

## 半無限周期構造における表面波モード解析手法

## Surface Wave Propagation in Half-Planes Having Periodic Structures

阿部和久\*・笠原祐樹\*\*・紅露一寛\*\*\*

Kazuhiisa ABE, Yuuki KASAHARA and Kazuhiro KORO

\*正会員 工博 新潟大学准教授 工学部建設学科 (〒950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

\*\*学生員 新潟大学大学院 博士前期課程 (〒950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

\*\*\*正会員 博(工) 新潟大学准教授 大学院自然科学研究科 (〒950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

A surface wave analysis method is developed for half-plane, periodic structures. The wave propagation is formulated by means of the Floquet transform. By virtue of the method, the dynamic problems in an infinite domain are reduced to that in a unit cell representing the periodicity. An impedance matrix describing the relation between displacements and tractions on the surface is derived from harmonic loading of infinite periodic domain by utilizing the inverse Floquet transform. The dispersion curves are obtained by exploring the eigenvalues of the impedance matrix. To cope with the singularity encountered in the inverse transform, the integration with respect to the wave number is extended to complex number. The feasibility of the developed method is evidenced by dispersion analysis of Rayleigh waves in a homogeneous half-plane. Though some difficulties are found in the analysis for periodic structures, pass and stop bands in lower frequencies can be captured successfully.

**Key Words :** surface wave, periodic structure, Floquet transform

## 1. はじめに

周期構造における波動問題は、様々な工学分野において重要であり、多くの研究者により解析が試みられている。例えば、Cai ら<sup>1)</sup>は繊維強化複合材料の非破壊試験を念頭に、格子状に配置された円形介在物を有する材料内の波動伝播特性について解析している。Phani ら<sup>2)</sup>は骨組状の周期構造で構成される無限場を対象に、その中を伝わる波動モードについて調べている。また、Sigmund ら<sup>3)</sup>は周期構造の波動伝播特性に基づき、それを構成する最小単位(ユニットセル)における材料分布パターンの最適化を試みている。

周期構造における波動問題に認められる顕著な特性として、波動が通過する周波数帯と通過しない周波数帯とが交互に分布する現象が知られている。一般に前者はパスバンド、後者はストップバンドと呼ばれて、上に述べた3つの文献においても当該現象に焦点を当てた議論がなされている。例えば文献3)では、ストップバンド幅(バンドギャップ)を目的関数に設定し、所定のフィルタ特性を与える最適な材料配置を探索している。

なお、文献1)では有限領域内に介在物を配置して波動解析を実施しているが、文献2,3)では無限周期構造を対象としている。無限周期構造の場合、Bloch の定理<sup>4)</sup>により、これらの問題は、周期構造を構成する最小単位であるユニットセルを対象とした波数-周波数域における固有値問題に帰着して解くことが可能となる。これによりストップバンドは、如何なる実数波数に対しても固有周波数が存在しない周波数帯、換言すれば実数周波数の中で波数固有値が複素数を与える領域として明瞭に捉えることができる。

文献2,3)では、周期構造を2次元的に展開して得ら

れる無限波動場を対象としているが、波動問題においては境界面に沿って伝播する表面波も重要となる。長谷川・小柴<sup>5)</sup>は、半無限一様基盤の表面上に電極が等間隔に配置された場合を対象に、表面波導波路の2次元解析を行っている。なお、文献5)では電極の周期性に関し、Bloch の定理の1次元版であるFloquet 原理<sup>6)</sup>を適用して当該問題の解法を構成している。

これに対して、2次元的に周期構造が繰り返されている半無限場を対象とした表面波モードの解析例はほとんど見当たらない。しかし、複合材料における表面波のフィルタ特性の制御や、地盤におけるストップバンドを特定の周波数帯に調節することによる新たな防振対策など、その適用範囲は広く有用性は高い。そこで本研究では、2次元半無限周期構造における表面波モードを対象とした一解析手法の構築に向け、その理論展開を試みる。

具体的には、まず、半無限周期構造と同一周期パターンで展開された無限場を設定する。その下で、半無限場の自由境界に相当する直線上のある点に集中加振した場合の二重Floquet 変換を与え、1ユニットの有限要素解析によりFloquet 波数空間での解を求める。次に、この解について、自由表面方向に直交するもう一方の波数周期方向について逆Floquet 変換を施す。この結果を用い、自由表面に接するユニットセルを対象に、当該表面上に位置する節点の変位と内部節点力との関係を与えるインピーダンス行列を構成する。表面に沿って伝播する表面波モードは、当該行列に関する固有値問題により与えられる。そこで、表面境界方向のFloquet 波数と周波数とで与えられるパラメータ空間で、この行列の固有値を探索することにより表面波の分散曲線を求める。なお、地盤振動においては、一般に

低周波の表面波モードが重要となる場合が多く、比較的低い周波数域でのストップバンドが解析対象となる。

さらに、逆 Floquet 変換における積分計算の際に遭遇する、有限要素方程式に関する特異点の処理方法についても示し、具体的解析手法を構成する。

また、簡単な解析例を通して構成した手法の適用可能性について検証し、今後の課題について述べる。

## 2. Floquet 変換

### 2.1 1次元周期構造の Floquet 変換

本研究では Floquet 変換が重要な役割を果たす。そこでまず、1次元問題を例に、Floquet 変換の概要と、周期構造における当該手法適用の意義について簡単に述べる。

1次元空間  $x \in \mathbb{R}$  で定義された関数  $f(x)$  を考える。なお、 $f(x)$  は周期性を持つ必要はない。あるサイズ  $L$  に基づく  $f(x)$  の Floquet 変換  $\tilde{f}(\tilde{x}, \kappa)$  は次式で与えられる<sup>7)</sup>。

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \kappa) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tilde{x} + nL) e^{in\kappa L} \quad (1)$$

ここで、 $\tilde{x}, \kappa$  はそれぞれ  $(-L/2, L/2)$  および  $(-\pi/L, \pi/L)$  の区間における実数であり、 $\kappa$  を Floquet 波数と呼ぶ。

