

土のダイレイタンスーと異方性

吉田 昭治*

Dilatancy characteristics and anisotropy of soils

by

Shōji YOSHIDA

(Abstract)

The author has shown in his previous paper (YOSHIDA, 1978) that a set of mean pressure and deviatoric stress (which is not identical to principal stress difference) can be adopted reasonably to describe the stress-strain relationship for soils; furthermore, the author's new idea that dilatancy is defined as the volumetric strain induced by deviatoric stress led to the conclusion that dilatancy is a phenomenon caused by anisotropy in deformation. And two types of coefficients of deformation, D and G , are introduced for "shear" are assumed to be expressed by the parameters of mean pressure and principal stress ratios (Eq.2). Five constants n , (a, α) and (b, β) are used to define these coefficients of deformation and were determined directly from the results of conventional triaxial compression tests.

The two typical results of triaxial tests on dilatancy of sands are well accounted for by the simplified, nonlinear and anisotropic stress-strain relationship for soils (Eqs.(1) and (2)) in this paper as follows:

- 1) The samples of a sand contract first and subsequently expand until failure is reached under constant mean pressure (TATSUOKA and ISHIHARA, 1971). This experimental evidence has been expressed by the relationship between volumetric strain and stress ratio q/σ_m in many investigations. The relationship is well accounted for by Eq.(3) or (4), by which the results calculated agree well with TATSUOKA's data as shown in Fig.1.
- 2) For dense sands, the volumetric change due to the increase of mean pressure, σ_m , is generally a contraction, but volumetric change may become an expansion at higher principal stress ratio, $R = \sigma_1/\sigma_3$, than a certain value of R (EL-SOBY, 1969). This can be explained by Eq.(6) as follows. Under the condition $a > b$ and $\alpha < \beta$, one gets $D < G$ at higher stress ratios than at a certain value of R , and, further, when the absolute of the second term (= an expansion due to dilatancy) on the right-hand side of Eq.(6) superior to the first term (= a contraction due to mean pressure σ_m) on the right-hand side of Eq.(6) with the increase of principal stress ratio R , an expansion occurs while mean pressure increases. Herin, the condition $n < 1.0$ is necessary for such cases to be realized. The relationships

*新潟大学積雪地域災害研究センター

between volumetric strain and mean pressure or axial strain are calculated by the use of the coefficients of deformation determined from TATSUOKA's data for medium samples of Sagami River sand and are shown in Fig.2 and Fig.3.

1 ま え が き

地盤や土構造物などの土の破壊に伴う災害はあとを絶たないが、これは現在の土質工学でこれらの問題が解明されていないからというより、広範かつ精密な調査が不十分にならざるを得ない現況が主要な要因と思われる。しかし、土の破壊の問題を現在よりも本格的に定量的に扱うためには、なお解明されるべき問題は多い。

現在の土質力学では、土はせん断応力によって破壊するものとして、その破壊基準は応力条件で表わされる。したがって、地盤や土構造物の破壊の問題を本格的に扱うには、外荷重に対して土の内部に発生する応力分布を求める必要があるが、これはコンピュータの大型化と数値解析法の発展によって、二、三次元の場合の解析も可能となってきた。しかし、この際に必要な土固有の応力-ヒズミ関係が現在のところ十分解明されているとはいえない。地盤沈下などの二、三次元の圧密沈下の変形問題を扱う場合には、もちろん同様のことがいえる。

土固有の応力-ヒズミ関係の定式化が困難な理由には、土が大変形性、非線型性、圧縮性、ダイレイタンスーなどの複雑な性質をもっていることがあげられるが^{*}、この中でもダイレイタンスーは、土のように粒からなる粒状体材料以外では見当らない特徴的な性質で、土の構形式の定式化を困難にしている主要なものと考えられる。

このダイレイタンスーは、せん断応力によって生ずる容積変化として、O. REYNOLDS によって1885年に発見されたが、それから一世紀近く経た今日でも、ダイレイタンスーを量的に表現することが、実際問題に利用できる程に発達しているとはいえない(最上, 1978)。

