

沈黙の螺旋－閾値モデルの応用

古 賀 豊

はじめに

「沈黙の螺旋」理論は、1970年代に、マス・コミュニケーション研究におけるいわゆる新強力効果論の一つとして、ノエル＝ノイマンによって提唱されたものであり (Noelle-Neumann 1993=1997), また, 「閾値モデル」とは, 集合行動を説明するために, Granovetter により提起されたモデル (Granovetter 1978; Granovetter and Soong 1986) である。

これらは, その誕生の経緯や学問的文脈は異なっているものの, その基本的な考え方は非常に類似しており, 沈黙の螺旋と呼ばれる現象を説明する数理モデルが閾値モデルであるという言い方も可能である。そのため, この観点から, 両者を統合したものもいくつか登場している (石井 1987; Granovetter and Soong 1988; 古賀 2012; 2014)。

本稿の目的は, この「沈黙の螺旋－閾値モデル」の要素を整理し, モデル構築に必要とされる数理的な基礎や手法の要点を示すことにより, このモデルの応用可能性を広げることである。(なお, 紙幅の都合により, 本稿では, 沈黙の螺旋理論や閾値モデルについての基本的な紹介・説明は省略する。これらについては, 上記の文献を参照のこと。)

第1章 沈黙の螺旋－閾値モデルの基本用語

まず, 最初に, 「沈黙の螺旋－閾値モデル」で用いられる用語を, 確認・整理しておくことにする。

沈黙の螺旋 - 閾値モデルでは、流行の採用、新商品の購入、政党への支持、政策や意見に対する賛成（あるいは、反対）、集団的ないじめへの加担、暴動への参加といった「するか（肯定）、しないか（否定）」、つまり、2つの相対する選択肢がある事例を対象とするが、本稿では、する場合、「肯定」、「採用する」、「賛成」という用語を用い、しない場合、「否定」、「採用しない」、「反対」という用語を用いる。

また、集団のある成員が賛成か反対か（あるいは、採用するか採用しないか）を、ほかの成員が認知できる状態であることを、「可視的」、「顕在的」、「意見表明（した）」といった用語で表し、ほかの成員が認知できない状態であることを、「不可視的」、「潜在的」、「沈黙（した）」といった用語で表す。

次に、 t 時点での採用者（あるいは、非採用者）の比率から、 $t+1$ 時点での採用者（あるいは、非採用者）の比率を算出する関数を、「閾値関数」と呼ぶ。（ t 時点での採用者（あるいは、非採用者）の比率を x 軸に、 $t+1$ 時点での採用者（あるいは、非採用者）の比率を y 軸にとったグラフで考える場合、これは「閾値曲線」とも呼ばれる。）

また、集団に属する各成員が保持している閾値の分布は、ある特定の確率分布にしたがうことが想定される。その確率分布にしたがって x 以下の閾値をもった成員の比率を y の値として示すものを、「（その）確率分布の累積分布関数」と呼ぶ。

なお、閾値関数として、ある特定の確率分布の累積分布関数をそのまま用いる場合には、閾値関数とその確率分布の累積分布関数は同じものとなる。一方、閾値関数として、複数の確率分布の累積分布関数を組み合わせたり、それ以外の要素を加えたりする場合もあり、そのような場合には、閾値関数はより複雑なものとなる。

第2章 沈黙の螺旋 - 閾値モデルの構成

ここで、沈黙の螺旋 - 閾値モデルの構成要素の要点を確認しておく。

2-1 全体状況の定義

まず、全体状況の定義であるが、基本的な閾値モデルでは、全体に占める採用

者の比率 p として定義される。全体の人数を N 、採用者の人数を n_1 、非採用者の人数を n_2 で表すとすると、次式のようになる。

$$p = \frac{n_1}{n_1 + n_2} = \frac{n_1}{N} \quad (N = n_1 + n_2)$$

この式を見てわかるとおり、これが成り立つには、非採用者数が可視的な状態となっているか、あるいは、全体の人数が知られていることが必要となる。

一方、非採用者数が可視的なものとなっておらず、かつ、全体の人数も不明な場合に対応したものが、石井のモデル (石井 1987)、あるいは、Granovetter らが threshold models of diversity (以下、diversity 閾値モデルと記す) と名付けたモデルである (Granovetter & Soong 1988:73-5)。

