≫ 論　説 ≪

投入係数の更新及び予測について

林　　英　　機

産業連関モデルの基本的な用途はある最終需要に対する整合的な産業別生産水準を求めることであり，従って，経済の予測や計画において大きな威力を発揮する。例えば，通常の予測や計画においては，ある予測年次或いは計画年次の最終需要を別途予測し，これに見合う産業別の生産額，輸入額，雇用量等を求めるという適用方法が考えられる。しかし，正規の正確な産業連関表は頻繁に作成されるものではない。日本での作成頻度は5年毎である。従って，その際の最も便宜的な方法としては予測或いは計画年次までの投入構造が一定であり，さらに各最終需要の品目別構成も一定であると仮定して，各最終需要についての生産誘発額等を予測しようとするものであろう。しかし，実際には，投入係数や最終需要の品目別構成は，ごく短期にはあまり変化しないかもしれないが，時間が経過すれば必ずしも安定的であるとはいえず，大きく変化する可能性もある。従って，予測や計画に実際に産業連関モデルを使用する場合には，将来の投入係数や最終需要の構成の変化をそれぞれ適確に予測しておくことが必要となる。以下においては，投入係数の安定性とそれが変化する場合の更新や予測の問題について検討を行なう。

1．投入係数の安定性

一般的な産業連関モデルの説明においては投入係数は不変（従って，レオンティエフ逆行列も不変）であると仮定されていることが多い。しかし，時間の経過に対して投入係数が安定的であるかということは現実にはあり得ない。事実，これまでの経験からみても，投入係数は時間とともに変化がみられることは明らかに確かめられている。かくして，その安定性或いは可変性の如何を検討するための方法にどのようなものがあるかをまず簡単にみることにする。（アメリカにおける産業構造，投入構造の変化の分析は[5]，[6]，[18]などにみることができる。）

昭和50年産業連関表

（単位：億円）

		中間需要				最終需要	産出額
		農林水産業	鉱工業	サービス業	中間需要計		
中間投入	農林水産業	13,936	100,003	9,155	123,094	7,288	130,382
	鉱工業	25,437	810,340	225,973	1,061,750	726,629	1,788,379
	サービス業	11,141	284,117	293,541	588,799	814,748	1,403,547
	中間投入計	50,514	1,194,460	528,669	1,773,645	1,548,664	3,322,308
総付加価値		79,868	593,920	874,876	1,548,664		
産出額		130,382	1,788,379	1,403,547	3,322,308		

昭和45年産業連関表

（単位：億円）

		中間需要				最終需要	産出額
		農林水産業	鉱工業	サービス業	中間需要計		
中間投入	農林水産業	17,357	101,020	5,357	123,734	5,450	129,185
	鉱工業	23,532	766,492	160,111	950,135	601,861	1,551,996
	サービス業	7,843	225,341	176,367	409,550	610,860	1,020,410
	中間投入計	48,732	1,092,853	341,835	1,483,418	1,218,173	2,701,591
総付加価値		80,453	459,144	678,577	1,218,173		
産出額		129,185	1,551,996	1,020,410	2,701,591		

投入係数が時間の経過に対して安定的であるかどうかを検討するためにはいくつかの方法がある。それらのうちで，ここでは直接テストとよばれるものと総括テストとよばれるものの２つの方法を取り上げることにする。ここでは，このようなテストの適用方法を例示するために上記のような２つの産業連関表を用いることにする。この２つの表はそれぞれ昭和50年及び昭和45年の日本の産業連関表をそれぞれ３部門に要約したものである。

上記の２つの産業連関表から計算される投入係数行列及びレオンティエフ逆行列は次の通りである。

昭和50年投入係数行列

	農林水産業	鉱工業	サービス業
農林水産業	0.106886	0.055918	0.006523
鉱工業	0.195096	0.453114	0.161001
サービス業	0.085449	0.158868	0.209142
計	0.387431	0.667901	0.376666

昭和45年投入係数行列

	農林水産業	鉱工業	サービス業
農林水産業	0.134358	0.065090	0.005250
鉱工業	0.182157	0.493875	0.156908
サービス業	0.060711	0.145194	0.172839
計	0.377226	0.704160	0.334998

昭和50年レオンティエフ逆行列

	農林水産業	鉱工業	サービス業	計
農林水産業	1.150145	0.128021	0.035556	1.313722
鉱工業	0.475348	1.996281	0.410330	2.881959
サービス業	0.219854	0.414857	1.350719	1.985430
計	1.845347	2.539159	1.796605	

昭和45年レオンティエフ逆行列

	農林水産業	鉱工業	サービス業	計
農林水産業	1.192545	0.164490	0.038772	1.395807
鉱工業	0.482602	2.156078	0.412059	3.050739
サービス業	0.172242	0.390535	1.284130	1.846907
計	1.847389	2.711103	1.734961	

(1)　直接テスト

直接テストとは，例えば，相異なる2時点の産業連関表より得られる投入係数を直接的に比較することにより，その変化の有無を検討しようとするものである。比較の方法には，昭和50年と45年の比較を例として示せば，例えば，次のようなものがある。

①　$A^{50} - A^{45}$

昭和45年の投入係数行列をA^{45}，昭和50年の投入係数行列をA^{50}とすると，この方法はそれらの直接の差をみようとするものである。この方法は，投入係数行列の個々の投入係数のどこに変化が生じているかを鳥瞰することができるが，投入係数表が大きくなると，その検討が煩雑になる。

②　$\sum_i a_{ij}^{50} - \sum_i a_{ij}^{45}$

これは２つの投入係数行列の各列をその列和の差によって比較しようとするものである。各列の列和は産出１単位当りの中間投入比率であり，また，（１－各列の列和）はその産業の付加価値率となる。この方法は，各産業或いは商品における中間投入比率或いは付加価値率にどのような変化があったかをみることができるが，個々の品目の投入構成にどのような変化があったかをみることができない。例えば，全体としての中間投入比率に変化がなくても，個々の品目の投入構成は全く異なったものになっていることもあり得る。

③ $\sum_{i} | a_{ij}^{50} - a_{ij}^{45} |$

この方法は，２つの投入係数行列の各列において，対応する要素の差の絶対値を求め，その和を計算しようとするものである。上記の②の場合には，プラスの差とマイナスの差が相殺し合って，２つの列和に差が生じないことがあるが，プラスの差もマイナスの差もどちらも投入係数の変化を示すことには変わりはない。この場合には絶対値をとることによってプラスの差もマイナスの差も同等に扱うことができる。かくして，中間投入比率に差がなくても，個々の投入係数に差がある場合には，その差をこの方法によって検出することができる。

④ $\sum_{i} (a_{ij}^{50} - a_{ij}^{45})^2$

この方法は，各列の対応する要素の差の２乗和を計算しようとするものであり，上記の③と同様に，プラスの差とマイナスの差を同等に扱おうとする工夫の一つであるということができる。しかし，２乗することの意味は，この場合には，あまり明確ではないので，③における処理の方がよいように思われる。

