新潟大災害研年報，第7号（1985年）
Ann. Rep. Saigai-ken, Niigata Univ., №7 (1985)

斜面安定解析における安全率の定義について

吉田昭治*

On the defintition of the factors of safety in the stability analysis of slopes

by
Shōji YOSHIDA

(Abstract)

The different definitions of the factor of safety in the stability analysis of slopes are considered on the basis of their physical significances. From the results of this consideration, the following notable points are drawn:

1. The local factors of safety for shear strength and the total factor of safety of a slope should be distinguished, however these factors are not distinguished in Bishop's and other methods of slices.
2. The factors of safety for moment may be regarded as the most fundamental for the reason that its physical significance for the stability of slopes is clear.
3. Because $\Sigma S / \Sigma T$ (S and T are the resistant shear forces and the equilibrium shear forces along the sliding surface, respectively) is equal to the factor of safety for moment only on the assumption of a circular sliding surface, this expression should be regarded as a formula for calculating the factor of safety only in the case of a circular sliding surface, but not a generalized expression for the definition of the factor of safety.

I まえがき

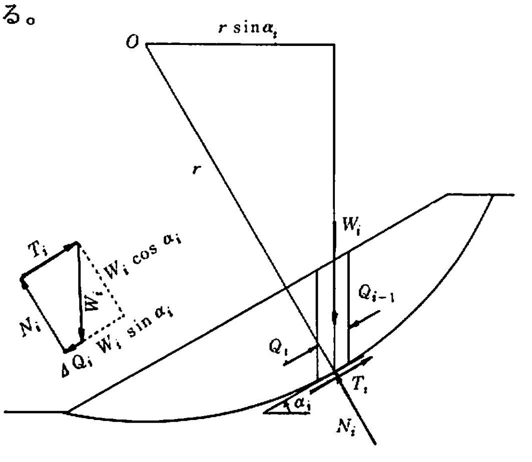
地すべり斜面の安定解析における安全率には，その定義によっていくつか考えられている。この斜面の安全率には，現在，強度に関する安全率が基本になっているが，本論文では，強度に対しては局所安全率を考え，斜面全体の安全率には，斜面の安定と力学的に直接関係するモーメントに関する安全率を考えた方が合理的であろうという観点から，定義の異なる安全率について，それらの力学的意味と，それらの間の関係について考察を加え，若干の整理を行ったものである。個々の事柄は必ずしもオリジナルなものでなく，できるだけ引用の正確を期したが，十分意を尽せていない点があることを断っておきたい。

本論では，簡単のために，斜面のすべり土塊は均質とし，また被圧地下水はなく，不圧地下水のみがあるものとする。すべり線は円弧とし，簡便分割法を例にとって考察するが，安全率の定義は，分割法一般に通用する形でとりあげるようにする。

* 新潟大学積雪地域災害研究センター

Ⅱ　局所安全率F_{si}と全体安全率

図－1に示すように，円弧すべりをもつ斜面の土塊を鉛直帯片に分割する。帯片にかかる力は，次のW，N，T，Qである。使用する記号の説明を次にあげる。



図－1　簡便分割法

Fig. 1　Simplified method of slices.

W_i：帯片の重量　　　dl_i：帯片底面の弧長

N_i：底面dl_iに働く垂直力

T_i：底面dl_iに働くせん断力，

　τ_iをこのせん断応力として，

$$T_i = \tau_i \, dl_i \tag{1}$$

S_i：底面dl_iで発揮され得るせん断抵抗力で，

$$S_i = s_i \, dl_i \tag{2}$$

　ただし，s_i：土のせん断強度，

　c'，ϕ'を強度パラメータ，

　σ_i'をこの面での有効垂直応力として，

$$s_i = c' + \sigma_i' \tan \phi' \tag{3}$$

α_i：底面と水平面とのなす角

Q_i：帯片鉛直側面に働く内力

ΔQ_i：帯片に働く内力の合力；$\Delta Q_i = Q_{i-1} - Q_i$　(4)