このモデルでは、まず、全体を、採用・賛成者と非採用・反対者の 2 群に分け、それぞれの群で、意見表明する者としなない者がいると想定する。その上で、全体状況が各人の閾値以上であれば意見表明し、そうでない場合は沈黙するとする。そして、全体状況は、意見表明者に占める賛成者 (あるいは、反対者) の比率として定義される。採用・賛成者の人数 (沈黙者を含む) を n_1 、非採用・反対者の人数 (沈黙者を含む) を n_2 で表すとし、採用・賛成者に占める意見表明者の比率を x_1 、非採用・反対者に占める意見表明者の比率を x_2 とすると、全体状況 (採用者を p_1 で、非採用者を p_2 で表す) は、次式のようになる。

$$p_1 = \frac{n_1 x_1}{n_1 x_1 + n_2 x_2} \quad p_2 = \frac{n_2 x_2}{n_1 x_1 + n_2 x_2}$$

この式から、全員が「意見表明」した状態 ($x_1 = 1$, $x_2 = 1$)、つまり、全員が可視的な状態となっている場合には、基本的な閾値モデルと等しいことがわかる。

2-2 認知バイアス

ここでは、全体状況を認知する際に、実際の人数よりも多く (あるいは、少なく) 認知する場合があることを考慮して、それをモデルに採り入れる。

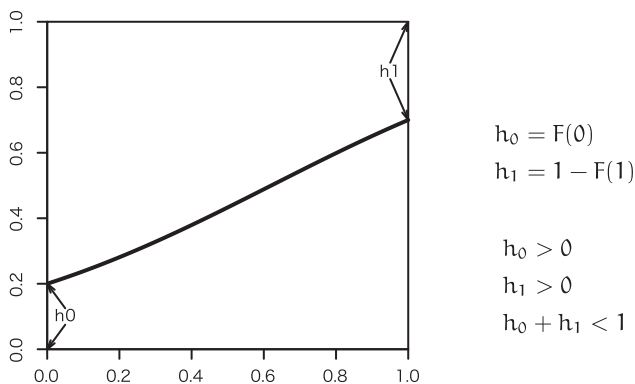
採用・賛成のほうの人数を n_1 、非採用・反対のほうの人数を n_2 で表し、採用・

賛成のほうの人数を多く（あるいは、少なく）認知する程度を u で、非採用・反対のほうの人数を多く（あるいは、少なく）認知する程度を v で表すことにし、これを全体状況を表す式に組み込むと、次式1行目が成り立つ（ u および v は、1 よりも大きいとき実際の人数より多く認知し、1 よりも小さいとき実際の人数より少なく認知することを意味する。また、1 と等しいときは認知バイアスがない状態を表す）。ここで、 $b = \frac{u}{v}$ と定義すると、前式2行目となる。以降、認知バイアスを表す変数として、この b を用いる。

$$\begin{aligned}\frac{un_1}{un_1 + vn_2} &= \frac{\frac{u}{v}n_1}{\frac{u}{v}n_1 + n_2} = \frac{n_1}{n_1 + \frac{v}{u}n_2} = 1 - \frac{n_2}{\frac{u}{v}n_1 + n_2} = 1 - \frac{\frac{v}{u}n_2}{n_1 + \frac{v}{u}n_2} \\ &= \frac{bn_1}{bn_1 + n_2} = \frac{n_1}{n_1 + \frac{1}{b}n_2} = 1 - \frac{n_2}{bn_1 + n_2} = 1 - \frac{\frac{1}{b}n_2}{n_1 + \frac{1}{b}n_2}\end{aligned}$$

