応用力学論文集 Vol. 3, pp. 157-166 (2000年8月) 土木学会

Wavelet BEM のためのマルチグリッド反復法

Multigrid Methods for Wavelet BEM

阿部和久* ・林 志保** ・紅露一寛***
Kazuhisa ABE , Shiho HAYASHI and Kazuhiro KORO

*正会員 新潟大学助教授 工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)
**新潟大学大学院 自然科学研究科環境システム科学専攻 (〒 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)
***学生会員 新潟大学大学院 自然科学研究科環境管理科学専攻 (〒 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

Multigrid algorithm is developed for wavelet BEM. Since the wavelet bases have hierarchical structure, in the wavelet BEM using the wavelet bases as its functional bases, coefficient matrix and vectors include submatrix and subvector corresponding to each resolution level. Hence, one can readily apply the multigrid method to wavelet BEM. In this paper, V-, Sawtooth-, and FMV-cycles are considered. Numerical experiments show that these methods improve the convergence of iterative solution. As the iterative methods, Jacobi, Bi-CG, and GMRES methods are employed . It is found that the multigrid method can be an effective strategy for enhancement of convergence and stability of these iterative methods.

Key Words : *wavelet BEM, multigrid method, iterative method*

1. はじめに

境界要素法は，解析対象の境界のみを離散化することで求解方程式を構成する解法である．したがって，有限要素法や差分法などの領域型解法に比べ，少ない自由度の下で同一精度の解を得ることができるという特徴を持っている．しかし，境界要素方程式の係数行列は密行列であり，領域型解法に比べ小自由度でありながらも，多くの記憶容量と求解時間とを要する．そのため多連結問題や境界形状の複雑な問題など，大規模問題への適用は困難であると考えられてきた．当該問題の解決策として高速多重極展開法[1]や wavelet BEM[2] が挙げられる．前者は，遠方からの影響を多重極展開により求め，境界要素方程式の行列ベクトル積の計算を効率的に実行しようとする手法である．一方，Wavelet BEM は，境界要素解の関数基底に wavelet 基底を用いるものである．Wavelet 基底は，実空間と周波数空間において局所性を持つ1種類の関数 (wavelet) の平行移動と拡大 (縮小) により生成され，階層性を有する関数空間を構成する．なお，最近では3次元解析を指向し，任意三角形上で展開された wavelet もいくつか提案されている[3),4)]．境界要素法で重要となる wavelet の特徴は，関数の局所性とゼロモーメント性である．この性質により関数基底に wavelet を用いるだけで境界要素の係数行列成分の距離減衰性が向上し，小さな値の成分をゼロに置き換えることで，精度を損なうことなく疎行列化を図ることができる．このように wavelet BEM ではスパースな行列を扱うので，連立方程式の解法には反復法が用いられる．

マルチグリッド法は，反復解の収束を加速する一手法である．反復法における解は，対応する作用素の固有値が小さな値を持っている固有モード成分から先に収束する[5]．その結果，一般に波長の長い成分の収束性が低いものとなる．そこで，解の長波長成分を分割の粗いメッシュで求め，反復解の収束性の向上を図ろうとするのが当該手法の基本的考え方である．マルチグリッド法は当初，領域型解法を対象にその適用が検討されて来た[6]．しかし，境界要素方程式の密な係数行列においても，比較的自由度の大きな問題では反復法による方が計算時間の面で有利となる[7),8),9),10)]．そのため，境界要素法へのマルチグリッド法の適用についても近年検討がなされている[11]．

前述のようにマルチグリッド法では，解像度の異なる複数のメッシュを順次切り換え解析を進める．その際に，細かいメッシュから粗いメッシュへの解 (残差) の射影，粗いメッシュから細かいメッシュへの解 (誤差) の補間，各メッシュに対する係数行列の作成および保存を必要とする．一方，wavelet 基底を用いた解法では，近似解は初めから解像度毎の階層構造を持っているため，マルチグリッド法の適用は容易に思われる．Briggs ら[12]は wavelet 基底とマルチグリッドとの類似性を指摘し，wavelet 基底によるマルチグリッド法の構成について議論している．また，Rieder ら[13]は，Galerkin 法において wavelet 基底を用いた領域型解法 (wavelet-Galerkin 法) を対象に，マルチグリッド法の具体的アルゴリズムについて検討している．これに対し，wavelet BEM を対象としたマルチグリッド法の適用についてはほとんど検討がなされていないようである．しかし，wavelet BEM では連立方程式の求解に反復法を用いることを前提としているので，マルチグリッド法の適用により反復解の収束性の向上を図ることには十分意義があると考えられる．

そこで本研究では，wavelet BEM を対象としたマルチグリッド法を構成し，その有効性について検討する．以下では，まず初めに wavelet BEM の定式過程を示す．次に，マルチグリッド法の概要について述べ，wavelet

BEM を対象に本研究で構成するマルチグリッド法を示す．なお，従来の wavelet 基底を用いたマルチグリッド法では，各解像度の解を wavelet を用いずに通常の関数基底の下で与え，異なる解像度のメッシュに移る際の射影や補間においてのみ wavelet の分解と合成のアルゴリズムを適用している[12),13)]．しかし，wavelet BEM では初めから wavelet 展開された解を扱うので，本研究ではそれを前提としたアルゴリズムを構成する．最後に解析例を通し，マルチグリッド法におけるサイクルパターンの違いや反復法の違いなどがパフォーマンスに及ぼす影響について検討する．

なお，積分方程式法に対するマルチグリッド法の適用については，第 2 種積分方程式を対象に Mandel[14)] がその有効性を示している．また，第 1 種積分方程式に関しては，Schippers[15)] がマルチグリッド法の適用可能性を示唆しているが，その一方では有効な反復法の構成の難しさについても指摘しており，現在までのところ，マルチグリッド法の適用は第 2 種積分方程式に限られている[11),16)]．したがって，本研究においても第 2 種積分方程式を対象に議論を進める．

2. Wavelet BEM

2.1 Wavelet 基底

Wavelet 基底は scaling 関数 $\phi(x)$ と wavelet $\psi(x)$ から構成される．関数 $\phi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ が，$\phi(2x)$ の平行移動で与えられる関数の一次結合で表せるものとする (two-scale relation)．

$$\phi(x) = \sum_k p_k \phi(2x - k) \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

このとき，$\phi(x)$ を scaling 関数という．B-スプラインは単一関数の平行移動によって，いわゆる「1 の分割」が実行できるので scaling 関数である．なお，数学的により厳密な定義については文献 17) 等を参照されたい．

$\phi(x)$ の平行移動で張られる部分空間 $\{\phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ を V_0 とし，解像度 m の部分空間 V_m の基底を $\phi_{m,k}(x)$ として次式で定義する．

$$\phi_{m,k}(x) := 2^{\frac{m}{2}} \phi(2^m x - k) \qquad (m, k \in \mathbb{Z}) \tag{2}$$

