思想は，前形式的証明と操作的証明のどちらにも共通するものであり，これらの証明がもつ概念はおおよそ同様のものである捉えられる。佐々ら（2010）は，操作的証明について，≪推論する学習活動としての証明という考え方を，学習活動レベルにおいて具体化したという意味では，前形式的証明をさらに進めた概念である≫（p.12）と指摘している。

Wittmann は，1987 年にプロジェクト「mathe 2000」を創設し，現在も主宰している。「mathe 2000」は，幼稚園・小学校から大学（教師養成）に至るまでの数学教育のカリキュラムや教授・学習などの

研究・開発を目指しており，その主な仕事は，本質的学習場[18]の開発とその実験的研究，教師養成と再教育であり，「理論－実践のネットワーク」の構築にも力が注がれており（ヴィットマンら，國本ら訳，2004，p.121），最終的に目標としているところは，教育制度の全ての関係者が研究開発の過程に参加できるような「理論と実践のネットワーク」の構築である。

このプロジェクトでは，学校段階全体を通して，次の能力の育成が一般的学習目標として挙げられている。

①数学化する：現実状況を数学言語に翻訳し，数学的に解決し，結果を現実状況で解釈する能力
②発見する：状況を実験的に探究し，関係や構造を発見し[19]，構造を発明する能力
③推論する：数学的事態や現象を理由付ける能力
④表現する：数学的事態や現象を観察し，考察し，理由付け，評価し，それを口頭でも筆記でも表現する能力

初等教育でこのような一般的学習目標を実現するためには，中等教育段階における証明に相当する学習を概念的に明確にする必要があったと考えられる。そこで，適切に表現された数学的対象に対する操作を通して，推論する学習として概念化されたのが操作的証明であった。

（１）操作的証明の具体的事例１

Wittmann（2005）は，操作的証明の事例として，4 学年の「ANNA 数」を紹介している。ANNA 数は，2332 と 3223，5885 と 8558 のような 2 つの数を用いた 4 桁の数であり，これらの差は必ず 891 の倍数になるという数学的現象である。

中学校の生徒であれば，文字を用いて ANNA 数をそれぞれ 1000a＋100b＋10 b＋a，1000b＋100a＋

---

[18] ヴィットマン（2000）の「本質的学習場」（Substantial Learning Environments）とは以下の条件を満たす単元のことである。

①算数・数学指導の主要な目標，内容，原理がある水準において示されていること

②この水準を越えた重要な数学的内容，過程，方法と結び付いており，数学的活動の豊かな源泉であること

③柔軟性をもち，個々の学級の特殊事情に合わせることができること

④算数・数学指導に関する数学的，心理学的，教授学的観点を統合し，実践的研究の豊かな場を形作ること

[19] Wittmann が本質的学習場において立脚すべき数学観として挙げたのが,「パターンの科学」である。パターンの科学としての数学観は，アメリカの数学者キース・デブリンなどによってにわかに注目されるようになった数学観である。ここでの「パターン」とは，我々が通常用いている「きまり」を意味する用語よりも広い意味で捉えることができよう。実際，Wittmann も「パターンの科学」を「既存の静的なパターンに関する科学」ではなく，「ダイナミックなパターンに関する活気あふれる科学」と表現している（Wittmann，2005）。したがって，本質的学習場に意図的に埋め込まれた数学的なパターンは，まず学習者の知的探究の対象でなければならない。

10a＋b と表し，それらの差が 891（a－b）となることから，891 の倍数になることを証明することができるだろう。

一方，操作的証明では，文字を使用できない児童でも正当化が可能なように，おはじきと位取り表が用いられる。例えば，「3223－2332」の操作的証明であれば，まず，2332 をおはじきと位取り表で図 3-1 のように表すことができる。

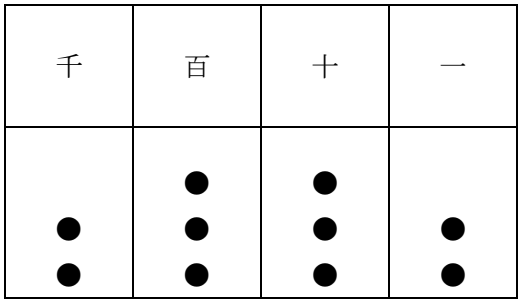


図 3-1　2332 の表現

次に，2332 から 3223 をつくるには，図 3-2 のように百の位にあるおはじきを千の位へ 1 つ，十の位にあるおはじきを一の位へ 1 つ動かす操作である。つまり，百の位から千の位へのおはじきの移動は「＋1000－100＝＋900」，十の位から一の位へのおはじきの移動は「＋1－100＝－99」と表され，全体では 891 の値が変化することになる。

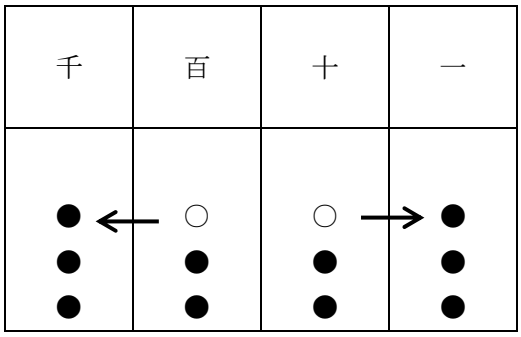


図 3-2　2332 から 3223 へのおはじきの移動

この操作は他の ANNA 数においても可能であり，他の事例についても探究することで，ANNA 数の差が「891×（2 数の差)」であることを明らかにすることができる。

ANNA 数を例にして操作的証明について述べた。この学習活動には，「発見すること」と「正当化すること」が位置付けられているが，おはじきの操作が正当化の学習場面を支援するものとして機能しており，そのことが児童の理解を促している。このことから，操作的証明が発見の文脈と正当化の文脈を接続する学習となることは指摘できるが，発見から正当化へ移行するプロセスについては語られておらず，どのようなことが要因となって児童の意識が正当化へ向くのかは未だ課題として残る。その課題解決の糸口を探るためにも，操作的証明の他の事例について考察する必要がある。

（２）操作的証明の具体的事例２

Wittmann（2009）は，操作的証明の事例として，3 学年のたし算の学習を紹介している。課題は以下の通りである。

3 組の 3 桁の数をつくるために，1～9 までの数カードを 3 枚使いなさい。そして，合計が 1000 より小さくなるようにこれらの数を合計しなさい。

学習活動の詳細な展開は述べられていないが，通常は以下のような展開が考えられるだろう。

①3 組の 3 桁の数をつくり，その合計を計算する（例えば，147＋258＋369）。 ②起こり得る全ての数（26 種類）を導く。 ③導いた数（例えば 774）が全て 9 の倍数になっていることを発見する。 ④おはじきと位取り表を用いて，導いた数が 9 の倍数になることを正当化する。

③の学習活動において，児童が導く 26 種類の数は，774，783，792，801，810，819，828，837，846，855，864，873，882，891，900，909，918，927，936，945，954，963，972，981，990，999 である。これらの数は，それぞれの位の数の合計が必ず 9，18，27 になることから，9 の倍数になることを判断することができるという。しかし，数の合計が 9 の倍数になることを知らずに，26 種類の数を導くことができるだろうか。やみくもに数を探して 26 種類を導くことは大学生でも困難であり，3 学年の児童が①～④のような精緻化された学習活動を展開することは困難であろう。次のような展開の方が自然ではないだろうか。