式(1)より、 $\tilde{f}$  は  $\kappa$  と  $\tilde{x}$  に関して各々次の様な周期性を持つ。

$$\begin{aligned} (\text{第1種周期性}) \quad & \tilde{f}(\tilde{x}, \kappa + \frac{2n\pi}{L}) = \tilde{f}(\tilde{x}, \kappa), \\ (\text{第2種周期性}) \quad & \tilde{f}(\tilde{x} + nL, \kappa) = e^{-in\kappa L} \tilde{f}(\tilde{x}, \kappa), \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned} \quad (2)$$

なお、逆 Floquet 変換は次式で与えられる。

$$f(\tilde{x} + nL) = \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \tilde{f}(\tilde{x}, \kappa) e^{-in\kappa L} d\kappa \quad (3)$$

次に、長さ  $L$  で特徴付けられる周期構造系を考える。ここでの運動方程式が次式で与えられているものとする。

$$\mathcal{L}(x)f(x) = g(x) \quad (4)$$

ここで、 $\mathcal{L}$  は線形作用素であり、系の周期性から  $\mathcal{L}(\tilde{x} + nL) = \mathcal{L}(\tilde{x})$  が成り立つ。また、 $g(x)$  は外力等の入力データであり、 $f$  と同様に何らかの周期性を仮定していない。 $\mathcal{L}$  の周期性より、式(4)両辺の Floquet 変換から次式を得る。

$$\mathcal{L}(\tilde{x})\tilde{f}(\tilde{x}, \kappa) = \tilde{g}(\tilde{x}, \kappa) \quad (5)$$

式(5)は、ある Floquet 波数  $\kappa$  に対する解  $\tilde{f}$  が、式(2)の第2種周期性の下、有限領域  $(-L/2, L/2)$  で定義された問題を解くことで得られることを示している。すなわち、Floquet 変換によれば、無限周期構造の問題を有限長  $L$  の1ユニット内の問題に帰着して解くことが可能となる。また、一度  $\tilde{f}(\tilde{x}, \kappa)$  が求められれば、 $f(x)$  はその逆 Floquet 変換により構成することができる。

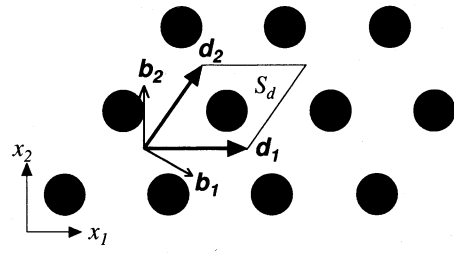


図-1 2次元周期構造とユニットセル

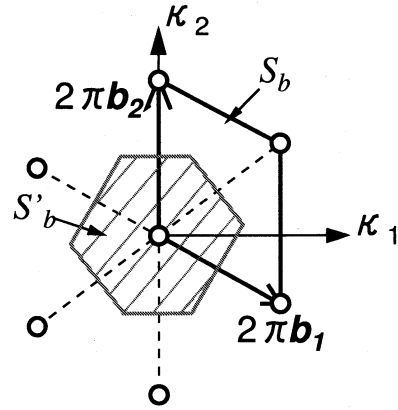


図-2 2次元周期構造に対する波数域のユニットセル

### 2.2 Floquet 変換の2次元周期構造への拡張

2.1 に述べた1次元 Floquet 変換を、2次元問題に拡張する。なお、以下ではその結果のみを示す。

図-1 の様に2つの基底ベクトル  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$  により与えられる2次元周期構造を考える。このとき、線形作用素  $\mathcal{L}$  は次の第1種周期性をみたす。

$$\mathcal{L}(\mathbf{x} + n_j \mathbf{d}_j) = \mathcal{L}(\mathbf{x}), \quad (n_1, n_2 \in \mathbb{Z}) \quad (6)$$

なお、繰返し指標は総和規約に従うものとする。

関数  $f(\mathbf{x})$  の(2重)Floquet 変換を次式で定義する。

$$\tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\kappa}) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} f(\tilde{\mathbf{x}} + n_j \mathbf{d}_j) e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot n_j \mathbf{d}_j} \quad (7)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{x}}$  はユニットセル  $S_d$  内の点、 $\boldsymbol{\kappa}$  は Floquet 波数ベクトルである。なお、Floquet 波数と通常の波数との対応関係については解析例の中で述べる。

式(7)より、 $\tilde{f}$  は1次元問題と同様に、次の第2種周期性を持つ。

$$\tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}} + n_j \mathbf{d}_j, \boldsymbol{\kappa}) = e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot n_j \mathbf{d}_j} \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\kappa}) \quad (8)$$

一方、Floquet 波数ベクトル  $\boldsymbol{\kappa}$  に関しては次の第1種周期性が成り立つ。

$$\tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\kappa} + 2\pi n_j \mathbf{b}_j) = \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\kappa}) \quad (9)$$

ここで、 $\mathbf{b}_j$  ( $j=1, 2$ ) は図-1 の周期構造に対する逆格子<sup>4)</sup>の基底であり、次の条件をみたす反変基底ベクトルとして定義される。

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{d}_j = \delta_{ij} \quad (10)$$

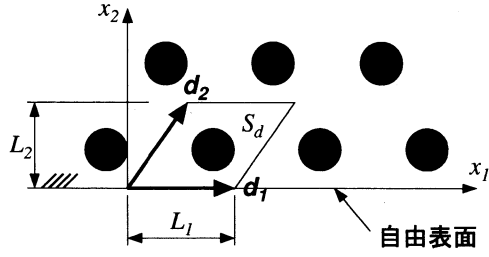


図-3 半無限周期構造

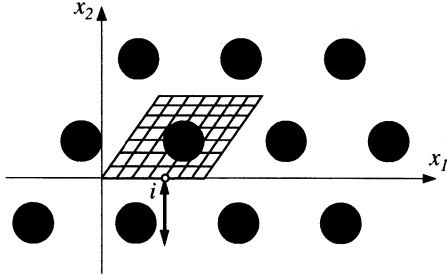


図-4 無限周期構造の加振問題

ただし、 $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタである。

式(9)より、Floquet 変換  $\tilde{f}$  は  $2\pi\mathbf{b}_j$  ( $j = 1, 2$ ) で与えられる波数領域  $S_b$  (図-2) に関して周期性を持つことがわかる。なお、ユニットセルの取り方は一意ではない。例えば、波数空間におけるユニットセルの場合、固体物理学において第 1 Brillouin 帯と呼ばれている領域  $S'_b$  (図-2) の様に設定することもできる。