V_m は V_0 におけるメッシュをさらに 2^m 等分割して得られるメッシュ上の離散解に対応している．

V_m をそれより 1 つ解像度の低い部分空間 V_{m-1} とその直交補空間 W_{m-1} とに分解する．

$$V_m = V_{m-1} \oplus W_{m-1} \tag{3}$$

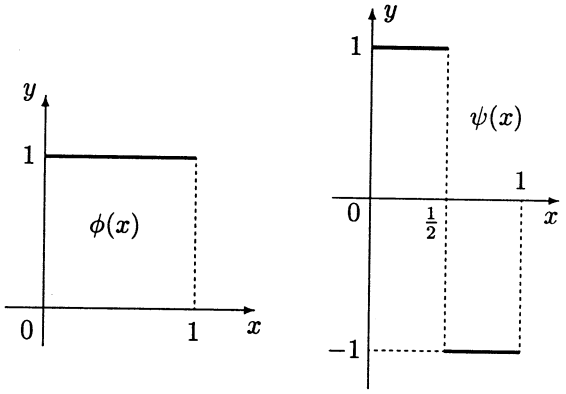
W_m における基底を $\psi_{m,k}(x)$ と定義し，それが次式のように与えられるものとする．

$$\psi_{m,k}(x) := 2^{\frac{m}{2}} \psi(2^m x - k) \qquad (m, k \in \mathbb{Z}) \tag{4}$$

このとき，関数 $\psi(x)$ を wavelet という．

式 (3) より次式を得る．

$$V_m = V_0 \oplus W_0 \oplus \cdots \oplus W_{m-1} \tag{5}$$



図–1 Haar scaling 関数 $\phi(x)$ と Haar wavelet $\psi(x)$

式 (5) は，解像度 m のメッシュ上で定義される関数は，V_0 に対応した粗いメッシュにおける関数と，各解像度での補正関数との和に分解できることを意味しており，wavelet 基底を用いれば近似解が階層的に離散化できることを示している．なお，$\psi_{m,k}(x)$ が m と k について直交性を持つものを直交 wavelet といい，それは次式をみたす．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{m,k}(x)\psi_{n,l}(x)dx = \delta_{mn}\delta_{kl} \tag{6}$$

ここで，δ_{mn} は Kronecker のデルタである．

2.2 Haar wavelet

本研究では wavelet BEM の関数基底の具体例として Haar wavelet を用いる．Haar wavelet は有限なサポートを持ち，陽に定義された唯一の直交 wavelet である．scaling 関数 $\phi(x)$ と wavelet $\psi(x)$ は次式で与えられる．

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le x < 1 \\ 0 & , \quad \text{otherwise} \end{cases} \tag{7}$$

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x-1) \tag{8}$$

式 (7),(8) で定義される Haar scaling 関数と wavelet を**図-1** に示す．**図-1** のように，Haar scaling 関数は区間一定要素の関数基底に一致する．

ある有限区間上に要素座標系 $(0 \le x \le 1)$ を導入する．このとき，区間 $[0,1]$ 上で定義されている関数 $f(x) \in L^2[0,1]$ は次式のように wavelet 展開される．

$$f(x) = c_{0,1}\phi_{0,1}(x) + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^m} d_{m,k}\psi_{m,k}(x) \tag{9}$$

ここで，$\phi_{0,1}, \psi_{m,k}$ は式 (7),(8) で与えられる Haar scaling 関数と wavelet に対し，それぞれ式 (2),(4) で定義された wavelet 基底である．なお，係数 $c_{0,1}, d_{m,k}$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} c_{0,1} &= \int_0^1 f(x)\phi_{0,1}(x)dx \quad , \\ d_{m,k} &= \int_0^1 f(x)\psi_{m,k}(x)dx \end{aligned} \tag{10}$$

2.3 Wavelet BEM

前述のように，本研究では第2種積分方程式を対象としている．なお，境界要素法では離散化方程式の構成に際し，選点法が広く用いられている．しかし，選点法による wavelet BEM では，wavelet は境界要素の関数基底にのみ用いられ，重み関数には適用されず，wavelet が有するゼロモーメント特性は基本解の積分点だけに対して有効となる．一方，Galerkin 法による定式化においては，境界要素の関数基底と重み関数の両者に wavelet が用いられ，ゼロモーメント特性は積分点とソース点の双方に関する積分に適用される．そのため，例えば二次元問題における強特異核の場合，選点法では $1/r^2$ の距離減衰性を示すのに対し，Galerkin 法では $1/r^3$ の距離減衰性を持つこととなる．その結果，選点法よりも Galerkin 法による方が，切り捨てによりスパース性の高い係数行列を得ることが可能となる[18]．したがって，wavelet BEM においては Galerkin 法が主に用いられており，本研究でも Galerkin 法による定式化を採用する．

二次元ポテンシャル問題を考える．強い特異性を持つ核関数 $K(\mathbf{x},\mathbf{y})$ に対する境界積分方程式は，一般に次式のように与えられる．

$$\alpha(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x}) + \int_\Gamma K(\mathbf{x},\mathbf{y})\mu(\mathbf{y})d\Gamma_y = \bar{b}(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \text{ on } \Gamma) \tag{11}$$

ここで，Γ は対象としている領域の境界，μ は二重層密度，$\alpha(\mathbf{x})$ はソース点 $\mathbf{x}$ における境界の滑らかさに依存した係数，$\bar{b}$ はポテンシャルや流束など Γ 上で規定された境界条件より与えられる既知量である．なお，左辺の積分は Cauchy の主値の意味で評価する．

以降においては，Γ 上で定義された wavelet 基底 $\phi_{0,1}, \psi_{m,k}$ 等を解像度 (階層) 毎に順に並べ，それらをまとめて w_i $(i = 1, \cdots, N)$ と表す．このとき，二重層密度 $\mu(\mathbf{x})$ の近似解 $\hat{\mu}$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \mu_{0,1}\phi_{0,1} + \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{k=1}^{2^m}\hat{\mu}_{m,k}\psi_{m,k} \\ &= \sum_i^N \mu_i w_i\end{aligned} \tag{12}$$

ここで，$\mu_{0,1}, \hat{\mu}_{m,k}$ はそれぞれ $\phi_{0,1}, \psi_{m,k}$ に対する係数であり，μ_i はそれらをまとめて表したものである．また，$M-1$ は離散化における最上位 wavelet の階層であり，N は全自由度である．

式 (12) を μ の代りに用いると，一般に式 (11) は恒等的には成立せず，残差 r を生ずる．

$$r(\mathbf{x}) := \alpha(\mathbf{x})\hat{\mu}(\mathbf{x}) + \int_\Gamma K(\mathbf{x},\mathbf{y})\hat{\mu}(\mathbf{y})d\Gamma_y - \bar{b}(\mathbf{x}) \tag{13}$$

