

## 中間層を有する周期複合材の弾性波動解析

Elastic Wave Propagation in Periodic Composites with a Layer

阿部和久\*・中山 悠\*\*・紅露一寛\*\*\*

Kazuhiisa ABE, Yutaka NAKAYAMA and Kazuhiro KORO

\*正会員 工博 新潟大学教授 工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

\*\*学(工) 群馬県県土整備部 (〒 371-8570 前橋市大手町 1-1-1)

\*\*\*正会員 博(工) 新潟大学准教授 大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

Elastic wave propagation is analyzed for periodic composites with a layer possessing different periodicity. To achieve this, a numerical method is developed based on the finite element approach. The problem under consideration is stated in the context of the equation of motion for a repetitive unit of the layer. For that sub-region, unknowns on the lower and upper boundaries are described by the aid of impedance matrices. The impedance matrix of a periodic half-plane is composed of eigenvectors of the transfer matrix of a unit cell representing the periodicity. The method is applied to the transmission of incident waves through the periodic layer consisting of a matrix and circular inclusions with square arrangement. It is found that the composite layer with only a few stories can exhibit the stopband at some frequencies. The band structure of the layer can be deduced precisely by dispersion analysis of an infinite field having the identical periodicity of the layer.

**Key Words :** elastic wave, periodic structure, composite layer, transmission

## 1. はじめに

繊維強化プラスチックを始めとする複合材料が様々な工業製品に用いられている<sup>1)</sup>。なお複合材料の開発において、その力学特性の理論的評価は有用な手段となり得る<sup>2)</sup>。特に複合材料を、介在物が規則的に配置された周期構造として理想化できる場合、当該問題は均質化法<sup>3)4)</sup>の適用により効率的に解析可能となる。しかし、均質化法等により得られる巨視的材料特性は、周期長に比べ十分に長い波長で与えられる変形場に対しては有効であるが、微視構造のサイズに匹敵するような波長以下の動的挙動については別の解法により評価する必要がある。

なお、静的用途の場合であっても、複合材料の非破壊評価を行う上では、波動の伝播特性を把握しておくことが重要となる。例えば、Caiら<sup>5)6)</sup>は直交格子状に配置された円形介在物を対象とした非破壊評価を念頭に、その二次元面外波動の透過解析を行っている。さらに、その結果に基づき波動が透過しない周波数帯(ストップバンド)の分布特性を議論している。また、周期構造が有するこのバンド特性を積極的に活用し、波動透過性能を最適化する試みも Sigmund & Jensen<sup>7)</sup>によりなされている。

ちなみに文献5),6)における解析では、介在物は有限領域内のみ配置されている。その様な問題であっても、介在物の個数が非常に多い場合には解析負荷が増大する。そのため、Caiら<sup>8)</sup>は効率的多重散乱解法を提案している。なお、複合材料を無限周期構造としてモデル化し得る場合、周期性を与える最小単位であるユニットセルのみに関する固有値解析により、当該材料のバンド特性を的確に把握することができる。Phaniら<sup>9)</sup>は、はりの様に細い部材で構成される二次元周期構造

を対象に、上述のような手法によりバンド特性を解析している。

一方、介在物がある方向に有限に配置されている場合、または無限周期場による近似が適当でない場合、ユニットセルの固有値解析によるバンド構造の評価は不可能となる。ただし、介在物の配置領域が有限範囲内に限定される場合には、文献8)の手法が適用可能となる。しかし、例えば一方向にのみ有限な厚さを有する層状構造の複合材が無限場に埋め込まれている場合、文献8),9)のいずれの手法も適用できない。斎藤ら<sup>10)</sup>は、二次元面内波動場を対象に、中間層に介在物が正方格子状に配置された問題の境界要素解析を行っている。ただし、入射波動は介在物層に対して垂直に入射するものとしている。この場合、周期層の長手方向1周期分に対称条件を課すことで解析が可能となる。しかし、この様な境界条件設定の下では、斜めに入射する波動に対する一般的な問題は解析できない。これに対し、Otani & Nishimura<sup>11)</sup>は2方向に異なる周期長を有する2重周期構造における3次元Maxwell方程式を対象とした高速多重境界要素法を展開している。そこでは、周期Green関数を用いることで任意の波動入射角が設定可能な、より汎用性の高い解法が構成されている。

なお、フォトニック結晶のバンド構造の評価や、導波路の解析などでは、様々な設定条件に対して種々の解法が提案されている<sup>12)</sup>。一方、複合材料の動弾性解析では、前述の様にその多くが無限周期場や有限領域内に介在物を配置した問題を対象としている。しかし、無限複合材中にそれと異なる複合材を層状に挿入したケースなどに対する弾性波動解析は、より多様な構造におけるバンド特性の評価において有用となる。そこで本論文では、二次元面内波動場を対象に、周期層の

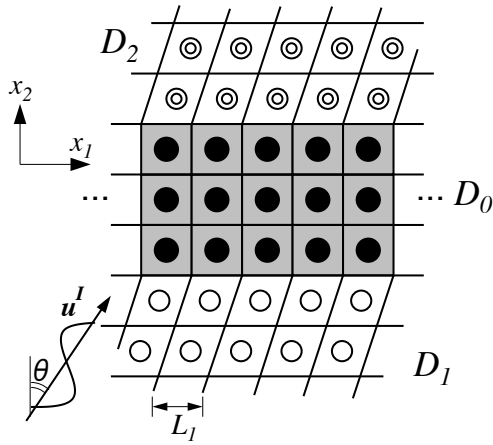


図-1 中間周期層を有する無限場

上下におかれた半無限場もそれぞれ異なる周期構造として設定可能な、より一般的な問題を対象とした解法を構成する。具体的には、上下の半無限周期場を、それと等価なインピーダンス行列(伝達境界)で表現し、波動入射に対する動的応答解析手法を、有限要素法に基づき構成する。これにより当該問題は、中間に位置する周期層の長手方向1ユニットのみの運動方程式に、上・下半無限場のインピーダンス行列を組み込むことで解析可能となる。そのため、比較的小さな自由度の下で効率的に無限波動場を表現することができる。なお、伝達境界を用いた表現は、成層地盤の各層の様部分領域内が均質な場合を対象に多くの適用例がある<sup>13),14)</sup>。ここでは周期構造を対象に定式化を示し、インピーダンス行列、および半無限場における入射波動モードを、当該周期場のユニットセルにおける伝達マトリックスの固有モードにより構成する<sup>15)</sup>。