3 組の 3 桁の数を導く際，児童の中には，まず最も小さい数を導こうとする者がいるだろう。最も小さい数をつくるには，図 3-3 のように百の位から小さい数を並べていけばよい。もちろん，同じ位の中での数の移動は，合計には影響しない。

百	十	一
1	4	7
2	5	8
3	6	9

図 3-3　最も小さい数ができる数の組み合わせ

最も小さい数の 774 が導かれたなら，児童は次はどうだろうか，その次はどうだろうかと探究していくだろう。その過程で，児童は導かれた数が 9 ずつ増えていることに気付くことができる。しかし，

数が 9 ずつ増えることに確信がないことには，9 ずつ増やすというストラテジーを使うことはできない。9 ずつ増やすことができるときは，9 ずつ増えるという根拠があるときであろう。したがって，全ての数を導くためには，9 ずつ増えることを正当化する必要が生ずるのである。

9 ずつ増えることを正当化するためには，ANNA 数のようにおはじきを操作することが有効である。数カードをおはじきに置き換え，位取り表を用いて 3 桁の数を表現する。例えば，合計が 774 になる式「147＋258＋369」であれば図 3-4 のように表現される。

百	十	一
●	●●●●	●●●●● ●●
●●	●●●●●	●●●●● ●●●
●●●	●●●●● ●	●●●●● ●●●●

図 3-4　おはじきと位取り表による表現

一の位と十の位にはおはじきが 10 個以上あるので，これらのおはじきは繰り上がりの対象となる。繰り上がりは，おはじき 10 個を取り去って，次の位のおはじきを 1 個増やす操作である。このとき，おはじきの数は 9 個減る。この繰り上がりの操作は，どの数であっても同じであるわけだから，繰り上がりはおはじきの数が 9 個減る操作となる（図 3-5）。

最初にあるおはじきの数は，どんな数の組み合わせであれ 45 個（1＋2＋・・・＋8＋9）であり，45 は 9 の倍数である。繰り上がりは 9 個のおはじきが減る操作であるから，繰り上がり後のおはじきの数も必然的に 9 の倍数になる。したがって，おはじきの数は繰り上がりが 1 回あれば 9 個減って 36 個，2 回あれば 18 個減って 27 個，3 回あれば 27 個減って 18 個，4 回あれば 36 個減って 9 個であるが，それぞれの位には 9 個のおはじきしか入らないので，おはじきの数の合計は 27 個，18 個，9 個のいずれかになる。

百	十	一
●	●●●●	○○○○○ ○○
●●	●●●●●	●●○○○ ●●●
●●●	●●●●●●● ←	●●●●● ●●●●

⇓

百	十	一
●	●●●●	
●●	●●●●●	○○ ○○○
●●●	●●●●●●● ● ←	○○○○○ ●●●●

⇓

百	十	一
●	○○○○	
●●	○○○○○	
●●● ● ←	○●●●●●● ●	●●●●

図 3-5　「147＋258＋369」の繰り上がり操作

このような操作によって，導かれる数が 9 の倍数になることが発見され，同時に正当化もなされている。導かれる数が 9 の倍数であれば，数は 9 ずつ増えていく。このことによって児童は確信をもって，起こり得る全ての数を探究していくだろう。この後，9 ずつ増えるという考えに基づいて，9 増える操作とはどのようなものなのかということも探究することができる。図 3-6 のように，隣接する位の差が 1 の数に着目し，それらの数の移動によって 9 増えることを理解することができる。しかし，3 学年の児童にここまでの活動を求めることは検討の余地があるだろう。

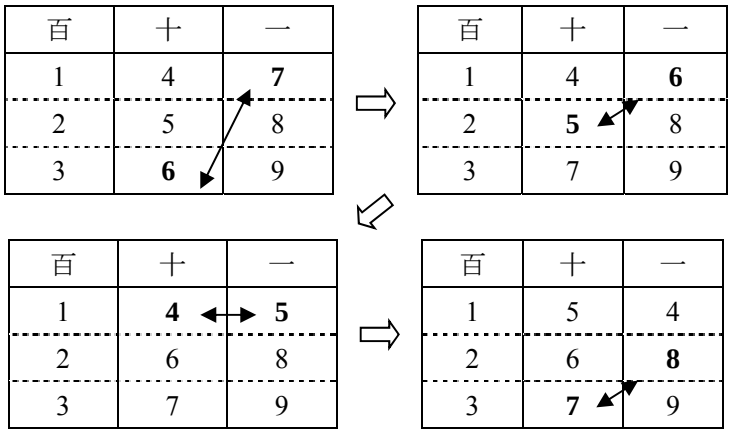


図 3-6　数が 9 ずつ増える操作

第２節　操作的証明の総合的考察

１．操作的証明の教育的意義

國本の前形式的証明から Wittmann の操作的証明を概観した。國本の前形式的証明から Wittmann の操作的証明を概観した。操作的証明は，児童が見出した数学的なパターンが成り立つ理由を正当化する学習活動となっている。事例で示したおはじきと位取り表を用いた学習活動は，例えば 100 の位から 1000 の位へ，10 の位から 1 の位へおはじき 1 個を動かす操作が，1000 増えて 100 減る，10 減って 1 増えるという数学的現象を示しており，具体物の操作が代数的な証明を助ける働きを果たしている。このとき，児童は操作の一般性を認識しているだろう。その意味では，おはじきと位取り表による操作的証明をベースとして，代数的推論へ展開する学習活動は十分可能であると考える。このことについて佐々（2012）も，代数的証明において，操作的証明を取り入れることによって，具体的な数値からすぐに記号へと抽象化するのではなく，操作を媒介として一般的に成り立つことをイメージするという学習活動が可能になると指摘している。

また，操作的証明の事例として挙げた 2 つ目の学習活動は，「発見」と「正当化」の接続という視点から示唆が得られるものである。この学習活動は，児童が目的に向かうためには，正当化をしなければならないものである。つまり，ここでの正当化は必然的なものとなる。このような学習活動を展開するとき，「発見」と「正当化」が学習活動の中に混在している。それはつまり，学習課題は「3 桁の数を全て見つける」ことであるが，その解決のためには「なぜ 9 の倍数になるのか」という数学的命題を明らかにしなければならない構造になっているということである。

通常，パターンやきまりを発見した後，それを正当化するが，それを一連の活動として展開していることに価値があると考える。発見と正当化が混在し得る学習活動こそ操作的証明であると捉えれば，このような活動が証明する必要性，数や式を対象化する必要性にもつながっていくだろう。だからこそ，操作的証明が位置付いた一連の学習活動が，発見と正当化を接続する学習活動になり得ると考えるのである。

２．代数的推論と操作的証明との関連

発見と正当化が混在し得る学習活動が証明する必要性, 数や式を対象化する必要性にもつながっていくという点に，操作的証明の教育的意義を見出したが，逆に，発見と正当化が混在しているからこそ，それを別々に捉えようとすることが難しいという指摘も考えられる。

例えば，分数の除法（÷分数）の学習では，面積図や数直線等を用いて「×逆数」を発見した後に，「×逆数」の式を対象化し，「なぜ『×逆数』になるのか」ということついて正当化を図る。ここでは，発見と正当化が別々に捉えられており，「なぜそうなるのか」という思考が働くことで，正当化を目指す。

代数的推論，特に成功的な一般化を行うためには，記号の対象化を成立させることが必要である。記号の対象化が成立している状態とは，「なぜそうなるのか」という思考が働いていることであり，児童が数学的命題を認識していることとも捉えることができる。