科学研究の方法は、単純なものから複雑なものへと進むのが常であるから、土の変形挙動の研究もまず等方性を前提に進められてきた。一方、土のダイレイタンスーは土にとって普遍的、一般的性質であるから、土のダイレイタンスーも、まず等方性の土が基本的にもっているものとして研究する方法がとられてきたのも自然の成行きであったかもしれない。

しかし、土が堆積過程や外力によって、その微視的構造が異方性を示すことは、最近の研究で、特に小田(1972)の研究などで明らかにされてきた。この微視的構造の異方性は当然、巨視的な現象-土全体の变形挙動にも常に反映するはずである。

筆者は、土を力学的連続体とみなしたとき、ダイレイタンスーを示す土は本質的に異方変形体であるという観点から、土の巨視的な応力-ヒズミ関係の定式化を試みている(吉田, 1978a, 1978b)。土のダイレイタンスーは偏差応力によって生ずる体積変化であり、普通という土の圧縮性は等方圧または平均圧による体積変化であると定義してやると、土のダイレイタンスーは土の変形の異方性を前提にして初めて説明できる現象であることが結論された。棚橋(1978)もヒズミと応力のテンソルの二次の不変量の増分関係をもとにはあるが等方増分関係ではダイレイタンスーを表現し得ず、異方増分関係によりダイレイタンスーを表現できるとしている。

* これ以外に、土の粘弾性に基づく時間依存性があるが、ここではこれを除外して考える。

** 微視的とは土粒子の粒レベルを指している。

さきに、土のダイレイタンスの定義に、せん断応力としないで、偏差応力による体積変化としたのは第一に、現在の土質力学の分野では、せん断応力という用語は、“せん断”変形を起す応力をひろく、あいまいに指し、三軸条件の場合は普通、主応力差か、ときには主応力比がとられ、三次元の場合には、応力テンソルの二次の不変量、応力テンソルのせん断成分、あるいは応力ベクトルのある面に対する接線成分などがとられたりして、その定義が一定していないということ、第二に、変形挙動を応力テンソルとヒズミテンソルの等方成分と偏差成分の対応で考えた方が、その物理的対応が明瞭なことによる。

II 異方・非線型応力-ヒズミ関係式

以上の観点から導いた異方性応力-ヒズミ関係式の中で定義される異方性変形係数を、主応力比と平均主応力をパラメータにして次の(2)式のように関数近似すると、非線型性をよく表現できることが見いだされた(吉田, 1978a)。すなわち、三軸圧縮条件の場合、 K_1, K_3, D_1, D_3 を異方性変形係数として

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{K_1}{1+e_0} \log \frac{\sigma_m}{\sigma_0} + D_1 \sigma'_1 = \frac{K_1}{1+e_0} \log \frac{\sigma_m}{\sigma_0} + \frac{2}{3} D q \\ \epsilon_3 &= \frac{K_3}{1+e_0} \log \frac{\sigma_m}{\sigma_0} + D_3 \sigma'_3 = \frac{K_3}{1+e_0} \log \frac{\sigma_m}{\sigma_0} - \frac{1}{3} G q \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

ここで、 $D_1 = D, D_3 = G, \sigma'_1 = \frac{2}{3} q, \sigma'_3 = -\frac{1}{3} q, q = \sigma_1 - \sigma_3,$

$$D = \frac{a R^\alpha}{(\sigma_m/P_0)^n}, \quad G = \frac{b R^\beta}{(\sigma_m/P_0)^n} \dots\dots\dots(2)$$

である。ただし、 ϵ_1 = 軸ヒズミ、 ϵ_3 = 側方ヒズミ、 σ_1 = 軸応力で最大主応力*、 σ_3 = 側方ヒズミで最小主応力、 σ_m = 平均主応力、 σ_0 = 初期平均主応力、 e_0 = 初期間ゲキ比、 $R = \sigma_1/\sigma_3, P_0$ = 基準等方圧、である。

(2)式の異方・非線型係数 D, G に含まれる定数 $(a, \alpha), (b, \beta)$ と n は、三軸圧縮試験による主応力 σ_1, σ_3 に対するヒズミ ϵ_1, ϵ_3 の測定から実験的に求められる定数である。

