

まくらぎ支持された無限長レールの波動伝播解析

Wave propagation in an infinite rail discretely supported by sleepers

阿部和久*・古屋卓稔**・紅露一寛***

Kazuhisa ABE, Takutoshi FURUYA, Kazuhiro KORO

*正会員 工博 新潟大学准教授 工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

**学生会員 博士前期課程 新潟大学大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

***正会員 博士 (工学) 新潟大学准教授 大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

Wave propagation in an infinite periodic railway track is investigated. In the analysis the constituents of a rail and sleepers are considered for the track model. Propagation modes of the periodic structure are described by virtue of the Floquet transform. This method makes it possible to reduce the infinite periodic problem to an eigenvalue problem for a unit structure with finite length. The rail is modeled by a Timoshenko beam and discretized by finite elements. Through numerical analysis the wave number-frequency curves for the propagation modes are obtained. It is found that the installation of sleepers causes a mode in which the propagation waves are accompanied by sleeper vibration. Besides, the influence of the stiffness of rubber pads on the propagation modes is discussed.

Key Words : stop and pass bands, Floquet's principle, Timoshenko beam, rail/sleeper interaction

1. はじめに

軌道系の動的挙動を把握することは、列車の走行安定性、乗り心地、地盤振動、騒音等の様々な観点から非常に重要である。とりわけレールは振動発生源である列車と軌道との境界に位置しており、その動的応答特性は列車・軌道連成系全体に大きく影響を及ぼす。そのため、レールの振動特性に関する研究が多く、研究者により精力的になされてきた。なお、実験においてレールへの打撃力や支持条件等を理想的な状態に設定することは容易でなく¹⁾、その上測定点数などの面で制約が多く存在するため、当該分野においては数値モデルに基づく解析的手法が積極的に用いられている。

レールはその断面寸法に比べ軌道方向に長く伸びた形状を有するため、長手方向への波動伝播が動的応答に大きく影響する。なお、通常のはり要素を用いた有限要素解析では、レールを有限長でモデル化せざるを得ず、必然的に打ち切り端が存在することとなるため、波動の伝播モードの評価には適さない。そのため当該問題の解析では、レールを一樣な断面形状を有する無限長の弾性体、またははりとして表現する手法が有効となる。なお、その際のレールの支持条件としては、無支持(完全自由)、連続バネ支持、離散支持など様々なものが考慮されている。

無支持や一樣連続バネ支持条件下での解析においては、レール断面形状を複数のはり・板要素の組み合わせで近似したもの^{2),3)}や、三角形や四辺形要素により離散化したもの⁴⁾などを用いた事例が多い。この様にレール断面を離散化して 3 次元動弾性体として表現する場合、断面変形を考慮できるため、その影響が顕著

に現れる 1500Hz 以上の波動モードも適切に評価可能となる⁴⁾。なお、その際に必要となる変位場のレール長手方向への展開には、Fourier 変換に基づく波数表現による方法⁴⁾と、本研究で用いる Floquet 原理(もしくはそれと同様の手法)に基づく Floquet 波数表現による方法^{2),3)}とが用いられている。

Floquet 解析は、本来周期性を有する無限な構造を解析するための手法である^{5),6)}。その様な問題の Floquet 変換は、周期構造を構成する 1 ユニット上で定義された有限領域の力学問題に帰着される。無支持や一樣連続バネ支持条件の様に、支持条件を含む方程式系がレール長手方向に変化せず一樣な問題の場合、長手方向への Fourier 変換を介して、無限長の問題をレール断面内の準二次元問題に帰着して解くことができる。一方、その様な問題を Floquet 変換により解く場合は、上述のとおり 1 ユニット当りの有限領域ではあるものの、レール長手方向を含む解の記述が必要となる。そのため、支持条件が長手方向に一樣な問題であれば、Fourier 変換による方がより効率的となる。

しかし、実際のレールは離散的に支持されている。したがって、その様な条件下での波動伝播特性を把握することも重要である。この場合、軌道系は長手方向に周期性を持つこととなるため、Floquet 波数表現が有効な解析手段となる。当該手法を用いて過去になされた解析では、はりモデルに限定されてはいるものの、単純支持⁷⁾、バネ支持^{8),9)}、およびまくらぎ支持を意図してバネ定数を周期的に変動させた連続支持¹⁰⁾等の各種支持条件下での動特性が検討されている。

周期構造を有する無限長はりが持つ最も著しい特徴は、はりに沿って減衰せずに伝播して行く波動モード

(伝播モード)が存在する周波数帯(パス・バンド)が離散的に分布することである。既往の研究により、パス・バンドの間隙(ストップ・バンド)は支持点間距離がたわみの1/2波長の整数倍の値をとる様な周波数帯に分布することが分かっており、離散支持されたレールが有する波動伝播特性が徐々に明らかにされつつある。

しかしながら、文献7)~10)における解析では、1ユニット内のたわみ応答を運動方程式の一般解より構成していることもあり、定式化の容易な Euler ばりに限定して議論がなされている。また、離散支持点においてまくらぎが考慮されておらず、レール・まくらぎ連成系での動特性には今だ未解明な点が存在する。はりのモデル化を含め、軌道系のモデル化の差異が伝播特性に及ぼす影響を明らかにすることは、議論の適用限界を見極める上で重要である。また、まくらぎや、その下に装着されるゴムパッドの存在が、波動伝播モードの観点からどのような影響を及ぼすのかを明らかにすることは、防振対策上非常に意義のあることと考える。

