無向フローネットワークにおけるロケーション問題

田村　裕・仙石正和・篠田庄司*・阿部武雄**

Location Problems on Undirected Flow Networks

by Hiroshi TAMURA, Masakazu SENGOKU, Shoji SHINODA and Takeo ABE

Transaction of the IEICE, vol.E73, No.12, 1990, pp.1989−1993

グラフ理論とは，いくつかの点とそれらの間につながるいくつかの辺との間の接続構造に関わる諸問題を究明するための理論である。この理論は，有名な”ケーニヒスベルグの橋の問題”といわれる一種のパズルの問題に関する数学者 L.Euler の論文に始まるとされているが，以来，接続構造の単純性のために，計算機科学，電子工学などの工学に限らず化学，社会学，経済学，心理学など広い分野にわたって応用されている。

電気回路，電子計算機網（コンピュータネットワーク），輸送網，道路網，水道網などのシステムにおいては，電気，情報，車，水などの物理的な対象物がグラフ状に接続された各構成要素の上でそれぞれ固有の振舞いをする。このようなシステムを解析または設計する際に，グラフの単なる接続構造だけでなく，その上の各点または各枝に問題とする対象物の振舞いに関わるなんらかの機能が付与されているようなモデルを導入する必要がある。一般に，グラフ構造を持ち，かつその上の各点あるいは各枝になんらかの物理的な機能が付与されたような数理モデルをネットワークという。

施設，例えば学校，郵便局，消防署や通信交換局をどこに建てればよいか位置を決める問題はロケーション問題といい，そのための理論はロケーション問題といわれている。対象をネットワークに限定した場合，ネットワーク上のロケーション問題といわれる。従来，ＯＲの分野で施設と施設，つまり点と点の間を距離によって評価したネットワーク上のロケーション問題が重要な問題として扱われ，興味のある成果が得られてきた。

本論文は，点と点の間を距離ではなく容量（またはゲージ）で評価しようとする新しい観点にたったロケーション問題について論じたものである。コンピュータネットワーク等の情報通信ネットワークでは，点と点，つまりコンピュータ間または交換局との間を距離で測るだけでなく，点と点の間に流し得る情報量，つまり容量ではかる必要がある。このような場合に，本論文の成果は重要な役割を果たす。

例として，消防署のある設置問題をとりあげる。

> ある地区の数箇所に消防署を設置するものし，その地区内のどこの町でも，ｒkm以内には必ず消防署があるように設置する。どこに設置すれば消防署の数が最小になるか。

このとき町を点に対応させ，町をむすぶ通路を辺に対応させたネットワークを考えると，この問題は距離に関するｒ－被覆問題とよばれる。被覆問題はロケーション問題の代表的なもののひとつである。この距離に関するｒ－被覆問題，また他の代表的な

*中央大学
**千葉工業大学

ロケーション問題であるp－センタ問題，p－メディアン問題はNPハードであることが知られている。NPハードな問題とは，しらみつぶしで解の候補を調べれば，問題を解くことは可能であるが，解を得るための効率の良いアルゴリズムは存在しないと予想されている問題のクラスである。

本論文で扱う無向フローネットワークとは以下のようなものである。

無向フローネットワークNとは，点集合V(N)，辺集合E(N)と各辺にかかる非負の重みからなる。図1を例にとると，点集合$V(N)=\{x_1,\ldots,x_5\}$，辺集合$E(N)=\{a_1,\ldots,a_7\}$であり，辺上の数字が各辺にかかる非負の重みである。無向フローネットワークを情報通信ネットワークとみた場合，辺は2点間をつなぐ回線に相当し，辺の重みはその回線で流し得る情報量と考えることができる。ここで，点x_1とx_4の間に流し得る情報量を考えると，$x_1, a_1, x_2, a_3, x_3, a_6, x_4$という経路で2，$x_1, a_1, x_2, a_4, x_4$という経路で1，$x_1, a_2, x_5, a_7, x_4$という経路で1流せるので，情報量は最大で4である。この数値をx_1, x_4間の容量とよび，$g_N(x_1, x_4)$で表す。なお，同じ点間の容量は無限大と定める（つまり，$g_N(x, x)=\infty$）。また，点xと部分点集合$U=\{y_1,\ldots,y_t\}$間の容量を，点x, y_i間の容量の最大値で定義する。式で表すと，