これまでに、(1), (2)式によって、三軸試験において確かめられているいくつかの関係をよく説明することができた。すなわち、平均主応力一定の三軸伸長変形、平均主応力と主応力比がともに変化する側圧一定の変形、非排水条件における応力経路と間ゲキ水圧変化(吉田, 1979a)、ヒズミ増分比-主応力比関係(吉田, 1979b)などである。ここでは、①平均主応力一定試験における体積ヒズミ ϵ_v と q/σ_m との関係と、これに対比的な関係にある②主応力比一定試験における平均主応力 σ_m と体積ヒズミ ϵ_v との関係を、単一の応力-ヒズミ関係式(1)によってよく説明できることを示す。

III 平均主応力一定試験における体積ヒズミ

平均主応力一定試験においては、(1)式で $\sigma_m = \sigma_0$ ゆえ、その右辺第1項はゼロとなり、体積ヒズミ ϵ_v は、(2)式を考慮して、

$$\epsilon_v = \epsilon_1 + 2\epsilon_3 = \frac{2}{3} (D - G) q = \frac{2}{3} \cdot \frac{(a R^\alpha - b R^\beta)}{\sigma_m^n} q \dots\dots\dots(3)$$

* 応力はすべて有効応力を指すものとする。

で表わされる。ただし簡単のために $P_0 = 1.0 \text{ kg/cm}^2$ とした。この体積ヒズミはダイレイタンスーによる体積変化に他ならない。この式は、等方性（すなわち $D \equiv G$ ）ならば $\epsilon_v = 0$ となり、ダイレイタンスーを示さないことを端的に表わしている。また多くの場合、 $a > b$ 、 $\alpha < \beta$ となるが、この場合には $D = G$ をみたく主応力比を境にして、主応力比の増大とともに、ダイレイタンスーは負（圧縮、 $D > G$ ）から正（膨張、 $D < G$ ）に変わることをも示している。過圧密粘土では、これが逆（正から負へ）になるものと考えられる。

平均主応力一定試験における体積ヒズミ（＝ダイレイタンスー）は、 q/σ_m で整理されている研究が多いが、これは(3)式を変形し、

$$\epsilon_v = \frac{2}{3} \frac{aR^\alpha - bR^\beta}{\sigma_m^{n-1}} \cdot \frac{q}{\sigma_m} \dots\dots\dots(4)$$

とした場合に相当しているときみなされる。ただ q/σ_m の σ_m は、本論の立場からは変形係数に含まれるパラメータとしての σ_m の一部であるといえる。(4)式から、たまたま $n = 1$ であるとすると、ダイレイタンスー ϵ_v は σ_m によらず、 q/σ_m によって一義的に表わされることになるが、一般的には $n = 1$ ではない。

・実験値による(4)式の検証

龍岡ら(1971)は、砂のダイレイタンスー特性を調べるために、相模川砂の疎、中、密なる三種の供試体それぞれについて、平均主応力が、1.0, 2.0, 3.0 kg/cm^2 で一定の三種の試験を行った。ここでは、この実験値から変形係数 D 、 G を求め、(4)式を検証する。ただし中密度の供試体 (medium samples) のみを代表的にとりあげる。龍岡らは、たとえば、medium samples について、1.0, 2.0, 3.0 kg/cm^2 それぞれの等方圧によって4時間以上圧密後、ほぼ等しい間ゲキ比 ($e_0 = 0.65$) でもってセン断試験を開始している。このセン断開始時に同じ間ゲキ比 e_0 をもつ試料でも、大きい等方圧の圧密で e_0 に達した試料ほど、相対的にルーズな試料であるといえる。したがって、砂の試料の充填度 (疎密) を判断する基準としては、ある特定の等方圧の下での間ゲキ比をとる必要がある。そこで等方圧 $P = 1.0 \text{ kg/cm}^2$ で圧密されたときの間ゲキ比を $e_{1.0}$ とし、この値の大小によって試料の疎密の基準とすることにする。

豊浦標準砂の等方圧密試験から、圧縮指数 C_c と $e_{1.0}$ との実験的關係の一例として、

$$C_c = \lambda e_1 + \nu \quad (\lambda = 0.0553, \nu = 0.0072) \dots\dots\dots(5)$$

が得られている (清水, 1979)。この関係と $e = e_0 - C_c \log P/P_0$ とによって、三種の medium samples の $e_{1.0}$ を求めてみると、次表のようになる。これはもちろん、 $e_{1.0}$ と e_0 との違いの程度をみるための参考資料にすぎない。