そこで、本研究ではレールを Timoshenko ばりで、まくらぎを質点でモデル化し、Floquet 解析援用の下、レール・まくらぎ連成系における伝播モードについて調べる。その際の定式化の負担を軽減するために、レールについては Timoshenko はり要素により離散近似する。また、レールを Euler ばりでモデル化した場合や、まくらぎをモデル化しない場合との比較を通し、従来モデルによる結果との対応関係を確認する。さらに、レール・まくらぎ、まくらぎ・道床間に装着されるパッド類の剛性が結果に及ぼす影響について考察する。

2. Floquet 解析の概要

本節では、Floquet 解析⁶⁾に関し、本論文で必要となる事項について概略説明する。なお、以下では簡単のため、一次元関数について考える。

2.1 Floquet 変換

$x \in \mathbb{R}$ で定義された非周期関数 $f(x)$ について、次式で与えられる $\tilde{f}(\tilde{x}, \kappa)$ を $f(x)$ の Floquet 変換と呼ぶ。

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \kappa) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tilde{x} + nL) e^{in\kappa L} \quad (1)$$

ここで、 \tilde{x} は $(-L/2, L/2)$ の区間内の実数、 κ は $(-\pi/L, \pi/L)$ の区間内の実数である。なお、 κ を Floquet 波数と呼ぶ。

式(1)より、 \tilde{f} は κ について次の周期性(第1種周期性)を持つ。

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \kappa + \frac{2\pi}{L}) = \tilde{f}(\tilde{x}, \kappa) \quad (2)$$

また、 \tilde{f} は \tilde{x} について次の様な周期性(第2種周期性)を持つ。

$$\tilde{f}(\tilde{x} + L, \kappa) = e^{-i\kappa L} \tilde{f}(\tilde{x}, \kappa) \quad (3)$$

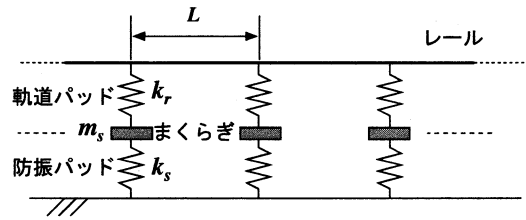


図-1 レール・まくらぎ系のモデル化

2.2 逆 Floquet 変換

Floquet 変換の逆変換(逆 Floquet 変換)は次式で与えられる。

$$f(\tilde{x} + nL) = \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \tilde{f}(\tilde{x}, \kappa) e^{-in\kappa L} d\kappa, \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (4)$$

2.3 周期構造における問題への適用

周期長 L の周期構造を有する問題について考える。この構造系において定義された線形作用素 $\mathcal{L}(x)$ は第1種周期性を持つので、次式が成り立つ。

$$\mathcal{L}(\tilde{x} + nL) = \mathcal{L}(\tilde{x}) \quad (5)$$

$\mathcal{L}(x)$ に対する解を $u(x)$ とし、次の方程式をみたすものとする。

$$\mathcal{L}(x)u(x) = g(x) \quad (6)$$

ここで、 $u(x)$ および入力データ $g(x)$ には何ら周期性を仮定していない。

式(6)の両辺を Floquet 変換して次式を得る。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(\tilde{x} + nL) u(\tilde{x} + nL) e^{in\kappa L} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(\tilde{x} + nL) e^{in\kappa L} \quad (7)$$

ここで、式(5)より $\mathcal{L}(\tilde{x} + nL) = \mathcal{L}(\tilde{x})$ であるから、最終的に u の Floquet 変換 \tilde{u} に対して次の方程式を得る。

$$\mathcal{L}(\tilde{x})\tilde{u}(\tilde{x}, \kappa) = \tilde{g}(\tilde{x}, \kappa) \quad (8)$$

すなわち、各 $\kappa \in (-\pi/L, \pi/L)$ に対して式(8)をみたし、且つ第2種周期性を有する解 $\tilde{u}(\tilde{x}, \kappa)$ が求められれば、その逆 Floquet 変換により $u(x)$ を構成することができる。なお、式(6)は周期構造を有する無限領域を対象としているが、式(8)で与えられる問題は有限領域 $(-L/2, L/2)$ のみ対象としているので、有限要素法等の領域型離散化解法により比較的容易に解くことができる。

3. レール・まくらぎ系の伝播モード解析手法

3.1 レール・まくらぎ系のモデル化

図-1に示す様に、等間隔 L でまくらぎ支持された無限長レールを対象とする。なお、レール・まくらぎ間およびまくらぎ・道床間には、それぞれバネ定数 k_r 、 k_s