式(6), (7)より、2次元無限周期場における問題の Floquet 変換  $\tilde{f}$  は、次の有限領域で定義される問題の解として与えられる。

$$\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{x}})\tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\kappa}) = \tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\kappa}), \quad \tilde{\mathbf{x}} \in S_d, \boldsymbol{\kappa} \in S_b \quad (11)$$

逆 Floquet 変換は次式で与えられる。

$$f(\tilde{\mathbf{x}} + n_j \mathbf{d}_j) = \frac{|S_d|}{(2\pi)^2} \int_{S_b} \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\kappa}) e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot n_j \mathbf{d}_j} dS_{\boldsymbol{\kappa}} \quad (12)$$

ここで、 $|S_d|$  はユニットセル  $S_d$  の面積である。

### 3. 半無限周期構造における表面波モード解析法

以上の準備の下、本節では図-3 に示す様な半無限周期構造における表面波モードの分散解析手法を構成する。なお、基底ベクトル  $\mathbf{d}_1$  を自由表面に沿った方向 ( $x_1$  軸) にとるものとする。また、 $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$  をそれぞれ  $x_1, x_2$  軸に射影した長さを  $L_1, L_2$  とする。

#### 3.1 無限周期構造の加振問題

図-3 の半無限場と同じ周期性を持つ無限場を考える。この無限領域の加振問題は、式(7)の 2重 Floquet 変換によりユニットセル  $S_d$  上の問題に帰着して解くことが

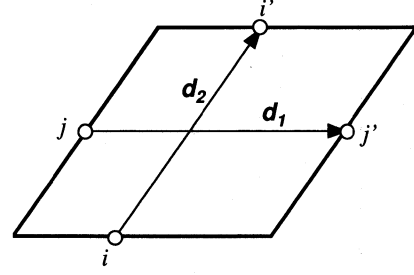


図-5 節点間における第 2 種周期性の対応関係

できる。本研究では、その解析に有限要素法を用いるものとする。今、具体的問題として、自由表面に相当する無限場内の直線 ( $x_1$  軸) に接して位置している 1 つのユニットセルの  $x_1$  軸上にある節点  $i$  を、調和加振する場合を設定する (図-4)。この問題における無減衰系の運動方程式の 2重 Floquet 変換は次式により与えられる。

$$[\tilde{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2) - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2)]\{\tilde{\mathbf{U}}\} = \{\tilde{\mathbf{F}}\} \quad (13)$$

ここで  $\omega$  は加振円振動数、 $[\tilde{\mathbf{K}}], [\tilde{\mathbf{M}}]$  はユニットセル  $S_d$  を有限要素分割して得られる剛性行列と質量行列に対して、解が式(8)の第 2 種周期性をみたすように組み換え処理を施して得られる行列である<sup>8)</sup>。

例えば、図-5 に示すユニットセルの境界上におかれた 2 対の節点  $(i, i'), (j, j')$  を考える。これらの節点座標を各々  $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i'}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j'}$  とすると、各ペアに対して次の対応関係が成り立つ。

$$\mathbf{x}_{i'} = \mathbf{x}_i + \mathbf{d}_2, \quad \mathbf{x}_{j'} = \mathbf{x}_j + \mathbf{d}_1 \quad (14)$$

よって、式(8)より、各節点変位  $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i'}), (\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j'})$  間には次の第 2 種周期性が成り立つ。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i'} &= e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{d}_2} \mathbf{u}_i = e^{-ih_2} \mathbf{u}_i, \\ \mathbf{u}_{j'} &= e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{d}_1} \mathbf{u}_j = e^{-ih_1} \mathbf{u}_j \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、 $h_1, h_2$  は、Floquet 波数ベクトルを  $\boldsymbol{\kappa} = h_j \mathbf{b}_j$  と表した際の係数である。

以上より、ユニットセルの互いに平行な 2 組の境界辺上におかれた全節点ペアに対して、式(15)の条件を課す。なお、仮想変位成分に関しては式(15)の共役を対応関係として与える。その下で節点変位ベクトル成分  $\mathbf{u}_{i'}, \mathbf{u}_{j'}$  を消去することで行列  $[\tilde{\mathbf{K}}], [\tilde{\mathbf{M}}]$  を得る。

なお、デルタ関数の Floquet 変換は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\kappa}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x} + n\mathbf{L}) e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot n\mathbf{L}} \\ &= \delta(\tilde{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (16)$$

したがって、デルタ関数の Floquet 変換はデルタ関数により与えられる。よって、式(13)の右辺ベクトルは節点  $i$  の所定方向成分にのみ非ゼロ成分を持つベクトルによって構成される。

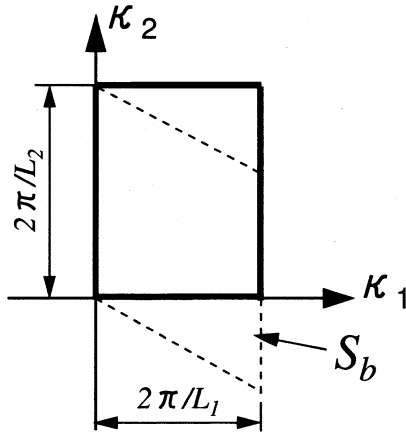


図-6 逆 Floquet 変換における積分領域

### 3.2 自由表面節点力と節点変位との関係の導出

式(13)を解いて  $\{\tilde{\mathbf{U}}(\kappa_1, \kappa_2; \omega)\}$  を得る. 当該問題において,  $\mathbf{d}_1$  は  $x_1$  方向に設定しているので, それに直交する逆格子の基底ベクトル  $\mathbf{b}_2$  は  $\kappa_2$  軸 ( $x_2$  軸) 方向に一致する. よって, 式(9)の周期性より, 式(12)の積分域における  $\kappa_2$  方向の積分区間を  $\mathbf{b}_2$  方向に平行移動させることが可能となる. その結果, Floquet 波数空間の積分域  $S_b$  は, 図-6 の様な長方形領域に変更することができる. 以上より, 式(12)の逆 Floquet 変換は次式により表現可能となる.