試料	σ_m (kg/cm^2)	e_0	$e_{1.0}$
M 1	1.0	0.659	0.659
M 2	2.0	0.658	0.676
M 3	3.0	0.634	0.663

構造的に同じ充填状態の試料は単一の変形係数 (D 、 G) をもつとみなされるが、この場合、(3)式からは $\epsilon_v \sim q/\sigma_m$ の関係において $\sigma_m =$

1.0, 2.0, 3.0 kg/cm^2 の値によらず、 R あるいは q/σ_m の一つの値で $\epsilon_v = 0$ となる。しかし、龍岡らの実験ではそうはなっていない。これは(3)式の立場からは、セン断開始時に間ゲキ比が同じであっても、初期の等方圧の値が違えば同一状態の資料とはみなされないことを示していると考えられる。そこで同じ間ゲキ比を示す三つの medium samples でも、充填性状は異なるものと考え、この違いが変形係数の定数のうちで、 a 、 b のみに影響するものと近似して、実験データを整理して、 $\alpha = 1.92$ 、 $\beta = 2.92$ 、 $n = 0.55$ ならびに a 、 b については次表の値を得た。

n の値は、三つの試料で a 、 b は共通の値をもつと仮定したときの値をとり、その値の下で a 、 b を求

試料	$e_{1.0}$	a	b
M1	0.659	0.082	0.0205
M2	0.676	0.103	0.024
M3	0.663	0.125	0.0277

つのヒズミ曲線 ($\epsilon_i \sim R$) にフィットするような定数は (a, α, n) などを組にして変りうるので、本データのように n と (a, α) などを同時に決めざるを得ないときは自由度がありすぎて近似が不十分にならざるを得ない*。計算値と実験値に多少の不一致がみられるが、このことが影響しているのかもしれない。変形係数を求めるために $e_{1.0}$ が等しい試料について、所定の平均主応力 σ_m の値まで等圧密試験を行い、その後その σ_m 値での平均主応力一定試験を σ_m の値をいくつか変えて行えば、 n と (a, α) などを独立に求めることができる。

IV 主応力比一定試験における平均主応力 σ_m と体積ヒズミ ϵ_v との関係の検証**

El-SOHBY (1969) が、砂についての主応力比一定三軸試験によって、主応力比が小さい間は圧縮を示すが、主応力比がある値以上になると平均主応力の増大にもかかわらず膨張することを示した。土の応力-ヒズミ関係式が、このような実験的關係を系統的によく説明することができるかどうか、関係式の一般性を確かめる上で意義がある。

いま(1)式の応力を σ_m と R で表わすと $q = 3\sigma_m(R-1)/(R+2)$ ゆえ、 $P_0 = 1.0 \text{ kg/cm}^2$ として

$$\begin{aligned} \epsilon_v &= \frac{C_c}{1+e_0} \log \sigma_m + \frac{2}{3} (D-G) \frac{3\sigma_m(R-1)}{R+2} \\ &= \frac{C_c}{1+e_0} \log \sigma_m + \frac{2(aR^\alpha - bR^\beta)}{\sigma_m^{n-1}} \cdot \frac{R-1}{R+2} \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

となる。この式によって、 a, α などの土質定数を与えれば、 $\epsilon_v \sim \epsilon_i$ 関係が求まる。例として、相模川砂の medium samples (M2) について求めた土質定数： $a = 0.103, \alpha = 1.92, b = 0.024, \beta = 2.92$

め直した。データの性格上、定数を求めるにはこのような制約があるが、これらの値を使って(3)式によって $\epsilon_v \sim q/P$ を求めると Fig.1 のようになる。計算値は実験データとよく合っているといえよう。 D, G の関数形の性質上、一