先の２つの産業連関表を用いて上記の各方法を例示する。これは単なる例示であって，有為な投入係数の安定性或いはその変化のテスト結果を得るためにはより多くの部門をもつ産業連関表を用いることが必要である。

① $A^{50} - A^{45}$

２つの投入係数表の差は次のように計算される。

$$\begin{bmatrix} 0.106886 & 0.055918 & 0.006523 \\ 0.195096 & 0.453114 & 0.161001 \\ 0.085449 & 0.158868 & 0.209142 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.134358 & 0.065090 & 0.005250 \\ 0.182157 & 0.493875 & 0.156908 \\ 0.060711 & 0.145194 & 0.172839 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -0.027472 & -0.009172 & 0.001273 \\ 0.012939 & -0.040761 & 0.004093 \\ 0.024738 & 0.013674 & 0.036303 \end{bmatrix}$$

この３部門表に限っての観測結果をいうならば，例えば，昭和45年から50年にかけては，鉱工業における財貨投入の減少と全部門でのサービス投入の増加が目立っているということができ

るであろう。

② $\sum_{i} a_{ij}^{50} - \sum_{i} a_{ij}^{45}$

各産業別の投入係数の列和の差は次のようになる。

農林水産業	0.387431	−	0.377226	=	0.010205
鉱　工　業	0.667901	−	0.704160	=	−0.036259
サービス業	0.376666	−	0.334998	=	0.041668

先にも述べたように，投入係数の列和の増大はその産業の付加価値率の低下を，列和の減少は付加価値率の上昇を意味する。ここでの結果の示すところによれば，鉱工業の付加価値率は上昇し，サービス業と農林水産業においてはそれは低下している。

③ $\sum_{i} | a_{ij}^{50} - a_{ij}^{45} |$

２つの年次における各産業別の対応する投入係数の差の絶対値の和は次のように計算される。

農林水産業	0.027472	+	0.012939	+	0.024738	=	0.065149
鉱　工　業	0.009172	+	0.040761	+	0.013674	=	0.063607
サービス業	0.001273	+	0.004093	+	0.936303	=	0.041669

絶対値をとることにより，プラスの差もマイナスの差も同等に取り扱われる。このような値の絶対的な大きさは農林水産業，鉱工業，サービス業の順である。しかし，投入係数の列和（中間投入比率）と比べてその変化の大きさをも検討してみる必要がある。かくして，昭和45年の各産業の列和によって上記の値を標準化すると，以下のようになる。

農林水産業	0.065149	／	0.377226	=	0.172705
鉱　工　業	0.063607	／	0.704160	=	0.090330
サービス業	0.041669	／	0.334998	=	0.124386

かくして，中間投入比率に対する相対的な変化によってみれば，農林水産業がやはり最も大きく，次いで，サービス業，鉱工業の順となる。

④ $\sum_{i} (a_{ij}^{50} - a_{ij}^{45})^2$

投入係数の差の２乗和は次のように計算される。

農林水産業　$(-0.027472)^2+(0.012939)^2+(0.024738)^2=0.001534$

鉱　工　業　$(-0.009172)^2+(-0.040761)^2+(0.013674)^2=0.001933$

サービス業　$(0.001273)^2+(0.004093)^2+(0.036303)^2=0.001336$

この計算によれば，変化の大きさは鉱工業，農林水産業，サービス業の順となる。

(2) 総括テスト

総括テストとよばれるものには，例えば，次のような方法がある。

① $X^{50}-B^{45}F^{50}$

この方法は比較の基準時点（昭和45年）のレオンティエフ逆行列B^{45}に比較時点（昭和50年）の最終需要F^{50}を与えて得られる生産誘発額と昭和50年の実際の生産額を比較することによって，レオンティエフ逆行列の変化の影響をみようとするものである。また，上記の式は

$$B^{50}F^{50}-B^{45}F^{50}=(B^{50}-B^{45})F^{50}$$

のように書き直すこともできる。

② $(A^{50}X^{50}+F^{50})-(A^{45}X^{50}+F^{50})$

この方法は投入係数行列を基準時点のものと入れ替えた需給バランスと昭和50年の実際の需給バランスを比較することによって，投入係数の変化の影響をみようとするものである。上記の式を書き直せば，次のようになる。

$$(A^{50}-A^{45})X^{50}$$

上記の２つの産業連関表によって，このような方法を例示すると以下のようになる。

① $X^{50}-B^{45}F^{50}$

この計算結果は次のようになる。

$$\begin{bmatrix}130382\\1788379\\1403547\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1.192545&0.164490&0.038772\\0.482602&2.156078&0.412059\\0.172242&0.390535&1.284130\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7288\\726629\\814748\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}130382\\1788379\\1403547\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}159804\\1905910\\1331272\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-29422\\-117531\\72275\end{bmatrix}$$

かくして，投入係数の変化はレオンティエフ逆行列を変化させ，それは農林水産業と鉱工業の生産誘発力を低下せしめる一方，サービス業の生産誘発力を増加せしめたということになる。

② $(A^{50}X^{50} + F^{50}) - (A^{45}X^{50} + F^{50})$

上記の式は次のようにも表わせる。

$$(A^{50}X^{50} + F^{50}) - (A^{45}X^{50} + F^{50}) = A^{50}X^{50} - A^{45}X^{50}$$

かくして

$$\begin{bmatrix} 0.106886 & 0.055918 & 0.006523 \\ 0.195096 & 0.453114 & 0.161001 \\ 0.085449 & 0.158868 & 0.209142 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 130382 \\ 1788379 \\ 1403547 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0.134358 & 0.065090 & 0.005250 \\ 0.182157 & 0.493875 & 0.156908 \\ 0.060711 & 0.145194 & 0.172839 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 130382 \\ 1788379 \\ 1403547 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 123094 \\ 1061750 \\ 588799 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 141292 \\ 1127213 \\ 510165 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18198 \\ -65463 \\ 78634 \end{bmatrix}$$

投入係数の変化は農林水産業と鉱工業の中間需要を減少せしめ，サービス業の中間需要を増加せしめている。

2．投入係数の変化の原因とその予測方法

上記の例は単純なものであるが，実際に投入係数を時系列的に比較してみると，投入係数は必ずしも安定的なものではなく，変化しているのが普通である。投入係数が変化する理由としては，例えば，次のようなものが考えられる。

(1)　相対価格の変化

相対価格の変化は，代替効果を通じて，投入構造を変化させ，かくして，投入係数を変化させる要因となり得る。また，投入係数が経常価格（時価）表示の価額表から計算されている場合には，たとえ技術構造に変化がなくても，個々の品目の相対価格の変化によって投入係数が変化してしまうことがある。従って，生産技術構造としての投入係数の変化の有無を調べるためには，相対価値変化のそのような影響を除去するために，経常価格表示価額（名目価額）ではなくて，価格を基準時に固定した不変価格表示価額（実質価額）による投入係数を計算することが必要になる。