Galerkin 法による境界要素方程式は次式により与えられる．

$$\int_\Gamma r\, w_i d\Gamma = 0 \qquad (i = 1, \cdots, N) \tag{14}$$

式 (14) に (12),(13) を代入すると，次式の境界要素方程式を得る．

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b} \tag{15}$$

ここで，$\mathbf{u}$ は μ_i を成分に持つベクトル，$\mathbf{A}, \mathbf{b}$ は次式で定義された係数行列と既知ベクトルである．

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_\Gamma \alpha\, w_i w_j d\Gamma + \iint_\Gamma K\, w_i w_j d\Gamma^2 \,, \\ b_i &= \int_\Gamma \bar{b}\, w_i d\Gamma \end{aligned} \tag{16}$$

式 (15) の連立方程式を解くことで，二重層密度の wavelet 係数 μ_i を求めることができる．

3. マルチグリッド法の構成

3.1 従来法

ここでは，通常用いられる関数基底を対象とした一般的なマルチグリッド法[5]について，その概要を示す．

Jacobi 法や Gauss-Seidel 法など初等的な反復法は平滑化の効果を持ち，反復解は短波長成分ほど速く収束する．逆に長い波長の成分ほど収束が遅い．マルチグリッド法は，この長い波長の成分を粗いメッシュ上での解により補正または近似することで反復解の収束を加速する方法である．マルチグリッド法のサイクルパターンには，以降に示すように様々なバージョンが用いられているが，それらは次に述べる2つの手順の組み合わせで作られている．

(1) Coarse grid correction

解像度の高いメッシュに対して反復法を適用し，その反復解における長い波長成分の誤差を，より解像度の低いメッシュにおける解に基づき補正する過程を coarse grid correction という．

要素の代表長が h で与えられているメッシュを Ω^h と定義し，そこで与えられる係数行列を $\mathbf{A}^h$，ベクトルを $\mathbf{v}^h$ と書く．まず，Ω^h 上での連立方程式

$$\mathbf{A}^h\mathbf{u}^h = \mathbf{b}^h \tag{17}$$

に対して，反復法を ν_1 回適用し，近似解 $\mathbf{v}^h$ を求める．$\mathbf{v}^h \neq \mathbf{u}^h$ の場合，残差 $\mathbf{r}^h$ を生ずる．

$$\mathbf{r}^h = \mathbf{b}^h - \mathbf{A}^h\mathbf{v}^h \tag{18}$$

解 $\mathbf{u}^h$ に対しては式 (17) が成り立つので，式 (17),(18) より次式を得る．

$$\mathbf{r}^h = \mathbf{A}^h\mathbf{e}^h \quad , \quad \mathbf{e}^h = \mathbf{u}^h - \mathbf{v}^h \tag{19}$$

ここで，$\mathbf{e}^h$ は $\mathbf{v}^h$ の誤差である．

上述のように，誤差 $\mathbf{e}^h$ は長い波長成分を多く含む．そこで次に，$\mathbf{e}^h$ の近似をより解像度の低いメッシュの下で求める．そのために，式 (19) の $\mathbf{r}^h$ を要素の代表長が $2h$ で与えられているメッシュ Ω^{2h} 上に射影する．これは，Ω^h から Ω^{2h} への射影に関する作用素を $\mathbf{I}_h^{2h}$ と定義すると，形式的に次式のように表現される．

$$\mathbf{r}^{2h} = \mathbf{I}_h^{2h}\mathbf{r}^h \tag{20}$$

Ω^{2h} 上で与えられる係数行列を $\mathbf{A}^{2h}$ とすると，$\mathbf{r}^{2h}$ と誤差の近似 $\mathbf{e}^{2h}$ との関係が次式で与えられる．

$$\mathbf{A}^{2h}\mathbf{e}^{2h} = \mathbf{r}^{2h} \tag{21}$$

式 (21) より反復法または直接法により $\mathbf{e}^{2h}$ を求める．

次に，$\mathbf{e}^{2h}$ を補間して $\mathbf{e}^{h}$ の近似を求める．これは，Ω^{2h} から Ω^{h} への補間に関する作用素を $\mathbf{I}^{h}_{2h}$ と定義すると，形式的に次式のように表現される．

$$\mathbf{e}^{h} \simeq \mathbf{I}^{h}_{2h}\mathbf{e}^{2h} \tag{22}$$

式 (22) を (19) 第 2 式に代入すれば，近似解 $\mathbf{v}^{h}$ の補正を得る．

$$\mathbf{v}^{h} \leftarrow \mathbf{v}^{h} + \mathbf{I}^{h}_{2h}\mathbf{e}^{2h} \tag{23}$$

最後に，式 (23) で得た $\mathbf{v}^{h}$ に対し反復法を ν_2 回適用し，$\mathbf{u}^{h}$ の反復解を求める．

以上の過程のアルゴリズムは次のようになる．

Coarse grid correction アルゴリズム

① $\mathbf{A}^{h}\mathbf{u}^{h} = \mathbf{b}^{h}$ に ν_1 回反復法を適用し近似解 $\mathbf{v}^{h}$ を求める．
② $\mathbf{r}^{2h} \leftarrow \mathbf{I}^{2h}_{h}(\mathbf{b}^{h} - \mathbf{A}^{h}\mathbf{v}^{h})$
③ $\mathbf{A}^{2h}\mathbf{e}^{2h} = \mathbf{r}^{2h}$ を反復法または直接法により解く．
④ $\mathbf{v}^{h} \leftarrow \mathbf{v}^{h} + \mathbf{I}^{h}_{2h}\mathbf{e}^{2h}$ により $\mathbf{v}^{h}$ を補正する．
⑤ $\mathbf{v}^{h}$ を初期解として $\mathbf{A}^{h}\mathbf{u}^{h} = \mathbf{b}^{h}$ に ν_2 回反復法を適用する．

なお，Ω^{2h} における節点の集合が Ω^{h} の節点に含まれている場合，射影 $\mathbf{I}^{2h}_{h}$ と補間 $\mathbf{I}^{h}_{2h}$ は Ω^{2h} の節点に対応する成分の $\mathbf{v}^{h}$ からの抽出，および Ω^{2h} 上の関数の線形補間，などによってそれぞれ実行される．また Ω^{2h} における節点の集合が Ω^{h} の節点と包含関係を持たない場合に対しては，Galerkin マルチグリッド法[19),20)] が提案されている．

以上に示したアルゴリズムは，誤差の成分を解像度の低いメッシュ上で補正しようとするものであった．マルチグリッド法では，このように誤差を補正する方法が多く用いられているが，解自体を扱う方法 (Full Approximation Storage, FAS)[6)] が用いられることもある．