$$\{\mathbf{U}(\omega)\} = \frac{|S_d|}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{d}_1 / |\mathbf{d}_1|} \int_0^{2\pi|\mathbf{b}_2|} \{\tilde{\mathbf{U}}(\kappa_1, \kappa_2; \omega)\} d\kappa_2 d\kappa_1 \quad (17)$$

ただし,  $\{\mathbf{U}\}$  は  $x_1$  軸に接するユニットセルの節点変位ベクトルであり, 式(12)において  $n_1, n_2 = 0$  として得られる. 式(10)より,  $|S_d| = L_1 L_2$ ,  $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{d}_1 / |\mathbf{d}_1| = 1/L_1$ ,  $|\mathbf{b}_2| = 1/L_2$  となり, 式(17)は更に次式のように書き改めることができる.

$$\{\mathbf{U}(\omega)\} = \frac{L_1 L_2}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi/L_1} \int_0^{2\pi/L_2} \{\tilde{\mathbf{U}}(\kappa_1, \kappa_2; \omega)\} d\kappa_2 d\kappa_1 \quad (18)$$

式(18)より,  $\kappa_2$  方向にのみ逆 Floquet 変換して得られる解を次式で定義する.

$$\{\hat{\mathbf{U}}(\kappa_1; \omega)\} = \frac{L_2}{2\pi} \int_0^{2\pi/L_2} \{\tilde{\mathbf{U}}(\kappa_1, \kappa_2; \omega)\} d\kappa_2 \quad (19)$$

次に, 式(19)で定義される  $\{\hat{\mathbf{U}}\}$  が  $\kappa_1$  について第1種周期性を有することを確認する. 式(19)で  $\kappa_1$  を  $\kappa_1 + 2\pi/L_1$  に変更すると, これに対応する Floquet 波数ベクトルは次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \kappa + \frac{2\pi}{L_1} \frac{\mathbf{d}_1}{|\mathbf{d}_1|} &= \kappa + \frac{2\pi}{L_1^2} \mathbf{d}_1 \\ &= \kappa + 2\pi\mathbf{b}_1 + \frac{2\pi}{L_1^2} (\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2) \mathbf{b}_2 \end{aligned} \quad (20)$$

したがって,  $\{\tilde{\mathbf{U}}(\kappa_1 + 2\pi/L_1, \kappa_2; \omega)\}$  は次の関係をみたす.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}(\kappa_1 + \frac{2\pi}{L_1}, \kappa_2; \omega) &\equiv \tilde{\mathbf{U}}(\kappa + 2\pi\mathbf{b}_1 + \frac{2\pi}{L_1^2} (\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2) \mathbf{b}_2; \omega) \\ (9) \rightarrow &= \tilde{\mathbf{U}}(\kappa + \frac{2\pi}{L_1^2} (\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2) \mathbf{b}_2; \omega) \\ &\equiv \tilde{\mathbf{U}}(\kappa_1, \kappa_2 + \frac{2\pi}{L_1} (\frac{\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2}{L_1 L_2}); \omega) \end{aligned} \quad (21)$$

式(19),(21)より,  $\{\hat{\mathbf{U}}(\kappa_1 + 2\pi/L_1; \omega)\}$  は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{U}}(\kappa_1 + \frac{2\pi}{L_1}; \omega) &= \frac{L_2}{2\pi} \int_0^{2\pi/L_2} \tilde{\mathbf{U}}(\kappa_1, \kappa_2 + \frac{2\pi}{L_1} (\frac{\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2}{L_1 L_2}); \omega) d\kappa_2 \\ (9) \rightarrow &= \frac{L_2}{2\pi} \int_0^{2\pi/L_2} \tilde{\mathbf{U}}(\kappa_1, \kappa_2; \omega) d\kappa_2 \\ &= \hat{\mathbf{U}}(\kappa_1; \omega) \end{aligned} \quad (22)$$

以上より,  $\{\hat{\mathbf{U}}\}$  は  $\kappa_1$  について  $2\pi/L_1$  で与えられる第1種周期性を有することが確認できる.

$\{\hat{\mathbf{U}}\}$  は, 円振動数  $\omega$  および  $x_1$  軸方向 Floquet 波数  $\kappa_1$  に対する無限周期構造の定常解を与える. この変位解から得られる当該ユニットの内部節点力ベクトルを  $\{\hat{\mathbf{F}}\}$  とおく. なお,  $\{\hat{\mathbf{F}}\}$  は次式により求めることができる.

$$\{\hat{\mathbf{F}}\} = [\hat{\mathbf{K}}(\kappa_1) - \omega^2 \hat{\mathbf{M}}(\kappa_1)] \{\hat{\mathbf{U}}\} \quad (23)$$

ここで,  $[\hat{\mathbf{K}}], [\hat{\mathbf{M}}]$  は, ユニットセル  $S_d$  に対して  $x_1$  軸方向にのみ第2種周期性を課して得られる剛性行列と質量行列である.