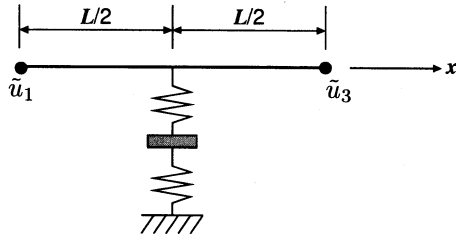


図-2 Floquet 変換における 1 ユニット

の軌道パッドと防振パッドが装着されているものとする。また、まくらぎは質量 m_s の質点でモデル化し、道床は剛体として与える。

レールは Timoshenko ばりでモデル化し、振りや横たわみ、軸方向変位は考慮せず、鉛直変位のみ対象とする。以降の解析では、レールたわみと断面回転角を変数に取り、前者を 3 次 Hermite 補間、後者を 3 節点 2 次補間で近似する TIM7 要素¹¹⁾により離散近似する。

3.2 自由振動問題の Floquet 変換

図-1 の軌道系に対し、周期長 L の下で与えられる 1 ユニットの図-2 の様に抽出する。無限軌道系の自由振動問題に Floquet 変換を適用すると、離散化の後、式 (8) より次式で与えられるような 1 ユニット当りの方程式を得る。

$$\begin{aligned} & [\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3]^T \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{Bmatrix} \\ &= \omega^2 [\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3]^T \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{Bmatrix} \\ &+ [\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3]^T \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{F}_3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 ω は円振動数、 $\bar{u}_1, \bar{u}_3, \bar{F}_1, \bar{F}_3$ はユニットの左右レール端節点における節点変位より成る部分ベクトル、 \bar{u}_2 はそれら以外のはり要素節点変位およびまくらぎ鉛直変位から成る部分ベクトルである。また、 $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ は $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ にそれぞれ対応する仮想節点変位ベクトルであり、 $(\bar{\cdot})$ は共役複素成分を意味する。 K_{ij}, M_{ij} ははり要素・バネ・質点から構成される 1 ユニット当りの剛性行列と質量行列の部分行列である。

Floquet 変換の解 \bar{u} は式 (3) に示した第 2 種周期性を有する。すなわち、式 (9) において次の条件が付与される。

$$\bar{u}_3 = e^{-i\kappa L} \bar{u}_1, \quad \bar{v}_3 = e^{i\kappa L} \bar{v}_1, \quad \bar{F}_3 = -e^{-i\kappa L} \bar{F}_1 \quad (10)$$

式 (10) を式 (9) に代入し、 \bar{u}_3, \bar{v}_3 を消去すると、最終的に次式を得る。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} K_{11} + K_{33} + 2K_{13} \cos \kappa L & K_{12} + K_{23} e^{i\kappa L} \\ K_{21} + K_{23} e^{-i\kappa L} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} \\ &= \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} + M_{33} + 2M_{13} \cos \kappa L & M_{12} + M_{23} e^{i\kappa L} \\ M_{21} + M_{23} e^{-i\kappa L} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

式 (9) における剛性行列と質量行列は実対称行列であるので、最終的に得られる式 (11) の係数行列は Hermite 行列となる。さらに、剛性行列と質量行列の正定値性より、固有振動数 ω の値は実数値をとる。

3.3 Floquet モードの解釈

式 (11) の固有値問題により得られるモード \bar{u} は、無限軌道系における変位モード u の Floquet 変換に相当する。したがって、軌道系のモードを求めるためには \bar{u} の逆 Floquet 変換が本来必要となる。ただし、ある振動数 ω におけるモードは、特定の Floquet 波数 κ (固有値) に対してのみ存在するので、式 (4) による逆 Floquet 変換は、結局次式で置換えられることとなる。

$$u(x) = \bar{u}(\bar{x}, \kappa) e^{-i\kappa L}, \quad (x = \bar{x} + nL) \quad (12)$$

ただし、ここでは時間項を $e^{i\omega t}$ と仮定し、 κ は固有振動数 ω に対応する進行波モードを与える Floquet 波数とする。なお、モードについて議論しているので式 (4) の積分に関連して生ずる定数倍の差異は本質的ではなく、よってその項は考慮していない。

式 (12) において、 $-L/2 < x < L/2$ の時は $n = 0 (x = \bar{x})$ となり、 u は Floquet 変換モード \bar{u} に一致することとなる。また、他の区間については、単に \bar{u} の位相を $e^{-i\kappa L}$ だけシフトさせることで容易に $u(x)$ を構成することができる。すなわち、無限軌道系のモードは、その Floquet 変換 \bar{u} で直接評価可能である。なお、このことは周期構造系におけるモード自体が、一般に第 2 種周期性を持つことを意味している (Floquet 原理^{10),12)}。

以上のことから、式 (11) の固有値問題を解くことで、レール・まくらぎ連成系におけるモードの伝播特性を直接調べることが可能となる。なお、式 (1) において κ は実数としたが、各振動数 ω に対する Floquet 波数 κ の固有値は一般的に複素数値を取り得る。 κ が実数値の時のモードは、式 (12) より減衰せずに無限遠方まで伝播して行くもの (伝播モード) を与える。一方、 κ が純虚数の時は振動せず急減衰するモードが、複素数の時は振動しながら減衰して行くモードが得られる。これらの各種モードの内、軌道系の動的応答特性の把握において特に重要となるのは伝播モードである。そこで本研究では、 κ が実数値をとる場合に焦点を絞って議論する。なおその際に κ に関する対称性に基づき、その値を $0 \leq \kappa \leq \pi/L$ の範囲で走査し、式 (11) より各 κ に対する固有振動数 ω を求め、伝播モードの $\kappa - \omega$ 曲線を構成する方法を採る。