(2) Nested iteration

最初に解像度の低いメッシュに対して解を求め，それをより解像度の高いメッシュにおける方程式の初期解に用いる過程を nested iteration という．

解像度の低いメッシュ Ω^{2h} に対する連立方程式

$$\mathbf{A}^{2h}\mathbf{u}^{2h} = \mathbf{b}^{2h} \tag{24}$$

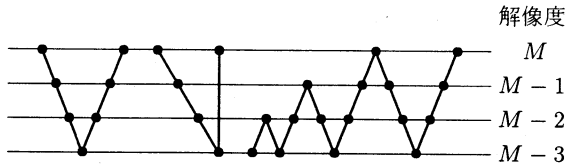
に対して反復法を ν_1 回適用し，近似解 $\mathbf{v}^{2h}$ を求める．

次に $\mathbf{v}^{2h}$ の補間により Ω^{h} での初期解を作成する．

$$\mathbf{v}^{h} = \mathbf{I}^{h}_{2h}\mathbf{v}^{2h} \tag{25}$$

式 (25) を初期解として Ω^{h} に対する連立方程式

$$\mathbf{A}^{h}\mathbf{u}^{h} = \mathbf{b}^{h} \tag{26}$$



図–2 本研究で用いるマルチグリッドアルゴリズム

に対して反復法を ν_2 回適用し，$\mathbf{u}^{h}$ の反復解を求める．

以上の過程のアルゴリズムは次のようになる．

Nested iteration アルゴリズム

① $\mathbf{A}^{2h}\mathbf{u}^{2h} = \mathbf{b}^{2h}$ に ν_1 回反復法を適用し近似解 $\mathbf{v}^{2h}$ を求める．
② $\mathbf{v}^{h} \leftarrow \mathbf{I}^{h}_{2h}\mathbf{v}^{2h}$ により Ω^{h} での初期解を求める．
③ $\mathbf{v}^{h}$ を初期解として $\mathbf{A}^{h}\mathbf{u}^{h} = \mathbf{b}^{h}$ に ν_2 回反復法を適用する．

(3) マルチグリッドアルゴリズム

以上に示した 2 つの手順を組み合わせることで様々なサイクルパターンのマルチグリッドアルゴリズムを構成することができる．本研究では**図-2** に示す 3 つのアルゴリズムを検討対象とする．**図-2** において，V-サイクルは**(1)** に示した coarse grid correction を多数の解像度に対して適用するもので，2 つの解像度を対象とした場合の V-サイクルは coarse grid correction に一致する．Sawtooth-サイクルは Kalbasi ら[21)]により検討されたものであるが，そこでは**図-2** の sawtooth-サイクルとは逆に，最も粗いメッシュから計算を開始する nested iteration を，多数の解像度で適用するものとなっている．sawtooth-サイクルの利点は，1 回のサイクルにおいて各解像度のメッシュを 1 回ずつ使用すればよいことにあり，その結果計算時間の短縮が期待できる[21)]とされている．この意味においては，V-サイクルで粗いメッシュからより解像度の高いメッシュへ移行する過程を省略したものでも同様の効果が期待できるものと考えられ，本研究では**図-2** に示した形式の sawtooth-サイクルを採用した．なお，FMV-サイクルは coarse grid correction と nested iteration とを組み合わせたものである．

図-2 に示したパターン以外にも，W-サイクルや μ-サイクル[5)]などが提案されている．

3.2 Wavelet BEM のためのマルチグリッド法の構成

2. に示したように，wavelet BEM における未知量は密度関数の wavelet 係数である．そのため，連立方程式，およびその解は初めから各解像度に対応した階層 wavelet の成分に分解されている．なお，ある解像度の部分空間 V_m における自由度が N_m で与えられているとき，式 (3) に定義した V_m の部分空間 V_{m-1} と W_{m-1} とにおける自由度はそれぞれ $N_m/2$ となる．解像度 M (最上位 wavelet の階層が $M-1$) のメッシュにおける連立方程式の係数行列を $\mathbf{A}^{M}$，ベクトル

を $\mathbf{u}^M, \mathbf{b}^M$ と表すと，境界要素方程式 (15) は次式のように与えられる．

$$\mathbf{A}^M \mathbf{u}^M = \mathbf{b}^M \tag{27}$$

$\mathbf{u}^M$ は解像度 $M-1$ の成分 $\mathbf{u}^{M-1}$ と W_{M-1} に対応した成分 $\mathbf{u}_W^{M-1}$ に二分され，次式のように表される．

$$\mathbf{u}^M = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}^{M-1} \\ \mathbf{u}_W^{M-1} \end{array} \right\} \tag{28}$$

なお，上述のように，$\mathbf{u}^{M-1}$ と $\mathbf{u}_W^{M-1}$ の自由度はいずれも $N_M/2$ になる．

同様に $\mathbf{A}^M$ も次のように表すことができる．

$$\mathbf{A}^M = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{A}^{M-1} & \mathbf{A}_{12}^M \\ \mathbf{A}_{21}^M & \mathbf{A}_{22}^M \end{array} \right] \tag{29}$$

式 (28),(29) のように wavelet BEM では，解像度 M でのベクトルと行列とにおける部分ベクトル，部分行列の中に，解像度 $M-1$ のベクトルと行列を含んでいる．以下では，この特徴を考慮した coarse grid correction と nested iteration の各過程を構成する．また，coarse grid correction においては誤差を補正せず，解自体を修正して行く方法 (FAS) を用いる．

(1) Coarse grid correction

まず，式 (27) に反復法を ν_1 回適用し，$\mathbf{u}^M$ の近似解 $\mathbf{v}^M$ を求める．なお，式 (28) のように，$\mathbf{v}^M$ は $\mathbf{v}^{M-1}$ とそれ以外の成分より構成されている．

$$\mathbf{v}^M = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v}^{M-1} \\ \mathbf{v}_W^{M-1} \end{array} \right\} \tag{30}$$

ここで，$\mathbf{v}_W^{M-1}$ は $\mathbf{v}^M$ の中で最も波長の短い最上位の wavelet に対応している．したがって，ν_1 回の反復法を適用することにより，$\mathbf{v}_W^{M-1}$ の成分は概ね正解に収束しているものと考えられ，$\mathbf{v}_W^{M-1} \simeq \mathbf{u}_W^{M-1}$ と見なす．このとき，解像度 M での境界要素方程式

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{A}^{M-1} & \mathbf{A}_{12}^M \\ \mathbf{A}_{21}^M & \mathbf{A}_{22}^M \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v}^{M-1} \\ \mathbf{v}_W^{M-1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{b}_1^M \\ \mathbf{b}_2^M \end{array} \right\} \tag{31}$$