解析例として、円形介在物を有する中間周期層が、無限動弾性場中に埋め込まれている問題について考える。その下で、下方より波動が入射する場合に本手法を適用し、中間層や上下の半無限場に対応する無限周期場が有する分散特性と解析で得られた波動透過特性との対応関係や、入射角による透過特性の違いなどについて調べる。

## 2. 解析手法

### 2.1 対象とする問題

図-1に示すような2次元平面ひずみ場を考える。波動場は下半平面 $D_1$ 、上半平面 $D_2$ および中間層 $D_0$ の3つの部分領域により構成されており、各領域は形状も含め互いに異なる周期構造により与えられているものとする。ただし、いずれの領域も、 $x_1$ 軸(水平)方向に共通の周期長 $L_1$ を有し、領域間の境界は $x_1$ 軸に平行とする。また、中間層は、 $x_1$ 軸方向に同じ構造が無限に繰り返されているが、 $x_2$ 方向(鉛直)には複数段から成る有限な厚さを有している。以下では、入射波動 $\mathbf{u}^I$ が $D_1$ 領域内を、ある入射角 $\theta$ で上方に進行する場合を考える。なお、 $\mathbf{u}^I$ は $D_1$ 領域の周期場内に存在する伝

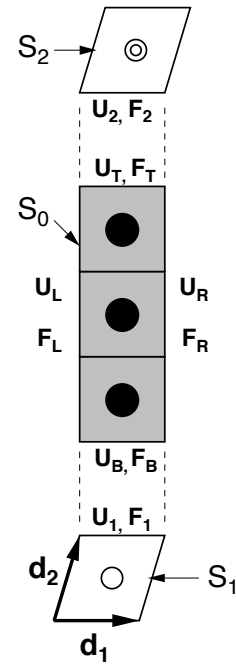


図-2 中間層1ユニットと上下半無限場のユニットセル

播波動モードの何れかで与える。

### 2.2 中間層の運動方程式

中間層 $D_0$ は $x_1$ 軸方向に周期性を有している。そこで、 $x_1$ 軸方向1周期分の部分領域 $S_0$ を図-2のように取り出す。なお、 $S_0$ は同一の構造単位を高さ方向に複数段積層したものにより与えられている。 $S_0$ における定常動力学場を有限要素で離散化すると、当該部分領域に対し次の運動方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{BB} & \mathbf{K}'_{BT} & \mathbf{K}'_{BM} & \mathbf{K}'_{BL} & \mathbf{K}'_{BR} \\ \mathbf{K}'_{TB} & \mathbf{K}'_{TT} & \mathbf{K}'_{TM} & \mathbf{K}'_{TL} & \mathbf{K}'_{TR} \\ \mathbf{K}'_{MB} & \mathbf{K}'_{MT} & \mathbf{K}'_{MM} & \mathbf{K}'_{ML} & \mathbf{K}'_{MR} \\ \mathbf{K}'_{LB} & \mathbf{K}'_{LT} & \mathbf{K}'_{LM} & \mathbf{K}'_{LL} & \mathbf{K}'_{LR} \\ \mathbf{K}'_{RB} & \mathbf{K}'_{RT} & \mathbf{K}'_{RM} & \mathbf{K}'_{RL} & \mathbf{K}'_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_B \\ \mathbf{U}_T \\ \mathbf{U}_M \\ \mathbf{U}_L \\ \mathbf{U}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_B \\ \mathbf{F}_T \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_L \\ \mathbf{F}_R \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 $\{\mathbf{U}\}, \{\mathbf{F}\}$ は $S_0$ を離散化して得られる節点変位ベクトルと節点力ベクトルである。 $(\cdot)_B, (\cdot)_T, (\cdot)_M, (\cdot)_L, (\cdot)_R$ はそれぞれ $S_0$ 底辺, 上辺, 領域内, 左辺, 右辺に位置する節点に対応した部分ベクトル成分、 $\mathbf{K}'_{ij}$ は剛性行列 $\mathbf{K}_{ij}$ と質量行列 $\mathbf{M}_{ij}$ により $\mathbf{K}'_{ij} = \mathbf{K}_{ij} - \omega^2 \mathbf{M}_{ij}$ で与えられる部分行列、 $\omega$ は円振動数である。なお、領域内に外力は作用しないものとしている。

周期場内を伝播する入射波動(Bloch波)は、一般に次式の様に表現することができる<sup>16)</sup>。

$$\mathbf{u}^I(\mathbf{x}) = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{x}$ は位置ベクトル、 $\mathbf{k}$ は入射波動の波数ベクトルである。また、 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ は次の周期性を有する。

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + n_l \mathbf{d}_l) = \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad (n_l \in \mathbb{Z}) \quad (3)$$

ここで、 $n_l$ は整数、 $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ は下半無限領域 $D_1$ を構成する周期構造1ユニット( $S_1$ )の周期性を定義する基本ベ

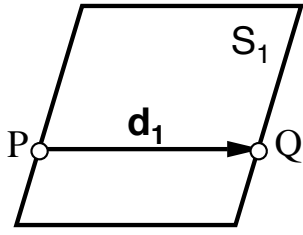


図-3 ユニットセル左右辺節点の対応

クトル(図-2)であり、繰り返し指標は総和規約に従うものとする。

すると、図-3に示すようにおかれた  $S_1$  左辺上の点 P と、それに対応する右辺上の点 Q における入射波動  $\mathbf{u}_P^I, \mathbf{u}_Q^I$  に関して次の関係 (Bloch の定理) が成り立つ。

$$\mathbf{u}_Q^I = e^{-ik_1 d_1} \mathbf{u}_P^I = e^{-ik_1 L_1} \mathbf{u}_P^I \quad (4)$$

ここで、 $k_1$  は波数ベクトル  $\mathbf{k}$  の  $x_1$  方向成分である。

したがって、入射波動  $\mathbf{u}^I$  に対する応答解  $\mathbf{u}$  も、全領域内で次式をみたす。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{d}_1) = e^{-ik_1 L_1} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (5)$$