表-1 レールの諸条件

質量密度 (kg/m ³)	7880
断面積 (m ²)	64.05×10 ⁻⁴
ヤング率 (GPa)	206
ポアソン比	0.33
せん断係数	0.34

4. 軌道系モデルの伝播モード解析

4.1 解析条件

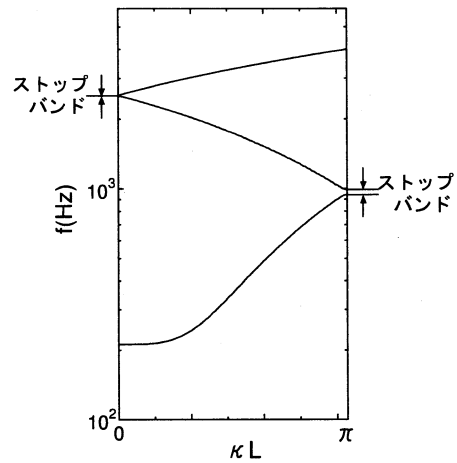
図-1 に示した様に、まくらぎで離散支持された無限長レールを軌道モデルの基本系として用い、それを主な解析対象とする。Floquet モード解析では、軌道系を構成する 1 ユニットの、図-2 の様にまくらぎ位置を中心にして抽出する。まくらぎ間隔は $L=60\text{cm}$ とし、PC まくらぎを想定してレール 1 本当りのまくらぎ (まくらぎ 1/2 本) の質量を $m_s=100\text{kg}$ と設定した。また、軌道パッドと防振パッドのバネ定数を、それぞれ $k_r=110\text{MN/m}$, $k_s=30\text{MN/m}$ としたものを以下の解析における基本構成とした。レールは 50N レールを想定し、各種物理量を表-1 の様に与えた。なおレールの離散化は、精度を確認の上、1 ユニット (60cm) を 6 要素で一様分割して与えた。この場合、以下の解析結果の離散化誤差は 1% 程度であった。

4.2 バネ支持モデルにおける伝播モード

既往の研究で検討されている軌道モデルの特性を再確認し、レール・まくらぎ連成系でのモードと比較する目的で、まくらぎを持たないバネ支持モデルを対象に、まず解析を行う。なお、その際の支持バネ定数は軌道パッドの値 $k_r=110\text{MN/m}$ に設定した。

結果を図-3 に示す。なお、図の縦軸は周波数 $f = \omega/2\pi(\text{Hz})$ で表示している。 $\kappa-f$ 曲線は $\kappa=0, \pi/L$ に関して対称となるため、図には $0 \leq \kappa \leq \pi/L$ の範囲のみ示した。各 Floquet 波数 κ に対して式 (11) の固有値問題を解くこととなるため、固有振動数 ω は一般に離散化モデルの自由度の数だけ存在する。図にはその内、固有振動数の低い方から 3 つ目までのバンドについて示した。なお、高周波数域ではレールの断面変形が無視できなくなるため、はりモデルの適用限界は $1500^{(4)} \sim 2500^{(13)}\text{Hz}$ とされているが、ここでは Floquet 波数と周波数との関係を理解する目的で、それ以上の周波数モードまで示した。

図より伝播モードの存在しない周波数帯 (ストップ・バンド) が離散的に分布していることがわかる。なお、Floquet 変換では式 (2) の様に κ に関して第 1 種周期性を持つので、 $|\kappa| > \pi/L$ におけるモードは全て図-3 またはそれを左右反転させたものと一致し、 κ の取り得る範囲は実質上 $0 \leq \kappa \leq \pi/L$ に限定される。一方、はりに発生する伝播モードが有する主要な波数 k は、一般に π/L より大きな値を取り得るはずである。このことは、Floquet 波数 κ がはりを伝播して行く波動における波数 k とは必ずしも一致しないことを意味する。これ

図-3 バネ支持モデルの $\kappa-f$ 曲線

らの対応関係については Mead⁷⁾ が考察を与えている。以下にその概略を述べる。

一次元問題で考える。第 2 種周期性を持つ関数 \tilde{u} は、一般に次式の様に展開できる。

$$\tilde{u}(\tilde{x}, t; \kappa) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{u}_m e^{i(\omega t - k_m \tilde{x})}, \quad k_m = \kappa + \frac{2m\pi}{L} \quad (-\pi/L < \kappa < \pi/L), \quad (-L/2 < \tilde{x} < L/2) \quad (13)$$

ここで、 \tilde{u}_m は展開係数である。なお、以下の議論を分かり易くするため、時間 t の項も含めて表記した。式 (13) は、Floquet 波数 κ で特徴付けられた解 \tilde{u} が、波数 k_m の波動の一次結合で構成されていることを意味する。また、それらの項は位相速度 $C_m = \omega/k_m$ の下で \tilde{x} 方向に進行 ($m > 0$) または後退 ($m < 0$) する成分を表している。上述の様に Floquet 波数 κ と ω との関係を与える曲線は、複数の伝播モードから成る。一般に、低い方から i 番目の固有振動数に対応する伝播モードでは、速い方から i 番目の位相速度を有する波動成分が支配的と成ることが知られている⁷⁾。今 $\kappa > 0$ とすると、式 (13) より各成分の位相速度 C は次の順に小さくなって行く。

$$C: \frac{\omega}{\kappa} > \frac{\omega}{-\kappa + \frac{2\pi}{L}} > \frac{\omega}{\kappa + \frac{2\pi}{L}} > \frac{\omega}{-\kappa + \frac{4\pi}{L}} > \frac{\omega}{\kappa + \frac{4\pi}{L}} > \dots \quad (14)$$