　（以下では，紛らわしくない限り，添字iは省略する）

簡便法では，このΔQが底面に平行であると仮定される。ここでは，さらに簡単のために，各々のQも底面に平行であると仮定しておく。間隙水圧の作用方向は帯片側面に垂直であるから，間隙水圧はQとは別個に評価した方がよいが（山上ら，1982），ここでは簡単のために，間隙水圧を含むQが底面に平行であるとする。この仮定によりNは静定化され，つり合う力の多角形（図－1）からわかるように，

$$N = W \cos \alpha \tag{5}$$

となる（山口，1969)。このNが直接求まる点に簡便法の意義がある。

いま，限界平衡状態ですべり円弧dl_iにおいて発生している応力を（σ'，τ）とし，この面で期待されるせん断強度s_iが(3)で表わされるとすると，局所安全率F_{si}（山口，1982；山上ら，1982）は次式で定義される。

$$F_{si} \overset{d}{=} s / \tau^{*} \tag{6}$$

帯片に働く力の多角形（図－1）から，

$$T = W \sin \alpha + \Delta Q \tag{7}$$

いま，半径rのすべり円弧の中心Oのまわりの力のモーメントは，Nは中心Oを通るとして，Nによるモーメントはゼロ，Qの腕の長さをρとすると，これによるモーメントの合計は，Qは内力のために相消し合って，

$$\sum_{i=1}^{n} (\rho_{i-1} Q_{i-1} - \rho_i Q_i) \equiv 0 \quad （ただし，Q_o，Q_n = 0 とする）$$

となる。よって力のモーメントのつり合い式は，

$$\Sigma r T = \Sigma W \cdot r \sin \alpha \tag{8}$$

* 等号$\overset{d}{=}$は定義式であることを明示するために使うことにする。

となる。ここで　$r=\mathrm{const.}$　ゆえ

$$\Sigma T = \Sigma W \sin\alpha \tag{9}$$

を得る。この式が有効かつ便利なのは，個々の帯片に働くTあるいはτは不静定だが，Tの合計ΣTは求まることにある。(8)から逆に個々のTについて，$T=W\sin\alpha$とはならず，(7)になることに注意しておく必要がある。最近の「土と基礎」の論文や権威ある成書にも，この誤りが見受けられる。幸いなことに，安全率の計算には個々のTではなく，その合計であるΣTが関係するから，$T=W\sin\alpha$とする誤りは，結果には表われない。

(8)の左辺を(1)と(6)で書きかえると，$\Sigma T=\Sigma\tau dl=\Sigma s dl/F_{si}$，よって(6)は，

$$\Sigma \frac{s}{F_{si}} dl = \Sigma W \sin\alpha \tag{10}$$

となる。ここで，局所安全率F_{si}が場所によらず一定と仮定する，すなわちその一定値をF_{so}として，

$$F_{si} = \mathrm{const.} = F_{so} \tag{11}$$

とする。(11)を仮定すると(10)からF_{so}は，

$$F_{so} = \Sigma s dl / \Sigma W \sin\alpha \tag{12}$$

となり（山上ら，1982），仮定した一つのすべり円弧に対する斜面の安全率F_{so}が求まる。(12)はF_{so}の定義式ではなく，$F_{si}=\mathrm{const.}$の仮定のもとに得られた結果式であることに注意したい。Bishop，Spencerその他の分割法でも普通には，強度に関する局所安全率F_{si}を導入しないまま，したがってF_{si}と斜面の安全率F_{so}とを区別しないまま，あるいは両者を混同したまま斜面の安全率F_sが求められている点に注意をしておく必要があろう。しかしまた，$F_{si}=F_{so}$としないと，これらの分割法では強度に関する安全率は求まらないこと，後述のモーメントに関する安全率も簡便法を除いては求まらないことに注意を要する*。