式(5)より、中間周期層の水平方向1ユニット  $S_0$  の左右辺上の節点変位と節点力とに対して次の関係が成り立つこととなる。

$$\begin{aligned} \{\mathbf{U}_R\} &= e^{-ik_1 L_1} \{\mathbf{U}_L\}, \\ \{\mathbf{F}_R\} &= -e^{-ik_1 L_1} \{\mathbf{F}_L\} \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)を(1)に代入し、 $\mathbf{K}'_{ij}$  の対称性の下で  $\{\mathbf{U}_R\}, \{\mathbf{F}_R\}$  成分を消去すると次の運動方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{BB} & \mathbf{K}'_{BT} & \mathbf{K}'_{BM} & \mathbf{K}'_{BL} + e^{-ik_1 L_1} \mathbf{K}'_{BR} \\ & \mathbf{K}'_{TT} & \mathbf{K}'_{TM} & \mathbf{K}'_{TL} + e^{-ik_1 L_1} \mathbf{K}'_{TR} \\ & & \mathbf{K}'_{MM} & \mathbf{K}'_{ML} + e^{-ik_1 L_1} \mathbf{K}'_{MR} \\ \text{Sym.} & & & \mathbf{K}'_{LL} + \mathbf{K}'_{RR} \\ & & & + e^{-ik_1 L_1} \mathbf{K}'_{LR} + e^{ik_1 L_1} \mathbf{K}'_{RL} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\times \begin{bmatrix} \mathbf{U}_B \\ \mathbf{U}_T \\ \mathbf{U}_M \\ \mathbf{U}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_B \\ \mathbf{F}_T \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

ここで、“Sym.”は行列上三角成分の共役転置を意味しており、係数行列は Hermite 行列で与えられる。

なお、図-2の様に  $S_0$  と接合される下・上半平面境界上の節点変位ベクトルと節点力ベクトルをそれぞれ  $\{\mathbf{U}_1\}, \{\mathbf{F}_1\}$  および  $\{\mathbf{U}_2\}, \{\mathbf{F}_2\}$  と表す。すると、 $S_0$  と  $S_1$ 、 $S_0$  と  $S_2$  との接合辺において、次の変位の適合条件と力のつり合い条件が成り立つ。

$$\{\mathbf{U}_B\} = \{\mathbf{U}_1\}, \quad \{\mathbf{F}_B\} + \{\mathbf{F}_1\} = \mathbf{0} \quad (8)$$

$$\{\mathbf{U}_T\} = \{\mathbf{U}_2\}, \quad \{\mathbf{F}_T\} + \{\mathbf{F}_2\} = \mathbf{0} \quad (9)$$

### 2.3 $S_1$ 上辺節点力の評価

$S_0$  の運動方程式(7)において、底辺と上辺における節点力  $\{\mathbf{F}_B\}, \{\mathbf{F}_T\}$  は、式(8),(9)より  $\{\mathbf{F}_1\}, \{\mathbf{F}_2\}$  によって表すことができる。そこでまず、 $S_1$  上辺における節点力  $\{\mathbf{F}_1\}$  を変位応答と入射波動により表す。

下半平面を構成している半無限周期場と、それを補完する上半無限周期場を考える。上半無限系下端境界に作用する節点外力を  $\{\mathbf{F}_{1U}\}$ 、それに対する境界上の節点変位応答を  $\{\mathbf{U}_{1U}\}$  と表すものとする。今、 $\{\mathbf{U}_{1U}\}$  と  $\{\mathbf{F}_{1U}\}$  との関係を与えるインピーダンス行列  $[\mathbf{K}_{1U}]$  を、次式をみたす行列として定義する。

$$[\mathbf{K}_{1U}]\{\mathbf{U}_{1U}\} = \{\mathbf{F}_{1U}\} \quad (10)$$

また、同様に下半無限系上端境界上の節点外力を  $\{\mathbf{F}_{1D}\}$  とし、それに対応する境界上の節点変位応答を  $\{\mathbf{U}_{1D}\}$  と表す。これらの関係を与えるインピーダンス行列  $[\mathbf{K}_{1D}]$  を次式により定義する。

$$[\mathbf{K}_{1D}]\{\mathbf{U}_{1D}\} = \{\mathbf{F}_{1D}\} \quad (11)$$

次に、下半平面  $D_1$  と同一のユニットセル  $S_1$  により構成される無限周期場内を、入射波動  $\mathbf{u}^I$  が伝播する問題を考える。 $\mathbf{u}^I$  は前述のとおり上方に向かって進行する波動として設定しているので、上半無限領域内を伝播して行く  $\mathbf{u}^I$  は、その下端境界上に入射波動に対応する内部節点力  $\{\mathbf{F}'_{1U}\}$  を外力として加えることで再現できる。この時、境界辺上における入射波動変位  $\{\mathbf{U}'_{1U}\}$  と節点力  $\{\mathbf{F}'_{1U}\}$  とに関し、式(10)より次式が成り立つ。

$$[\mathbf{K}_{1U}]\{\mathbf{U}'_{1U}\} = \{\mathbf{F}'_{1U}\} \quad (12)$$

なお、無限領域内を伝播する入射波動  $\mathbf{u}^I$  により発生する下半無限系上端境界の内部節点力  $\{\mathbf{F}'_{1D}\}$  と式(12)の  $\{\mathbf{F}'_{1U}\}$  とは、次の力のつり合い条件をみたす。

$$\{\mathbf{F}'_{1D}\} = -\{\mathbf{F}'_{1U}\} \quad (13)$$

また、上・下半無限系の接合境界における変位の適合条件より、 $\{\mathbf{U}'_{1U}\} = \{\mathbf{U}'_{1D}\}$  である。よって、式(13)右辺に式(12)を代入すると、次式の様に  $\{\mathbf{F}'_{1D}\}$  を  $\{\mathbf{U}'_{1D}\}$  により表すことができる。

$$\{\mathbf{F}'_{1D}\} = -[\mathbf{K}_{1U}]\{\mathbf{U}'_{1D}\} \quad (14)$$

元の問題に戻り、 $S_1(D_1)$  と  $S_0(D_0)$  との結合境界について考える。 $S_1$  における上辺(結合辺)の変位と節点力は、入射波動  $\{\mathbf{U}'_{1D}\}, \{\mathbf{F}'_{1D}\}$  と反射波動  $\{\mathbf{U}^R_{1D}\}, \{\mathbf{F}^R_{1D}\}$  との和により与えられる。

$$\begin{aligned} \{\mathbf{U}_1\} &= \{\mathbf{U}'_{1D}\} + \{\mathbf{U}^R_{1D}\}, \\ \{\mathbf{F}_1\} &= \{\mathbf{F}'_{1D}\} + \{\mathbf{F}^R_{1D}\} \end{aligned} \quad (15)$$