$x_1$  軸上の節点  $i$  を加振して得られた解  $\{\hat{\mathbf{U}}\}, \{\hat{\mathbf{F}}\}$  から,  $x_1$  軸上に位置する節点に関する成分のみ抽出して得られる部分ベクトルを各々  $\{\tilde{\mathbf{U}}_i\}, \{\tilde{\mathbf{F}}_i\}$  とおく. ユニットセル内の  $x_1$  軸上に位置する各節点  $i$  に対して  $\{\tilde{\mathbf{U}}_i\}, \{\tilde{\mathbf{F}}_i\}$  を順次求め, それらを列成分に持つ正方行列  $[\tilde{\mathbf{U}}], [\tilde{\mathbf{F}}]$  を構成する. ここで, 半無限周期構造の  $(\kappa_1, \omega)$  空間における表面節点変位と節点力との関係を与えるインピーダンス行列を  $[\tilde{\mathbf{K}}]$  とすると, それは次式より与えられる.

$$[\tilde{\mathbf{K}}][\tilde{\mathbf{U}}] = [\tilde{\mathbf{F}}] \quad (24)$$

なお, 表面境界上の節点変位ベクトル  $\{\tilde{\mathbf{U}}\}$  と節点力ベクトル  $\{\tilde{\mathbf{F}}\}$  との関係は次式で与えられる.

$$[\tilde{\mathbf{K}}]\{\tilde{\mathbf{U}}\} = \{\tilde{\mathbf{F}}\} \quad (25)$$

### 3.3 表面波モードの分散解析

自由表面の条件は  $\{\tilde{\mathbf{F}}\} = 0$  で与えられる. よって, 円振動数  $\omega$ , Floquet 波数  $\kappa_1$  の下,  $x_1$  方向に伝播する波動モードは, 式(25)より次式をみたす.

$$[\tilde{\mathbf{K}}]\{\tilde{\mathbf{U}}\} = \{0\} \quad (26)$$

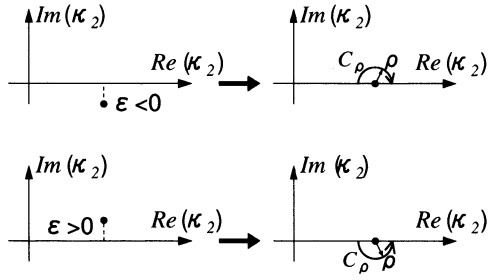


図-7 逆 Floquet 変換における積分路

したがって、表面波モードの探索は、式(26)をみたす固有振動数  $\omega$  を見出すことに帰着する。

なお、 $x_1$  軸方向に Floquet 変換して得られる解は、 $\kappa_1$  について式(22)の第1種周期性を持つ。よって、 $|\kappa_1| < \pi/L_1$  においてのみ式(26)の固有値問題を解けば良いこととなる。さらに、 $x_1$  軸方向への進行波と逆向きの波とは波数の符号が異なるだけなので、分散特性は  $\kappa_1 = 0$  に関して対称性を有する。したがって、結局分散解析は  $0 < \kappa_1 < \pi/L_1, 0 < \omega$  で与えられる領域内でのみ実行すれば良い。なお、分散曲線を求めて行く際の具体的な計算手順については解析例の節で述べる。

## 4. 解析上の工夫

### 4.1 逆 Floquet 変換における特異積分の処理

式(19)により  $\{\hat{U}(\kappa_1, \omega)\}$  を得るためには、まず式(13)の解  $\{\hat{U}(\kappa_1, \kappa_2, \omega)\}$  を求め、その  $\kappa_2$  に関する数値積分を実行する必要がある。式(13)は無限周期構造における運動方程式に対応するので、波数ベクトル  $\kappa$  が振動数  $\omega$  の下で波動伝播モードを与える場合が起こり得る。このとき、式(13)左辺の係数行列の行列式はゼロとなる。したがって、式(19)右辺の積分において、このような場合への適切な対処が必要となる。以下に、本研究で採った具体的対処法について説明する。

まず、式(13)においてヤング率  $E$  を  $(1+i\alpha)E$  ( $\alpha > 0$ ) と複素剛性に変更し、減衰を導入しておく。この場合、式(13)は正則行列を与えるので、解を一意に求めることができる。その下で、次式により逆 Floquet 変換(19)を再定義する。

$$\{\hat{U}(\kappa_1; \omega)\} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{L_2}{2\pi} \int_0^{2\pi/L_2} \{\hat{U}(\kappa_1, \kappa_2; \omega, \alpha)\} d\kappa_2 \quad (27)$$

ここで、 $\{\hat{U}(\kappa_1, \kappa_2; \omega, \alpha)\}$  は複素剛性設定下で求めた式(13)の解である。

実際の解析では、式(27)と同一の結果が得られる様に、 $\alpha = 0$  (無減衰) の条件下で  $\kappa_2$  に関する積分域を複素平面に拡張し、図-7右の様に極を避けて積分路をとる。なお、半径  $\rho$  の半円周上の積分路  $C_\rho$  は  $\alpha > 0$  における極と実数軸との位置関係に基づき図-7上・下の何れかに設定する。複素剛性により減衰を付加した際の極の位置は以下の議論に基づき判定する。

ヤング率  $E$ 、振動数  $\lambda (= \omega^2)$ 、Floquet 波数  $\kappa_2$  にお

ける式(13)の2次元無限周期構造系の係数行列の行列式を  $D(E, \lambda, \kappa_2)$  と表しておく。伝播モードを与える分散曲線上では次式が成り立つ。

$$D(E, \lambda, \kappa_2) = 0 \quad (28)$$

なお、式(13)の行列は Hermite 行列となるので、 $D$  は実数値を与える。 $\kappa_2$  一定の下、 $E$  と  $\lambda$  を変化させたときの分散曲線は次式により与えられる。

$$D(E + dE, \lambda + d\lambda, \kappa_2) = 0 \quad (29)$$

式(29)を展開し、式(28)を考慮すると、 $dE, d\lambda$  に関する一次の項から次式を得る。

$$\frac{\partial D}{\partial E} dE + \frac{\partial D}{\partial \lambda} d\lambda = 0 \quad (30)$$

一般に剛性が増加すれば固有振動数も増加するので、次の関係が成り立つ。

$$dE \cdot d\lambda > 0 \quad (31)$$

式(30),(31)より、次の不等式を得る。

$$\frac{\partial D}{\partial E} \cdot \frac{\partial D}{\partial \lambda} < 0 \quad (32)$$

次に、 $E$  一定の下、 $\lambda$  と  $\kappa_2$  を変化させる場合について考える。式(30)と同様にして次式を得る。

$$\frac{\partial D}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial D}{\partial \kappa_2} d\kappa_2 = 0 \quad (33)$$

$\kappa_2 - \lambda(\omega)$  平面において得られる分散曲線が、今着目している点で正の傾きを持つ場合、当該点で次式が成り立つ。

$$d\lambda \cdot d\kappa_2 > 0 \quad (34)$$

このとき、式(33),(34)より次の関係を得る。

$$\frac{\partial D}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial D}{\partial \kappa_2} < 0 \quad (35)$$