これまでは, 発見と正当化を別々に捉える状況に児童を置くことで記号の対象化への接続を考えてきた。しかしこれでは，代数的推論は発見と正当化を別々に捉えるような精緻化された学習活動でしか現れないと指摘しているようなものである。もちろんそのような方向性もあろうが，本研究の目的はあくまで算術の拡張であり, 算数を学ぶ児童にとっても到達可能なアプローチを探らなければならない。そのアプローチの視点となるのが操作的証明の事例的考察から得られた「発見と正当化の混在」であり，この視点を用いて代数的推論を促進する学習のあり方を考える方が有益であると考える。

第３節　代数的推論の指導の方向性

本章は，発見と正当化を接続する学習として操作的証明に着目し，その教育的意義について明確にすることを目的とした。Wittmann（2009）の操作的証明は，「発見」と「正当化」を学習活動の中に混在させることが可能である。そのことが，数や式を対象化する必要性，つまりは記号の対象化を認識することにつながっていくことが示唆された。したがって，代数的推論の指導の方向性として，精緻化された学習の中で記号の対象化の認識を考えるのではなく，「発見」と「正当化」が混在するように学習活動を構成し直すことが考えられるだろう。

ただし，これまでの学習活動を構成し直すためには，まず代数的推論と操作的証明の学習がどのように構造化されるのかを明確にする必要があると考える。

第３章における引用・参考文献

Wittmann,E.Ch.（1984）: Teaching units as the integrating core of mathematics education,Educational Studies in Mathematics,15,25-36.

Wittmann,E.Ch.（1995）: Mathematics Education as a ‘Design Science’,Educational Studies in Mathematics,29:355-379.

Wittmann,E.Ch.（2005）: Mathematics as the Science of Patterns:A Guideline for Developing Mathematics Education from early Childhood to Adulthood,The paper presented at the International Colloquium.

Wittmann,E.Ch.(2009),Operative Proof in Elementary Mathematics, Paper presented at the international conference ICMI Study19:Proof and proving in Mathematics Education “Proof and proving in mathematics education”,Taiwan,10-15.May2009,organized by ICMI.

國本景亀（1992），「前形式的証明とその教育的意義－証明の社会学的見方に関連して－」，高知大学学術研究報告 41，1-14.

國本景亀（2009），「数学的推論の研究について－数学観と操作的証明を中心に－」，日本数学教育学会,『第 42 回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表収録』,54-59.

佐々祐之・山本信也（2010）,「数学教育における操作的証明（Operative proof）に関する研究」,全国数学教育学会『数学教育学研究』,16（2）,11-20.

ビットマン・ミューラー・シュタインブリング(2004),『算数・数学　授業改善から教育改革へ』(國本景亀・山本信也訳),東洋館出版社.

第４章　代数的推論の促進を目指した教授・学習

本章は，成功的な一般化に必要不可欠な「記号の対象化」の認識を，「発見」と「正当化」が混在する状況に求め，その学習構造を明らかにすることを目的とする。そのために第 1 節では，ポリア（1959）の帰納的活動について考察し，そこで得られた視点を一般化分岐モデルに適用する。第 2 節では，操作的証明と代数的推論の学習構造を比較する。第 3 節では，前節で得られた示唆を用いて，代数的推論を促進する教授・学習のあり方について述べる。

第１節　操作的証明から記号の対象化へ

１．帰納的活動への着目

Wittmann（2005）は，数学をパターンの科学として扱うが，数学教育においては，静的ではなく動的に扱う必要があると述べている。このことは算数・数学を与えられるものとしてではなく，数学的なパターンを探究，発見，理由付け，表現する活動を行うものとして捉えるということを示している。これに関連して，数学をパターン（法則性）[20]の研究として明確に位置付けた英国生まれの数学者 W.W.ソーヤー（1978）は，≪探究したいという欲求は数学者の特性である。これが数学の発展を促す原動力の 1 つなのである≫（p.20）と述べており，この指摘を算数・数学教育に当てはめれば，児童らに「探究したい」という欲求を生み出すには，算数・数学を動的なパターンとして扱う活動性が必要であろう。このような思想のもとでは，教師と児童が共に算数・数学を創り上げる様相が見られるだろうし，極めて生産的な学習，特に帰納的活動が展開されるだろう。操作的証明においても，帰納的活動が展開されている。

前章では，操作的証明が「発見」と「正当化」が混在する学習活動を展開させることが可能であるものとして捉えた。このような学習活動が証明する必要性，数や式を対象化する必要性にもつながっていく。その一方で，発見と正当化が混在しているからこそ，それを別々に捉えようとする転換が難しいということも指摘した。記号の対象化の認識できなければ，代数的推論が成功的な一般化へ至ることも期待できない。通常は，発見と正当化を別々に捉える状況に置くことで，記号の対象化への接続を目指す。つまり，活動を精緻化しようとするわけだが，記号の対象化への接続を目指すならば，むしろ代数的推論を操作的証明に近似させることも 1 つの方法である。「発見」と「正当化」の混在である。そのような教授・学習を行うために，代数的推論，操作的証明それぞれの学習構造を明らかにする必要がある。

既述したように，記号の対象化においては，児童の「なぜ」という思考が働いている。したがって，一般的な表現を用いれば，記号の対象化は数学的命題と換言できる。そこで，発見の文脈において展

[20] W.W.ソーヤーは，パターンについて次のように述べている。≪「数学とは，ありとあらゆるパターンの分類と研究をする学問である」ということができよう。ここで，パターンといっているのは，世の中で一般に使われているものとは少し異なっている。それは非常に広い意味に解されるべきであり，精神が認めることができるほとんどあらゆる種類の法則性を包含すると考えるべきである。生活，特に知的な生活は，世界にある種の法則性があるからこそ可能なのである。鳥はすずめ蜂の黒と黄の縞模様を知っており，人間は種子をまくと植物が育ってくることを知っている。いずれの場合にも精神は，ある種のパターンに気づいているのである。≫（ソーヤー，1978，p.10）

開される帰納的活動において，児童が如何にして数学的命題を認識するのか，帰納的活動に関する先行研究の考察から探ることとする。

（１）ポリアの帰納的活動

帰納的活動について，著書『帰納と類比』の作者であるポリア（1959）は，帰納的活動を 2 つの区別し得る段階があると述べている。そして，その第一段階を「暗示的接触」（Suggestive contacts），第二段階を「支持的接触」（Supporting contacts）と呼んでいる。「暗示的接触」とは，観察によって暗示され，特別な 2, 3 の事例によって指示された 1 つの推測を構成することである。「支持的接触」とは，暗示的接触により構成した推測を強化し，その信頼性を高めることであり，図 4-1 のように表すことができる。

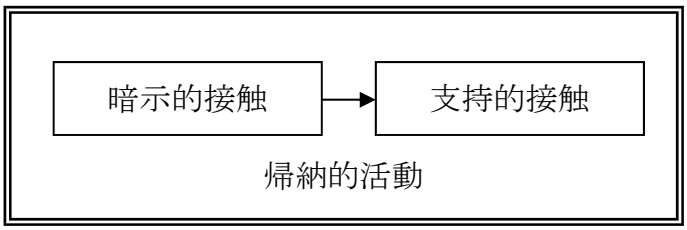


図 4-1　ポリアの帰納的活動

ポリア（1959）は次のような事例で，これら 2 つの段階を説明している。例えば，

3＋7＝10，　3＋17＝20，13＋17＝30

のような関係について，その間に何か類似性があることに気付くとする。まず，3，7，13，17 という数が奇数の素数である。そして，それらの和が偶数になっている。したがって，「2 つの奇数の素数の和は必ず偶数である」という推測が思い当たる。通常の人間の心理から考えれば，他の偶数についても同じことがいえるかどうか疑問をもつだろう。調べてみると次のようになる。