反射波動は  $S_1$  上辺より下方へ伝播して行くので、式(11)に基づき次の関係が成り立つ。

$$[\mathbf{K}_{1D}]\{\mathbf{U}^R_{1D}\} = \{\mathbf{F}^R_{1D}\} \quad (16)$$

式(14),(16)を式(15)第2式に代入すると、 $S_1$  上辺節点力  $\{\mathbf{F}_1\}$  を入・反射波動の節点変位により与える次式を得る。

$$\{\mathbf{F}_1\} = -[\mathbf{K}_{1U}]\{\mathbf{U}'_{1D}\} + [\mathbf{K}_{1D}]\{\mathbf{U}^R_{1D}\} \quad (17)$$

また、式(15)第1式より、 $\{\mathbf{U}_{1D}^R\}$ は $\{\mathbf{U}_1\}, \{\mathbf{U}_{1D}^I\}$ により以下で与えることができる。

$$\{\mathbf{U}_{1D}^R\} = \{\mathbf{U}_1\} - \{\mathbf{U}_{1D}^I\} \quad (18)$$

そこで、式(18)を(17)に代入すると、結局 $\{\mathbf{F}_1\}$ を、変位解 $\{\mathbf{U}_1\}$ と入射波動変位 $\{\mathbf{U}_{1D}^I\}$ とにより次式のように表すことが可能となる。

$$\{\mathbf{F}_1\} = [\mathbf{K}_{1D}]\{\mathbf{U}_1\} - [\mathbf{K}_{1U} + \mathbf{K}_{1D}]\{\mathbf{U}_{1D}^I\} \quad (19)$$

## 2.4 $S_2$ 底辺節点力の評価

ユニットセル $S_2$ で構成される上半無限系下端における節点変位 $\{\mathbf{U}_{2U}\}$ と節点力 $\{\mathbf{F}_{2U}\}$ との関係を与えるインピーダンス行列 $[\mathbf{K}_{2U}]$ を、次式をみたす行列として定義する。

$$[\mathbf{K}_{2U}]\{\mathbf{U}_{2U}\} = \{\mathbf{F}_{2U}\} \quad (20)$$

上半平面 $D_2$ 内の波動は、上方へ伝播して行く透過波のみで構成されるので、 $D_2$ 下端節点変位 $\{\mathbf{U}_2\}$ と節点力 $\{\mathbf{F}_2\}$ との関係は式(20)により記述できる。

## 2.5 求解方程式の構成

式(8),(9)を式(19),(20)に代入すると、中間層 $S_0$ の上・下境界辺における節点力 $\{\mathbf{F}_T\}, \{\mathbf{F}_B\}$ を、節点変位 $\{\mathbf{U}_T\}, \{\mathbf{U}_B\}$ および入射波 $\{\mathbf{U}_{1D}^I\}$ により表現することが可能となる。

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}_B\} &= -[\mathbf{K}_{1D}]\{\mathbf{U}_B\} + [\mathbf{K}_{1U} + \mathbf{K}_{1D}]\{\mathbf{U}_{1D}^I\}, \\ \{\mathbf{F}_T\} &= -[\mathbf{K}_{2U}]\{\mathbf{U}_T\} \end{aligned} \quad (21)$$

式(21)を $S_0$ における運動方程式(7)に代入して整理すると、最終的に次の求解方程式を得る。

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{BB} + \mathbf{K}_{1D} & \hat{\mathbf{K}}_{BT} & \hat{\mathbf{K}}_{BM} & \hat{\mathbf{K}}_{BL} \\ \hat{\mathbf{K}}_{TB} & \hat{\mathbf{K}}_{TT} + \mathbf{K}_{2U} & \hat{\mathbf{K}}_{TM} & \hat{\mathbf{K}}_{TL} \\ \hat{\mathbf{K}}_{MB} & \hat{\mathbf{K}}_{MT} & \hat{\mathbf{K}}_{MM} & \hat{\mathbf{K}}_{ML} \\ \hat{\mathbf{K}}_{LB} & \hat{\mathbf{K}}_{LT} & \hat{\mathbf{K}}_{LM} & \hat{\mathbf{K}}_{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_B \\ \mathbf{U}_T \\ \mathbf{U}_M \\ \mathbf{U}_L \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} [\mathbf{K}_{1U} + \mathbf{K}_{1D}]\{\mathbf{U}_{1D}^I\} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{K}}_{ij}$ は式(7)に示した行列の部分行列である。

## 3. インピーダンス行列の作成

2. に展開した手法により、本研究で対象としている問題は、半無限周期場のインピーダンス行列 $[\mathbf{K}_{1D}], [\mathbf{K}_{1U}], [\mathbf{K}_{2U}]$ を導出する問題に帰着する。これらの行列は、文献(15)において示した手順により作成する。ここではその概略について述べる。

### 3.1 伝達マトリックスの導出

図-1における半平面 $D_1$ または $D_2$ と同一の周期構造 $S_1$ または $S_2$ で与えられる無限周期場の波動問題を

考える。今、 $\mathbf{d}_1$ 方向の波数成分 $k_1$ を有する波動場を対象とすると、当該周期場を構成しているユニットセル( $S_1$ または $S_2$ )における運動方程式は、Blochの定理(式(6))の適用により、式(7)と同様にユニットセル右境界上の節点成分を縮約して与えられることとなる。これに対して次の固有値問題を設定する。

$$[\hat{\mathbf{K}}]\{\phi_i'\} = \omega_i^2[\hat{\mathbf{M}}]\{\phi_i'\}, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (23)$$

ここで、 $[\hat{\mathbf{K}}], [\hat{\mathbf{M}}]$ は、ユニットセルを離散化の後、右境界の節点成分を縮約して得られる剛性行列と質量行列である。また、 $\omega_i, \{\phi_i'\}$ は固有円振動数と、それに対応する固有ベクトル、 $N$ は $(\ )_R$ 成分縮約後の自由度である。

ユニットセルの運動方程式の解を固有ベクトルの一次結合により次式のように構成する。

$$\{\mathbf{U}'\} = \sum_i^N \alpha_i \{\phi_i'\} \quad (24)$$

ここで、 $\{\mathbf{U}'\} = \{\mathbf{U}_B, \mathbf{U}_T, \mathbf{U}_M, \mathbf{U}_L\}$ 、 $\alpha_i$ は結合係数である。なお、 $\alpha_i$ は次式により具体的に与えられる。

$$\alpha_i = \frac{1}{m_i(\omega_i^2 - \omega^2)} [\bar{\phi}_i']^T \{\mathbf{F}'\} \quad (25)$$