(2)　プロダクトミックスの変化

財貨やサービスの数は恐らく何十万とあるであろうから，産業連関表の商品部門別分類は最も詳細なものであっても（因みに，日本の産業連関表における最も詳しい分類による表は540×400部門表である）いくつかの商品や品種が統合されたものとなっているし，分析を操作的にす

るためにさらに部門の統合を進めるにつれて各商品部門はさらに多くの品目数を含むものになってくる。それらには，個々にみれば，生産技術構造を異にするものもある。例えば，電気機械という商品分類には大型発電機から乾電池や半導体までが含まれるし，輸送機械には各種の自動車とともに，機関車や航空機，船舶なども含まれる。このように，商品部門の統合の結果，多くの技術構造を異にするものが含まれてしまう場合には，そこに含まれる個々の商品や品目の技術構造に変化がなくても，その部門内の商品や品目の生産額の構成，即ち，プロダクトミックスが変化すると，その部門全体について計算される投入係数は変化してしまうことになる。

このことは次のような仮設例を用いて例示することができるであろう。ここでは，４商品よりなる詳細な分類の産業連関表を，分析の便宜のために，２部門に統合するという例を考える。統合は商品１及び２を商品Ⅰ，商品３及び４を商品Ⅱとして統合するようにして行なわれるとする。プロダクトミックス変化前の４部門及び統合された２部門の産業連関表とそれらの表から計算される投入係数は表①～④に示されている。

ここで，４つの商品の投入構造は全く変わらないが，商品１の生産額が1.5倍，商品４の生産額が1.2倍に増加したとする。商品２及び３の生産額は不変であるとする。このようなプロダクトミックス変化後の４部門及び統合された２部門の産業連関表とそれらの表から計算される投入係数は表⑤～⑧のようになる。４部門表から計算される投入係数表は変化後においても変化前と同じであるが（表③及び⑦），２統合部門より計算される投入係数表は，プロダクトミックス変化の結果として，変化してしまうことになる。このことはプロダクトミックス変化前の表④と変化後の表⑧を比較することによって明らかであろう。産業連関表においては，何らかの統合は不可避であるので，プロダクトミックスの変化は，統合表の投入係数の変化を不可避的にもたらすであろう。

表①　変化前の４部門産業連関表

		中間需要					最終需要	産出額
		商品１	商品２	商品３	商品４	中間需要計		
中間投入	商品１	10	30	20	30	90	10	100
	商品２	30	90	50	10	180	120	300
	商品３	20	30	30	50	130	70	200
	商品４	10	50	20	20	100	50	150
	中間投入計	70	200	120	110	500	250	750
総付加価値		30	100	80	40	250		
産出額		100	300	200	150	750		

表②　変化前の２部門統合表

		中間需要			最終需要	産出額
		商品Ⅰ	商品Ⅱ	中間需要計		
中間投入	商品Ⅰ	160	110	270	130	400
	商品Ⅱ	110	120	230	120	350
	中間投入計	270	230	500	250	750
総付加価値		130	120	250		
産出額		400	350	750		

表③　変化前の４部門表による投入係数表

	商品１	商品２	商品３	商品４
商品１	0.1	0.1	0.1	0.2
商品２	0.3	0.3	0.25	0.0667
商品３	0.2	0.1	0.15	0.3333
商品４	0.1	0.1667	0.1	0.1333
計	0.7	0.6667	0.6	0.7333

表④　変化前の２部門統合表による投入係数表

	商品Ⅰ	商品Ⅱ
商品Ⅰ	0.4	0.3143
商品Ⅱ	0.275	0.3429
計	0.675	0.6571

表⑤　変化後の４部門産業連関表

		中間需要					最終需要	産出額
		商品１	商品２	商品３	商品４	中間需要計		
中間投入	商品１	15	30	20	36	101	49	150
	商品２	45	90	50	12	197	103	300
	商品３	30	30	30	60	150	50	200
	商品４	15	50	20	24	109	71	180
	中間投入計	105	200	120	132	557	273	830
総付加価値		45	100	80	48	273		
産出額		150	300	200	180	830		

表⑥ 変化後の２部門統合表

		中間需要			最終需要	産出額
		商品Ⅰ	商品Ⅱ	中間需要計		
中間投入	商　品　Ⅰ	180	118	298	152	450
	商　品　Ⅱ	125	134	259	121	380
	中間投入計	305	252	557	273	830
総付加価値		145	128	273		
産　出　額		450	380	830		

表⑦ 変化後の４部門表による投入係数表

	商品１	商品２	商品３	商品４
商　品　1	0.1	0.1	0.1	0.2
商　品　2	0.3	0.3	0.25	0.0667
商　品　3	0.2	0.1	0.15	0.3333
商　品　4	0.1	0.1667	0.1	0.1333
計	0.7	0.6667	0.6	0.7333

表⑧ 変化後の２部門統合表による投入係数表

	商品Ⅰ	商品Ⅱ
商　品　Ⅰ	0.4	0.3105
商　品　Ⅱ	0.2778	0.3526
計	0.6778	0.6632

(3) 技術変化

投入構造を変化させる最も基本的な要因は生産技術の変化であろう。このような変化には，技術革新による全く新しい技術による全面的な投入係数の変化，新材料や原燃料の代替等による部分的な変化，生産効率の上昇による付加価値率の上昇など，多くの理由による変化が考えられる。

日本の場合，高度経済成長期においてはプロダクトミックスの変化が投入係数変化の最大の要因であったといわれている。その後，石油ショックを経て大きな相対価格の変化があった。このような相対価格の変化は，単に名目的な投入係数の変化のみならず，省資源，省エネルギー等への動きを通じて原燃料等の代替を引起こし，技術構造そのものをも変化させていったと考えられる。

かくして，このように何らかの理由によって投入係数が変化していくものとすれば，産業連

関モデルを産業構造の予測や計画等のために利用しようとする場合，投入係数の変化の動向を予測し，モデルに折り込んでいくことが必要になってくる。以下においては，投入係数の予測や更新の方法を検討していくが，そのような投入係数の更新或いは予測の方法としては次のようなものがあるといわれている。

① 投入係数に影響を与えるような要因についての関連情報を利用して投入係数を修正する。例えば，技術変化についての専門的情報やプロダクトミックスの変化の予測などによって投入係数を修正していく。

② 投入係数の時系列的変化の要因を分析し，そのような要因を説明変数とする投入係数の計量経済モデルを作成することによって投入係数を予測する。

③ 予測或いは更新時点における投入構造についての周辺情報（中間投入の合計或いは付加価値額，最終需要額，生産額など）が暫定的にわかる場合，このような間接的な情報を用いて機械的に投入係数を予測する方法がある。このような方法は①や②のような投入係数そのものについての直接的情報がない場合に使用される方法である。