これらの分母 (波数) を順に k_i と呼ぶことにすると、 i 番目の伝播モードにおける進行波の主要成分が有する波数は k_i で与えられることとなる。そこで i 番目の伝播モードを波数 $k = k_i$ の位置に移動し $k-f$ 座標にプロットする。例えば、周波数の最も低いモードは $k = \kappa$ に、2 番目のモードの横軸は $k = -\kappa + 2\pi/L$ に、3 番目のモードは $k = \kappa + 2\pi/L$ にプロットすることで、伝播モードにおける主要波数 k と周波数 f との関係 (分散曲線) を得ることができる。

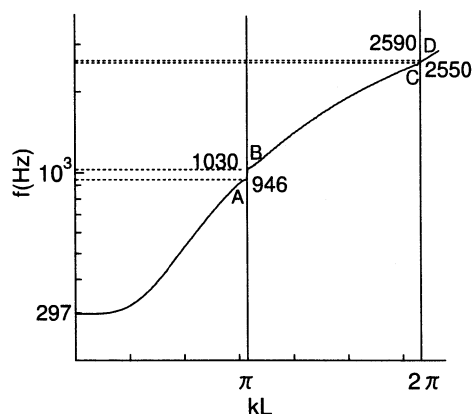


図-4 バネ支持モデルの波数 k と周波数 f との関係

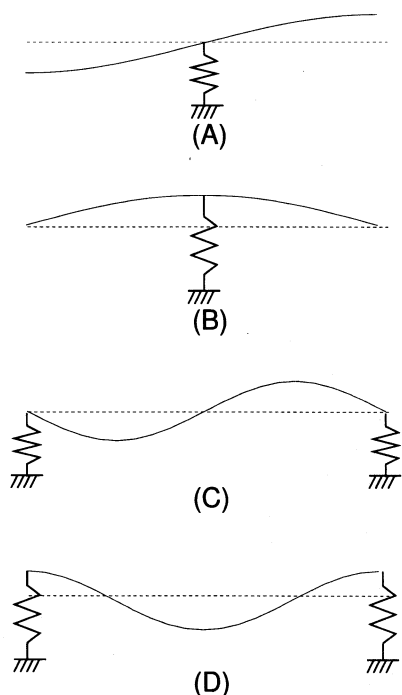


図-5 バネ支持モデルのストップ・バンド端におけるレールのたわみモード

図-3を上述の様に主要波数 k と f との関係に描き直したものを図-4に示す。約 300Hz 以上の周波数において伝播モードが存在しており、これがいわゆるカット・オン周波数を与えている。さらに $k = n\pi/L$ ($n = 1, 2, \dots$) においてストップ・バンドが存在しており、そのバンド幅は高周波数域におけるもの程狭くなって行くことが確認できる。

$k = \pi/L, 2\pi/L$ におけるバンド端 (A~D) でのレールのたわみモードを図-5に示す。なお、図中点線は無変形時のレール位置を示している。いずれも進行しない定在波モードを与え、A, B は波長 $2L$, C, D は波長 L の振動モードとなっており、これらが主要波数に対応する波長により特徴付けられていることが確認で

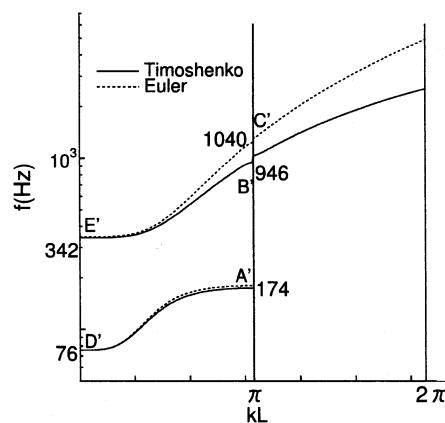


図-6 レール・まくらぎ連成モデルの $k-f$ 曲線

きる。ただし、ストップ・バンドの下端側に対応する A, C はバネ支持点を節としており、そのためバネには伸縮を生じていない。一方、ストップ・バンド上端に対応する B, D はバネ支持点を腹としたモードを示している。同一の波数下でも後者は支持バネの伸縮を伴うため、固有振動数は前者のそれより高くなり、それらの差がストップ・バンドを与えていることが理解できる。なお、各波数における群速度は $d\omega/dk$ で与えられる。図-4の曲線の傾きはストップ・バンド端でゼロとなっており、このことから、これらの波数におけるモードが定在波を与えることが認識できる。ちなみに A 点におけるモードは鉄道工学で良く知られた、いわゆる pinned-pinned resonance に相当し、本解析条件ではそれが約 950Hz で発生することがわかる。