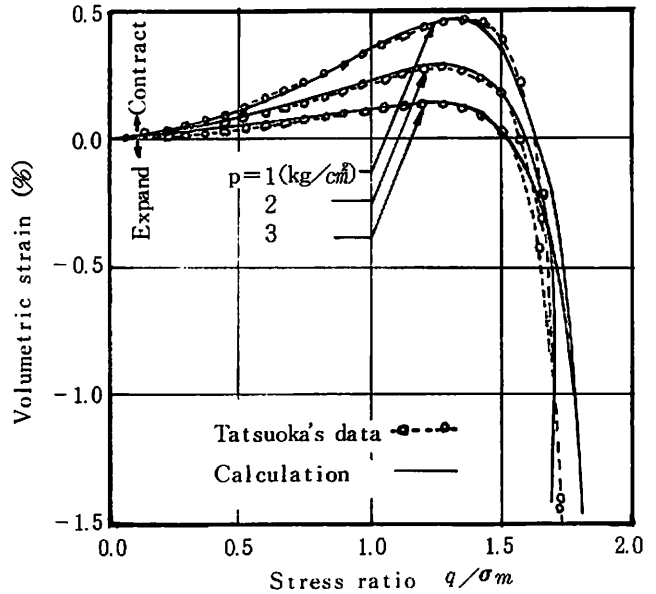


図-1 平均圧一定条件における体積ヒズミと応力比 q/σ_m との関係

Fig.1 Relations between volumetric strain and stress ratio q/σ_m under constant mean pressure of medium sand

* $e_{1.0}$ が大きいほど a, b の値も大きくなると考えられるが、 $n=0.55$ にとると M2 と M3 で逆になっている。 $e_{1.0}$ の推定ならびに n の値に問題があるからかもしれない。

** この一部を農業土木学会京都支部大会 "異方性理論による土の圧縮性とダイレイタンス" で発表した。

$n = 0.55$ を使うことにするが、 C_c についてはデータがないので、かりに $C_c = 1.0^*$ (ヒズミの表示は%としているので、普通の値の 100 倍の数値である) $K_1 = C_c/3 = 0.333^{**}$ として計算した結果は、Fig.2 Fig.3 のとおりである。これらの傾向は、EL-SOHBYの実験傾向とよく類似している。Fig.2 では、主

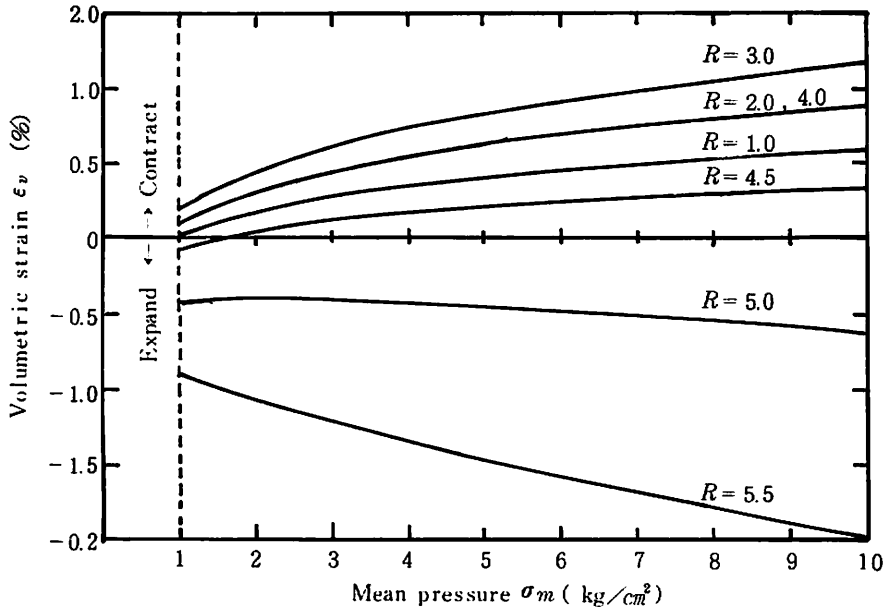


図-2 主応力比一定条件における体積ヒズミと平均圧との関係(計算による)

Fig.2 Relations between volumetric strain and mean pressure under constant stress ratios $R = \sigma_1/\sigma_3$ of medium sand (by calculation)

