新潟大学教育学部数学教室，『数学教育研究』，第 48 巻，第 1 号，1-6，2013.

素数対と平方数対について

新潟大学教育学部教授　**高 野 道 夫**
新潟大学名誉教授　**鈴 木 保 高**

この論文では，まず素数対と平方数対という言葉を定義する。そして，素数対はただ 1 組のみ存在することを証明する。また，平方数対は自明なものに限ることを証明する。

定義．
和が素数で，差も素数である 2 つの素数を「素数対」ということにする。

定義．
和が平方数で，差も平方数である 2 つの平方数を「平方数対」ということにする。

Ⅰ．　素数対の考察

定理 1．
$p + q$ が素数で，$p - q$ も素数である 2 つの素数 p，q は

$$p = 5, \quad q = 2$$

のみである。

証明．（方針）　以下の順に考察すれば解決する。
（イ）p，q が共に奇数であることはない。
（ロ）$q = 2$ である。
（ハ）$p - 2$，p，$p + 2$ のうちのどれか 1 つが 3 の倍数である。
（ニ）$p - 2 = 3$ である。
（ホ）$p = 5$ である。

Ⅱ．　平方数対の考察

定理２．

A＋B は平方数　・・・・・・・・・・・　①

かつ，

A－B は平方数　・・・・・・・・・・・　②

で，

A は平方数　・・・・・・・・・・・　③

かつ，

B は平方数　・・・・・・・・・・・　④

である A，B は

A＝ z^2 （ z は整数)，B＝ 0 ＝ 0^2 の形のものに限る。

注．　A＝ z^2 （ z は整数)，かつ，B＝ 0 ＝ 0^2 は明らかに，定理 2 の ①，②，③，④ を満たす。このような A，B を自明な平方数対と言うことにすると，定理 2 は「平方数対は自明なものに限る」と言っています。

補題３．（ [2] Theorem 7 ）

X ， Y ， Z は，どの 2 つも互いに素な正の奇数で， m は非負な整数で，

$$X^2 + 2^m \cdot Y^2 = Z^2$$

を満たす整数解 X ， Y ， Z ， m が存在するならば， $m \geqq 3$ で，

$$X = | a^2 - 2^{m-2} \cdot b^2 | ,$$

$$Y = ab ,$$

$$Z = a^2 + 2^{m-2} \cdot b^2$$

を満たす互いに素な正の奇数 a ， b が存在する。

証明．

X ， Y ， Z は，どの 2 つも互いに素な正の奇数で， m は非負な整数で，

$$X^2 + 2^m \cdot Y^2 = Z^2$$

を満たす整数解 X ， Y ， Z ， m が存在するとする。

8を法として考えると，$m \geqq 3$であることが導かれる。また，

$2^m \cdot Y^2 = Z^2 - X^2 = (Z+X)\cdot(Z-X)$で，

G.C.D. $(Z+X, Z-X) = 2$であるから，$Y = ab$である互いに素な正の奇数a，bが存在して，

$$（イ）\quad Z + X = 2a^2 \quad , \quad Z - X = 2^{m-1}\cdot b^2 \quad ,$$

または，（ロ）$Z + X = 2^{m-1}\cdot b^2$，$Z - X = 2a^2$

が成り立つ。いずれの場合でも，$X = |a^2 - 2^{m-2}\cdot b^2|$，$Z = a^2 + 2^{m-2}\cdot b^2$

が成り立つ。

証明終.

補題４.

定理２の ①，②，③，④ を満たし，B≠0 である A，B が存在するならば，x，y，zは正の奇数で，aは正の整数で，

$$x^4 + 2^{4a+2}\cdot y^4 = z^2$$

を満たす整数解x，y，z，aが存在する。

証明.

定理２の ①，②，③，④ を満たし，B≠0 である A，B が存在するとする。

依って，$U^2 + V^2 = Z^2$，$U^2 - V^2 = X^2$，$V \neq 0$を満たす整数解U，V，Z，Xが存在する。

また$U \neq 0$，$Z \neq 0$，$X \neq 0$であることも示せるから，U，V，Z，Xはすべて，正の整数であるとして良い。

G.C.D$(U, V) = d$のとき，U，Vの替わりに$\dfrac{U}{d}$，$\dfrac{V}{d}$を考えることにすれば，UとVが互いに素である正の整数解U，V，Z，Xが存在する。このとき，上の等式２つから，VとZ，ZとUは，また，VとX，XとUは，すべて互いに素である。4を法として考察すれば，上の等式２つから，U，Z，Xは奇数，Vは偶数である。UとZは奇数だから，8を法として，等式$U^2 + V^2 = Z^2$

を考察すれば，V^2は８の倍数，依って，Vは４の倍数であることが導かれる。

$V = 2^m \cdot Y$ （ m は1より大きい整数， Y は正の奇数）とおく。そして，

$$X^2 + 2^{2m+1} \cdot Y^2 = X^2 + 2\,(2^m \cdot Y)^2 = X^2 + 2V^2 = (X^2 + V^2) + V^2$$

$= U^2 + V^2 = Z^2$ で， X と V は互いに素であるから， X と Y も互いに素である。
従って， X ， Y ， Z はどの2つも互いに素で，すべて正の奇数である。

この等式に，補題3を適用すると，互いに素な正の奇数 a ， b が存在して，

$$X = | a^2 - 2^{2m-1} \cdot b^2 | , \quad Y = ab , \quad Z = a^2 + 2^{2m-1} \cdot b^2$$

と表せる。

このとき， $a^4 + 2^{4m-2} \cdot b^4 = \{ a^2 + 2^{2m-1} \cdot b^2 \}^2 - 2^{2m} \cdot a^2 \cdot b^2$

$= Z^2 - 2^{2m} \cdot Y^2 = Z^2 - (2^m \cdot Y)^2 = Z^2 - V^2 = U^2$ が成り立つ。

以上により， a ， b ， U は正の奇数で， $m-1$ は正の整数で

$$a^4 + 2^{4(m-1)+2} \cdot b^4 = U^2$$

が成り立つ。

証明終.