(11)の$F_{si}=\mathrm{const.}$を仮定して初めて(12)がでてくることに注意すれば，強度に関する斜面の安全率F_{so}の定義式は(12)ではなく，(11)から

$$F_{so} \overset{d}{=} F_{si}\ \text{を一定と仮定したときのその値} \tag{13}$$

とみるべきであろう。

この$F_{si}=\mathrm{const.}$の意味については，山上ら（1982）が検討しているように，それなりの意義付けが可能であり，また$F_{si}=\mathrm{const.}$の仮定そのものは，簡単であるがゆえに，おおまかな近似としては許されるかもしれない。しかし，山口（1982）の引用にもある有限要素法による解析結果（S.G.Wright et al 1973）が示すように，局所安全率F_{si}のすべり円弧に沿っての分布値が，変動の大きい場合は2以上から1以下の値にまで変わる場合もあるのが実際に近いとすると，$F_{si}=\mathrm{const.}$という仮定は，一つの近似としては一般に無理が伴うと考えられる。したがって，斜面全体の強度に関する安全率の定義として(13)のF_{so}は不適切であるといえよう。

また，(12)の右辺の分母を(8)からΣTでおきかえて得られる

$$F_{so} = \Sigma s dl / \Sigma T = \Sigma S / \Sigma T \tag{14}$$

をもって斜面の安全率の定義式とみなしている場合（山上ら，1982，他）もあるが，(14)は前述のように，より単純な定義とより基本的な関係から誘導される結果式であり，かつその力学的意味を直接表示するものとはなっていないから，これをもって安全率の定義式とするのは不適切であろう。この点については後でも触れる。

* Appendixを参照

Ⅲ　モーメントに関する安全率

すべり円弧の中心Oのまわりのせん断抵抗力 $S_i = s_i dl_i$ によるせん断抵抗モーメントをM_R，帯片に働く外力W，Q，Nによる滑動モーメントをM_Dとすると，モーメントに関する安全率F_mは

$$F_m \overset{d}{=} M_R / M_D \tag{15}$$

で定義される。ここに

$$M_R = \Sigma r S = r \Sigma s\, dl, \tag{16}$$

(8)を導いた方法により，W，Q，N による合モーメントM_D は，

$$M_D = \Sigma \{ r \sin\alpha_i \cdot W_i + (\rho_{i-1} Q_{i-1} - \rho_i Q_i) \} = r \Sigma W_i \sin\alpha_i \tag{17}$$

(16)，(17)により

$$F_m = \frac{M_R}{M_D} = \frac{\Sigma\, r\, s\, dl}{\Sigma W r \sin\alpha} = \frac{\Sigma\, s\, dl}{\Sigma W \sin\alpha} = \frac{\Sigma S}{\Sigma W \sin\alpha} \tag{18}$$

を得る。(15)で定義されたF_mは，(18)により計算で求めることができる。さらに，力のモーメントのつり合いから得られる関係である(8)によって，あるいは，力のつり合い関係から得られる(7)の総和をとって得られる　$\Sigma T = \Sigma\ (W\sin\alpha + \Delta Q) = \Sigma W \sin\alpha$　($\Sigma \Delta Q = 0$ゆえ)

によって，(18)の右辺の分母はΣTに等しいから

$$F_m = \Sigma S \,/\, \Sigma T \tag{19}$$

とも書ける。先にも触れたように，(19)を安全率の定義式としている場合や，計算式として掲げているが，定義式の意味を含めているのか判然としない場合などが見受けられるが，ここでもF_mの定義式としては(19)ではなく，(15)とすべきであろう。それは，すべり面の形を円弧と仮定できないときは，各帯片のモーメントの腕の長さが式の中に入ってきて(18)や(19)のような簡潔な式にならないからであり，また定義式は，特定の条件から得られる関係式とは区別したほうがいいからである。

(19)の右辺は局所安全率F_{si}によって

$$F_m = \frac{\Sigma S}{\Sigma T} = \frac{\Sigma F_{si} \tau\, dl}{\Sigma \tau\, dl} \tag{20}$$

と表わされる。これは，モーメントに関する安全率F_mは局所的強度安全率F_{si}の重み付き平均と等しくなっていることを示している（山口，1982)。

(20)で，(11)の$F_{si} = \mathrm{const.}$ と仮定すると，　　　$F_m = F_{si}$

となる（山口，1982；山上ら，1982)。モーメントに関する安全率F_mが強度に関する安全率に等しいということが成り立つには，強度に関する局所安全率F_{si}が一定という条件が必要であることに注意しておかねばならない。