応力比 R が 4.5 から 5.0 に変わる間に圧縮から膨張へと変わる。これは、変形係数 D 、 G に含まれる定数の間に、 $a > b$ 、 $\alpha < \beta$ の関係があるので、主応力比 R が小さい間は $D > G$ で、ダイレイタンスー(6式)の右辺第2項)も圧縮を示すが、 $D = G$ を満す R を越えると $D < G$ となり、ダイレイタンスーは膨張を示すようになる。この体積膨張が平均主応力 σ_m による圧縮量(6式の右辺第1項)を上まわると、全体としても体積膨張が生ずるようになる、といえる。ただ、本例のように体積膨張を示す主応力比 R が 5.0 とかなり大きい場合には、これより小さい主応力比でせん断破壊が生じてしまうであろうから、この程度の充填度の砂では、 σ_m の値によらず体積膨張を示すという結果は実現しないであろう。ちなみに C_c 値として、豊浦標準砂の実験から求めた値 $C_c = 4.3$ ($e_{1.0} = 0.670$ として、先の(5)式により求めた値)を使うと、体積膨張を示す主応力比は、Fig.2, Fig.3 の 5.0 よりさらに高くなって 5.5 となる。これらのことから、もっと小さい R の値で(たとえば 4.0 ~ 4.5 ぐらいで)体積膨張を生ずるのは、 C_c 値が小さく、したがって σ_m による圧縮量がダイレイタンスーによる体積膨張より相対的により小さいような、より密結めの砂においてであるといえよう。

なお(6)式で、主応力比 R の値を固定したとき、右辺第2項の絶対値は $n > 1$ では $\sigma_m (> 1)$ が増すと減少するから、実験傾向と逆になる。 $n < 1$ のときは、 $\sigma_m (> 1)$ の増大とともに $(D - G)$ の正負にかかわ

* 特に 1.0 とする実験的根拠はない。

** 試料の作成法からみて $K_1 < C_c/3$ であろうが、本式で近似しておく。

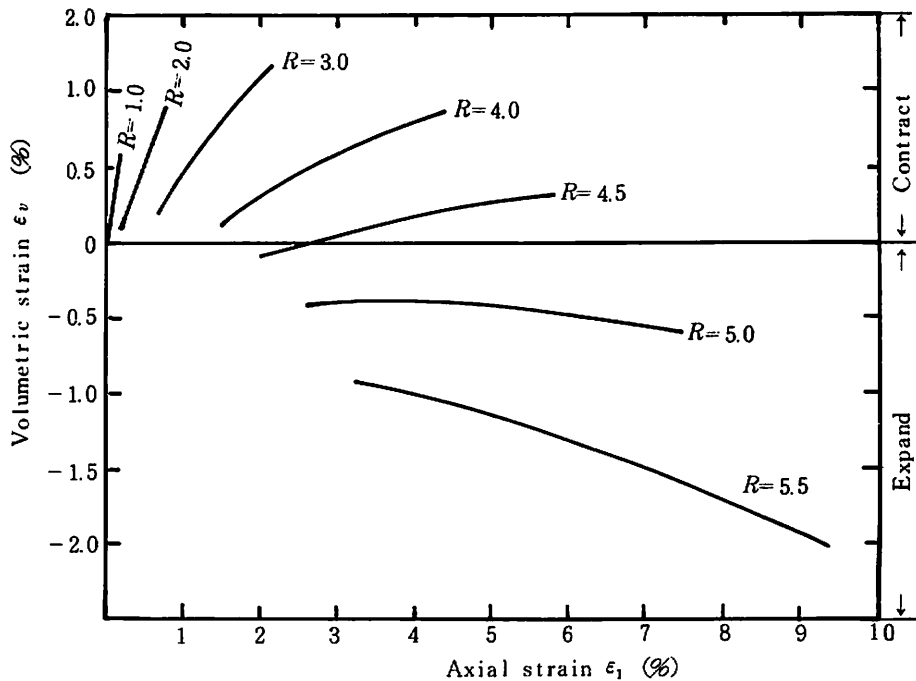


図-3 主応力比一定条件下における体積ヒズミと軸ヒズミとの関係(計算による)
 Fig.3 Relations between volumetric and axial strains under constant stress ratios $R = \sigma_1 / \sigma_3$ of medium sand (by calculation)

らず、右辺第2項の絶対値が増大し、実験傾向と合致する。したがって、EL-SOHBYの実験傾向を示すには $n < 1.0$ が必要条件となる。

$\epsilon_v \sim \epsilon_1$ 関係は、(1)式の ϵ_1 と(5)式の ϵ_v とをくらべれば分るように、簡単な一次式とはならないが、数値的に求めてみると、EL-SOHBYの実験傾向と同じく、 R をパラメータにしてほぼ直線的になる (Fig. 3)。本例でも、 C_c 値を小さくするほど直線性が増すことを確かめることができる。