6＝3＋3
8＝3＋5
10＝3＋7＝5＋5
12＝5＋7
14＝3＋11＝7＋7
16＝3＋13＝5＋11

そして，このような観察によって，「4 より大きな任意の偶数は 2 つの奇数の素数の和である」という推測が構成される。

しかし，この推測は暫定的なものに過ぎず，真であることを主張することはできないので，真理に近づく 1 つの試みに過ぎない。ポリア（1959）は証明されない推測は信頼してはならず，自分自身で検討する必要があるとしている。そこで，推測の信頼性を高めるために新たな事例についても確かめるのである。例えば，数 60 について 2 つの素数の和への分解が可能かどうかを確かめる。被加数が

3 や 5 のときは，加数がそれぞれ 57，55 となり（60＝3＋57，60＝5＋55）素数ではないが，被加数が 7 であれば加数が 53 であり（60＝7＋53），素数である。これで，60 においても推測「4 より大きな任意の偶数は 2 つの奇数の素数の和である」が成り立つことが確かめられたわけである。このような検討は，推測の証明にはなり得ないが，推測の本当らしさを増すことにつながる。このように帰納的活動とは，若干の特別な事例によって暗示された 1 つの数学的命題について，それが真であるか誤りであるかを見出そうと努めることであるといえる。

この事例を数学的命題の認識が如何になされるのかという視点で考察した場合，帰納的活動の 2 つの段階は，次のように機能していると考えられる。暗示的接触の段階では，数学的活動を行っているに過ぎず，ここで構成されるのは 1 つの推測に過ぎない。この時，数学的命題は暗黙的な存在である。支持的接触の段階では，暗示的接触により構成した推測の外延を拡張する。これは，数学的命題を顕在化させるためである。換言すれば，外延の拡張は，数学的命題に高めるための活動であるといえよう。以下に，本研究における暗示的接触と支持的接触の捉えを示す。

表 4-1　本研究における暗示的接触と支持的接触の捉え

暗示的接触：	数学的活動により推測を構成する。この時，数学的命題は暗黙的な存在である。
支持的接触：	推測の外延を拡張し，数学的命題を顕在化させる。

帰納的活動は一般性を志向する学習活動である。上述のように，帰納的活動の 2 つの段階を規定することで，一般化のプロセスを考察する視点として，「推測の構成」，「外延の拡張」，「命題化」を用いることができるだろう。

（２）ポリアの帰納的活動の一般化分岐モデルへの適用

代数的推論が表出する学習過程は，一般化分岐モデルのプロセスと整合的である。そうであれば，児童が如何にして数学的命題を認識するのかという課題解決のアプローチを探るためにも，帰納的活動の 2 つの段階を一般化分岐モデルへ適用させることは意義あることである。

一般化分岐モデルにおける一般化のプロセスは，活動が出発点となる。そして，≪活動の目的や手段や方針などが反省させられて，一連の構成要素の特徴や構成要素間の関係に注意が向けられる≫（岩崎，2007，p.122）。その注意が向けられた関係は，活動の繰り返しによって安定し，不変なものとなる。この不変な関係を記述するために，言葉や図，記号が必要となるのであり，この数学的構成のプロセスが「構成的抽象」である。

したがって，一般化分岐モデルの構成的抽象には，活動によってその関係に注意を向ける段階，そして活動の繰り返しによって不変な関係を認識する段階があるといえる。この段階はそのまま暗示的接触（推測の構成），支持的接触（外延の拡張）に置き換えることが可能であり，一般化分岐モデルにこれら 2 つの接触を適用させると次のように表すことができる。

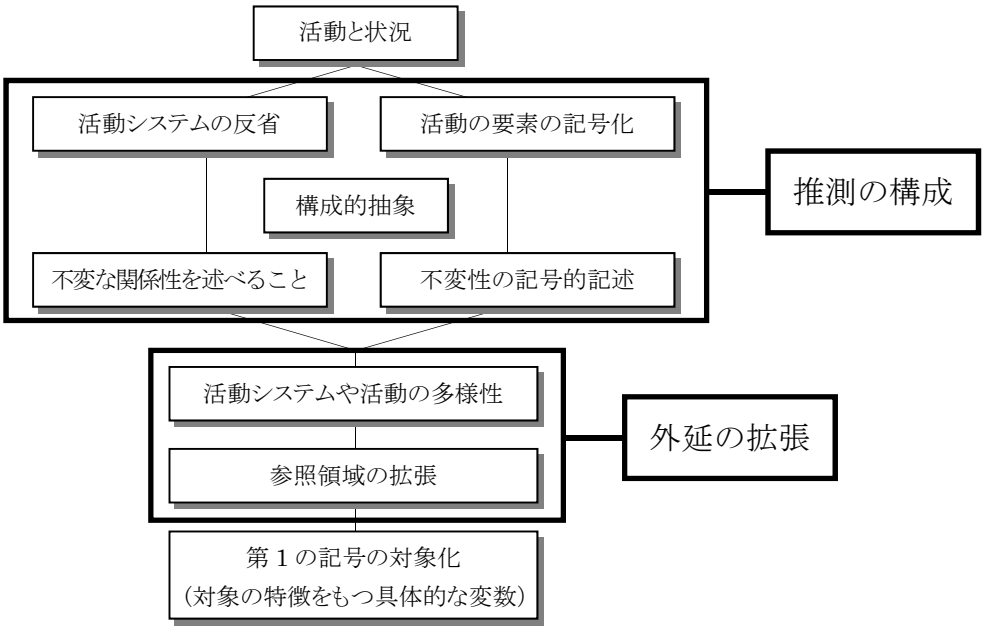


図 4-2　帰納的活動の視点からみた一般化分岐モデル

このように，一般化分岐モデルにポリアの暗示的接触と支持的接触が位置付くと考えることができる。このことは，数学的活動によって見出した関係や規則への信頼性を高めることが記号の対象化へ向かう環境を整えることになるといえる。

２．数学的命題の認識について

「推測の構成」と「外延の拡張」という 2 つの視点で帰納的活動を考察することができるが，精緻化された学習活動というのは，外延の拡張から数学的命題に至ることである。操作的証明であれ代数的推論が表出する学習であれ，外延を拡張する場面があるが，操作的証明においては，児童が成功的に数学的命題を認識し，代数的推論は困難性が伴う。それは学習内容そのものの特性もあり，課題解解決へのアプローチは一義ではないかもしれない。しかし，操作的証明においては発見と正当化が混在し，児童が数学的命題を認識している以上，代数的推論を促進する上で，命題化へのプロセスがどのように構成されているかということを明確にする必要があるだろう。

そこで次節では，「命題化」という視点で，代数的推論と操作的証明の学習構造を考察し，両者を比較することとする。なお，代数的推論は分数の除法を事例として，またそのプロセスは一般化分岐モデルに基づくものとして考察する。

第２節　「命題化」という視点からみた 2 つの学習の構造

１．代数的推論の学習構造

Freudenthal（1973）は，分数を直観的分数とアルゴリズム的分数とに区別している（p.277）。前者は，分数の意味を現実の世界に密着して理解される分数として，後者は例えば商分数のような代数的に表現される分数として解釈できるが，岡田（1977）はこれらを，意味論（semantics）的分数と構文