を展開して次式を得る．

$$\mathbf{A}^{M-1}\mathbf{v}^{M-1} = \mathbf{b}^{M-1}\ ,\ (\mathbf{b}^{M-1} := \mathbf{b}_1^M - \mathbf{A}_{12}^M \mathbf{v}_W^{M-1}) \tag{32}$$

式 (30) の $\mathbf{v}^{M-1}$ を用いた場合，式 (32) は厳密には成立せず残差を伴う．そこで，式 (32) に反復法または直接法を適用して $\mathbf{v}^{M-1}$ を求める．

次に，式 (30) の $\mathbf{v}_W^{M-1}$，式 (32) より求めた $\mathbf{v}^{M-1}$ を用いて近似解 $\mathbf{v}^M$ を再構成する．

$$\mathbf{v}^M \leftarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v}^{M-1} \\ \mathbf{v}_W^{M-1} \end{array} \right\} \tag{33}$$

最後に，式 (33) で得た $\mathbf{v}^M$ に対し反復法を ν_2 回適用し，$\mathbf{u}^M$ の反復解を求める．

以上のアルゴリズムは次のようになる．

Coarse grid correction

① $\mathbf{A}^M\mathbf{u}^M = \mathbf{b}^M$ に ν_1 回反復法を適用し近似解 $\mathbf{v}^M$ を求める．

② $\mathbf{b}^{M-1} \leftarrow \mathbf{b}_1^M - \mathbf{A}_{12}^M \mathbf{v}_W^{M-1}$

③ $\mathbf{A}^{M-1}\mathbf{v}^{M-1} = \mathbf{b}^{M-1}$ を反復法または直接法により解く．

④ $\mathbf{v}^M \leftarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v}^{M-1} \\ \mathbf{v}_W^{M-1} \end{array} \right\}$ により $\mathbf{v}^M$ を補正する．

⑤ $\mathbf{v}^M$ を初期解として $\mathbf{A}^M\mathbf{u}^M = \mathbf{b}^M$ に ν_2 回反復法を適用する．

上のアルゴリズムでは，**3.1** に述べた射影は単なるベクトルサイズの縮小により，また，補間はベクトルサイズの拡大により実行される．また，各解像度における係数行列は，最も解像度の高いメッシュにおける係数行列内に全て含まれており，別途作成したり保存したりする必要は無い．

(2) Nested iteration

まず，解像度 M での最上位 wavelet に対応した解ベクトル成分 $\mathbf{u}_W^{M-1}$ をゼロとしておく．このとき，式 (31) における $\mathbf{b}_1^M$ を $\mathbf{b}^{M-1}$ とおくことで次式を得る．

$$\mathbf{A}^{M-1}\mathbf{u}^{M-1} = \mathbf{b}^{M-1} \tag{34}$$

式 (34) に対して反復法を ν_1 回適用し，近似解 $\mathbf{v}^{M-1}$ を求める．

次に，ベクトルサイズを拡大して $\mathbf{v}^{M-1}$ より解像度 M での初期解を作成する．

$$\mathbf{v}^M \leftarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v}^{M-1} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \tag{35}$$

式 (35) を初期解として，解像度 M での方程式に対して反復法を ν_2 回適用し，$\mathbf{u}^M$ の反復解を求める．

以上の過程のアルゴリズムは次のようになる．

Nested iteration

① $\mathbf{A}^{M-1}\mathbf{u}^{M-1} = \mathbf{b}^{M-1}$ に ν_1 回反復法を適用し近似解 $\mathbf{v}^{M-1}$ を求める．

② $\mathbf{v}^M \leftarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v}^{M-1} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}$ により解像度 M での初期解を求める．

③ $\mathbf{v}^M$ を初期解として $\mathbf{A}^M\mathbf{u}^M = \mathbf{b}^M$ に ν_2 回反復法を適用する．

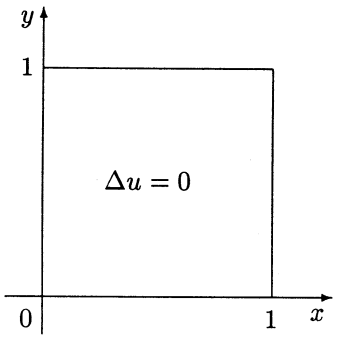
4. 解析例に基づく検討

4.1 反復解の収束性の確認

3. では，wavelet BEM における反復解は高い階層の wavelet 成分ほど速く収束するものとして，マルチグリッド法のアルゴリズムを構成した．本節では反復法として Jacobi 法を用いた場合についてその妥当性を確認する．

ここでは，直接法に基づいた次の境界要素方程式を対象とする．

$$\alpha(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) + \int_\Gamma q^*(\mathbf{x},\mathbf{y})u(\mathbf{y})d\Gamma_y = \int_\Gamma u^*(\mathbf{x},\mathbf{y})q(\mathbf{y})d\Gamma_y \tag{36}$$



図–3 解析条件

ここで，u はポテンシャル，q は流束，u^* は基本解，q^* はその流束成分である．

式 (36) は Dirichlet 問題に対し第 1 種積分方程式を，また Neumann 問題に対し第 2 種積分方程式を与える．**2.** で述べた手順により式 (36) に Galerkin 法を適用すれば，次の境界要素方程式を得る．

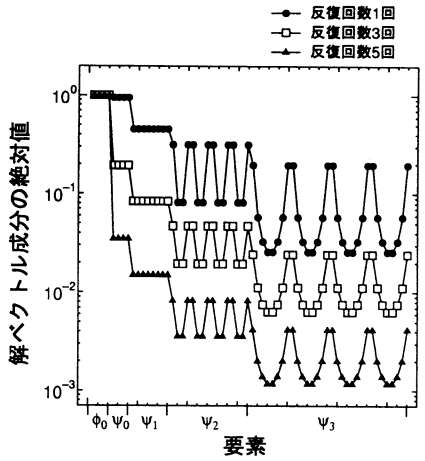
$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gq} \tag{37}$$

ここで，$\mathbf{u}, \mathbf{q}$ は u, q の wavelet 係数であり，$\mathbf{H}, \mathbf{G}$ は次式で定義される係数行列である．

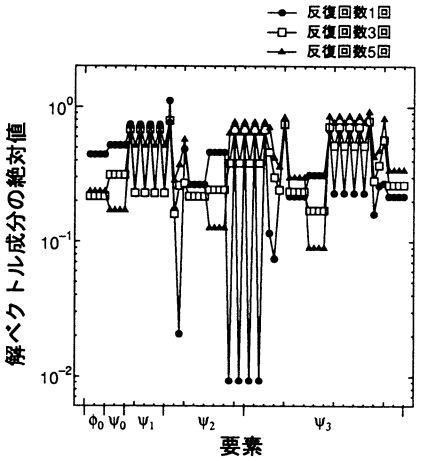
$$\begin{aligned} h_{ij} &= \int_\Gamma \frac{1}{2} w_i w_j d\Gamma + \iint_\Gamma q^* w_i w_j d\Gamma^2 \quad , \\ q_{ij} &= \iint_\Gamma u^* w_i w_j d\Gamma^2 \end{aligned} \tag{38}$$