ここで、 $\{\mathbf{F}'\}$ は $\{\mathbf{U}'\}$ に対応する節点力ベクトルであり、 $(\ )$ は複素共役を意味する。

外力が領域内に作用せず $\{\mathbf{F}_M\} = \{\mathbf{0}\}$ とすると、式(24),(25)より、上・底辺の節点変位を節点力により与える関係式を得ることができる。さらに、これを変形して、底辺の節点変位と節点力とから上辺のそれらを与える次の式を導出する。

$$[\mathbf{G}] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_B \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_T \\ -\mathbf{F}_T \end{Bmatrix} \quad (26)$$

ここで、 $[\mathbf{G}]$ は底辺の節点ベクトルより上辺のそれを与える伝達マトリックスであり、具体的には次のようになる。

$$\begin{aligned} [\mathbf{G}] &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{TT}\mathbf{H}_{BT}^{-1} & -\mathbf{H}_{TT}\mathbf{H}_{BT}^{-1}\mathbf{H}_{BB} + \mathbf{H}_{TB} \\ -\mathbf{H}_{BT}^{-1} & \mathbf{H}_{BT}^{-1}\mathbf{H}_{BB} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{BB} & \mathbf{H}_{BT} \\ \mathbf{H}_{TB} & \mathbf{H}_{TT} \end{bmatrix} &= \sum_i^N \frac{1}{m_i(\omega_i^2 - \omega^2)} \begin{Bmatrix} \phi_{Bi} \\ \phi_{Ti} \end{Bmatrix} [\bar{\phi}_{Bi}\bar{\phi}_{Ti}]^T \end{aligned} \quad (27)$$

なお、 $\{\phi_{Bi}\}, \{\phi_{Ti}\}$ は固有ベクトルの $(\ )_B, (\ )_T$ 成分である。

### 3.2 インピーダンス行列の導出

以下では上半無限系下端のインピーダンス行列 $[\mathbf{K}_U]$ を例に、その導出過程について示す。

波数ベクトル $\mathbf{k}$ の下、無限周期場内を伝播して行く波動を考える。ユニットセル上・底辺の節点ベクトル間にBlochの定理を適用すると次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_T \\ -\mathbf{F}_T \end{Bmatrix} = e^{-i\mathbf{h}_2} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_B \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix} \quad (28)$$

ここで、 $h_i$  は波数ベクトル  $\mathbf{k}$  を、ユニットセルの逆格子ベクトル  $\mathbf{b}_i$  により  $\mathbf{k} = h_i \mathbf{b}_i$  と表現した際の係数であり、 $h_2$  の値は以降の固有値解析により与えられる。なお、 $\mathbf{b}_i$  とユニットセルの基本ベクトル  $\mathbf{d}_i$  とに対して次式が成り立つ。

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{d}_j = \delta_{ij} \quad (29)$$

ここで、 $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタである。

式 (28) を (26) に代入すると次の固有値問題を求める。

$$[\mathbf{G}] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_B \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_B \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix}, \quad (\lambda = e^{-ih_2}) \quad (30)$$

式 (30) の固有モードには、底辺から上辺に向かって進行する波動モードと、上辺から底辺に向かうモードとが半数ずつ存在している。その中から前者のみを抽出し、それらを並べて次の正方行列を作成する。

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}_s] &:= [\mathbf{U}_1 \cdots \mathbf{U}_{N_1/2}], \\ [\mathbf{F}_s] &:= [\mathbf{F}_1 \cdots \mathbf{F}_{N_1/2}] \end{aligned} \quad (31)$$

ここで、 $N_1$  は全モード数である。

上半無限系下端の任意の作用力  $\{\mathbf{F}_U\}$  と、それに対応する応答変位  $\{\mathbf{U}_U\}$  は、それぞれ固有モード  $\{\mathbf{F}_i\}, \{\mathbf{U}_i\}$  の一次結合により次の様に与えることができる。

$$\begin{aligned} \{\mathbf{U}_U\} &= \sum_i^{N_1/2} a_i \{\mathbf{U}_i\} = [\mathbf{U}_s] \{\mathbf{a}\}, \\ \{\mathbf{F}_U\} &= \sum_i^{N_1/2} a_i \{\mathbf{F}_i\} = [\mathbf{F}_s] \{\mathbf{a}\} \end{aligned} \quad (32)$$

ここで、 $a_i$  は係数である。

式 (10) の様にインピーダンス行列  $[\mathbf{K}_U]$  を定義すると、 $\{\mathbf{U}_U\}, \{\mathbf{F}_U\}$  について次式が成り立つ。

$$[\mathbf{K}_U] \{\mathbf{U}_U\} = \{\mathbf{F}_U\} \quad (33)$$

式 (33) に (32) を代入すると次式を得る。

$$[\mathbf{K}_U][\mathbf{U}_s] \{\mathbf{a}\} = [\mathbf{F}_s] \{\mathbf{a}\} \quad (34)$$

ここで、 $\{\mathbf{a}\}$  は任意であるから、結局  $[\mathbf{K}_U]$  は次式により求めることができる。

$$[\mathbf{K}_U] = [\mathbf{F}_s][\mathbf{U}_s]^{-1} \quad (35)$$

下半無限系上端のインピーダンス行列  $[\mathbf{K}_D]$  についても、同様の計算手順により作成することができる。

## 4. 解析例

### 4.1 均質場内に埋め込まれた中間層の波動透過解析

#### (1) 解析条件

まず、本手法の妥当性を確認する目的で、図-4 に示す様に、上下の半無限領域を同一の均質場で与えた問題を解析対象とする。中間層を構成する周期構造は正方形格子で与え、その中心に直径  $L_1/2$  の円形介在物を配置する。また、解析における中間層の数は 1~3 層に設定した。 $D_1, D_2$  および  $D_0$  の母材は同一材料とし、介

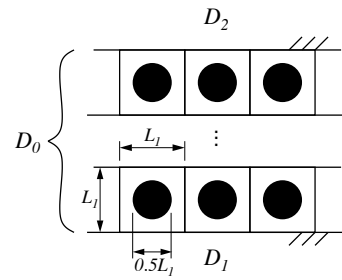
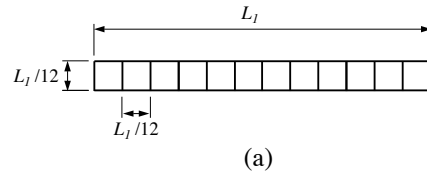
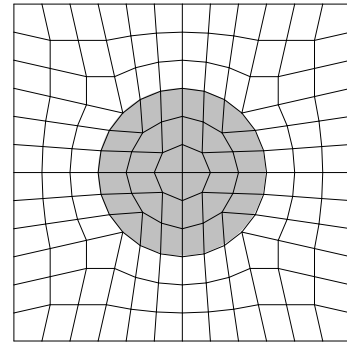