実際の投入係数の更新や予測においては上記①，②，③の方法がそれぞれ併用されることになるであろう。本格的な投入係数の予測や修正の方法は①によるものであろうが，実際には投入係数を予測するために使用し得る情報は，かなりの規模の調査を行わない限り，必ずしも多くはない。従って，使用し得る情報に限りがある場合には，最終的には③の方法が用いられることが多い。このような方法には，RAS法，平均増加倍率法，ラグランジュ未定乗数法などのいくつかの方法がある。以下では，このような③の方法に分類されるいくつかの方法を説明するとから議論を進めることにする。
（なお，投入及び産出についての大規模な調査を行ない，そのような調査結果に基づいて産業連関表を作成する方法をサーヴェイ法，大規模な調査を行わず，主として③の方法を援用して産業連関表を作成する方法をノンサーヴェイ法という。もちろん，本格的な作表の方法はサーヴェイ法であり，例えば，日本において５年毎に作成される総務庁表はこの方法に基づいて作成されている。このような表から作成される延長表等については③の方法も併用されているものと思われる。）

3．RAS法

RAS法は本格的なノンサーヴェイテクニックとして最初に提案された方法であり，この種の方法として最も著名なものである。この方法は国民経済計算の研究者としてノーベル経済学賞を受賞したR. Stone［9］,［15］によって提案された。（RAS法の数学的基礎は限られた情報

に基づいてある行列から新しい行列を作成する方法［11］であり，また，RAS法の詳細な数学的検討は［３］において行なわれている。日本におけるRAS法の最初の実際的適用は［19］にみられる。）

RAS法とよばれる方法においては，投入係数の変化を２つの方向から考えられる。その１つは，労働と資本の組合せの変化による付加価値率の変化や原材料投入率の変化のような投入係数の列（縦）方向の変化であり，これは加工度変化効果とよばれる。もう１つの方向の変化は，投入される原材料の間に代替が生ずることによって生ずる変化であり，これは投入係数の行（横）を変化させるものとされ，これは代替効果とよばれる。

２部門からなる経済を仮定し，投入係数をa，中間投入額をx，生産額をXによって表わすものとし，変化前の投入係数が次のようであったとする。

	商品１	商品２
商　品　1	a_{11}	a_{12}
商　品　2	a_{21}	a_{22}

このような投入係数がある期間の後，上記で述べたような要因によって次のように変化したものとする。添字(1)は変化後であることを示す。

	商品１	商品２
商　品　1	$a_{11}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}$
商　品　2	$a_{21}^{(1)}$	$a_{22}^{(1)}$

議論の単純化のために，この期間における各商品の生産額は不変であった（即ち，$X_1=X_1^{(1)}$，及び，$X_2=X_2^{(1)}$）と仮定する。かくして，変化後の投入係数は次のように表わされる。

$$a_{11}^{(1)}=\frac{x_{11}^{(1)}}{X_1^{(1)}}=\frac{x_{11}^{(1)}}{X_1}\qquad a_{12}^{(1)}=\frac{x_{12}^{(1)}}{X_2^{(1)}}=\frac{x_{12}^{(1)}}{X_2}$$

$$a_{21}^{(1)}=\frac{x_{21}^{(1)}}{X_1^{(1)}}=\frac{x_{21}^{(1)}}{X_1}\qquad a_{22}^{(1)}=\frac{x_{22}^{(1)}}{X_2^{(1)}}=\frac{x_{22}^{(1)}}{X_2}$$

ここで，代替効果による投入係数の行についての変化は，商品１が全て商品の生産においてr_1倍使用されるようになり，商品２が全ての商品の生産においてr_2倍使用されるようになるようなものであったとする。

一方，加工度変化効果による投入係数の列についての変化は商品１への投入が全てs_1倍になり，商品２への投入が全てs_2倍になるようなものであったとする。

かくして，変化後の中間投入額$x_{ij}^{(1)}$は，ここでは

$$x_{11}^{(1)} = r_1 x_{11} s_1 \qquad x_{12}^{(1)} = r_1 x_{12} s_2$$
$$x_{21}^{(1)} = r_2 x_{21} s_1 \qquad x_{22}^{(1)} = r_2 x_{22} s_2$$

従って，変化後の投入係数は

$$a_{11}^{(1)} = \frac{x_{11}^{(1)}}{X_1^{(1)}} = r_1 \frac{x_{11}}{X_1} s_1 = r_1 a_{11} s_1$$

$$a_{21}^{(1)} = \frac{x_{21}^{(1)}}{X_1^{(1)}} = r_2 \frac{x_{21}}{X_1} s_1 = r_2 a_{21} s_1$$

$$a_{12}^{(1)} = \frac{x_{12}^{(1)}}{X_2^{(1)}} = r_1 \frac{x_{12}}{X_2} s_2 = r_1 a_{12} s_2$$

$$a_{22}^{(1)} = \frac{x_{22}^{(1)}}{X_2^{(1)}} = r_2 \frac{x_{22}}{X_2} s_2 = r_2 a_{22} s_2$$

これを行列によって表示すると

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$$

或いは

$$A^{(1)} = \hat{R} A \hat{S}$$

となる。ここで，$\hat{R}$ は代替効果乗数 r の対角行列であり，$\hat{S}$ は加工度変化効果乗数 s の対角行列である。かくして，この方法においては，$\hat{R}$ と $\hat{S}$ をどのようにして求めるかということが問題となる。

以下では，これを求める手続きを簡単な設例によって説明する。

まず，3部門からなる経済を仮定し，変化前の第0年次の産業連関表が次のようであったとする。(以下の産業連関表の数値例は [16], [17] によるものであるが，計算は林によるものである。)

		中間需要				最終需要	産出額
		商品1	商品2	商品3	中間需要計		
中間投入	商品1	50	100	0	150	50	200
	商品2	30	50	20	100	200	300
	商品3	20	50	30	100	100	200
	中間投入計	100	200	50	350	350	700
総付加価値		100	100	150	350		
産出額		200	300	200	700		

この産業連関表による第０年次の投入係数は次のようになる。

	商品１	商品２	商品３
商 品 1	0.250	0.333	0.000
商 品 2	0.150	0.167	0.100
商 品 3	0.100	0.167	0.150

予測年次を第ｔ年次とし，第ｔ年次については次のような情報がわかっているものとする。産業別の産出額，最終需要，付加価値の推計は別途の方法をもって行なうこともできるので，予測年次についてこのような情報についての暫定推計が行なわれることは十分可能なことである。

		中 間 需 要				最終需要	産出額
		商品１	商品２	商品３	中間需要計		
中間投入	商 品 1				160	40	200
中間投入	商 品 2				150	250	400
中間投入	商 品 3				120	180	300
中間投入	中間投入計	100	250	80	430	470	900
総付加価値		100	150	220	470		
産 出 額		200	400	300	900		