さらに、式(32),(35)より次式が成り立つ。

$$\frac{\partial D}{\partial E} \cdot \frac{\partial D}{\partial \kappa_2} > 0 \quad (36)$$

最後に、 $\lambda$  一定の下で、 $E$  と  $\kappa_2$  を変化させた場合を考える。分散曲線の条件式(28)より次式を得る。

$$\frac{\partial D}{\partial E} dE + \frac{\partial D}{\partial \kappa_2} d\kappa_2 = 0 \quad (37)$$

式(36),(37)より分散曲線上において次の関係が成り立つ。

$$dE \cdot d\kappa_2 < 0 \quad (38)$$

今、 $E$  を複素剛性  $(1+i\alpha)E$  に変更する場合について考える。このときのモードにおける  $\kappa_2$  の極の移動量を  $i\varepsilon$  ( $\varepsilon$  は実数) とおくと次式が成り立つ。

$$\frac{\partial D}{\partial E} i\alpha E + \frac{\partial D}{\partial \kappa_2} i\varepsilon = 0 \quad (39)$$

したがって、

$$\frac{\partial D}{\partial E} \alpha E + \frac{\partial D}{\partial \kappa_2} \varepsilon = 0 \quad (40)$$

式(38)で  $dE$  と  $d\kappa_2$  をそれぞれ  $\alpha E$  と  $\varepsilon$  に置き換えると次式を得る。

$$\alpha E \cdot \varepsilon < 0 \quad (41)$$

ここで、 $\alpha E > 0$  であるから、 $\varepsilon < 0$  となる。

以上より、式(19)の  $\kappa_2$  に関する積分区間上の特異点において、 $\kappa_2 - \omega$  平面の分散曲線の傾きが正となる場合、積分経路  $C_p$  を図-7 上の様にとれば良いことが結論づけられる。逆に、分散曲線の傾きが負となる特異点においては、 $C_p$  を図-7 下の様に設定する。

## 4.2 固有値の探索方法

本研究では、表面波モードの解析において固有値を探索する必要がある。そのための具体的手法として、行列式の値をモニタリングする方法が考えられる。しかし、行列式の値は大幅に変動する恐れがあり、その値の直接的評価による探索は必ずしも容易ではない。また、行列式に基づいて固有値を適切に探索し得ない場合も懸念される<sup>9)</sup>。なお、本研究では対象範囲内の全ての固有値が検出されれば良いので、行列式の値自体を求める必要は無い。そこで、安藤・神谷<sup>9)</sup>が境界要素固有値解析の目的で提案した手法に準ずる方法を用いることで、計算の効率化と安定化を図る。

また、4.1 に述べた逆 Floquet 変換の特異点検出の際にも以下に述べる方法を用いた。

対象となる行列を  $[A]$ 、その要素を  $a_{ij}$  として、次の連立方程式を考える。

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (42)$$

ただし、 $\{b\}$  はある 1 成分 (例えば第  $i$  成分) の値が  $\eta$ 、それ以外の成分が全てゼロで与えられたベクトルとする。式(13)における  $\kappa_2$  や式(26)における  $\omega$  が固有値をとらない限り、 $\eta \neq 0$  に対して式(42)の解  $\{x\}$  は一意に決定できる。

一方、固有値に一致する場合、 $\{x\}$  の固有ベクトルの下で  $\eta = 0$  となる。ただし、当然のことながら固有ベクトルの大きさは任意である。

そこで、 $\{x\}$  の第  $i$  成分  $x_i$  を 1 に固定し、逆に  $\eta$  を未知量と見なすことにより、式(42)を次のように書き換える。

$$[A']\{x'\} = \{b'\} \quad (43)$$

ここで、 $[A']$  は  $[A]$  の第  $i$  列の対角成分を -1、当該列におけるそれ以外の成分を 0 として得られる行列、 $\{x'\}$  は  $\{x\}$  の第  $i$  成分を  $\eta$  に置換したベクトル、 $\{b'\}$  は  $[A]$  の第  $i$  列に -1 をかけたベクトルであり、各々次式で与

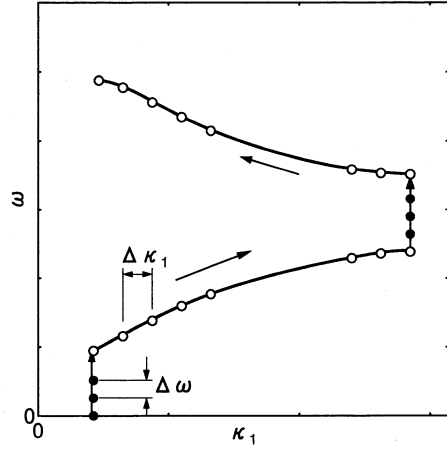


図-8 分散曲線の探索手順

えられる。

$$[A'] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & -1 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (44)$$

$$\{x'\} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \eta \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \{b'\} = \begin{bmatrix} -a_{1i} \\ \vdots \\ -a_{ii} \\ \vdots \\ -a_{ni} \end{bmatrix}$$

上述のとおり、 $\kappa_2$  や  $\omega$  が固有値を与えるとき、 $\{x'\}$  の第  $i$  成分  $\eta$  はゼロとなる。したがって、この  $\eta$  の値を調べることにより固有値が検出可能となる。なお、 $\eta$  の評価には、式(43)の連立方程式を適切な求解法で解けば良い。

## 5. 解析例

### 5.1 一様半無限場の Rayleigh 波

本研究で構成した手法の妥当性を確認する目的で、まず本手法を一様半無限場に適用する。解析では平面ひずみ条件の下、ポアソン比を 0.3 とした。一様場を対象とするので、ユニットセルのサイズと形状は任意に設定できる。ここではユニットセルを  $L_1 = L_2 = L$  の正方形で与え、それを 4 節点矩形要素により  $8 \times 8$  に等分割した。