図-4 無限均質場に中間周期層を埋め込んだ問題



(a)



(b)

図-5 ユニットセルの要素分割。(a):半無限均質場。(b):中間周期層

在物も含め全ての領域においてポアソン比は 0.3 とする。以下では、 $D_0$  の母材に対する介在物の剛性比および質量比を共に 5 と設定した場合についての解析結果を示す。

上・下半無限場  $D_1, D_2$  のインピーダンス行列の作成に当り、これらのユニットセル  $S_1, S_2$  を設定する必要がある。なお、 $D_1, D_2$  は均質場として設定しているので、ユニットセルはその水平方向サイズを  $L_1$  にとる以外、寸法や形状は任意で良い。そこで、本解析では図-5(a) に示すように  $x_1$  軸方向を 12 等分割し、 $x_2$  方向をこれと同一の要素長の下、1 要素で分割して得られる長方形領域により  $S_1, S_2$  を与えた。一方、 $S_0$  については、図-5(b) の様に要素分割したものを鉛直方向に重ねて作成した。いずれのユニットセルにおいても 4 節点四辺形要素を用いて離散化を行っている。

#### (2) 横波入射に対する透過解析

$D_1$  領域より横波平面波を入射させた場合の応答解析を行い、波動の透過率を求めた。なお、透過率は  $S_0$  底辺を通過する入射波の時間平均エネルギー  $\bar{E}_I$  と、上辺を通過する透過波の時間平均エネルギー  $\bar{E}_T$  との比  $\bar{E}_T/\bar{E}_I$  により与える。

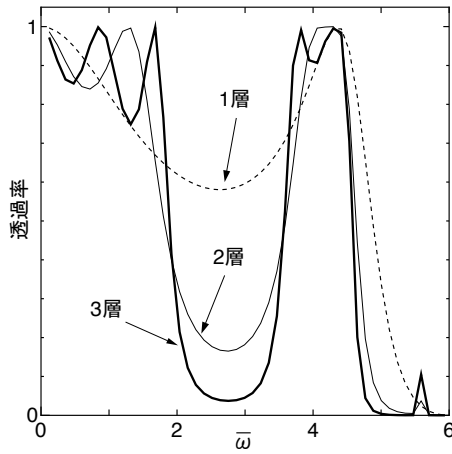


図-6 横波平面波の透過率 ( $\theta=0^\circ$ )

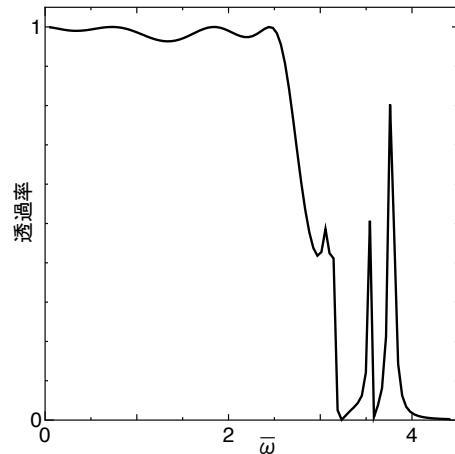


図-7 横波平面波の透過率 ( $\theta=45^\circ$ )

$\bar{E}_I, \bar{E}_T$  は次式により求めることができる。

$$\begin{aligned} \bar{E}_I &= \frac{\omega}{2} \text{Im}([\bar{\mathbf{U}}_{1D}^I]^T [\mathbf{K}_{1U}] \{\mathbf{U}_{1D}^I\}), \\ \bar{E}_T &= \frac{\omega}{2} \text{Im}([\bar{\mathbf{U}}_T]^T [\mathbf{K}_{2U}] \{\mathbf{U}_T\}) \end{aligned} \quad (36)$$

ここで、 $\text{Im}()$  は  $()$  内の虚部を表す。

ちなみに、式 (36) と同様に  $S_0$  底辺での反射波動エネルギー  $\bar{E}_R$  を求めたところ、何れの結果においても  $\bar{E}_I = \bar{E}_R + \bar{E}_T$  が十分な精度の下で成り立っており、本解析が適切に行われていることを確認した。

鉛直上方 ( $\theta=0^\circ$ ) および右斜め  $45^\circ$  方向に波動を入射した場合の波動透過率を図-6, 7 に示す。図の横軸は、 $D_1(D_2)$  の横波伝播速度  $C_{T1}$  と水平方向周期長  $L_1$  を用いて  $\bar{\omega} = L_1\omega/C_{T1}$  により無次元化した円振動数を示している。なお、鉛直入射 (図-6) においては、 $S_0$  を 1~3 層で構成した場合の結果を、 $\bar{\omega} \leq 6$  に対して示している。図より、 $2 < \bar{\omega} < 3$  および  $5 < \bar{\omega}$  の周波数域において透過率が低下しており、これらの周波数帯にストップバンドが概ね形成されている様子が窺える。また、この傾向は層数の増加と共に顕著に現れており、3 層程度の比較的少ない層数の下でも十分な遮蔽性能が得られていることがわかる。

一方、 $45^\circ$  入射の場合 (図-7) においては、 $S_0$  を 3 層で構成した場合の結果のみ示している。 $3 < \bar{\omega}$  の周波数域において透過率は増減しており、ストップバンド内に透過波が存在する周波数帯が分布している様子が確認できる。

### (3) $S_0$ で与えられる無限周期場の分散曲線との比較

(2) に示した透過特性は、中間層を構成している周期構造の特徴を反映しているものと考えられる。そこで、 $S_0$  と同一の周期単位により与えられる無限周期場における波動モードの分散曲線を求めた<sup>9),17)</sup>。

2 重周期構造の波数空間における波動モードは、分散曲面によって与えられる。分散特性は、波数空間において、逆格子ベクトル  $\mathbf{b}_i$  を  $2\pi$  倍したベクトルを基底として与えられるユニットセルに関して周期性を持つ<sup>16)</sup>。したがって分散特性は、この波数空間で定義されたユニットセル内の有限領域で評価することができ

る。さらに、格子構造の対称性により、今対象としている問題においては、図-8 に示す 3 つの波数点 A, B, C を結んでできる三角形の領域内についてのみ考えれば十分である。