2-3 閾値関数

閾値の分布、および、それに基づいた閾値関数には、さまざまなものが考えら



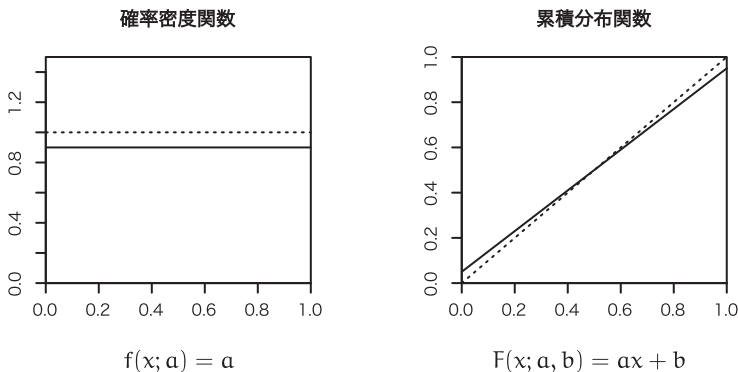
図表 1 確率累積分布関数のパラメータ

れる。一般に、閾値の分布に関しては、正規分布を想定するのが、もっとも妥当であると考えられるが、正規分布では式が複雑となるため、一様分布、ロジスティック分布なども、しばしば用いられる。

以下、この3つの分布に関して、その特性を示すが、3つの関数のパラメータを統一的に扱うために、 $x = 0$ のときの y を h_0 、 $x = 1$ のときの $1 - y$ を h_1 とし、それぞれの関数のパラメータを、この h_0 および h_1 で表すことにする。このように定義した場合、 h_0 は、(ある時点で) 全員が採用・意見表明していない場合でも、(次の時点で) 採用・意見表明する者の比率を意味し、 h_1 は、(ある時点で) 全員が採用・意見表明している場合でも、(次の時点で) 採用・意見表明しない者の比率を意味する (図表 1 参照)。

また、後述するが、閾値モデルの各時点での変動を考察する際には、均衡点の特性——特に、不安定な均衡点の存在を考慮することが重要となる。不安定な均衡点が存在する必要条件は、閾値関数を微分した関数の絶対値が 1 より大きくなる区間が存在するということであるが、以下では、この参考とするために、確率密度関数 (累積分布関数を微分した関数) もあわせて示すことにする。

2-3-1 一様分布



図表 2 一様分布の確率密度関数/累積分布関数

一様分布の確率密度関数 $f(x; a)$ 、および、累積分布関数 $F(x; a, b)$ は、図表2のとおりである。

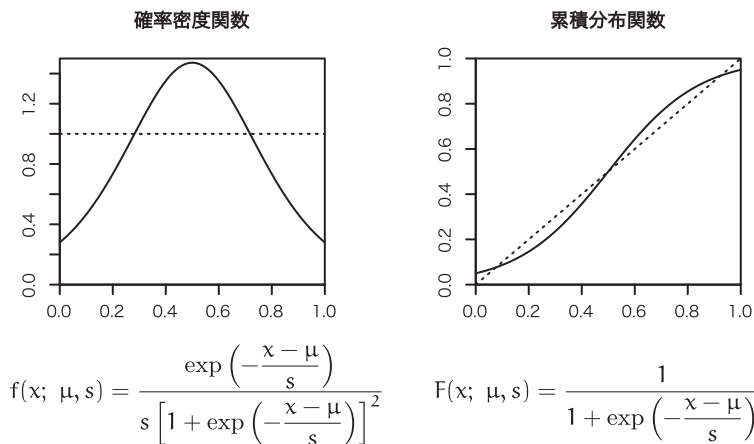
この関数のパラメータは a および b であるが、これを、前述の h_0 、 h_1 で表すと、次のようになる。

$$a = 1 - (h_0 + h_1) \quad b = h_0$$

一様分布では、 h_0 、 h_1 の定義から、確率密度関数の値が1より大きくなることはなく、つまり、閾値関数として一様分布を用いる場合、不安定な均衡点が存在することはない。

2-3-2 ロジスティック分布

ロジスティック分布の確率密度関数 $f(x; \mu, s)$ 、および、累積分布関数 $F(x; \mu, s)$ は、図表3のとおりである。



図表3 ロジスティック分布の確率密度関数/累積分布関数

ロジスティック分布のパラメータ μ および s を、 h_0 、 h_1 で表すと、次のようになる。

$$\mu = \frac{\text{logit}(h_0)}{\text{logit}(h_0) + \text{logit}(h_1)} \quad s = \frac{-1}{\text{logit}(h_0) + \text{logit}(h_1)}$$