かくして，ここで未知であるのは第ｔ年次の産業連関表における中間投入行列

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = [x_{ij}]$$

及び，第ｔ年次における投入係数行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

であるということになる。

かくして，まず，第ｔ年について未知のものと既知のものより，次のような方程式が得られる。

$$160 = x_{11} + x_{12} + x_{13}$$
$$150 = x_{21} + x_{22} + x_{23}$$
$$120 = x_{31} + x_{32} + x_{33}$$
$$100 = x_{11} + x_{21} + x_{31}$$
$$250 = x_{12} + x_{22} + x_{32}$$
$$80 = x_{13} + x_{23} + x_{33}$$

この6本の方程式のうち，上3本は第t年次についての未知の産業連関表の中間需要の行和，下の3本は中間投入の列和である。

さらに，未知の産業連関表における投入係数は，投入係数の定義により，次のように表わされる。

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= x_{11}/200\\
a_{21} &= x_{21}/200\\
a_{31} &= x_{31}/200\\
a_{12} &= x_{12}/400\\
a_{22} &= x_{22}/400\\
a_{32} &= x_{32}/400\\
a_{13} &= x_{13}/300\\
a_{23} &= x_{23}/300\\
a_{33} &= x_{33}/300
\end{aligned}
$$

さらに，投入係数が代替効果rと加工度変化効果sによって変化するものとすると，第t年次の未知の投入係数は第0年次の既知の投入係数とr及びsによって次のように書くことができる。

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= r_1 \times 0.250 \times s_1\\
a_{12} &= r_1 \times 0.333 \times s_2\\
a_{13} &= r_1 \times 0.000 \times s_3\\
a_{21} &= r_2 \times 0.150 \times s_1\\
a_{22} &= r_2 \times 0.167 \times s_2\\
a_{23} &= r_2 \times 0.100 \times s_3\\
a_{31} &= r_3 \times 0.100 \times s_1\\
a_{32} &= r_3 \times 0.167 \times s_2\\
a_{33} &= r_3 \times 0.150 \times s_3
\end{aligned}
$$

上記における方程式の数は24本，そして，未知数の数も24個（x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3）であるので，これを連立方程式として解くことによって，第t年次における中間投入額及び投入係数（さらに，代替効果乗数及び加工度変化効果乗数）を求めることができる。しかし，この連立方程式は非線型体系であるので，代数的に解くことはできず，その解法を工夫しなければならない。RAS法の計算は，一般的には，以下に示すような収束近似計算によって行なわれる。以下では，ここでの設例によってその解法の手順を示す。

① 第0年次の投入係数行列に第t年次の産出額を次のように乗ずる。

$$
\begin{bmatrix} 0.250 & 0.333 & 0.000 \\ 0.150 & 0.167 & 0.100 \\ 0.100 & 0.167 & 0.150 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 50 & 133.3 & 0 \\ 30 & 66.7 & 30 \\ 20 & 66.7 & 45 \end{bmatrix}
$$

② このようにして得られた行列は未知の中間投入行列［x_{ij}］の第1次近似である。この行列の列和及び行和が既知である第t年次のそれらに等しいならば，計算はそれで終わりである。しかし，一般には，それらは等しくならない。例えば，その行和を求め，第t年次における各商品の中間需要計と比較する。投入係数が変化しておれば，この両者は一致しない。行和≠第t年次の中間需要計であるならば，各商品について（行和／第t年次中間需要計）という比率を計算し，これを上記の行列の各行の要素に乗じて，各商品について，行和＝第t年次の中間需要計，となるような行列を作る。このような行修正係数$r^{(1)}$は，後に示すように，第1回目の代替効果修正乗数となっている。以下でのrとsの添字は修正の段階の回数を示す。（なお，ここでのRAS計算は行の修正から始められているが，列の修正から始めても同じ結果が得られるはずである。）

			行和		第t年次の中間需要計	行修正係数$r^{(1)}$
50	133.3	0	183.7	≠	160	160／183.3
30	66.7	30	126.7	≠	150	150／126.7
20	66.7	45	131.7	≠	120	120／131.7

③ かくして，上記の$r^{(1)}$を先の行列の各行に乗じて得られる行列を作成し，その各列和を求めて，第t年次における既知の中間投入計と比較する。この両者が一致しなければ，この行列の列和を第t年次における既知の中間投入計に合致させるような列修正係数$s^{(1)}$を求める。この列修正係数は，後に示すように，第1回目の加工度変化効果修正乗数となる。

$$\begin{array}{|ccc|}\hline 43.6 & 116.4 & 0.0 \\ 35.5 & 79.0 & 35.5 \\ 18.2 & 60.8 & 41.2 \\ \hline\end{array} = \begin{pmatrix} 50\times160/183.3 & 133.3\times160/183.3 & 0\times160/183.3 \\ 30\times150/126.7 & 66.7\times150/126.7 & 30\times150/126.7 \\ 20\times120/131.7 & 66.7\times120/131.7 & 45\times120/131.7 \end{pmatrix}$$

列和	97.3	256.2	76.5
	≠	≠	≠
第t年次中間投入計	100	250	80
列修正係数$s^{(1)}$	$\frac{100}{97.3}$	$\frac{250}{256.2}$	$\frac{80}{76.5}$

④ 以下，各行和及び各列和が第t年次における各商品についての既知の中間需要計及び中間投入計に一致するまで，行列の行修正及び列修正を繰り返す。即ち，上記の行列に列修正係数$s^{(1)}$を乗じた行列を作成し，その行和を求めて，第t年次の中間需要計と比較する。それらが一致しなければ，さらに，行修正係数$r^{(2)}$を計算する。

			行和		第t年次の中間需要計	第2回行修正係数 $r^{(2)}$
44.8	113.6	0.0	158.4	≠	160	160／158.4
36.5	77.1	37.1	150.7	≠	150	150／150.7
18.7	59.3	42.9	120.9	≠	120	120／120.9

$$= \begin{pmatrix} 43.6\times100/97.3 & 116.3\times250/256.2 & 0.0\times80/76.5 \\ 35.5\times100/97.3 & 79.0\times250/256.2 & 35.5\times80/76.5 \\ 18.2\times100/97.3 & 60.8\times250/256.2 & 41.0\times80/76.5 \end{pmatrix}$$

⑤先の行列の各行に行修正係数 $r^{(2)}$ を乗じて行を修正する。修正された行列の列和を求め，それが第 t 年次中間投入計となお一致していなければ，第２回列修正係数 $s^{(2)}$ を計算する。

$$\boxed{\begin{matrix} 45.3 & 114.7 & 0.0 \\ 36.3 & 76.7 & 36.9 \\ 18.8 & 58.9 & 42.6 \end{matrix}} = \begin{pmatrix} 44.8\times160/158.4 & 113.6\times160/158.4 & 0.0\times160/158.4 \\ 36.5\times150/150.7 & 77.1\times150/150.7 & 37.1\times150/150.7 \\ 18.7\times120/120.9 & 59.3\times120/120.9 & 42.9\times120/120.9 \end{pmatrix}$$