この 3 点を結ぶ直線上の各波数ベクトルに対して伝播波動モードの分散曲面の断面 (分散曲線) を求めた結果を図-9 に示す。なお、横軸は A-B-C-A を波数軸に展開したものである。原点における  $M_1$  のモードの傾きが母材および介在物の横波の伝播速度に一致していることから、このモードは均質場における横波に相当していることがわかる。また、 $M_1$  に対応する高周波モードが  $M_3$  であり、これらの間には当該モードのストップバンド  $\omega_1$  が存在している。一方、 $M_2$  は縦波に対応したモードとなっている。また介在物の存在により、これらの群速度は波数に依存し、分散性を有していることが確認できる。ちなみに解析で用いた入射波動は、式 (31) のモード  $\{\mathbf{U}_i\}$  のうち、図-9 の分散曲線より決まる所定の固有振動数に対応するものを抽出することにより作成している。

$\theta=0^\circ$  での波動入射の場合、無限周期場における波動透過特性は A-B 上の波数区間における分散曲線の分布のみで決まる。例えば、図中に示した周波数帯  $\omega_2$  には分散曲線が無く、波動モードが全く存在しない。そのため、図-6 に示した中間層の透過率も  $\omega_2$  に対応する周波数域で大きく減少している。一方、周波数帯  $\omega_1$  には伝播モード  $M_2$  が本来存在しているが、横波モード  $M_1, M_3$  に関してはストップバンドを与えているので、横波を入射した本解析では、 $\omega_1$  に相当する周波数域でも透過率が低下したと思われる。

次に  $\theta=45^\circ$  での横波入射の場合について考察する。この場合は、図-9 の C-A 間の分散曲線が対応する。図-9 より、 $3 < \bar{\omega} < 4$  に分散曲線の存在しない周波数帯 (ストップバンド)  $\omega_3$  が分布していることが確認できる。これに対し、3 層の中間層を設定した場合 (図-7) では、 $3 < \bar{\omega}$  において波動透過率の急減少が認められ、無限周期構造におけるストップバンドとの対応が確認できる。

以上のことより、中間層数が 3 程度で比較的少ない場合であっても、無限周期場とほぼ同様の波動透過特性を

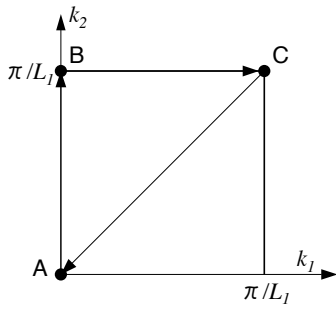


図-8 波数空間における評価点

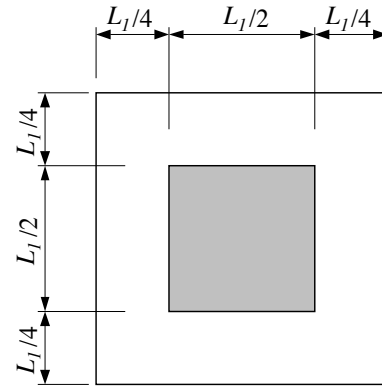


図-10 上下半無限周期場のユニットセル

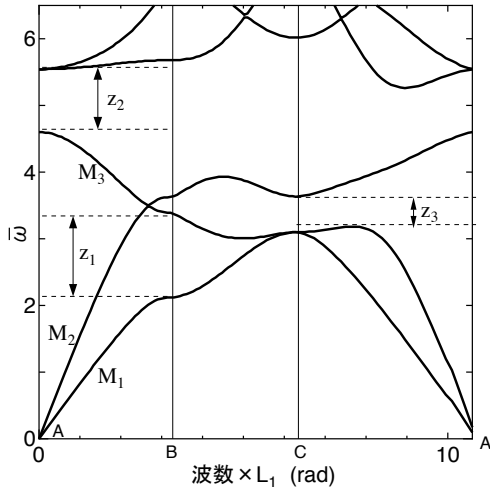


図-9 評価点における分散曲線

示すことがわかった。なお、図-7において、 $3.5 < \bar{\omega} < 4$ の周波数域に認められる透過率の局所的な増加は、図-9のストップバンド上端付近に相当しており、バンド端の定在波モードが励起されたものと考えられる。

## 4.2 周期場内に埋め込まれた中間層の波動透過解析

### (1) 解析条件

4.1と同様に円形介在物を含む中間層3層が、図-10に示す正方形介在物を有するユニットセルで与えられる無限周期場内に埋め込まれている問題に対して本手法を適用する。なお、上下の半無限周期場( $D_1, D_2$ )における母材の質量密度 $\rho_1$ とせん断弾性係数 $\mu_1$ に対する、介在物のそれらの物性値( $\bar{\rho}_1, \bar{\mu}_1$ )の比を $\bar{\rho}_1/\rho_1 = \bar{\mu}_1/\mu_1 = 2$ とした。さらに、中間層の母材と介在物の質量・せん断弾性係数( $\rho_0, \mu_0$ ), ( $\bar{\rho}_0, \bar{\mu}_0$ )の $\rho_1, \mu_1$ に対する比を、それぞれ $\rho_0/\rho_1=1, \mu_0/\mu_1=1/3, \bar{\rho}_0/\rho_1=4, \bar{\mu}_0/\mu_1=4/3$ と設定した。また、ポアソン比はいずれも0.3としている。この設定条件の場合、 $D_0$ の母材・介在物内の横波伝播速度は、 $D_1, D_2$ のそれらの $1/\sqrt{3} \approx 0.577$ となる。

要素分割は、中間層については図-5(b)と同一のものをを用い、上下半無限場については図-10のユニットセルを $12 \times 12$ 分割して与えた。

### (2) 入射波動に対する透過解析

$D_1$ のユニットセル $S_1$ で与えられる無限周期場が存在する伝播モードを鉛直入射する場合について解析を行った。 $x_2$ 方向に進行する波動モードの分散曲線を図-11に示す。なお、図には中間層ユニット $S_0$ に対応する無限場の分散曲線も合わせて示している。図において、原点における $M_1$ の傾きが母材および介在物の横波伝播速度に一致していることから、このモードが均質場における横波に相当するものであることがわかる。また、このモードは周波数帯 $z_2$ にストップバンドを持ち、それより高い周波数域において再度 $M_2$ のパスバンドを与えている。以下の解析では、 $M_1$ で与えられる波動モードを入射波動として用いた。