論（syntax）的分数と表現している。分数の演算の学習についていえば，導入で現実の世界にかなり密着したものとして扱われていたものが，終末では代数的性質を伴うものとして扱われるようになる。これは意味論的扱いから構文論的扱いへの移行を問題としているといえよう。

意味論的分数から構文論的分数への移行は抽象化の過程であり，学習する水準が異なる。代数の組織化において Freudenthal（1973）は，代数における学習過程として≪はじめ数を操作する。そして，その操作の実行による法則に着目し，法則を公式化する。局所的なつながりによってそれらの法則を局所的に組織化し，演繹的体系の中で大域的に組織化する≫と述べている。これは，数を学習の対象とした際の認識過程をまとめていると考えられるが，氏は，次のように代数における学習過程を構成している（p.313）。

第 1 水準	「直観的操作」
第 2 水準	「代数的操作」
第 3 水準	「局所的組織化」
第 4 水準	「大域的組織化」

これに対し岡田は（1977）は，次のように説明を加えている。

≪第一水準は，個々の数とその演算を扱う水準である。第二水準は，第一水準で得られた法則等に着目して，それを文字を用いて定式化する水準である。第三水準は，第二水準で得られた多くの関係式を考察の対象とし，それらの間の論理的関係，たとえば式 A は式 B と C から導けるというような論理的関係を局所的に考察する水準である。第四水準は，第三水準で考察した関係式の間の論理的な関係に着目し，厳密な演えき的体系にまとめあげる水準である。≫（p.8）

代数の第 1 水準，「直観的操作」の段階においては，具体的な数を用いて計算したり，法則を用いて実際に操作したりする水準である。第 2 水準「代数的操作」では，文字を用いる一般性が保障されている水準といえるであろう。文字を用いない小学校ではあるが，一般性を内包する擬変数としての認識は可能であり，岡田（1978）も，それぞれ我が国の数学教育の実情と対比し，第 1 水準「直観的操作」は主として小学校，第 2 水準「代数的操作」は主として中学校に該当するが，小学校の高学年から高校にまで適用されると指摘している。この第 1 水準「直観」的操作から第 2 水準「代数」的操作への水準移行は，分数についていえば意味論的分数から構文論的分数への移行である。

水準移行というのは，1 つ前の水準の整理手段を学習の対象として捉えることである。具体的には，代数の場合の第 1 水準における具体的な直観的操作を，次の第 2 水準で学習の対象として見つけ出すことである。そして，直観的操作から次の代数的操作へと学習過程を引き上げるには，移行の必要性を児童に認識させることである（岡田，1997，p.108）。これは，数学的命題の認識は水準移行によりなされるものと捉えられ，代数的推論の学習構造を，「推測の構成」，「外延の拡張」，「命題化」という視点で構成すると，以下のように構成されると考える。

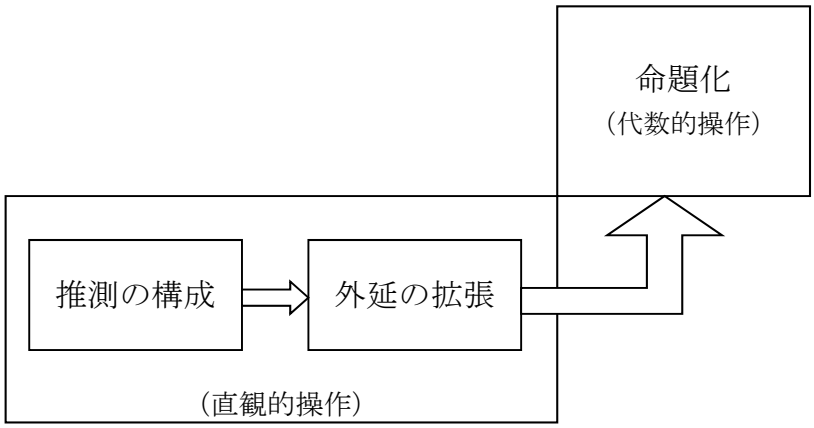


図 4-3　代数的推論の学習構造

この学習構造を用いて考えれば,「÷分数」が「×逆数」になることを児童が本質的に理解するためには，水準移行がなされることが求められる。代数的推論が児童にとって困難なため，意味論的な扱いである面積図によって「×逆数」が一般化される指導がみられるが, 図 4-3 からも分かるように，そのような指導は第 1 水準に留まったままの指導であり, 技能の習熟だけが強調され意味理解の阻害要因になるということが分かるだろう。

２．操作的証明の学習構造

操作的証明の事例は，3 組の 3 桁の数をつくるために，1～9 までの数カードを 3 枚使って，合計が 1000 より小さくなる数をつくることを問題とした学習であるが，この学習活動において導かれる数は 26 種類であり，全ての数が 9 の倍数になる。ただ，9 の倍数になることを知らずに，26 種類の数を全て導くことは難しい。

ここでは，命題化が必然的であり，発見すること（1～9 のカードを用いてつくった 3 組の 3 桁の数を合計する）とおはじきの操作によって正当化すること（3 組の 3 桁の数は本当に 9 ずつ増えるのかを確かめること）が交互に表れると捉えることもできる。ここで, 必然的に命題化がなされるのは，正当化しないことには，推測の外延を拡張する（26 種類の数を全て導く）ことができないからである。したがって，代数的推論と同様，操作的証明の学習構造を,「推測の構成」,「外延の拡張」,「命題化」という視点で構成すると，以下のようになると考える。

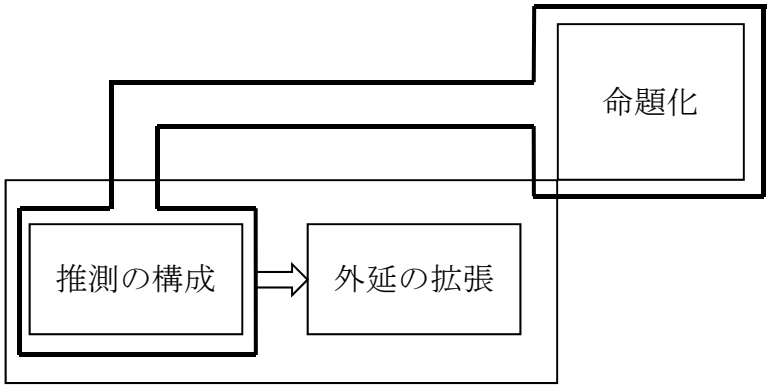


図 4-4　操作的証明の学習構造

この学習における「外延の拡張」とは，26 種類の数を全て見つけることである。そして，全ての数を発見しなければいけないという状況が，数学的命題を認識することにつながっている。これは，「推測の構成」と「命題化」が交互に現れていると捉えることができる。図 4-4 では「推測の構成」と「命題化」が一連の活動として表され，その活動が外延の拡張を促している。

３．2 つの学習構造から導かれる示唆

代数的推論と操作的証明の学習を構造化した。前者は推測の外延の拡張ののちに命題化に至るが，それに対し後者は，推測の構成と命題化が交互に現れ，外延の拡張に図る。外延の拡張から命題化の過程においては，意味論的扱いから構文論的扱いへの移行が生ずる。性急に構文論的扱いに移行すれば，直観と切り離されるために混乱が生ずる。代数的推論の困難性はここにある。

代数的推論と操作的証明は，それぞれ形式的証明と前形式的証明（もしくは非形式的証明）として一般的に分けられるが，形式的証明の特性について村上（2010）は，以下の 3 点を挙げている。