	100.2	250.3	79.5
	≠	≠	≠
	100	250	80
$s^{(2)}$	$\frac{100}{100.2}$	$\frac{250}{250.3}$	$\frac{80}{79.5}$

⑥ 先の行列に列修正係数 $s^{(2)}$ を乗じて列を修正し，その行列の行和と第 t 年次の中間需要計と比較し，不一致があれば，第３回目の行修正係数 $r^{(3)}$ を計算する。

						$r^{(3)}$
45.2	114.6	0.0	159.8	≠	160	160／159.8
36.2	76.6	37.1	149.9	≠	150	150／149.9
18.6	58.8	42.9	120.3	≠	120	120／120.3

⑦ 行修正数 $r^{(3)}$ を乗じて行を修正し，修正された行列の列和と第 t 年次の中間投入計と比較して，不一致がなおあれば，さらに列修正行列 $s^{(3)}$ を計算する。

45.3	114.7	0.0
36.2	76.7	37.1
18.6	58.7	42.8

	100.1	250.1	79.9
	≠	≠	≠
	100	250	80
$s^{(3)}$	$\frac{100}{100.1}$	$\frac{250}{250.1}$	$\frac{80}{79.9}$

⑧　このような計算を行と列について繰り返すことにより，その行和と列和が第ｔ年次の既知の中間需要計と中間投入計に一致するような行列が次のように得られる。

45.3	114.7	0.0	160
36.2	76.7	37.1	150
18.5	58.6	42.9	120
100	250	80	

これが求めるべき第ｔ年次の中間投入行列［x_{ij}］の推計値であり，第ｔ年次の産業連関表は先の空間部分に上記の行列を投入することによって求めることができる。RAS 法においては第０年においてゼロであった要素は第ｔ年においてもゼロとなる。また，第ｔ年次の投入計数行列［a_{ij}］はこのようにして求められた［x_{ij}］を第ｔ年次の対応する産出額によって除することによって次のように求められる。投入係数においても当初にゼロであった要素は依然としてゼロである。また，RAS 法においては，得られる要素の非負性が確保されることも明らかである。

$$\boxed{\begin{matrix} 0.227 & 0.287 & 0.000 \\ 0.181 & 0.192 & 0.124 \\ 0.093 & 0.147 & 0.143 \end{matrix}} = \begin{pmatrix} 45.3/200 & 114.7/400 & 0.0/300 \\ 36.2/200 & 76.7/400 & 37.1/300 \\ 18.5/200 & 58.6/400 & 42.9/300 \end{pmatrix}$$

そして，代替効果乗数ｒ及び加工度変化効果乗数ｓの各商品列の最終的な要素は，修正段階別において計算される各修正係数を順次乗じていくことによって，次のようにして求めることができる。

$$r_i = r_i^{(1)} \times r_i^{(2)} \times r_i^{(3)} \times \cdots\cdots\cdots$$

$$s_j = s_j^{(1)} \times s_j^{(2)} \times s_j^{(3)} \times \cdots\cdots\cdots$$

従って，上記の例においては商品別の r_i は次のように求められる。

$$r_1 = (160/183.3) \times (160/158.4) \times (160/159.8) \times \cdots\cdots = 0.833$$
$$r_2 = (150/126.7) \times (150/150.7) \times (150/149.9) \times \cdots\cdots = 1.179$$
$$r_3 = (120/131.7) \times (120/120.9) \times (120/120.3) \times \cdots\cdots = 0.902$$

また，商品別のs_jは次のように求められる。

$$s_1 = (100/\ 97.2) \times (100/100.2) \times (100/100.1) \times \cdots\cdots = 1.054$$
$$s_2 = (250/256.2) \times (250/250.3) \times (250/250.1) \times \cdots\cdots = 0.974$$
$$s_3 = (\ 80/\ 76.5) \times (\ 80/\ 79.5) \times (\ 80/\ 79.9) \times \cdots\cdots = 1.054$$

かくして，上記の第t年の$[a_{ij}]$は第0年の$[a_{ij}]$を代替効果乗数$\widehat{R}$と加工度変化乗数$\widehat{S}$によって以下のように修正したものであることを確かめることができる。

$$A_t = \widehat{R} A_0 \widehat{S}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.833 & 0 & 0 \\ 0 & 1.179 & 0 \\ 0 & 0 & 0.992 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.250 & 0.333 & 0.000 \\ 0.150 & 0.167 & 0.100 \\ 0.100 & 0.167 & 0.150 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.026 & 0 & 0 \\ 0 & 0.974 & 0 \\ 0 & 0 & 1.054 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.227 & 0.287 & 0.000 \\ 0.181 & 0.192 & 0.124 \\ 0.093 & 0.147 & 0.143 \end{bmatrix}$$

ここで，A_0は第0年次の投入係数行列，A_tは第t年次の投入係数行列，$\widehat{R}$は代替効果乗数r_iを対角要素とする対角行列，$\widehat{S}$は加工度変化効果乗数s_jを対角要素とする対角行列である。

また，上記の式は，r_iとs_jの定義により，次のように書けることは明らかであろう。

$$\begin{bmatrix} r_1^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & r_2^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & r_3^{(1)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_1^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & r_2^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & r_3^{(2)} \end{bmatrix} \times \cdots\cdots$$
$$\times \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} s_1^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & s_2^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & s_3^{(1)} \end{bmatrix}$$
$$\times \begin{bmatrix} s_1^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & s_2^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & s_3^{(2)} \end{bmatrix} \times \cdots\cdots = \begin{bmatrix} a_{11}^{(t)} & a_{12}^{(t)} & a_{13}^{(t)} \\ a_{21}^{(t)} & a_{22}^{(t)} & a_{23}^{(t)} \\ a_{31}^{(t)} & a_{32}^{(t)} & a_{33}^{(t)} \end{bmatrix}$$

ここで，この設例においては

$$r_1^{(1)} = 160/183.3 \quad r_1^{(2)} = 160/158.4 \cdots\cdots$$
$$r_2^{(1)} = 150/126.7 \quad r_2^{(2)} = 150/150.7 \cdots\cdots$$
$$r_3^{(1)} = 120/131.7 \quad r_3^{(2)} = 120/120.9 \cdots\cdots$$

$$s_1^{(1)} = 100/97.2 \quad s_1^{(2)} = 100/100.2 \cdots\cdots$$
$$s_2^{(1)} = 250/256.2 \quad s_2^{(2)} = 250/250.3 \cdots\cdots$$
$$s_3^{(1)} = 80/76.5 \quad s_3^{(2)} = 80/79.5 \cdots\cdots$$