以上のように本論によればダイレイタンス特性は、 D 、 G で表わされる異方性との関係によって、簡単、明瞭に把握される。

V あ と が き

本報告で、土のダイレイタンス特性をよく表わしているとされている二つの実験的關係を、すでに提案している土についての異方・非線型応力-ヒズミ関係式によって説明できることを示した。

その1つは、平均主応力一定試験で得られる体積ヒズミ (=ダイレイタンスによる体積変化) と q/σ_m との実験的關係であるが、これは(3)式で表わされ、実験値をよく説明できた (Fig.1)。ここで q/σ_m の σ_m は、本論からみると、変形係数 D 、 G に含まれているパラメータとしての σ_m の一部であるといえる。

第2は、EL-SOHBYが実験で示した主応力比一定試験における $\epsilon_v \sim \sigma_m$ 、 $\epsilon_v \sim \epsilon_1$ 関係で、これは(5)式で表わされ、Fig.2、Fig.3のように実験傾向をよく表わす。この傾向を示すには変形係数に含まれる定数 n について $n < 1$ であることを必要とする。

三軸試験実験で確認されている現象の法則性は、これまでではほぼすべて単一の簡単な応力-ヒズミ関係

式で説明できることが明らかにされた。

ここで、本文でも触れ得なかった本基礎式の成立条件、適用条件についてまとめて掲げると次のようになる。

1. 時間依存性がないこと。
2. 平均主応力は増減してもよい。減ずるときは、 C_c に C_s （膨張指数）を用いる。 K_1 、 K_2 には同様に C_c 、 C_s に対応する値を用いる。
3. 主応力比 σ_3/σ_1 が減ずる場合を含まない。
4. 初期構造の異方性は軸対称（hexagonal）か、直交的（orthotropic）であること。
5. 応力の主軸と初期構造の異方性軸が一致していること。
6. 5の条件の下で、応力の主軸が回転しないこと。

これらの適用条件を広め一般性を増すためには、特に3、6の条件の問題を解明する必要がある。しかし経験式であるKondnerの双曲線式でも実際問題に適用され、一定の有効性を発揮していることからみて、おそらく本式の実際の適用にあたっては、(1)～(5)の条件を越えて適用できる可能性があることが予想される。

なお、今後の課題とも関係するが本論の変形係数に含まれる定数の諸特性を実験的にでも明らかにできれば、土の変形挙動の本質の解明が一層深まるであろう。

文 献

- EL-SOBY, M. A. (1969) : Deformation of sands under constant stress ratios, *Proc. 7th Int. Conf. SMPE*, 1, 111-119.
- 最上武雄 (1978) : ダイレイタンスー (技術手帳), 土質工学会, 150-153.
- ODA, M (1972) : Deformation mechanism of sand in triaxial compression tests, *Soils and Foundations* 12, (4), 45-63.
- 清水俊一 (1979) : 異方性体としての土の応力-ヒズミ関係 — 異方性変形係数の特性について — . 新潟大学農学部土地保全学研究室卒論.
- 棚橋由彦 (1978) : 砂の後発異方性と応力ヒズミの増分関係について, 第13回土質工学研究発表会講演集, 385-388.
- TATSUOKA, F, ISHIHARA, K. (1971) : Stress dilatancy characteristics of sand in triaxial tests, *Proc. 4th Conf. Soil Mech. Budapest*, 337-351.
- 吉田昭治 (1978 a) : 異方性体としての土の応力-ヒズミ関係, 農業土木学会論文集, 75, 68-75.
- (1978 b) : 異方性体としての土の三主応力下の応力-ヒズミ関係, 第13回土質工学研究発表会講演集, 381-384.
- (1979 a) : ダイレイタンスー特性と有効応力変化, 発生間ゲキ水圧との関係, 農業土木学会論文集, 80, 42-49.
- (1979 b) : 異方性変形係数によるストレス-ダイレイタンスー式について, 昭和54年農業土木学会講演要旨集, 164-165.