(14)や(19)に出てくる$\Sigma S / \Sigma T$の力学的意味を考えてみるために，強度s_iによって期待される抵抗合モーメントM_Sと，現条件で発生している平衡応力 τ_i による抵抗合モーメントM_Tとの比

$$F_r = \frac{M_S}{M_T} \left(= \frac{\Sigma r\, s\, dl}{\Sigma r \tau\, dl} \right) \tag{21}$$

で定義される安全率 F_r をとってみる。この分母のM_Tは力のつり合い関係から，モーメントの向きは逆であるが，(15)のM_Dに等しい，即ち$M_T = M_D$　ゆえ

$$F_r = F_m \tag{22}$$

である。円弧すべりの場合は，その半径rが(21)の式の中に入ってこないで

$$F_r = \Sigma S \,/\, \Sigma T \tag{23}$$

となることが分かる。即ち，$\Sigma S / \Sigma T$ の直接の力学的意味は考えにくいから，以上のように，(21)のモーメント比で定義される安全率 F_r が円弧すべりという特定の場合に $\Sigma S/\Sigma T$ に等しくなると解釈した方が一般的であろう。このように，$\Sigma S/\Sigma T$ に関連して安全率の定義にこだわるのは，もし(23)の $F_r=\Sigma S/\Sigma T$ を安全率の一般的定義式とみなして，円弧すべり以外の場合にもこの式で安全率を計算してしまうと，これはもちろん，モーメントに関する安全率 F_m に等しくはないし，何を求めているのか分からなくなってしまうからである。実際に，円弧すべり以外の場合について，地すべり斜面の安全率の計算などに $\Sigma S/\Sigma T$ を使っている例が見受けられるので，安全率の定義の厳密性は，実際上も無視できない問題であると考えられる。

Ⅳ ま と め

地すべり斜面などの安定解析における安全率としては，力学的意味の明瞭な安全率を基本に考えるべきだという観点から，安全率の定義，定義の異なる安全率の間の関係などについて考察を加え，若干の整理を行った結果から注意すべき主なる事項として，次の事をあげることができた。

1. 強度に関する局所安全率と斜面全体の安全率とを区別する必要があるが，Bishop その他の一般分割法では両者を区別していない。局所安全率を一定と仮定してはじめて，これらの斜面安全率を求めることができるが，この仮定自体に問題がある。
2. 斜面の安定解析には，力学的意味が明瞭なモーメントに関する安全率を基準にしたほうが合理的である。簡便分割法を除くBishop などの一般分割法では，局所安全率一定の仮定をとらぬ限り，このモーメントに関する安全率は求まらない。
3. 安全率の一つの計算式である $\Sigma S/\Sigma T$ は，円弧すべりの場合のモーメントに関する安全率と等価であって，一般的な定義式とみなすべきではない。非円弧すべりの場合の安全率の計算にこれを使うことは誤りである。

Appeendix：Bishop の分割法における安全率について

Bishop 法では，帯片の側面に働く内力として，水平成分 $\varDelta H_i = H_{i-1}-H_i$ と鉛直成分 $\varDelta V_i= V_{i-1}-V_i$ を考慮するので，力の多角形は図－2になる（山口，1969）。

(1) Bishop 法では，モーメントのつり合いから得られる関係

$$\Sigma W \sin\alpha = \Sigma T \qquad (A-1)$$

を使うが，モーメントに関する安全率 $F_r=M_R / M_D$ を求めているのではない（（A−1）において，内力 $\varDelta H_i$，$\varDelta V_i$ によるモーメントの総和は，内力のために相消しあってゼロとなる)。