解析対象として，**図-3** に示すような正方形領域の内部同次問題を考える．なお離散化に当り，各辺に 1 つの scaling 関数をおき，解像度 $M = 4$ (64 自由度) とした．通常 wavelet BEM では，係数行列成分の切り捨てを行い疎行列化を図るが，ここではマルチグリッド法の適用性の検討が目的であるので，特に切り捨ては行わず密行列のまま解析を実行した．

同次 Neumann 問題と同次 Dirichlet 問題に対する結果をそれぞれ**図-4,5** に示す．なお，いずれの問題に対しても，全ての wavelet 成分を 1 としたものを初期解とした．**図-4,5** は反復回数 1，3，5 回目における解ベクトル成分の絶対値の分布を示したものである．横軸には左から順に各ベクトル成分を並べてあり，図中で ϕ_0 は scaling 関数の成分であることを，ψ_m は第 m 番目の階層における wavelet の成分であることを示している．Neumann 問題では，ϕ_0 成分以外の成分がゼロとなるのが正解である．図より ψ_0 の成分の収束が最も遅く，ψ_3 の成分の収束が最も速くなっており，階層の高い wavelet 成分ほど速く収束してる様子が確認できる．なお，差分法に Jacobi 法を用いた場合，長波長成分に加え短波長成分においても解の収束が遅くなることがある[5]が，ここに用いた境界要素方程式では短波長成分の収束性は良好であり，重み付き Jacobi 法を用いなくても，マルチグリッド法が有効に機能することが期待できる．一方，Dirichlet 問題ではゼロベクトルが正解となるが，wavelet の階層と収束性とに明確な関係が得られず，解は発散の傾向を示した．以上のことより，第 2 種積分方程式の反復解は波長の長い成分ほど収束が遅く，階層の高い wavelet 成分から先に収束することが確認できた．なお，第 1 種積分方程式の場合，一般に反復法の適用に対し多少の工夫を要するとされているが，ここでの結果はそれを追認するものとなった．



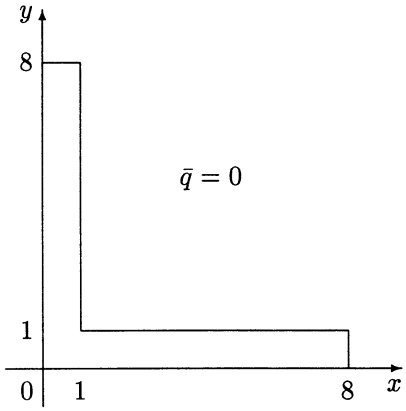
図–4 同次 Neumann 問題での解の収束状況



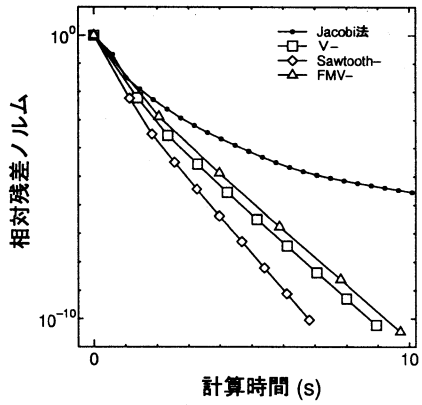
図–5 同次 Dirichlet 問題での解の収束状況

4.2 マルチグリッドアルゴリズムの違いが収束性に及ぼす影響

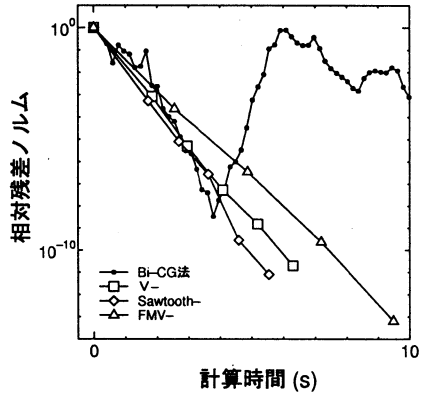
マルチグリッド法に用いる反復法として，共役勾配法や最小残差法に基づいた解法も検討されている[19),20)]．そこで，Jacobi 法の他に Bi-CG 法[22)]，GMRES 法[23)]を反復法に用い，V-サイクル，Sawtooth-サイクル，FMV-サイクルなどのマルチグリッドアルゴリズムの違いが収束性に及ぼす影響を調べた．なお，ここでは**図-6** に示すような L 型領域の内部同次 Neumann 問題に，式 (37) の境界要素方程式を適用した．離散化に当り，6 辺共，1 つの scaling 関数と階層数 $M - 1 = 7$ までの wavelet を用い，1536 自由度の問題を設定した．また，求解に要する時間はマルチグリッド法を適用する階層



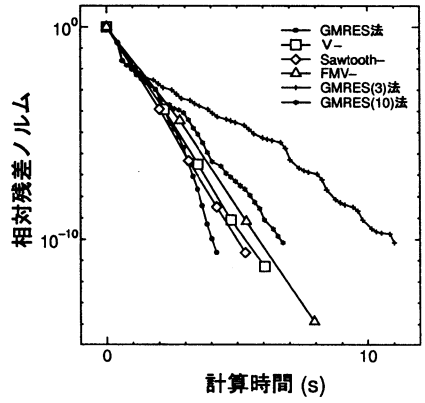
図–6 解析条件



図–7 相対残差ノルムと計算時間の関係 (Jacobi 法)



図–8 相対残差ノルムと計算時間の関係 (Bi-CG 法)



図–9 相対残差ノルムと計算時間の関係 (GMRES 法)