なお、logit は、次式で定義され、パラメータ $\mu = 0$, $s = 1$ のロジスティック累積分布関数の逆関数である。

$$\text{logit}(p) = \log \left(\frac{p}{1-p} \right) \quad (0 < p < 1)$$

また、次式があてはまる場合、確率密度関数の値が 1 より大きくなる区間が存在することになり、つまり、この式が、閾値関数としてロジスティック分布を用いる場合の不安定な均衡点が存在する必要条件となる。

$$s < \frac{1}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-1}{\text{logit}(h_0) + \text{logit}(h_1)} < \frac{1}{4}$$

2-3-3 正規分布

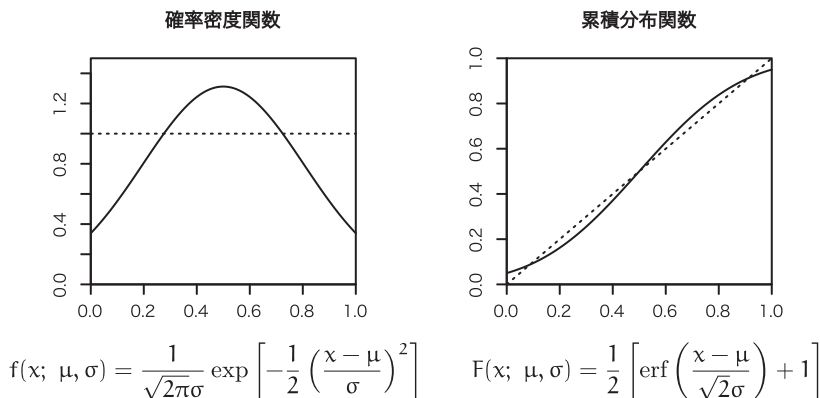
正規分布の確率密度関数 $f(x; \mu, \sigma)$ 、および、累積分布関数 $F(x; \mu, \sigma)$ は、図表 4 のとおりである。

また、正規分布のパラメータ μ および σ を、 h_0 , h_1 で表すと、次のようになる。(なお、 Φ^{-1} は、probit と呼ばれ、標準正規分布 ($\mu = 0$, $\sigma = 1$) の累積分布関数の逆関数を意味する。)

$$\mu = \frac{\Phi^{-1}(h_0)}{\Phi^{-1}(h_0) + \Phi^{-1}(h_1)} \quad \sigma = \frac{-1}{\Phi^{-1}(h_0) + \Phi^{-1}(h_1)}$$

なお、次式があてはまる場合、正規分布の確率密度関数の値が 1 より大きくなる区間が存在することになり、つまり、この式が、閾値関数として正規分布を用いる場合の不安定な均衡点が存在する必要条件となる。

$$\sigma < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-1}{\Phi^{-1}(h_0) + \Phi^{-1}(h_1)} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$



図表 4 正規分布の確率密度関数/累積分布関数

ロジスティック分布, および, 正規分布の図を見てわかるように, これらの累積分布関数は, S 字状関数 (sigmoid function) と呼ばれる。また, 確率密度関数に関しては, 釣鐘型 (bell curve) と呼ばれる形状をもった関数である。

2-3-4 複雑な閾値関数

ここまでの 3 つの関数は, 累積分布関数という定義上, 単調に増加する関数であったが, 閾値モデルを実際の事象に適用する場合, 採用する者の数が増加するにつれて, その採用をとりやめる者が出てくるとも想定できることから, それを考慮したモデルも, 複数, 考案されている。

例えば, Granovetter らは, 次のような閾値関数の式を示している (Granovetter & Soong, 1986:87)。この式での $F_L(x)$ は採用する閾値の分布関数を, $F_U(x)$ は採用をとりやめる閾値の分布関数を意味する。

$$y = F_L(x) - F_U(x)$$

そのほか, 中山は, 閾値関数として次式を用いている (中山 2003:92)。この式

では、 p がコスト、 β が他者からの影響の大きさ、そして、 α が採用をとりやめる程度（差別化傾向の大きさ）を表すパラメータとされている（図表 6 右図も参照）。

$$F(x; p, \beta, \alpha) = \frac{1}{1 + \exp [p - \beta \cdot x \cdot (1 - x)^\alpha]}$$