補題5．（［1］Lemma 9 ）

X ， Y ， Z は正の奇数で， m は非負な整数で，

$$X^4 + 2^m \cdot Y^4 = Z^2$$

に整数解 X ， Y ， Z ， m が存在するならば，

$$m \equiv 3 \pmod 4$$

である。

証明.

X ， Y ， Z は正の奇数で， m は非負な整数で， $X^4 + 2^m \cdot Y^4 = Z^2$

を満たし， $m \not\equiv 3 \pmod 4$ である整数 X ， Y ， Z ， m が存在すると仮定する。

そのような X ， Y ， Z ， m のうちで， m の値が最小であるものを，改めて x ， y ， z ， m とする。

x, y, z は奇数で, $x^4 + 2^m \cdot y^4 = z^2$ が成り立っているから，8を法として考察すると, $2^m \equiv 0 \pmod 8$ が成り立つので, $m \geqq 3$ である。そして, $m \not\equiv 3 \pmod 4$ であったから, $m \geqq 4$ である。

G.C.D.$(x, y) = d$ のとき, x, y の替わりに $\dfrac{x}{d}$, $\dfrac{y}{d}$ を考えることにより, x, y は互いに素であると考えて良い。また，このとき, $x^4 + 2^m \cdot y^4 = z^2$ から, x, y, z はどの2つも互いに素である。 $2^m \cdot y^4 = z^2 - x^4 = (z + x^2)\cdot(z - x^2)$ で，G.C.D.$(z + x^2, z - x^2) = 2$ だから,

$$（\text{I}）\quad z + x^2 = 2a^4, \quad z - x^2 = 2^{m-1} \cdot b^4,$$

または,（II） $z + x^2 = 2^{m-1} \cdot b^4$, $z - x^2 = 2a^4$

である互いに素な正の奇数 a, b が存在する。

（I）が成り立つときは, $x^2 = a^4 - 2^{m-2} \cdot b^4$ で, a, b, x はどの2つも互いに素な正の奇数である。 $2^{m-2} \cdot b^4 = a^4 - x^2 = (a^2 + x)\cdot(a^2 - x)$ で，G.C.D.$(a^2 + x, a^2 - x) = 2$ だから,

$$a^2 + x = 2A^4, \quad a^2 - x = 2^{m-3} \cdot B^4,$$

または, $a^2 + x = 2^{m-3} \cdot B^4$, $a^2 - x = 2A^4$

である互いに素な正の奇数 A, B が存在する。

このとき，いずれの場合でも, A, B, a は正の奇数で,

$$A^4 + 2^{m-4} \cdot B^4 = a^2$$

が成り立つ。ところが, $m - 4 \equiv m \not\equiv 3 \pmod 4$ であって, $m - 4 < m$ であるから, m の最小性に矛盾する。

（Ⅱ）が成り立つときは，$x^2 = 2^{m-2} \cdot b^4 - a^4$ であり，b，a，x は奇数であったから，$2^{m-2} \cdot b^4 = a^4 + x^2 \equiv 1 + 1 = 2 \pmod 4$ より，

$m-2 = 1$，つまり $m = 3$ となる。しかし，これは $m \not\equiv 3 \pmod 4$ であったことに矛盾する。

以上，（Ⅰ），（Ⅱ）のいずれの場合でも，m の選び方に矛盾する。従って，補題が正しいと証明できた。

証明終.

定理２の証明.

定理２の ①，②，③，④ を満たし，B≠0 である A，B が存在すると仮定すると，補題４により，x，y，z は正の奇数で，a は正の整数で，

$$x^4 + 2^{4a+2} \cdot y^4 = z^2$$

を満たす整数解 x，y，z，a が存在する。

しかし，$4a+2 \equiv 2 \pmod 4$ であるから，この整数解の存在は，補題５に矛盾する。従って，定理２の ①，②，③，④ を満たす A，B は，

$$A = z^2 \quad (z \text{ は整数}),\quad B = 0 = 0^2$$

の形のものに限ることが証明できた。

証明終.

参考文献

[1] Y.Suzuki, On the Diophantine Equation $2^a X^4 + 2^b Y^4 = 2^c Z^4$, Proceedings of the Japan Academy, Vol.72, Ser.A, No4(1996), pp.92－94.

[2] Y.Suzuki, All solutions of the Diophantine Equation $2^a X^r + 2^b Y^s = 2^c Z^t$ where r, s and t are 2 or 4, Nihonkai Mathematical Journal, Vol.7(1996), No.2, pp.113－145.