4.3 レール・まくらぎ連成モデルにおける伝播モード

レールをまくらぎで離散支持した場合における伝播モードの $k-f$ 曲線を図-6に示す。なお、図には比較のため、レールを Euler ばかりでモデル化した場合の結果も合わせて示した。Timoshenko ばかりと Euler ばかりとの違いは 500Hz 前後の周波数から顕著に現れ、周波数の増加と共に拡大している。ちなみに、レール振動解析に関する既往の研究¹⁴⁾においても、モデル化の違いは 500Hz 以上の周波数域で認められており、今回の結果はそれと符合したものとなっている。

図-6における周波数の最も低いパス・バンドに対応するモードが、図-4には存在していないことがわかる。そこで両モデルにおけるバンド間の対応を確認するため、 $k = \pi/L$ における各バンド端 A', B', C', での変位モードを図-7に示す。図中の点線は、無変形時のレールとまくらぎ位置を示している。なお、A' での変位モードでは、レール変位に比べてまくらぎ変位が非常に大きくなっている。現実にはまくらぎがレール上部に移動することはあり得ないが、変位モードを拡大しているため図ではまくらぎとレールの上下関係が反転した表示となっている。いずれもレールたわみの波長は $2L$ となっている。ただし、B', C' はまくらぎが

ほとんど変位しておらず、それぞれ図-5のAとBに概ね一致した伝播モードを与えている。一方、A'ではまくらぎがレールたわみと同調して振動しており、レールとまくらぎとが連成したモードを示している。なお、このバンドが存在する波数域は $k = \pi/L$ を上限とする有限域で与えられており、それに対応する周波数帯(パス・バンド)は約80~170Hzの範囲に分布している。

当該モードではまくらぎがレールと共に大きく振動していることから、道床や地盤における振動の発生がこのモードと密接に関連しているものと考えられる。特に道床・地盤系の振動応答は一般に30~70Hzにピークを持つことから、本モードにおけるパス・バンド下端(D'点)近傍での軌道振動がそれに影響している可能性が高い。そこで $k=0$ におけるバンド端D'点での変位モードを、高周波数側のパス・バンド下端E'点でのものと合わせ図-8に示す。図より、D'でのモードではレールにほとんど曲げたわみが生じておらず、レールとまくらぎとが一体となって上下に振動していることがわかる。なお、まくらぎ振動により防振パッドが伸縮することから、まくらぎ・道床間の作用力が大きく変動し、地盤振動の発生につながっているものと考えられる。また、このような変位特性より、防振パッドの剛性が本モードの固有周波数に影響を及ぼすことが予想される。

一方、E'点での変位モードにおいては、レールにわずかな変形が認められ、レールとまくらぎとが逆位相で振動している。ただしD'の場合と異なり、まくらぎの変位振幅はレールのそれに比べ小さい。当該モードは防振パッドの伸縮をほとんど伴わず、主に軌道パッドが伸縮を受けていることから、まくらぎ・道床間作用力の変動に起因する地盤振動とは関連しないことが推測される。また、その様な変位特性より、軌道パッドの剛性が本モードの固有周波数に大きく影響を及ぼすものと思われる。

なお、前述のとおり Floquet 解析における波数 k はあくまで主要成分に対する波数のことであり、変形モードにはそれ以外の波数成分も幾らか含まれている。そのため、図-8に示したE'のモードの様に、主要波数 $k=0$ での変形モードであっても、 $k=2\pi/L$ に対応する波長成分を含有し得る。

なお、パッド類の剛性が振動特性に及ぼす影響については以下で検討する。

4.4 パッド類の剛性が結果に及ぼす影響

軌道パッドと防振パッドのバネ定数 k_r 、 k_s がパス・バンドに及ぼす影響について調べる。なお、列車の走行安定性等の観点から、パッド類のバネ定数を極端に低減することは現実的ではない。ここでは、実際の軌道で用いられているパッド類のバネ定数を参考に、Case1: $k_r=70\text{MN/m}$ 、および Case2: $k_s=5\text{MN/m}$ と設定した2ケースについて検討する。