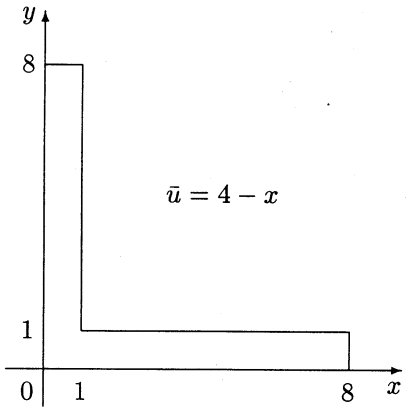
数や，各解像度での反復回数に依存する．特に最高解像度での反復回数は，計算時間に大きく影響するので可能な限り少なくすべきである．検討の結果，$m = 0$ から 7 までの全ての階層に対しマルチグリッド法を適用するものが最も良好な結果を与えたので，ここではそれを採用する．ただし，求解時間の大部分は最高解像度での求解に費やされるので，マルチグリッド法を適用する階層数が比較的少ない場合においても計算時間の大幅な短縮は十分期待できる．なお，最高解像度以外での反復回数は 3 回とし，最高解像度における反復回数は，Jacobi 法では 1 回，Bi-CG 法では 2 回，GMRES 法では 3 回とした．各反復法に対する相対残差ノルムと計算時間との関係を**図-7,8,9** に示す．ここで，相対残差ノルムには，ユークリッドノルムを初期解の残差で規格化したもの $\|\mathbf{r}\|/\|\mathbf{r}_0\|$ を用いた．なお，図中のプロット点は各サイクルの終了時に対応している．Jacobi 法では，マルチグリッド法を適用することで反復解の収束性が大幅に改善している．Bi-CG 法では，マルチグリッド法を用いない場合には収束解が得られなかったのに対し，マルチグリッド法の適用により収束解が安定に求められており，解の安定化に寄与していることがわかる．GMRES 法では，リスタートを伴わない場合と比べると多少収束性に劣るものの，リスタート値を 10 とした場合 (GMRES(10)) を上回るパフォーマンスを得ることができた．ここでは，最高解像度での反復回数を 3 回としているので，リスタート値を 3 とした場合と同程度のメモリ負荷となっている．GMRES 法では，反復過程毎に記憶すべきベクトルが追加されていくので，リスタート値 3 と同程度のメモリ負荷でリスタート値 10 以上の収束性が得られるマルチグリッド法の効果は大きいといえる．また，Jacobi 法によっても，マルチグリッド法の併用により Bi-CG 法や GMRES 法に匹敵する収束性が得られており，マルチグリッド法適用の意義は大きい．ここに示した解析例では，いずれのマルチグリッドアルゴリズムを用いてもほぼ同等の効果を得たが，その中でも sawtooth-サイクルが総合的に良好な結果を与えた．

なお，非同次 Neumann 問題に対しても各マルチグリッド法を適用したところ，同次問題と同様の結果を得ることができた．

4.3 非同次 Dirichlet 問題

非同次 Dirichlet 問題を対象に，マルチグリッド法の有効性を検討した．Dirichlet 問題の解を二重層ポテンシャルで次式のように与える．

$$\alpha'(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x}) + \int_\Gamma q^*(\mathbf{x},\mathbf{y})\mu(\mathbf{y})d\Gamma_y = \bar{u}(\mathbf{x}) \qquad (39)$$



図–10 解析条件

2. に述べた手順により式 (39) に Galerkin 法を適用すれば，次の境界要素方程式を得る．

$$\tilde{\mathbf{H}}\boldsymbol{\mu} = \bar{\mathbf{u}} \tag{40}$$

ここで $\tilde{\mathbf{H}}$ は，式 (38) で定義した係数行列 $\mathbf{H}$ を用い次式のように表すことができる．

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} - \mathbf{I} \tag{41}$$

式 (41) における $\mathbf{I}$ は恒等行列である．

Γ 上で一定値をとる解に対応するベクトルを $\boldsymbol{\mu}_0$ としたとき，$\boldsymbol{\mu}_0$ に対して次式が成り立つ．

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{0} \tag{42}$$

したがって．

$$\tilde{\mathbf{H}}\boldsymbol{\mu}_0 = (\mathbf{H} - \mathbf{I})\boldsymbol{\mu}_0 = -\boldsymbol{\mu}_0 \tag{43}$$

ポテンシャルの規定値 $\bar{\mathbf{u}}$ は，値を一定量シフトさせたもの，$\bar{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\mu}_0$ でも良いので，式 (40) をみたす $\boldsymbol{\mu}$ が解であるとき，同時に $\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}_0$ も解となる．すると，式 (40) を Jacobi 法で解く場合，初期解の設定により解は異なる $\boldsymbol{\mu}_0$ を持つ解 $\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}_0$ に収束することとなる．このとき，連立方程式の残差は

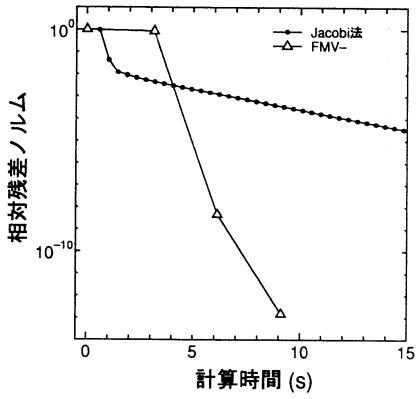
$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}_0) = \boldsymbol{\mu}_0 \tag{44}$$

に収束し，一般に残差はゼロに収束しない．

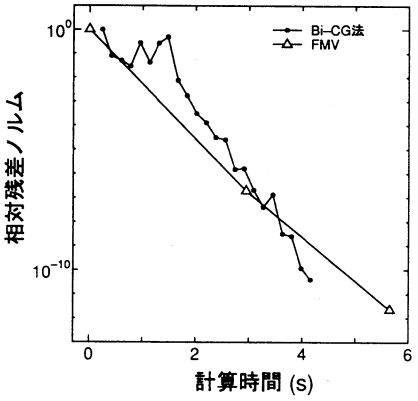
そこで，残差がゼロに収束する解 $\boldsymbol{\mu}$ を一意に求めるために，反復解に補正を加える．第 k 回目の反復解を $\boldsymbol{\mu}^k$ とし，これが $\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}_0$ に収束するものとする．このとき，式 (44) より残差 $\mathbf{r}^k$ は $\boldsymbol{\mu}_0$ に収束するので，$\boldsymbol{\mu}^k$ から $\boldsymbol{\mu}_0$ を除去する目的で次の補正を行う．

$$\boldsymbol{\mu}^k \leftarrow \boldsymbol{\mu}^k - \mathbf{r}^k (\simeq \boldsymbol{\mu}^k - \boldsymbol{\mu}_0) \tag{45}$$

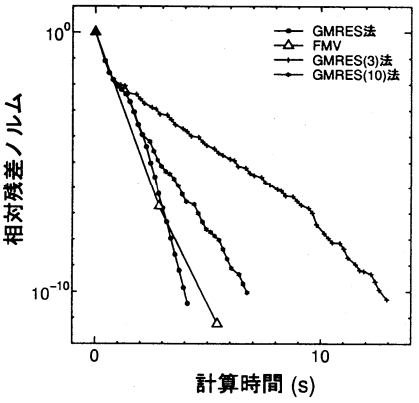
解析条件を**図-10** に示す．離散化条件は**4.2** と同じである．なお，**4.2** において，いずれのマルチグリッドアルゴリズムによっても良好な結果が得られることが確認できたので，ここでは FMV-サイクルに対する結果のみ示す．Jacobi 法，Bi-CG 法，GMRES 法における結果を**図-11,12,13** にそれぞれ示す．Jacobi 法では同次 Neumann 問題の場合と同様に，マルチグリッド法の適用により反復解の収束性が格段に向上している．Bi-CG 法では，同次 Neumann 問題とは異なり，マルチグリッド法を用いない場合でも収束解が得られている．マルチグリッド法の適用で計算時間が短縮されることはないが，Bi-CG 法単独の場合と同程度の収束性を維持している．GMRES 法では各解像度の下での反