このような採用者の比率が増加するにつれて採用をとりやめる者もでてくるとを考慮した閾値関数で留意しなければならない点は、これらが単調に増加するとは限らず、 x が増加するにつれ y が減少する区間が生じる可能性があることである。このことは、均衡点の性質と、それに伴う閾値モデルの変動——循環的な過程に大きな影響を与えるが、それについて、次章で考察する。

第 3 章 沈黙の螺旋 - 閾値モデルの要点

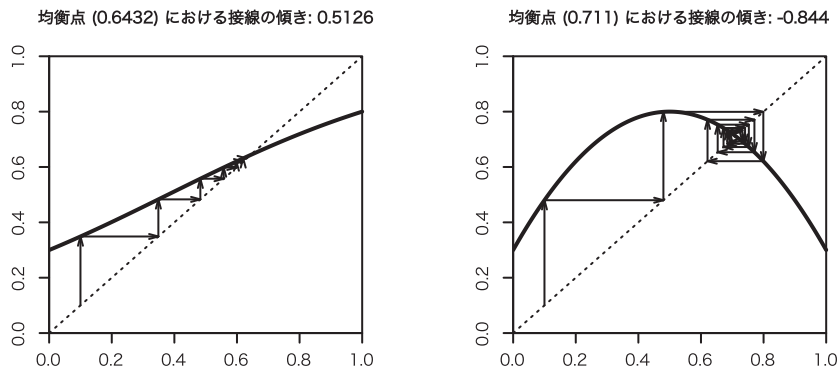
3-1 均衡点 (equilibrium) の性質

均衡点とは、 t 時点の比率と $t+1$ 時点の比率が等しい点と定義できる。 t 時点の比率を x 軸に、 $t+1$ 時点の比率を y 軸にとった場合、閾値曲線と $y = x$ の直線の交差する点が均衡点となる。

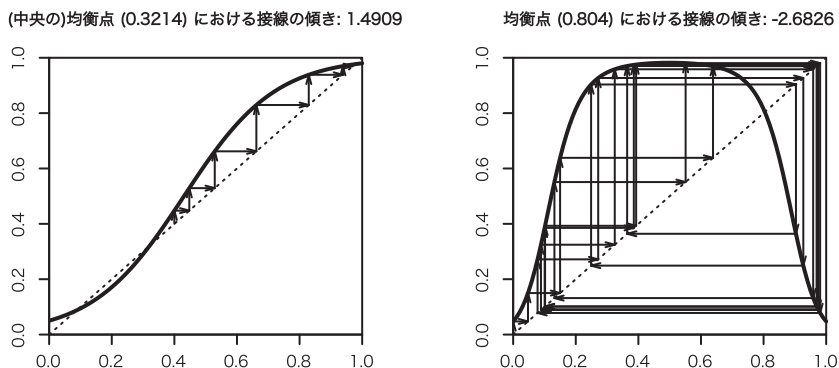
均衡点には、安定な均衡点と不安定な均衡点が存在する。安定な均衡点とは、時点が経過するにしたがって、その均衡点に向かって近づいていくような循環的過程が進むものであり（図表 5 参照）、不安定な均衡点とは、その均衡点と完全に一致しない限り、つまり、少しでもその均衡点からずれば、時点が経過するにしたがって、その均衡点から離れていくような循環的過程が進むものである（図表 6 参照）。

Granovetter らが指摘しているように、安定な均衡点と不安定な均衡点は、その均衡点における閾値曲線の接線の傾きで判別できる（Granovetter and Soong 1986:85）。以下、閾値曲線（関数）を $F(x)$ で、（その関数の接線の傾きを示す）閾値関数を微分した関数を $f(x)$ で表すとする。

まず、閾値曲線が増加している区間、つまり、閾値曲線の接線の傾きが正の値



図表 5 安定な均衡点の例



図表 6 不安定な均衡点の例

となる区間で考えてみると、均衡点 e (関数 $F(x)$ と直線 $y = x$ の交点) において、 $0 \leq f(e) < 1$ であれば、直線 $y = x$ に対し上から下に交差することになり、安定な均衡点となる (図表 5 左図を参照)。一方、 $1 < f(e)$ であれば、直線 $y = x$ に対し下から上に交差することになり、不安定な均衡点となる (図表 6 左図の中央の均衡点を参照)。