分散曲線の探索手順の概要を図-8 に示す。まず、 $x_1$  軸方向 Floquet 波数  $\kappa_1$  の探索範囲を  $0.1\pi/L \leq \kappa_1 \leq 0.98\pi/L$  にとり、その区間を 100 分割して  $\Delta\kappa_1$  を与えた。その下で、 $\kappa_1$  を下限値に設定し、 $\Delta\omega = 0.01\pi C_T/L$  ( $C_T$ : 横波の伝播速度) の増分間隔で円振動数を増やししながら  $\eta$  を求める。  $|\eta|$  がゼロに近づき、しきい値  $\gamma$  以下となった時点で Newton-Raphson 法に切り換え、 $|\eta|$  が許容値  $\beta$  以下となる  $\omega$  を求める。次に、 $\kappa_1$  を  $\kappa_1 + \Delta\kappa_1$

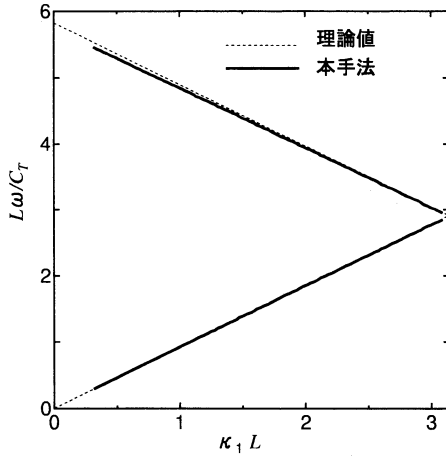


図-9 Rayleigh 波の分散曲線

に更新し、同様の計算により  $|\eta|$  が許容値以下の値を与える  $\omega$  を求める。以降  $\kappa_1$  が上限値に達するまで、この操作を繰り返して 1 番目のパスバンドにおける分散曲線を求める。なお、以下の解析では、 $|\eta|$  の値の推移を確認の上、 $\gamma = 0.05, \beta = 10^{-5}$  と設定した。

$\kappa_1$  が上限値に達したら、その下で  $\omega$  を  $\Delta\omega$  ずつ増加させ、 $|\eta| \leq \gamma$  をみたす次の  $\omega$  を求め、更に Newton-Raphson 法により収束値を得る。これが 2 番目のパスバンドの下端となる。続いて、 $\kappa_1$  を  $\kappa_1 - \Delta\kappa_1$  に更新しながら上述と同様の手順で  $|\eta| \leq \beta$  を与える  $\omega$  を求めて行くことにより 2 番目のパスバンドを求める。なお、Newton-Raphson 法における導関数は差分により近似した。また、探索開始点における  $\kappa_1$  の値を極端に小さく (例えば  $0.01\pi/L$ ) 設定した場合、 $|\eta| < \gamma$  をみたす周波数域の幅が狭くなり、上述の  $\Delta\omega$  の下ではゼロ点を検出できなかった。そのため、開始点の  $\kappa_1$  を  $0.1\pi/L$  と設定した。

各  $(\kappa_1, \omega)$  において実行する  $\kappa_2$  に関する逆 Floquet 変換(19)では、特異点で分割される各区間上と半円周  $C_\rho$  上の積分を Gauss の求積法により求めた。なお、その際の積分点数は 10 点とした。特異点近傍における積分精度の低下を避けるためには、積分路  $C_\rho$  の半径をできるだけ大きく設定し、特異点から離すことが望ましい。しかしその一方、 $C_\rho$  の半円周と実数軸とで囲まれる複素領域内から他の特異点を排除する必要があるため、自ずと取り得る半径  $\rho$  には上限が課される。 $\rho$  を適宜変更する方法も考えられるが、ここでは本手法の適用可能性を確認することを目的とし、 $\rho = \pi/20L$  と一定値に設定する簡便な方法を採用した。

以上の手順で、 $\omega$  について低い方から 2 番目までの分散曲線を求めた結果を図-9 に示す。図は、 $L, C_T$  で無次元化した振動数で表している。なお、当該問題における表面波 (Rayleigh 波) の分散曲線は、 $\omega = C_R k_1$  ( $C_R \approx 0.927C_T$ ) で与えられる。Floquet 波数  $\kappa_1$  と通常の波数  $k_1$  との対応関係には、下から  $n$  番目のパスバンドに

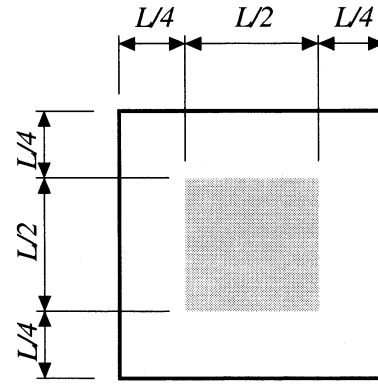


図-10 正方形介在物を有するユニットセル

対して一般に次式が成り立つ<sup>10)</sup>。

$$\begin{aligned} k_1 &= -\kappa_1 + m \frac{2\pi}{L} \quad (n = 2m), \\ &= \kappa_1 + m \frac{2\pi}{L} \quad (n = 2m + 1) \end{aligned} \quad (45)$$

この関係より、Rayleigh 波の波数  $k_1$  を  $\kappa_1$  に変換して得られる分散曲線を図中に示した。本解析により求めた分散曲線は比較的粗い分割にも関わらず、解析範囲内では最大 1% 程度の精度で理論値との良好な一致を示しており、提案手法の妥当性が確認できる。なお、周波数の増加 (波長の減少) と共に、本手法で求めた分散曲線が理論値と比較して多少下方に位置する傾向にある。高周波数域で分散曲線が低めに得られることは、レールの解析でも要素分割が粗い場合に認められており、これは要素解像度の影響によるものと考えられる。よって、精度確保には、通常の波動解析同様、波長に合わせた解像度の設定が必要となる。