$g_N(x, U)=\max\{g_N(x, y_i) \mid i=1,\ldots,t\}$

となる。

点間の評価を距離で行うと，距離が近いことが点間の係わりが深いことを意味する。容量の場合は，容量が大きい，情報通信ネットワークで言い換えると流し得る情報量が多いことが，点間の係わりが深いことになる。よって容量の場合のr－被覆問題は以下のように定義することとする。

無向フローネットワークNの任意の点xとの容量がr以上となるような部分点集合で要素数が最小となるものを求めよ。

例えば図1においてr＝6とする。$U=\{x_1, x_3, x_4\}$とすると，

$g_N(x_1, U)=g_N(x_1, x_1)=\infty$,

$g_N(x_2, U)=g_N(x_2, x_1)=6$

$g_N(x_3, U)=g_N(x_3, x_3)=\infty$

$g_N(x_4, U)=g_N(x_4, x_4)=\infty$

$g_N(x_5, U)=g_N(x_5, x_1)=6$

となり，要素数も最小であるので，Uは無向フローネットワークNにおける6－被覆問題の解となる。

今，点がコンピュータを表す情報通信ネットワークにおいて，r－被覆問題の解である場所のコンピュータにファイル（資源）を配置するものとする。すると，各コンピュータは必ずいずれかのファイルと情報量r以上でむすばれ，かつファイルの設置箇所が最小になっている。

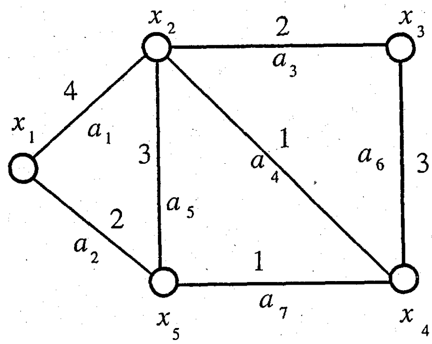

図1　無向フローネットワークN

ところで無向フローネットワークは，任意の2点間の容量が等しい木とよばれる単純な構造の無向フローネットワークに変換できることがしられている。図1の無向フローネットワークNの場合，図2のような木状の無向フローネットワークTに変換することができる（例えば$g_N(x_1, x_4)=g_T(x_1, x_4)=4$であり，任意の2点間の容量が等しいことは容易に確かめられる）。

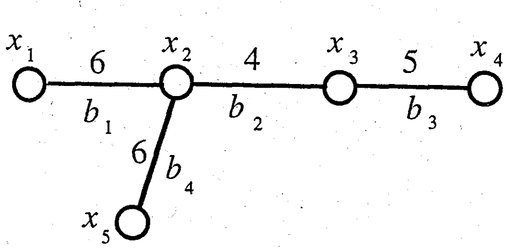

図2　木状の無向フローネットワークT

r－被覆問題の解は，変換された木状の無向フローネットワークにおいて，以下のように求めることができる。まず，重みがr未満である辺を取り去る。

これによって無向フローネットワークは幾つかの連結した部分にわかれ，その各々の部分から任意に1点選んだものがr－被覆問題の解となる。図2の例でr＝6とする。このとき，重みが6未満の辺b_2，b_3を取り去ると，3つの連結した部分にわかれ，その各々から1点づづ選ぶ。例えば｛x_1, x_3, x_4｝が，図1の無向フローネットワークにおける6－被覆問題の解となる。よって，無向フローネットワークにおいては，このような被覆問題の解を求める効率の良いアルゴリズムが存在することが示されたことになる。また本論文では，容量を用いて点間を評価した場合のp－センタ問題，p－メディアン問題を定義し，やはり無向フローネットワークを木状の無向フローネットワークに変換することで，効率よくこれらの問題が解けることを示している。

（平成3年度電子情報通信学会論文賞）