中間層の波動透過率を図-12に示す。なお、 $M_1$ のモードは $\bar{\omega} = 2.7$ 付近でストップバンド下端に達するので、図示した周波数範囲に関しては、それ以上の周波数域に当該モードは存在しない。よって、 $S_1$ のユニットセルで与えられる無限周期場においては、透過率は $\bar{\omega} = 2.7$ 以下で1、それより高周波数域で0となる。これに対し、中間層を有する本解析例では、 $\bar{\omega} = 1.5$ 付近から透過率の急激な減少が認められる。一方、図-11において、中間層に対応する無限周期場の分散曲線 $m_1$ と $m_2$ との間のストップバンドが $1.5 < \bar{\omega} < 2.5$ の範囲に分布していることが確認できる。このことより、この周波数帯 $z_1$ において中間層の波動透過率が減少し、その結果図-12に示したようにストップバンド域が低周波数側に拡張されたものと考えられる。

以上のことより、各層のバンド特性を適切に組み合わせることで、フィルタ特性を制御し得ることが確認できた。

## 5. おわりに

本論文では、上下の半無限周期場の間に、これらと異なる周期構造を有する中間層を挿入して得られる無限場を対象とした弾性波動伝播解析法を、有限要素法に基づき構成した。具体的には、当該波動問題において、中間層1ユニットの運動方程式を抽出し、上・下半無限場との結合境界辺の境界条件の記述に、半無限場のインピーダンス行列を導入する方法を採った。こ

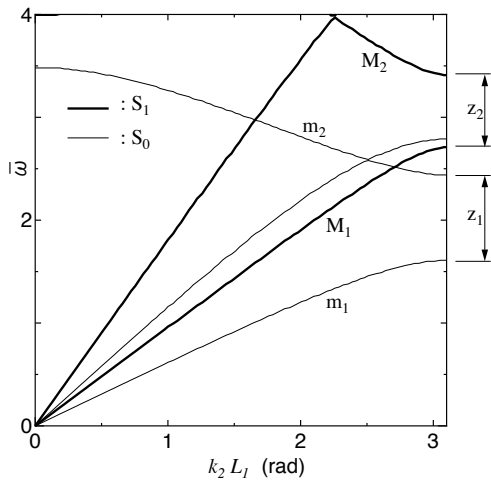


図-11  $S_1, S_0$  で与えられる無限周期場の分散曲線

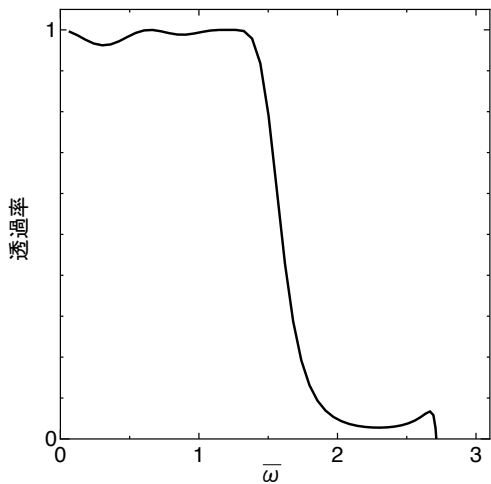


図-12 モード  $M_1$  の入射波動に対する透過率 ( $\theta=0^\circ$ )

れにより、最終的に得られる求解方程式は、中間層 1 ユニット程度の自由度のものに帰着することができる。よって提案手法によれば、上下の半無限場も含め、それらの周期特性を規定しているユニットセルの離散化により、比較的少ない自由度の下で無限場の解を得ることができる。

なお解析例では、上・下半無限場を均質場で与えた場合や、同一の周期構造により与えた場合を対象に、中間層のエネルギー透過率を求めた。中間層の層数を 3 程度と比較的少なく設定した場合でも、入射波動に対して十分な遮蔽性能を発揮し得ることを確認した。また、中間層に対応する無限周期場の波動分散解析より得られるストップバンドと、中間層の波動透過率が減少する周波数帯との良好な一致が認められ、無限周期場のバンド構造に基づき、中間層の透過特性を適切に評価し得ることがわかった。

## 参考文献

- 1) 三木光範・福田武人・元木信弥・北條正樹: 複合材料, 共立出版, 1997.
- 2) Hashin, Z.: Analysis of composite materials – A survey, *J. Appl. Mech.*, **50**, 481-505, 1983.
- 3) Bendsøe, M.P. and Kikuchi, N.: Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **71**, 197-224, 1988.
- 4) Guedes, J.M. and Kikuchi, N.: Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **83**, 143-198, 1990.
- 5) Cai, L.-W., James H. and Williams Jr.: Full-scale simulations of elastic wave scattering in fiber-reinforced composites, *Ultrasonics*, **37**, 463-482, 1999.
- 6) Cai, L.-W., James H. and Williams Jr.: NDE via stop band formulation in fiber reinforced composites having square fiber arrangements, *Ultrasonics*, **37**, 483-492, 1999.
- 7) Sigmund, O. and Jensen, J.S.: Systematic design of phononic band-gap materials and structures by topology optimization, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **361**, 1001-1019, 2003.
- 8) Cai, L.-W., James H. and Williams Jr.: Large-scale multiple scattering problems, *Ultrasonics*, **37**, 453-462, 1999.
- 9) Phani, A.S., Woodhouse, J. and Fleck, N.A.: Wave propagation in two-dimensional periodic lattices, *J. Acoust. Soc. Am.*, **119**, 1995-2005, 2006.
- 10) 斎藤隆泰・永井浩二・廣瀬壮一: 高速多重極境界要素法を用いた複合材料の弾性波動解析, 計算数理工学論文集, **5**, 37-42, 2005.
- 11) Otani, Y. and Nishimura, N.: A periodic FMM for Maxwell's equations in 3D and its application to problems related to photonic crystals, *J. Comp. Phys.*, **277**, 4630-4652, 2008.
- 12) 川上彰二郎 監修: フォトニック結晶技術の応用, シーエムシー出版, 2002.
- 13) Lysmer, J. and Waas, G.: Shear waves in plane infinite structures, *Proc. ASCE(EM)*, **98**, 85-105, 1972.
- 14) 原田隆典, 山下 肇: 剛性マトリックスに基づく地震動の波形合成法と断層近傍地震の渦現象, 応用力学論文集, **3**, 569-576, 2000.
- 15) 阿部和久・笠原祐樹・紅露一寛: 半無限周期構造を対象とした表面波モード解析手法の改善, 応用力学論文集, **12**, 1013-1020, 2009.
- 16) Brillouin, L.: Wave propagation in periodic structures, Dover Publications, Inc., 1953.
- 17) 阿部和久・古屋卓稔・紅露一寛: まくらぎ支持された無限長レールの波動伝播解析, 応用力学論文集, **10**, 1029-1036, 2007.

(2010年3月9日受付)