## 5.2 正方形介在物を有する半無限場の表面波モード

図-10 のユニットセルで与えられる半無限周期構造を対象に、本手法を適用し表面波モードの分散曲線を求めた。周期構造を与える基底ベクトルはそれぞれ  $x_1, x_2$  軸に平行で  $|\mathbf{d}_i| = L$  と設定した。周期介在物の存在が分散曲線に及ぼす影響のみを抽出する目的で、縦波と横波の伝播速度を母材と介在物内で等しく設定し、それらの影響を排除した。具体的には、母材に対する介在物の剛性比  $r_s$  と質量密度比とを同じ値にしている。なお、何れのポアソン比も 0.3 で与えた。ユニットセルの要素分割は 5.1 に示した一様半無限場の解析と同じく各辺 8 等分割で与えた。その他、分散曲線を計算する際に設定する波数分割数等の諸パラメータは、全て 5.1 と同じとした。

剛性比  $r_s = 0.5, 2, 5$  に対して求めた表面波の分散曲線を、5.1 で求めた Rayleigh 波のそれと合わせ図-11 に示す。本解析では、下から 1 本目の分散曲線は確実に得ることができたが、2 本目の分散曲線の途中で  $\eta$  のゼロ点が消滅し、探索不能となった。特に介在物の剛性を母材より低く設定した  $r_s = 0.5$  のケースにおいては、2 本目の曲線の開始点のみ検出できたものの、分散曲線は探索できなかった。なお、各辺 12 分割して分

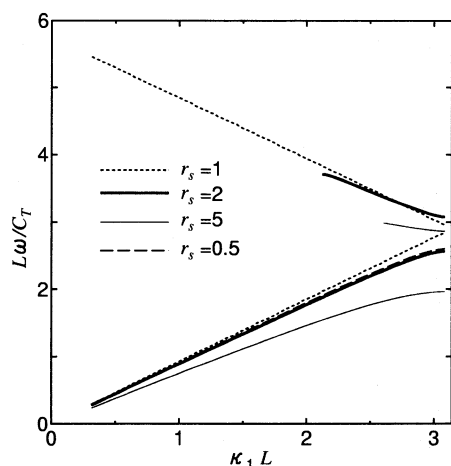


図-11 正方形介在物を有する半無限周期構造の分散曲線

散曲線を求めた結果、図-11 に示す 8 等分割によるものとほぼ一致しており、顕著な精度低下は認められなかった。分散曲線が高周波数域で検出不能となったことについて、現在のところ原因は明らかでなく、今後より詳細な検討が必要である。

図-11 より、介在物の剛性を変えることで、 $\kappa_1/L = \pi$  において上下の分散曲線が分離し、その間隔が剛性比の増減と共に増大することがわかる。この様に、如何なる波数  $\kappa_1$  においても表面波モードが存在し得ない周波数帯であるストップバンドが、無限波動場同様に半無限場においても発生することが確認できる。なお、パスバンド端において分散曲線の傾きがゼロとなっており、介在物の存在により波動が全反射することで定存波モードが形成されている様子が窺える。また、最も低い周波数帯に位置している分散曲線は、剛性比の増減に伴い下方へ移動しており、本解析例の場合、剛性比  $r_s=0.5, 2$  の両者の分散曲線がほぼ一致する結果となった。前述のとおり、母材と介在物内における実体波の伝播速度は等しく設定しているが、その下でも表面波の群速度は剛性比の増減と共に低下しており、波長の減少に伴いその傾向がより顕著に現れていることが確認できる。

## 6. おわりに

本研究では半無限周期構造における表面波モードの分散解析手法を構成した。その際に必要となる周期構造における波動場解析に、2 重 Floquet 変換を適用した。また、式(19)の逆 Floquet 変換における被積分関数の特異点の具体的な処理法として、複素平面内で極を迂回して積分する方法を採った。なお、この極の探索や、表面波モードの解析において、固有波数や固有振

動数を検出する必要がある。その際に文献 9) で提案された手法に準ずるものを用いることで、当該計算の効率化、安定化を図った。

一様半無限場における Rayleigh 波の解析に本手法を適用することで、解析精度と手法の妥当性を検証した。また、周期構造系においては、高周波数域でのモード探索に未だ困難な点が認められるものの、最初のストップバンドを捉えることができ、本手法の適用可能性を確認することができた。

なお、高周波数域でモード探索が困難となる原因については現在のところ明らかでなく、さらなる検討が必要である。また、本論文では表面波の変位モードについては議論していない。今後変位モードの導出についても検討して行きたい。

## 参考文献

- 1) Cai, L.-W. and Williams Jr., J.H.: NDE via stop band formulation in fiber reinforced composites having square fiber arrangements, *Ultrasonics*, **37**, 483-492, 1999.
- 2) Phani, A.S., Woodhouse, J. and Fleck, N.A.: Wave propagation in two-dimensional periodic lattices, *J. Acoust. Soc. Am.*, **119**, 1995-2005, 2006.
- 3) Sigmund, O. and Jensen, J.S.: Systematic design of phononic band-gap materials and structures by topology optimization, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **361**, 1001-1019, 2003.
- 4) Brillouin, L.: Wave propagation in periodic structures, Dover Publications, Inc., 1953.
- 5) 長谷川弘治・小柴正則: 周期が 1 波長である周期構造弾性表面波導波路のハイブリッド有限要素法解析, 電子情報通信学会論文誌, C, J83-C, 954-962, 2000.
- 6) Delph, T.J., Herrmann, G. and Kaul, R.K.: Harmonic wave propagation in a periodically layered, infinite elastic body: Antiplane strain, *J. Appl. Mech.*, **45**, 343-349, 1978.
- 7) Clouteau, D., Arnst, M., Al-Hussaini, T.M. and Degrande, G.: Free field vibrations due to dynamic loading on a tunnel embedded in a stratified medium, *J. Sound Vib.*, **283**, 173-199, 2005.
- 8) 阿部和久, 古屋卓稔, 紅露一寛: まくらぎ支持された無限長レールの波動伝播解析, 応用力学論文集, **10**, 1029-1036, 2007.
- 9) 安藤英司, 神谷紀生: Helmholtz 方程式の境界要素法固有値解析, 日本機械学会論文集 (C 編), **57**, 543 号, 3457-3462, 1991.
- 10) Mead, D.J.: Free wave propagation in periodically supported, infinite beams, *J. Sound Vib.*, **11**, 181-197, 1970.

(2008 年 4 月 14 日 受付)