また、閾値曲線が減少している区間、つまり、閾値曲線の接線の傾きが負の値

となる区間では、その均衡点における接線の傾きが $-1 < f(e) < 0$ であれば、安定な均衡点となる (図表 5 右図を参照)。一方、その均衡点における接線の傾きが $f(e) < -1$ の場合は、不安定な均衡点となる (図表 6 右図を参照)。なお、均衡点における接線の傾きが、 $f(e) = 1$ 、および、 $f(e) = -1$ の場合は、特殊な場合となるため、ここでは省略する。

3-2 不安定な均衡点を持つ閾値モデル

このように不安定な均衡点には、その均衡点における閾値曲線の接線の傾きが、 $1 < f(e)$ の場合と $f(e) < -1$ の場合があるが、ここで留意しておかなくてはならないのは、接線の傾きが $1 < f(e)$ となる均衡点の場合は、必ずその上方と下方に安定な均衡点が存在するのに対し、接線の傾きが $f(e) < -1$ となる均衡点の場合は、そのような均衡点が存在しない場合があるということである。

安定な均衡点が 1 つも存在しない場合、閾値モデルの循環的な過程は、特定の 1 つの値に収束することなく、複数の値を同じ順番で周期的に繰り返す変動 (以下、周期的変動と呼ぶ) を示すか、さまざまな値をランダムにとっていくカオス的な変動 (以下、カオスの変動と呼ぶ) を示すことになる (Granovetter and Soong 1986:92)。

3-3 周期・カオス的な変動を示す場合の対応

上で述べたとおり、接線の傾きが $f(e) < -1$ となる均衡点が存在する場合、閾値モデルは周期的あるいはカオス的な変動を示す可能性があり、その場合、その変動の全体を把握することが難しくなる。

これに対処する方策として、閾値曲線を離散化することが考えられる。離散化することには、もちろん欠点も存在するが、本来、閾値モデルが想定している単位は人であり、つまり、対象としている数は人数であることを考慮すれば、離散化することはむしろ、閾値モデルが想定している状況を、忠実に表していると考えられることができる。

離散化の方法は、下記のようなになる。

- 全体の人数を N 、 t 時点での (採用) 人数を j 、 $t+1$ 時点での人数を i とすると、 $i+1$ 行 $j+1$ 列の成分のみを 1 とし、そのほかの成分を 0 とする

$N+1 \times N+1$ の正方行列を作る。ここでは、これを状態遷移行列と呼び、 M で表すことにする。

- t 時点での人数を k とすると、第 $k+1$ 成分を 1 とし、それ以外の成分を 0 とした $N+1$ の大きさのベクトルを作る。ここでは、これを状態ベクトルと呼び、 V_t で表す。(ここで、行・列・成分の指定に $+1$ としているのは、通常、行・列・ベクトルは 1 から始まるが、人数が 0 の場合をそこに割り当てるためである。)

この結果、 t 時点から $t+1$ 時点での採用者数の変化は、次式で表すことができる。 V の 1 となっている位置が $k+1$ であるとする、 k がその時点での採用者数を示す。

なお、 $t+2$ の時点、 $t+3$ の時点、 $t+n$ の時点は、下のように表すことができ、任意の時点での採用者数を知ることができる。

$$\begin{aligned} V_{t+1} &= M V_t \\ V_{t+2} &= M(M V_t) = M^2 V_t \\ V_{t+3} &= M(M(M V_t)) = M^3 V_t \\ V_{t+n} &= M^n V_t \end{aligned}$$