等々のような各段階での修正係数である。或いは，上記の各段階別の行及び列修正係数の対角行列を$\hat{R}^{(1)}$, $\hat{R}^{(2)}$，……，$\hat{S}^{(1)}$, $\hat{S}^{(2)}$，……，と略記すれば，上記のRAS修正算式は

$$A_t = \hat{R}^{(1)}\hat{R}^{(2)} \cdots\cdots A_0\hat{S}^{(1)}\hat{S}^{(2)} \cdots\cdots$$

のように表わすことができる。

なお，このようなRAS繰り返し計算が果たして収束するかどうかという問題があるが，一般的には，RAS計算は，多くの場合，かなり早期に収束するということが確かめられている。

以上がRAS法の概要であるが，代替効果乗数R及び加工度変化効果乗数Sを求める必要がないならば，次のような簡易計算によって全く同じ結果を得ることができる。以下ではこの簡易RAS法を説明する。

①　第t年次の商品別中間需要計

			160
			150
			120

を第0年次の中間投入行列

50	100	0	150
30	50	20	100
20	50	30	100

の行構成比によって分割する。即ち，

$$\begin{array}{|ccc|} \hline 53.3 & 106.7 & 0 \\ 45 & 75 & 30 \\ 24 & 60 & 40 \\ \hline \end{array} = \begin{pmatrix} 160\times50/150 & 160\times100/150 & 160\times0/150 \\ 150\times30/100 & 150\times50/100 & 150\times20/100 \\ 120\times20/100 & 120\times50/100 & 120\times30/100 \end{pmatrix}$$

（ここでは，行の分割から計算を始めたが，列についての分割から計算を始めても同じ結果を得ることができる。）

②　以下の手順は上記において述べたRAS法の手順と全く同じである。即ち，求められた行列の列和を計算し，第t年次の既知の中間投入計と比較し，それらが一致しなけけば，列和

を中間投入計に一致せしめるような列修正係数を計算する。

	53.3	106.7	0
	45	75	30
	24	60	36
列和	122.3	241.7	66
	≠	≠	≠
第t年次中間投入計	100	250	80
列修正係数	$\frac{100}{122.3}$	$\frac{250}{241.7}$	$\frac{80}{66}$

③　上記の行列の列に列修正係数を乗じて，列和を第ｔ年次の中間投入計に一致させた行列を作り，得られた行列の行和と第ｔ年次の中間需要計を比較して，両者が一致しない場合には行修正係数を作成する。

			行和		第t年次中間需要計	行修正行列
43.6	110.4	0.0	154.0	≠	160	160／154.0
36.8	77.6	36.4	150.8	≠	150	150／150.8
19.6	62.1	43.6	125.3	≠	120	120／125.3

以下，このような行及び列の修正計算を各行和及び各列和が第ｔ年次の各商品の中間需要計及び中間投入計に等しくなるまで繰り返す。この簡易RAS法においては，先の計算におけるように代替効果乗数r_i及び加工度変化効果乗数s_jを求めることはできないが，より簡単な計算によって同じ結果を得ることができる。

先にも記したように，RAS法はRichard Stoneによって考案された方法であり，その名称は投入係数行列Ａに自らの名前の頭文字をとった行及び列修正行列$\hat{R}$及び$\hat{S}$を乗じて更新年次或いは予測年次の投入係数行列を得るというその表記法RASより命名されたといわれている。RAS法が単なる機械的計算以上の経済的な意味をもつかどうかは，行修正乗数が原材料間の代替を測定するものであり，列修正乗数が付加価値率や原材料投入率の変化のような加工度の変化を予測するものである，という経済的解釈に依拠しているが，それらが全ての部門に比例的に生ずるという点はその解釈の限界であるということができるであろう。

RAS法では，技術変化の方向を代替効果$\hat{R}$と加工度変化効果$\hat{S}$とによって明示的に表現しているので，このことを利用して，RAS法の結果を次のように使用することもできる。例えば，ある離れた２つの時点，第０年次と第ｔ年次との間で$\hat{R}$と$\hat{S}$が求められたとすると，第０年次から第ｔ年次への中間年次におけるある１年間の投入係数行列の変化は，変化が一定年率で生じていると仮定すれば，$\hat{R}$と$\hat{S}$の１年単位の変化率$\hat{R}^{1/t}$及び$\hat{S}^{1/t}$によって与えられることになるであろう。かしして例えば，第０年次以後の各年次の投入係数行列は

$$A_1 = \hat{R}^{1/t} A_0 \hat{S}^{1/t}$$
$$A_2 = \hat{R}^{2/t} A_0 \hat{S}^{2/t}$$
$$\vdots$$
$$A_t = \hat{R}^{t/t} A_0 \hat{S}^{t/t} = \hat{R} A_0 \hat{S}$$

のようになる。この傾向が第 t 年次以降も持続するものとすれば，第 t 年次以降の第 t ＋ n 年次の投入係数行列A_{t+n}は

$$A_{t+n} = \hat{R}^{(t+n)/t} A_0 \hat{S}^{(t+n)/t} = \hat{R}^{(1+n/t)} A_0 \hat{S}^{(1+n/t)}$$

によって求めることができる。

4．追加的情報を利用したRAS法

上記の通常のRAS法は，予測或いは更新年次の商品別の中間需要計及び中間投入計，即ち，中間投入行列の行和と列和についての情報はあるが，その行列の要素についての情報がない場合に，その個々の要素を求める方法である。しかし，中間需要或いは中間投入の要素の一部が何らかの情報によって判明することがある。利用可能な情報は可能な限り利用することは，一般的には，推計の精度を高めると考えられる。以下では，利用可能な情報等によって中間投入行列の一部がわかっているような場合に，RAS法をどのように適用することができるか考えることにする。

ここでは，先に用いたRAS法の設例において，さらに，第 t 年次における商品１の生産への商品２の投入が40であるということが他の情報によってわかっているものとする。従って，このような状況においては，第 t 年次の産業連関表について既知である全ての情報は次のようなものとなる。

		中間需要				最終需要	産出額
		商品１	商品２	商品３	中間需要計		
中間投入	商品１				160	400	200
	商品２	40			150	250	400
	商品３				120	180	300
	中間投入計	100	250	80	430	470	900
総付加価値		100	150	220	470		
産出額		200	400	300	900		

かくして，求めるべき［x_{ij}］及び［a_{ij}］の要素の数は１つづつ減少することになることは明らかであろう。従って，RAS計算を行なうにあたっては，計算を始める前に，第０年次の投入係数行列から商品１における商品２の投入係数を除去し，さらに，第 t 年次の商品２の中

間需要計及び商品１の中間投入計からそれぞれ既知である商品２への商品１への産出40及び商品１における商品２の投入40を除去することができる。かくして，第ｔ年次の第１列についてはl00－40＝60，第２行については150－40＝110を新しい制約条件としてRAS計算を行なっていけばよいことになる。