①真偽が確定でき，あるいは真偽を仮定した命題（言明）のみを考察の対象とする。

②推論は妥当といえる規則（演繹的推論）に従ったものでなければならない。

③すべてについて言及したものでなければならない。

操作的証明の事例は，児童が「すべて」について言及することを目的とすることで，必然的に命題化がなされることが考えられた。一般性の認識について，その概念が外延と内包の相補によって構成されている（村上，2010）と考えれば，代数的推論は内包を対象としている。通常，その内包は外延の広さを認識することで派生すると考えられている。したがって，その外延を意識させ，その範囲を広げさせる指導が行われるのである。

しかし，児童にとって外延の広さを認識することは，命題化へのパスポートになるとは限らない。児童にとっては外延の広さを認識することでその目的は達成されており，命題化の視点から考えれば，外延の拡張がむしろ阻害要因になっているといってもよい。

このようなことから，2 つの学習構造の比較から導かれる示唆として，代数的推論が求められる学

習においては，「外延の拡張」ののちに「命題化」，つまり「記号の対象化」への移行を目指すように展開するのではなく，操作的証明の学習構造を参照し，「推測の構成」と「記号の対象化」が交互に現れるように学習を構成することが考えられる。

第３節　代数的推論の学習構造の再構成

本章では，代数的推論を促進するアプローチを，「発見」と「正当化」が混在する状況に求めた。操作的証明の学習構造を明確にしたことにより，「発見」と正当化」が混在した状況とは，「推測の構成」と「命題化」が交互に現れることであると指摘することができた。

そして，児童の発達段階も考慮し，これまでの精緻化された学習構造の中で代数的推論が働くことを目指すのではなく，「推測の構成」と「記号の対象化」が交互に現れるように学習を構成することが，算数教育の中で代数的推論を促進する教授・学習になると考える（図 4-5）。

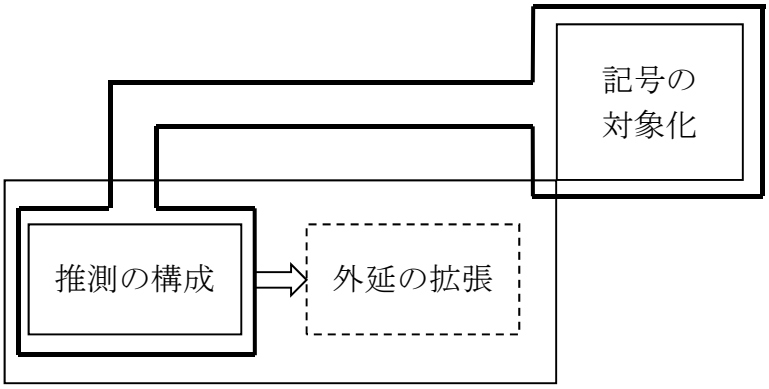


図 4-5　再構成された代数的推論の学習構造

第４章における引用・参考文献

H.Freudenthal(1973),*Mathematics As An Educational Task*,D.Reidel Publishing Company.

Wittmann,E.Ch.(2005) : Mathematics as the Science of Patterns:A Guideline for Developing Mathematics Education from early Childhood to Adulthood,The paper presented at the International Colloquium.

岩崎浩(2011),「算数科の特色ある授業づくり」,中原忠男編,『新しい学びを拓く算数科授業の理論と実践』,ミネルヴァ書房,76-87.

岩崎秀樹(2007),『数学教育の成立と展望』ミネルヴァ書房.

岡田禕雄(1977),「Freudenthal の数学教育論（Ⅰ）－数の指導の場合－」,『広島大学教育学部紀要第 3 部』,26,103-110.

岡田禕雄(1978),「Freudenthal の数学教育論（Ⅱ）」,『広島大学学校教育学部紀要第 2 部』,1,103-110.

國本景亀(2009),「数学的推論の研究について－数学観と操作的証明を中心に－」, 日本数学教育学会,『第 42 回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表収録』,54-59.

杉山佳彦(2009),「数学教育における『証明』についての基礎的研究－『定理』と『証明』についての考察(2)」, 日本数学教育学会,『第 42 回数学教育論文発表会論集』,571-576.

村上一三(2010),「形式的証明と非形式的証明のギャップ」, 日本数学教育学会,『第 43 回数学教育論文発表会論集』,705-710.

ソーヤーW．W.（1978）,『数学へのプレリュード』（宮本敏雄・田中勇訳）,みすず書房.

ポリア,G.(1959),『数学における発見はいかになされるか 1　帰納と類比』（柴垣和竿訳）,丸善.

終章　本研究の成果と課題

本研究の主題である「代数的推論の促進」に関するこれまでの検討を振り返り，成果と課題を整理する。

第１節　本研究の成果

本研究における研究目的は，以下の通りであった。

算数教育において如何にして代数的推論を促進させるのか，その教授・学習のあり方を明らかにすること。

そして，この目的達成のために，以下の研究課題を設定した。

【研究課題 1】	初期の代数（Early Algebra）に関する先行研究の考察から，代数的推論とは何かを示すこと。
【研究課題 2】	「課題 1」を受けて，教授・学習における代数的推論の課題を明らかにすること。
【研究課題 3】	「課題 2」を受けて，代数的推論を促進する教授・学習のあり方を明示すること。

「**研究課題 1**」として，第 1 章では，代数的推論に関する先行研究を考察し，代数的推論の様相を捉えた。これまでの算数教育は，算術と代数を切り離して考え，その橋渡しのあり方に焦点があてられてきた。しかし，算術には代数的特徴が潜在しており，数を代数的によむことや書くこと，そして処理することを明示的に指導していくことが，算術から代数への移行を滑らかにすると考えたならば，代数への拡張可能性をもつものとして算術を捉えることができる。このような見方をすれば図 1 のように，算数教育の目標において，これまでの算術は代数的特徴をもつ算術として拡張することができる。その鍵概念となるのが代数的推論である。

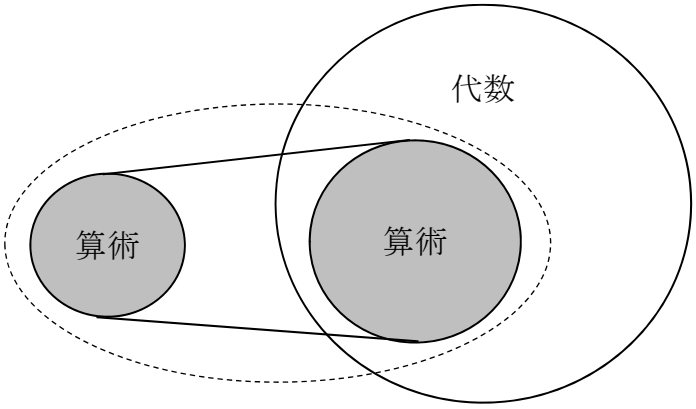


図１　算数教育の目標における算術の拡張

代数領域そのものが多岐に渡っているため，明確な定義を行うことは困難ではあるが，その本質が一般化にあることを指摘し，本研究における代数的推論を「数に関わる操作や性質，数のパターンを取り扱う学習において，一般化が確立することを代数的表現を用いて説明すること」と規定した。

また，現状の算数教育は，形式性が際立つ学習において論理性を対象とすることを回避する傾向にあり，論理性を重視するは代数的推論の促進を目指すことは，算数教育における真正な課題として適切に位置付けられることを指摘した。