この方法の利点は、次のとおりである。

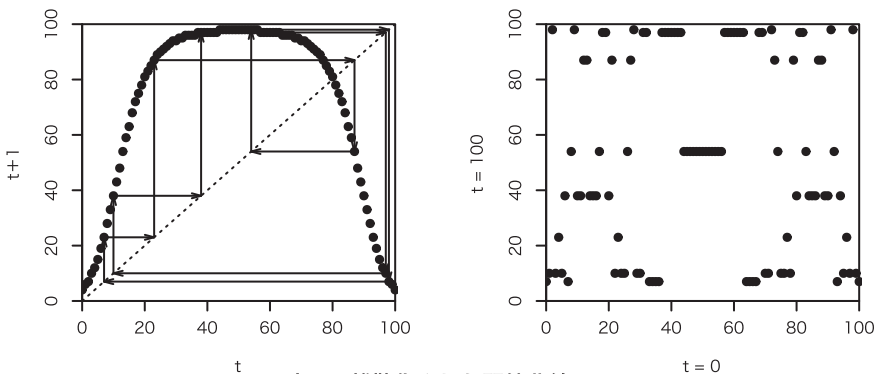
- すべての初期値が、任意の時点でどの値に変化するかを M^n から知ることができる。変化する人数（の状態）は、最初に設定する全体の人数 N に限られていることから、連続的な閾値関数の場合に生じていたカオス的変動は存在せず、特定の値に収束するか、周期的変動をとるかのいずれかとなる。
- とりうる状態数は全体の人数 N であるため、どの初期値からであっても、最長でも時点 N までは周期的変動に入ることになる。そのため、最大で N 回上記の過程を繰り返せば、すべての初期値のすべての時点での人数を知ることができる。

ここで、図表 6 右図の例を採りあげて、この方法の実例を示しておく。

図表 6 右図の例は、中山がカオス的変動を示すシミュレーション例としてあげたものである。(中山 2003:94 のケース 3c, および, 中山 2003:97 の図 12。なお、閾値関数の式は前述のとおりであり、パラメータの値は $p = 3.0$, $\alpha = 1$, $\beta = 28$ である。)

図表 7 左図は、この式から全体の人数を 100 として離散化した閾値関数 (状態遷移行列) を作成し、その行列の 1 の値をもつ成分の列 $j-1$ を x の値, 行 $i-1$ を y の値として、黒い円をプロットしたものである。また、図表 7 右図は、 $t = 100$ 時点での (つまり、100 回、閾値モデルの循環的な過程を繰り返した後の) 状態遷移行列を、同様の方法で図示したものである。

図表 7 右図を見ると、 $t = 100$ 時点では、 y 軸には、7 つの値 (小さい順から、7, 10, 23, 38, 54, 87, 97, 98) しか存在しないことがわかる。これは、どの初期値から出発しても、 $t = 100$ 時点では、この 7 つの値のうちのどれかになることを示している。さらに、この 7 つの値が、どのような関係 (状態遷移) にあるのかを調べると、 $10 \rightarrow 38 \rightarrow 97 \rightarrow 10$ と、 $7 \rightarrow 23 \rightarrow 87 \rightarrow 54 \rightarrow 98 \rightarrow 7$ の 2 つの周期的変動が存在していることがわかる。(図表 7 左図には、その周期的変動もあわせて示してある。)



図表 7 離散化された閾値曲線

第4章 沈黙の螺旋 - 閾値モデルの応用

最後に、これまで述べてきた閾値モデルの応用として、統計ソフトウェア R (R Core Team 2015) のコード例を示しておく。

分布関数およびグラフ描画関数の定義

一様分布関数

```
UniformDist <- function(x, h0, h1) {  
  a <- 1 - h0 - h1  
  b <- h0  
  return(a * x + b)  
}
```

ロジスティック分布関数

```
LogisticDist <- function(x, h0, h1) {  
  logit.h0 <- log(h0 / (1 - h0))  
  logit.h1 <- log(h1 / (1 - h1))  
  mu <- logit.h0 / (logit.h0 + logit.h1)  
  s <- -1 / (logit.h0 + logit.h1)  
  return(plogis(x, mu, s))  
}
```

正規分布関数

```
NormalDist <- function(x, h0, h1) {  
  qnorm.h0 <- qnorm(h0)  
  qnorm.h1 <- qnorm(h1)  
  mu <- qnorm.h0 / (qnorm.h0 + qnorm.h1)  
  sigma <- -1 / (qnorm.h0 + qnorm.h1)  
  return(pnorm(x, mean = mu, sd = sigma))  
}
```