次に，このことを確かめておく。強度に関する安全率について

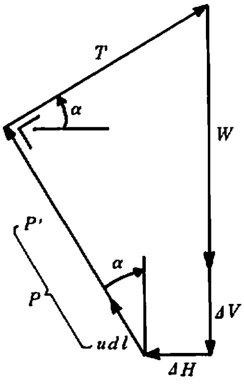
$$F_{si} = S_i \,/\, T_i \quad \text{あるいは}$$

$$T_i = S_i / F_{si} = (c'dl + P'\tan\phi')/F_{si} \qquad (A-2)$$

とし，さらに $\quad F_{si} = \text{const.} = F_s \qquad (A-3)$

とすると，（A－2），（A－3）から

$$\Sigma T_i = \Sigma S_i / F_{si} = \frac{1}{F_s}\Sigma S \ ，\text{即ち}$$



図－2 Bishop 法
Fig. 2 Bishop's method of slices.

$$F_s = \Sigma S / \Sigma T \qquad (A-4)$$

が得られる。（A－4）のT_iを（A－1）により書き直すと

$$F_s = \Sigma S / \Sigma W \sin\alpha$$
$$= \Sigma (c'dl + P' \tan\phi') / \Sigma W \sin\alpha \qquad (A-5)$$

を得る。（A－5）の中のP'は，間隙水圧をuとして，$P = P' + udl$についての鉛直方向の力のつり合いから

$$W + \Delta V = (P' + udl) \cos\alpha + T \sin\alpha \qquad (A-6)$$

この式のTに（A－2）を入れて，P'について解くと，

$$P' = \frac{(W + \Delta V) - \{ u \cos\alpha + (c'/F_{si}) \cdot \sin\alpha \} dl}{\cos\alpha + (\tan\phi' / F_{si}) \cdot \sin\alpha} \qquad (A-7)$$

このP'を（A－5）へ入れて

$$F_s = \Sigma \left[\frac{c'dl \cos\alpha + \{ (W + \Delta V) - udl \cos\alpha \} \tan\phi'}{\cos\alpha \{ 1 + (\tan\phi' / F_{si}) \cdot \tan\alpha \}} \right] \Big/ \Sigma W \sin\alpha \qquad (A-8)$$

Bishop 法では，この右辺の中のF_{si}について，（A－3）の$F_{si} = \mathrm{const.} = F_s$を仮定し，試行錯誤により$F_s$を求める。すなわち，Bishop 法では，局所安全率 F_{si}＝一定とおき，さらに，斜面の安全率は，この強度に関する局所安全率の一定値に等しいとして，求めている。

(2) 内力について，Bishop 法と同じ仮定のもとに，モーメントに関する安全率F_mを直接求める。内力 H_i，V_i に関するモーメントの総和はゼロとなるから，円の中心Oのまわりのモーメントを考えて

$$F_m = \frac{F_R}{F_D} = \frac{\Sigma r S_i}{\Sigma r \sin\alpha \cdot W} = \frac{\Sigma S_i}{\Sigma W \sin\alpha} \qquad (A-9)$$

これは（A－5）の右辺と全く等しい。すなわち

$$F_m = F_s$$

である。ただし(A－5)のF_sを得るには，局所安全率F_{si}=const.の仮定が必要であるが，(A－9)のF_mを得るにはこの仮定を必要としない点に違いがある。この点からも，斜面全体の安全率としては，強度に関する安全率より，モーメントに関する安全率の方が一般性があるといえよう。

さらに（A－9）のF_mを具体的に求めるには，（A－8）のF_sを求めるときと同様の関係（A－7）のP'を使って，結局

$$F_m = （A－8）の右辺$$

となるから，ここで，右辺に入っているF_{si}の分布値を何らかの方法で求めるか，F_{si}=const.=F_mと仮定しない限りモーメントに関する安全率F_mが求まらない点は，F_sと同様である。

参　考　文　献

山口柏樹（1969）：土質力学．技報堂

――――（1982）：安全率を考える．土と基礎，30 (9)，3－8．

山上拓男・植田康宏（1982）：水中における斜面の安定解析に関する考察．土と基礎，30 (12)，19－25.

Wright, S.G., Kulhawy, F.H., Duncan, J.M. (1973) : Accuracy of equilibrium slope analysis, Proc. ASCE, SM10, 783－791.