「**研究課題 2**」として第 2 章では，学習の方法として「一般化」，学習内容として「一般化された算術」に着目し，代数的推論の困難性の所在を明らかにすることを試みた。ここでは，認識論的・心理学的な観点から一般化の認識過程を分析し，抽象と一般化の接続過程を表した Dörfler（1991）の一般化モデル，その発展型である岩崎（2007）の一般化分岐モデルを考察した。これらのモデルでは，その重要な段階として「記号の対象化」が位置付けられている。

「記号の対象化」とは，インフォーマルな表現を思考の対象に据え，フォーマルな表現へと洗練していく契機になるものである。「記号の対象化」の段階で対象化されるのは，式であったり，図形であったりするが，それらは児童の思考を表現したものであり，その本質は，児童・生徒の表現や思考の対象化である。代数的推論の議論においても，数学的な表現や思考を他者と共有し，主観的でインフォーマルな表現を客観的でフォーマルな表現へと発展させる必要がある。このようなことから，代数的推論を促進する 1 つの足がかりとして「記号の対象化」を位置付けることができることを指摘した。

また，代数的推論が現れる典型的な教材として，第 6 学年の分数の除法（÷分数）を考察した。「×逆数」を導くアプローチは，①2 量の比例関係を表す数直線を用いた方法，②面積図を用いた方法，③分数や除法の性質を用いた方法があるが，岩崎（2007）が，≪理解を支える数領域を欠いたまま論理だけを頼りに「×逆数」を導き，かけ算になることを納得したとしても，理解の場がなければ，技能の習熟だけが強調され意味理解の決定的な阻害要因になるであろう≫（p.168）と指摘するように，ここで求められるのは分数や除法の性質を用いた演繹的な説明である。すなわち，代数的推論による理解である。事例的考察により，「記号の対象化」が伴わなくても代数的推論が働くものの，それでは成功的な一般化に向かわないことが明らかにされた。そのことは同時に「記号の対象化」を成立させる困難性を指摘することだが，その困難性のアプローチを「学年段階相応の学習活動」に求めた。

このことを受け「**研究課題 3**」として第 3 章では，代数的推論，特に成功的な一般化に向かうための「記号の対象化」を「発見」と「正当化」という視点で考察した。そして，その接続となる学習活動として，Wittmann（2009）の操作的証明に着目した。操作的証明の事例的考察では，「発見」と「正当化」が学習活動の中に混在していることを明らかにした。そして，発見と正当化が混在し得る学習活動こそ操作的証明であると捉えれば，このような活動が証明する必要性，数や式を対象化する必要性にもつながっていくことを指摘した。したがって，代数的推論の指導の方向性として，精緻化された学習の中で記号の対象化の認識を考えるのではなく，「発見」と「正当化」が混在するように学習活動を構成し直すことを考えた。

ただし，これまでの学習活動を構成し直すためには，まず代数的推論と操作的証明の学習がどのように構造化されるのかを明確にする必要がある。そこで第 4 章では，これらの学習構造を明確にする視点を得るために，ポリア（1959）の帰納的活動を考察した。ポリアの帰納的活動には，暗示的接触と支持的接触の 2 つの段階があるが，本研究ではそれらを以下のように捉え，3 つの視点「推測の構成」，「外延の拡張」，「命題化」を得た。

表 1　本研究における暗示的接触と支持的接触の捉え

暗示的接触：	数学的活動により推測を構成する。この時，数学的命題は暗黙的な存在である。
支持的接触：	推測の外延を拡張し，数学的命題を顕在化させる。

これらの視点を用いて，代数的推論，操作的証明の学習構造を考察した。Freudenthal（1973）を参照すれば，代数的推論は外延の拡張の後に水準移行がなされ，命題化に至る。操作的証明は，「推測の構成」と「命題化」が一連の活動として交互に現れ，その活動が外延の拡張を促しており，ここでの命題化は必然的である。したがって，操作的証明の学習構造を参照し，代数的推論が求められる学習においては，「推測の構成」と「記号の対象化」が交互に現れるように学習を構成する（図 2）ことが，算数教育の中で代数的推論を促進する教授・学習になることが指摘された。

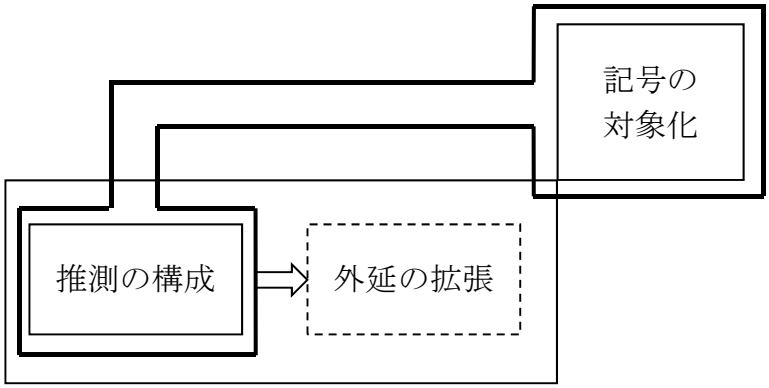


図 2　再構成された代数的推論の学習構造

第２節　今後の課題

本研究は，代数への拡張可能性をもつものとして算術を捉え，算数教育の目標として，代数的特徴をもつ算術への拡張を求めた。そして，その鍵概念として代数的推論に着目し，算数教育における促進のあり方を検討した。今後の課題として，以下に 3 点述べる。

第 1 に，得られた示唆の有効性，妥当性を授業実践によって検討することである。本研究で得られた示唆は，理論的研究によるものであり，児童の具体的な姿から導出したものではない。授業実践を行うことによって，新たな示唆を得ることも期待でき，代数的推論を促進する教授・学習のあり方の具体像がより明確になると考える。

第 2 に，「分数の除法」の有効な指導法を開発することである。6 学年の分数の除法は，その本質的な理解のためには代数的推論による一般化が必要な学習である。しかし，児童にとって難教材とされており，それゆえ，一般性の根拠を問わないまま一般化が行われている現状がある。Freudenthal（1973）が指摘するように水準移行が存在することや，分数そのものの理解の困難性など，いくつかの課題を含んでいる。1 点目の課題と関連させながら，検討を進めていく必要がある。

第 3 に，代数的推論を視点として考察する対象を広げることである。それは，複数の学習内容について考察することが，算数教育における代数的推論の進展につながると考えるからである。当然，上

記 2 つの課題を解決することが前提としてある。

終章における引用・参考文献

Dörfler , W.(1991), Forms and Means of Generalization in Mathematics, Bishop, A. J. (Ed.). *Mathematical Knowledge: Its Growth Though Teaching*, 63-85. Kluwer Acade mic Publishers.

H.Freudenthal(1973),*Mathematics As An Educational Task*,D.Reidel Publishing Company.

Kaput, J. J.(2007). What is Algebra? What is algebraic reasoning? , Kaput, J. J. et al.(Eds.), *Algebra in the early grades*, 5-17.Routledge.

Wittmann,E.Ch.(2009),Operative Proof in Elementary Mathematics, Paper presented at the international conference ICMI Study19:Proof and proving in Mathematics Education “Proof and proving in mathematics education”,Taiwan,10-15.May2009,organized by ICMI.

岩崎秀樹(2007),『数学教育の成立と展望』,ミネルヴァ書房.

ポリア,G.(1959),『数学における発見はいかになされるか 1　帰納と類比』（柴垣和竿訳）,丸善.