図–11 相対残差ノルムと計算時間の関係 (Jacobi 法)



図–12 相対残差ノルムと計算時間の関係 (Bi-CG 法)



図–13 相対残差ノルムと計算時間の関係 (GMRES 法)

復回数が3回となっているにもかかわらず，リスタートなしのものに匹敵する収束性が得られており，マルチグリッド法適用の効果が顕著に現われている．

以上より，Bi-CG 法では明確な改善が認められなかったものの，Jacobi 法と GMRES 法においてはマルチグリッド法適用の効果が確認できた．

5. おわりに

Wavelet BEM を対象にマルチグリッド法を構成し，その有効性を検討した．マルチグリッド法は解像度の異なる複数のメッシュを必要とする．一方 wavelet 基底は各解像度に対応した階層構造を持っており，それを関数基底とした wavelet BEM においては行列とベクトルの一部分を用いることで各解像度に対する方程式を構成することができる．そのためマルチグリッド法の適用は容易であり，解像度毎に係数行列を作成・保存する必要も無い．

本研究ではマルチグリッドアルゴリズムとして V-サイクル，Sawtooth-サイクル，FMV-サイクルを構成し，解析例を通しそれらの有効性について検討した．その結果，いずれの手法によっても反復解の収束性に改善が認められた．なお，反復法には Jacobi 法，Bi-CG 法，GMRES 法を用い，マルチグリッド法との適合性について検討した．Jacobi 法ではマルチグリッド法の適用により収束性に大幅な向上が認められた．Bi-CG 法では収束を加速させる効果は認められなかったものの，収束の安定化にマルチグリッド法が有効であることがわかった．GMRES 法ではリスタートを行わない場合を上回るパフォーマンスは得られなかったものの，反復3回毎にリスタートさせる場合と同程度のメモリ負荷の下で，リスタート値10以上の収束性を得ることができた．

なお，Jacobi 法の他に，Bi-CG 法と GMRES 法についても第1種積分方程式への適用を試みたが，既往の研究と同様にマルチグリッド法の有効性を確認することはできなかった．しかし，第2種積分方程式に対しては，上述のようにマルチグリッド法の適用が非常に有効であることがわかった．また，実用化に際しては混合境界値問題への適用が不可欠であり，今後検討して行きたい．

参考文献

1) Rokhlin, V. : Rapid solution of integral equations of classical potential theory, *J. Comp. Phy.*, **60**, 187–207, 1985.
2) Beylkin, G., Coifman, R. & Rokhlin, V. : Fast wavelet transforms and numerical algorithms I, *Comm. Pure Appl. Math.*, **44**, 141–183, 1991.
3) Dahmen, W. & Stevenson, R. : Element-by-element construction of wavelets satisfying stability and moment conditions, *SIAM, J. Numer. Anal.*, **37**, 319–352, 1999.
4) Floater, M.S. & Quak, E.G. : Piecewise linear prewavelets on arbitrary triangulations, *Numer. Math.*, **82**, 221–252, 1999.
5) Briggs, W.L. : A multigrid tutorial, *SIAM*, 1987.
6) Brandt, A. : Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems, *Math. Comp.*, **31**, 333-390, 1977.
7) Kane, J.H., Keyes, D.E. & Prasad, K.G. : Iterative solution techniques in boundary element analysis, *Int. J. Num. Methods Eng.*, **31**, 1511-1536, 1991.
8) Mansur, W.J., Araujo, F.C. & Malaghini, J.E.B. : Solution of BEM systems of equations via iterative techniques, *Int. J. Num. Methods Eng.*, **33**, 1823-1841, 1992.
9) Barra, L.P.S., Coutinho, A.L.G.A., Mansur, W.J. & Telles, J.C.F. : Iterative solution of BEM equation by GMRES algorithm, *Comp. & Struct.*, **44**, 1249-1253, 1992.
10) Romate, J.E. : On the use of conjugate gradient-type methods for boundary integral equations, *Comp. Mech.*, **12**, 214-232, 1993.
11) Amini, S. & Maines, N.D. : Iterative solutions of boundary integral equations, *Boundary Element Method XVI*, (Brebbia, C.A. ed), CMP, 193-200, 1994.
12) Briggs, W.L. & Henson, V.E. : Wavelets and multigrid, *SIAM, J. Sci. Comput.*, **14**, 506-510, 1993.
13) Rieden, A., Wells, R.O. & Zhou, X. : A wavelet approach to robust multilevel solvers for anisotropic elliptic problems, *Appl. Comp. Harmonic Anal.*, **1**, 355-367, 1994.
14) Mandel, J. : On multilevel iterative methods for integral equations of the second kind and related problems, *Numer. Math.*, **46**, 147-157, 1985.
15) Schippers, H. : Theoretical and practical aspects of multigrid methods in boundary element calculations, Chap.6 in *Topics in Boundary Element Research*, Vol.3, 168-190, Springer-Verlag, 1987.
16) Amini, S. & Chen, K. : Iterative techniques for boundary element methods-Application to the exterion acoustic problem, *Boundary Elements X*, Vol.4, (Brebbia, C.A. ed), CMP, 317-331, 1988.
17) Chui, C.K. : Wavelets: A mathematical tool for signal analysis, *SIAM*, 1997.
18) 紅露一寛，阿部和久，田崎浩章：離散 wavelet 変換による選点法境界要素解析の効率化，応用力学論文集，**2**, 153-162, 1999.
19) Feng, Y.T., Peric, D. & Owen, D.R.J. : A non-nested Galerkin multi-grid method for solving linar and nonlinear solid mechanics problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **144**, 307-325, 1997.
20) Feng, Y.T., Peric, D. & Owen, D.R.J. : A multigrid enhanced GMRES algorithm for elasto-plastic problems, *Int. J. Num. Methods Eng.*, **42**, 1441-1462, 1998.

21) Kalbasi, K. & Demarest, K.R. : A multilevel formulation of the method of moments, *IEEE Trans. Annt. Prop.*, **41**, 589-599, 1993.

22) Flecher, R. : Conjugate gradient methods for indefinite systems, *Lecture Notes in Mathematics 506*, Springer-Verlag, 73-89, 1976.

23) Saad, Y. & Schultg, M.H. : GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **7**, 856-869, 1986.

(2000 年 4 月 21 日 受付)