$k_r=70\text{MN/m}$ としたCase1の結果を、 $k_r=110\text{MN/m}$ の基本構成の場合と合わせて図-9に示す。レールとま

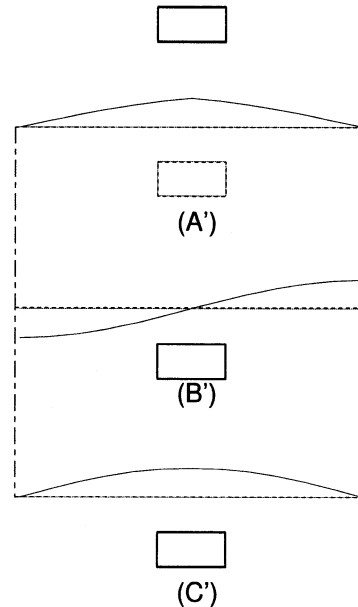


図-7 A', B', C' での変位モード

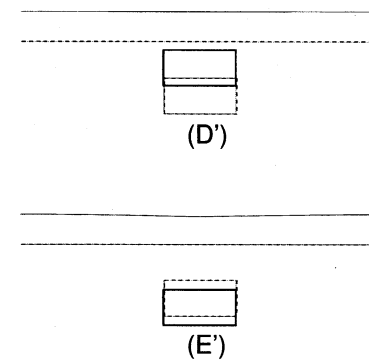


図-8 D', E' での変位モード

くらぎとが振動する最低周波数バンドにおける小さな波数域では、軌道パッドの剛性が結果にほとんど影響していない。これは4.3に述べた様に、レールとまくらぎ間にほとんど相対変位を生じず、これらが一体化して振動しているためと考えられる。一方、2番目のパス・バンドにおけるモードでは、 $k=0$ 付近で顕著な差が認められる。また $k=\pi/L$ におけるストップ・バンド上端C'付近でも、わずかではあるが振動数低下を生じている。E'でのモードとC'でのモードは、いずれもまくらぎ下がほとんど振動せず、軌道パッドが主に伸縮する変位特性を有している。そのため、これらのモード付近において軌道パッドの剛性変化の影響が現れたものと思われる。一方、まくらぎ位置が節となって振動するモードB'では、まくらぎ位置でレールのたわみがゼロとなるため、パッドの剛性は結果に全く影響しない。

次に、 $k_s=5\text{MN/m}$ としたCase2の結果を図-10に示す。この場合は、最低周波数バンドに差異が認められ、特に小さな波数域変化が目立つ。このことより、道床・

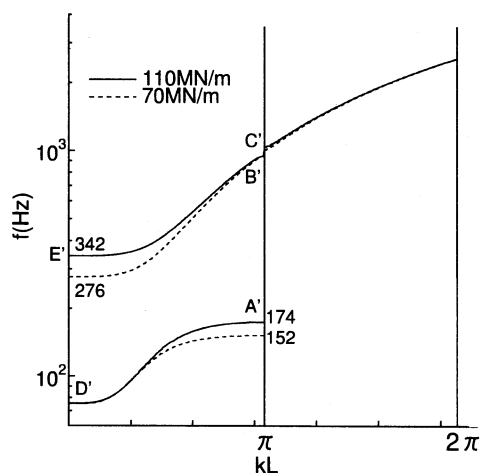


図-9 軌道パッドの変更による $k-f$ 曲線の変化 (Case1)

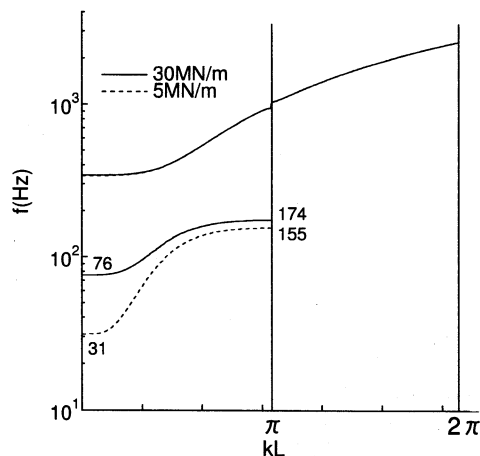


図-10 防振パッドの変更による $k-f$ 曲線の変化 (Case2)

地盤系に伝わる振動エネルギーの制御には、少なくとも本解析条件に関する限り、防振パッドのバネ定数の調整が重要な役割を持つことがわかる。一方、2 番目以上のパス・バンドにはほとんど変化が見られない。これは前述の様に、これらのモードではまくらぎがほとんど変位しないため防振パッドは伸縮せず、その剛性が結果に影響を及ぼさないことによる。なお、このことは、防振パッドの剛性が 300Hz 前後以上の周波数域における軌道振動特性に影響を及ぼさないことを示唆している。

4.5 2 質点モデルによる近似評価の検討

4.3 に述べたように、主要波数 $k=0$ におけるバンド端 D' 、 E' のモードでは、レールに生ずるたわみ変形が比較的小さい。特に D' のモードでは、レールが剛体的な変位挙動を呈している。したがって、 D' 、 E' のモードではレールをまくらぎ同様に質点でモデル化することで、それらの周波数の近似評価が可能に思われ

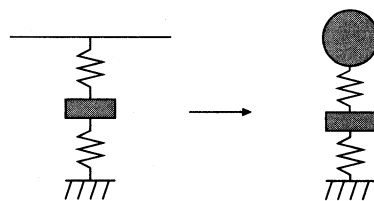


図-11 2 質点モデルによる近似

表-2 2 質点モデルによる近似結果 (単位:Hz)

	D'		E'	
	Floquet	2 質点	Floquet	2 質点
基本構成	76	76	342	350
Case1	75	76	276	280
Case2	31	31	340	348

る。そこで、図-11 の様に 1 ユニットにおけるレールを剛体と見なし、2 質点モデルによる置換近似を試みた。

2 質点モデルで求めた 2 つの固有周波数を、Floquet 解析で得た D' 、 E' における周波数と比較した結果を表-2 に示す。 D' 、 E' いずれのモードにおいても、またいずれのケースにおいても、Floquet 解析の結果と 2 質点モデルでの値とは良く対応している。このことから、当該モードに関しては 2 質点の簡易モデルによりその固有周波数を十分評価可能であることがわかる。なお、 D' のモードにおける周波数において、とりわけ良好な一致が認められる。これは、当該モードでのレール変位が曲げ変形を含まず、ほぼ完全な剛体変位により与えられているため、レールを質点と見なしても近似誤差をほとんど生じなかったことによるものと思われる。