村上一三(2010),「形式的証明と非形式的証明のギャップ」, 日本数学教育学会,『第 43 回数学教育論文発表会論集』,705-710.

本研究における引用・参考文献

Ameron , B . A . van(2000). *Reinvention early algebra: Developmental research on the transition from arithmetic to algebra* , CD-β Press , Center for Science and Mathematics Education.

Carraher , D . W . & Schliemann ,A . D(2007), Early algebra and algebraic reasoning , In Frank K. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* , 669-705. Information Age Publishing.

David W. Carraher , Mara V. Martinez & Analúcia D. Schliemann(2008),Early algebra and mathematical generalization, *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*40, 3-22.

Dörfler , W.(1991), Forms and Means of Generalization in Mathematics, Bishop, A. J. (Ed.). *Mathematical Knowledge: Its Growth Though Teaching*, 63-85. Kluwer Acade mic Publishers.

Gravemeijer, K.(2002), Preamble: From model to modeling, In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel(Eds.), *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education,* 7-22. Kluwer Academic Publishers.

H.Freudenthal(1973),*Mathematics As An Educational Task*,D.Reidel Publishing Company.

Kaput, J. J.(2007). What is Algebra? What is algebraic reasoning? , Kaput, J. J. et al.(Eds.), *Algebra in the early grades*, 5-17.Routledge.

Maria L. Blanton & James J. Kaput(2004), Elementary grades student's capacity for functional thinking, *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 135-142.

Maria L. Blanton & James J. Kaput(2005a), Helping Elementary Teachers Build Mathematical Generality into Curriculum and Instruction, *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik* 37(1), 34-42.

Maria L. Blanton & James J. Kaput(2005b), Characterizing a classroom practices that promotes algebraic reasoning, *Jornal for Research in Mathematics Education*36(5), 412-446.

Mason,J(1996),Expressing generality and roots of algebra,*Approaches to algebra:Perspectives for research and teaching,65-86.*

Russell,S.J., Schifter,D. & Bastable,V.(2011), Developing Algebraic Thinking in the Context of Arithmetic, Jinfa Cai.et al.(Eds.),*Early Algebraization:A Global Dialogue from Multiple Perspectives*, Springer.

Schliemann, A. D. , Carraher, D. W .& Brizuela, B. M. (2007), *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*, Lawrence Erlbaum Associates.

Wittmann,E.Ch.（1984）: Teaching units as the integrating core of mathematics education,Educational Studies in Mathematics,15,25-36.

Wittmann,E.Ch.（1995）: Mathematics Education as a 'Design Science',Educational Studies in Mathematics,29:355-379.

Wittmann,E.Ch.（2005）: Mathematics as the Science of Patterns:A Guideline for Developing Mathematics Education from early Childhood to Adulthood,The paper presented at the International Colloquium.

Wittmann,E.Ch.(2009),Operative Proof in Elementary Mathematics, Paper presented at the international conference ICMI Study19:Proof and proving in Mathematics Education "Proof and proving in mathematics education",Taiwan,10-15.May2009,organized by ICMI.

一松信・岡田禕雄他(2010),「みんなと学ぶ算数　小学校算数６ 年上」,学校図書株式会社.

岩崎浩(2011),「算数科の特色ある授業づくり」,中原忠男編,『新しい学びを拓く算数科授業の理論と

実践』,ミネルヴァ書房,76-87.
岩崎秀樹・岡崎正和(1999),「算数から数学への移行について(1)－代数和の位置づけとその指導」,全国数学教育学会,『数学教育学研究』,5,85-90.
岩崎秀樹(2007),『数学教育の成立と展望』,ミネルヴァ書房.
岩崎秀樹・山口武志(2008),「比例的推論に基づく分数除の教授・学習に関する批判的考察」，日本数学教育学会,『第 41 回数学教育論文発表会論文集』， 345-350.
岡崎正和(1999),「算数から数学への移行期における子どもの論理の発達の特徴－除法の一般化を事例として－」,『上越数学教育研究』,14,39-48.
岡田禕雄(1977),「Freudenthal の数学教育論（Ⅰ）－数の指導の場合－」,『広島大学教育学部紀要第 3 部』,26,103-110.
岡田禕雄(1978),「Freudenthal の数学教育論（Ⅱ）」,『広島大学学校教育学部紀要第 2 部』,1,103-110.
國本景亀（1992），「前形式的証明とその教育的意義－証明の社会学的見方に関連して－」，高知大学学術研究報告 41，1-14.
國本景亀(2009),「数学的推論の研究について－数学観と操作的証明を中心に－」，日本数学教育学会,『第 42 回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表収録』,54-59.
佐々祐之・山本信也（2010）,「数学教育における操作的証明（Operative proof）に関する研究」,全国数学教育学会『数学教育学研究』,16（2）,11-20.
清水美憲(1994),「分数の除法における『形式性』と『論理性』の問題」,日本数学教育学会,『第 27 回数学教育論文発表会論集』,53-58.
真野祐輔（2006）,「数学学習における概念変容に関する研究」,修士論文（未刊行）,広島大学大学院教育学研究科.
杉山佳彦(2009),「数学教育における『証明』についての基礎的研究－『定理』と『証明』についての考察(2)」，日本数学教育学会,『第 42 回数学教育論文発表会論集』,571-576.
ソーヤーW．W．（1978）,『数学へのプレリュード』（宮本敏雄・田中勇訳）,みすず書房.
藤井斉亮(1999),「『数字の式』から『文字の式』に至る指導－擬変数について－」，杉山吉茂先生ご退官記念論文集編集委員会編,『新しい算数・数学教育の実践を目指して』東洋館出版社,153-162.
藤井斉亮(2002),「数と計算の学習指導における擬変数の役割に関する研究」，日本数学教育学会,『第 35 回数学教育論文発表会論集』,163-168.
ポリア,G.(1959),『数学における発見はいかになされるか 1　帰納と類比』（柴垣和竿訳）,丸善.
田端輝彦・石田雄一(2011),「分数の乗除法の演算決定に関する一考察－数直線を用いた指導を通して－」,日本数学教育学会,『第 44 回数学教育論文発表会論文集』,411-416.
中村亨史(1999),「分数の除法における子どもの思考の様相」,『山梨大学教育人間科学部研究報告,(第二分冊，自然科学系)』,49,23-30.
中村亨史(2000),「分数の除法における立式の困難性」,『山梨大学教育人間科学部紀要』,1(2),6-13.
ビットマン・ミューラー・シュタインブリング(2004),『算数・数学　授業改善から教育改革へ』(國本景亀・山本信也訳),東洋館出版社.
三輪辰郎(1996),「文字式の指導序説」,『筑波数学教育研究』,15,1-14.
村上一三(2010),「形式的証明と非形式的証明のギャップ」，日本数学教育学会,『第 43 回数学教育論文発表会論集』,705-710.
ルビンシュテイン（石田幸平訳）（1966）,「思考心理学」,明治図書,36-80.

和田義信(2007),「式とその指導」,和田義信著作・講演集刊行会編,『和田義信　著作・講演集 2　論文集(軽装版)』,97-112.
和田信哉(2011),「分数の乗法・除法に関する代数的思考の様相－代数的推論の観点から－」, 日本数学教育学会,『第 44 回数学教育論文発表会論集』,441-446.和田信哉(2012),「分数の乗法・除法に関する代数的推論の明確化－記号論的視座から－」,全国数学教育学会,『数学教育学研究』,18(1),31-41.