グラフ描画関数

```
PlotThresholdModel <- function(x, y) {  
  plot(x, y, type = "l", xlab = "t", ylab = "t+1",  
       xlim = c(0, 1), ylim = c(0, 1), xaxs = "i", yaxs = "i")  
  abline(0, 1, lty = 3)  
}
```

```
#### 基本的な閾値モデル ####
BasicThresholdModel <- function(func, bias, h0, h1) {
  size <- 100
  ## t 時点の採用者の比率
  x <- c(0:size) / size
  ## 認知された比率 (認知バイアス)
  p <- bias*x / (bias*x + (1 - x))
  ## t+1 時点の採用者の比率
  y <- func(p, h0, h1)
  #### グラフの描画 ####
  PlotThresholdModel(x, y)
}

#### diversity 閾値モデル ####
DiversityThresholdModel <- function(func,
                                     pos.N, pos.bias, pos.h0, pos.h1,
                                     neg.N, neg.bias, neg.h0, neg.h1) {
  size <- 100
  #### t 時点の意見表明者内の比率 ####
  x <- c(0:size) / size
  ## 意見表明者における賛成者の認知された比率 (認知バイアス)
  pos.p <- pos.bias*x / (pos.bias*x + (1 - x))
  ## t+1 時点での賛成者に占める意見表明者の比率
  pos.y <- func(pos.p, pos.h0, pos.h1)
  ## 意見表明者における反対者の認知された比率 (認知バイアス)
  neg.p <- neg.bias*(1 - x) / (x + neg.bias*(1 - x))
  ## t+1 時点での反対者に占める意見表明者の比率
  neg.y <- func(neg.p, neg.h0, neg.h1)
  #### (賛成/反対者の人数を加味した) t+1 時点の意見表明者内の賛成者の比率 ####
  y <- pos.N*pos.y / (pos.N*pos.y + neg.N*neg.y)
  #### グラフの描画 ####
  PlotThresholdModel(x, y)
}
```

基本的な閾値モデルでは、「t 時点の採用者の比率」から、認知バイアスを組み込んだ「認知された比率」を算出し、それを入力として、「(指定した確率分布の) 閾値関数」から「t+1 時点の採用者の比率」を算出する (上記の BasicThresholdModel を参照)。

diversity 閾値モデルでは、賛成者、反対者それぞれに対して指定された総人数、

参考文献

- Granovetter, Mark, 1978. “Threshold Models of Collective Behavior”, *American Journal of Sociology*, 83, pp. 1420–1443.
- Granovetter, Mark and Roland Soong, 1986. “Threshold Models of Interpersonal Effects in Consumer Demand”, *Journal of Economic Behavior and Organization*, 7, pp. 83–99.
- Granovetter, Mark and Roland Soong, 1988. “Threshold Models of Diversity: Chinese Restaurants, Residential Segregation and the Spiral of Silence”, *Sociological Methodology*, Vol. 18, pp. 69–104.
- Noelle-Neumann, Elisabeth, 1993. *The Spiral of Silence: Public Opinion – Our Social Skin*, 2nd edition, University Of Chicago Press. (=1997, 池田謙一, 安野智子訳『沈黙の螺旋理論：世論形成過程の社会心理学 改訂版』ブレーン出版)
- R Core Team, 2015. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, (<https://www.R-project.org>).
- 石井健一, 1987. 「世論過程の閾値モデル：沈黙の螺旋状過程のフォーマライゼーション」, 『理論と方法』 Vol.2, No.1, 数理社会学会, pp. 15–28.
- 古賀豊, 2012. 「沈黙の螺旋と閾値分布構造：閾値モデルを用いた沈黙の螺旋現象の分析」, 『マス・コミュニケーション研究』, No.81, 日本マス・コミュニケーション学会, pp. 125–142.
- 古賀豊, 2014. 「“沈黙の螺旋” 理論の数理モデル」, 『人文科学研究』, No.134, 新潟大学人文学部, pp. y133–y146.
- 中山晶一朗, 2003. 「ロジット型離散選択に基づいた流行現象モデル」, 『理論と方法』, Vol.18, No.1, 数理社会学会, pp. 89–102.