5. おわりに

本論文では、レールとまくらぎから構成される無限軌道系における波動伝播モードについて調べた。等間隔に配置されたまくらぎにより特徴付けられた周期性を持つ無限軌道のモード解析手法を、Floquet 変換に基づき構成した。その際に、レールは Timoshenko ばりで、まくらぎは質点でモデル化した。なお、Floquet 変換後の固有値問題の誘導過程における定式化の簡易化を図る目的で、Timoshenko ばりのたわみ挙動ははり要素 (TIM7 要素) で離散近似した。

解析の結果、レール・まくらぎ軌道系における伝播モードが、大きく分けて 2 種類のモード成分に分類できることが分かった。1 つは、レールと軌道パッドより構成される系での伝播モードに相当し、まくらぎの上下振動をほとんど伴わないものである。当該モードは全ての波数において存在するが、主要波数 k が π/L (L : 周期長) の整数倍をとる際に、伝播モードの発生しない周波数帯 (ストップ・バンド) が現れ、その両端周波

数におけるモードが互いに波長が等しく位相の異なる定在波により与えられることが確認できた。なお、これらのモードではまくらぎがほとんど変位しないため、波数一周波数曲線はまくらぎ下に敷設される防振パッドの剛性の影響を受けないことが分かった。一方、もう1つのモード形態では、レールに加えまくらぎも大きく変位するものとなる。この伝播モードは、主要波数 $k = \pi/L$ を上限とする有限な範囲内に存在する。まくらぎの上下振動を伴うため、固有振動数は防振パッドの剛性に依存する結果を得た。

また、レールを Euler ばりによりモデル化した場合と比較した。その結果、はりモデルの差異は 500Hz 以上の周波数域で顕著に現れることを確認した。ちなみに、上述のまくらぎ振動を伴うモードに対するパス・バンドの上限は 170Hz 付近に位置するため、当該モードに関しては Euler ばりモデルでも十分評価可能である。

さらに、主要波数 $k = 0$ における2つのモード周波数の、簡易モデルによる近似評価を試みた。当該モードではレールの変形が無視し得る程度に小さく、剛体に近い変位が認められた。そこで、レールもまくらぎ同様に質点と見なし、2質点モデルで近似した。レールを Timoshenko ばりで与えた場合と比較した結果、両者間における固有振動数が良く対応しており、2質点系による簡易なモデルでも評価可能であることを確認した。

なお、定点加振による車輪・軌道連成系の応答解析では、ここに示したストップ・バンド端の定在波モードの幾つかに対応していると思われる卓越周波数の存在が示唆されている¹⁵⁾。今後は、移動荷重を含め、外力作用下での無限周期軌道の応答特性についても、Floquet 解析を適用し検討して行くつもりである。

参考文献

- 1) Lanza di Scalea, F. and McNamara, J. : Measuring high-frequency wave propagation in railroad tracks by joint time-frequency analysis, *J. Sound Vib.*, **273**, 637-651, 2004.
- 2) Thompson, D.J. : Wheel-rail noise generation, Part III: rail vibration, *J. Sound Vib.*, **161**, 421-446, 1993.

- 3) Knothe, K.L., Strzyzakowski, Z. and Willner, K. : Rail vibrations in the high frequency range, *J. Sound Vib.*, **169**, 111-123, 1994.
- 4) Gavrić, L. : Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique, *J. Sound Vib.*, **185**, 531-543, 1995.
- 5) Clouteau, D., Elhabre, M.L. and Aubry, D. : Periodic BEM and FEM-BEM coupling, *Comput. Mech.*, **25**, 567-577, 2000.
- 6) Clouteau, D., Arnst, M., Al-Hussaini, T.M. and Degrande, G. : Freefield vibrations due to dynamic loading on a tunnel embedded in a stratified medium, *J. Sound Vib.*, **283**, 173-199, 2005.
- 7) Mead, D.J. : Free wave propagation in periodically supported, infinite beams, *J. Sound Vib.*, **11**, 181-197, 1970.
- 8) Luo, Y. : Frequency analysis of infinite continuous beam under axial loads, *J. Sound Vib.*, **213**, 791-800, 1998.
- 9) Hosking, R.J., Husain, S.A., Milinazzo, F. : Natural flexural vibrations of a continuous beam on discrete elastic supports, *J. Sound Vib.*, **272**, 169-185, 2004.
- 10) Tassilly, E. : Propagation of bending waves in a periodic beam, *Int. J. Engng Sci.*, **25**, 85-94, 1987.
- 11) Nickel, R.E. and Secor, G.A. : Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **5**, 243-253, 1972.
- 12) Delph, T.J., Hermann, G. and Kaul, R.K. : Harmonic wave propagation in a periodically layered, infinite elastic body: Antiplane strain, *J. Appl. Mech.*, **45**, 343-349, 1978.
- 13) Knothe, K.L. and Grassie, S.L. : Modelling of railway track and Vehicle/track interaction at high frequencies, *Vehicle Sys. Dyn.*, **22**, 209-262, 1993.
- 14) 阿部和久, 森岡泰助, 占田勝 : Timoshenko ばりを用いた軌道振動系のモデル化, 構造工学論文集, **44A**, 367-374, 1998.
- 15) 佐藤吉彦 : 軌道高周波振動の理論解析, 鉄道技術研究報告, No.1013, 1976.

(2007 年 4 月 12 日 受付)