即ち，この場合のRAS計算は第０年次の投入係数行列から商品１への商品２の投入係数を除いた，即ち，その要素を０とした行列

$$\begin{array}{|ccc|}\hline 0.250 & 0.333 & 0 \\ 0 & 0.167 & 0.100 \\ 0.100 & 0.167 & 0.150 \\ \hline \end{array}$$

をベースとして

$$\begin{array}{|ccc|l} \cline{1-3} & & & 160 \\ & & & 110 \\ & & & 120 \\ \cline{1-3} \multicolumn{1}{c}{60} & \multicolumn{1}{c}{250} & \multicolumn{1}{c}{80} & \end{array}$$

のような，既知の要素について減額された行和及び列和を満たすような行列を求めればよいことになる。かくして，第２行第１列の要素をゼロとおいた投入係数行列に第ｔ年次の商品別産出額を乗じることによって得られる行列

$$\begin{bmatrix} 0.250 & 0.333 & 0 \\ 0 & 0.167 & 0.100 \\ 0.100 & 0.167 & 0.150 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 50 & 133.3 & 0 \\ 0 & 66.7 & 35 \\ 20 & 66.7 & 45 \end{bmatrix}$$

を求めるべき第ｔ年次の中間投入行列の第一次近似として，先のRAS法計算の手順を適用していけばよい。この計算は行或いは列のいずれから始めてもよいが，行から始めることにすると，

①　その行列の行和を求め，それと新しい行制約と比較し，それらが一致しなければ，両者の比率として行修正係数 $r^{(1)}$ を計算する。即ち，

			行和		第ｔ年次の新しい行制約	行修正係数 $r^{(1)}$
50	133.3	0	183.3	≠	160	160／183.3
0	66.7	30	96.7	≠	110	110／ 96.7
20	66.7	45	131.7	≠	120	120／131.7

②　この行修正係数 $r^{(1)}$ によって上記の行列の行を修正して，その列和を第ｔ年次における新しい行制約に一致させた行列を作成し，その列和を求める。この列和と第ｔ年次の新しい列

制約とを比較し，それらが一致しない場合には，両者の比率として列修正係数s[(1)]を作成する。

	43.6	116.4	0
	0	75.9	34.1
	18.2	60.8	41.0
列和	61.8	253.1	75.1
	≠	≠	≠
第t年次の新しい列制約	60	250	80
列修正係数s[(1)]	$\frac{60}{61.8}$	$\frac{250}{253.1}$	$\frac{80}{75.1}$

③　列修正係数s[(1)]によって上記の行列を修正して，列和を列制約に一致させた行列を作り，その行和を求め，それを行制約として比較する。それらが一致しない場合には行修正係数r[(2)]を計算する。

			行和		第t年次の行制約	行修正行列r[(2)]
42.3	115.0	0	157.3	≠	160	160／157.3
0	75.0	36.3	111.3	≠	110	110／111.3
17.7	60.1	43.7	121.5	≠	120	120／121.5

以下，このような計算を行及び列について交互に繰り返して行なうことによって得られる最終的な結果は以下のようになる。

42.7	117.3	0	160
0	73.7	36.3	110
17.3	59.0	43.7	120
60	250	80	

この結果に先の既知の要素である40を入れたものが求めるべき最終的な第t年次の中間投入行列である。かくして，この方法においては既知の要素についての情報がそのまま生かされることになるが，この場合の行及び列修正係数は先のような経済的意味をもたなくなってしまうであろう。

42.7	117.3	0	160
40	73.7	36.3	150
17.3	59.0	43.7	120
100	250	80	

この場合の第ｔ年次の投入係数行列 $[a_{ij}]$ は上記の中間投入行列の各列を対応する商品の産出額によって除することによって求められる。

$$\boxed{\begin{matrix} 0.214 & 0.293 & 0.000 \\ 0.200 & 0.184 & 0.121 \\ 0.087 & 0.148 & 0.146 \end{matrix}} = \begin{pmatrix} 42.7/200 & 117.3/400 & 0/300 \\ 40\ /200 & 73.7/400 & 36.3/300 \\ 17.3/200 & 59.0/400 & 43.7/300 \end{pmatrix}$$

RAS 法における追加情報の使用は投入係数の予測精度を高めるという実証結果［16］があるが，場合によっては，それを低下させる場合もあり得ることも示されている。

5．平均増加倍率法

RAS 法は，数学的には，ある行列をベースとして新しい行制約及び列制約を満たすような新しい行列を作る方法であるといえる。投入係数の更新或いは予測への適用においては，当初の投入係数行列或いは中間投入行列をベースにすることにより，当初の技術構造に基づいて，新しい中間需要制約及び中間投入制約を満たすような技術構造を推計しようとしているといえる。

ある行列をベースにして新しい行列制約を満たす行列を作成する方法には他にもいくつかのものがある。平均増加倍率法もそのような方法の１つである。

RAS 法においては行と列の修正が交互に行なわれるが，平均増加倍率法は行と列をそれぞれの修正係数によって同時に修正したものの単純平均をとるという形で修正された行列を求めていこうとするものである。先と同じ数値例によってこの方法の手順を述べる。既知の情報を再掲すれば，

第０年次中間投入行列	50	100	0	150
	30	50	20	100
	20	50	30	100
	100	200	50	

第ｔ年次中間需要計及び中間投入計				160
				150
				120
	100	250	80	

計算の手順は次のように行なわれる。

① 第０年次の中間投入行列の各行要素を，各行の中間需要計の第０年次から第ｔ年次への増加率，即ち，各行についての（第ｔ年次中間需要計／第０年次中間需要計）によって拡大し

た行列，$[X_{ij}]^{1L}$を作る。即ち，

$$[X_{ij}]^{1L} = \begin{bmatrix} 50\times160/150 & 100\times160/150 & 0\times160/150 \\ 30\times150/100 & 50\times150/100 & 20\times150/100 \\ 20\times120/100 & 50\times120/100 & 30\times120/100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53.33 & 106.67 & 0 \\ 45 & 75 & 30 \\ 24 & 60 & 36 \end{bmatrix}$$

次に，第０年次中間投入行列の各列の要素を，各列の中間投入計の第０年次から第ｔ年次への増加率，即ち，各列の（第ｔ年次中間投入計／第０年次中間投入計）によって拡大した行列$[X_{ij}]^{1C}$を作る。即ち，

$$[X_{ij}]^{1C} = \begin{bmatrix} 50\times100/100 & 100\times250/200 & 0\times80/50 \\ 30\times100/100 & 50\times250/200 & 20\times80/50 \\ 20\times100/100 & 50\times250/200 & 30\times80/50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 & 125 & 0 \\ 30 & 62.5 & 32 \\ 20 & 62.6 & 48 \end{bmatrix}$$

このようにして求められた２つの行列$[X_{ij}]^{1L}$と$[X_{ij}]^{1C}$を加算して２で割った行列，即ち，$[X_{ij}]^{1L}$と$[X_{ij}]^{1C}$の平均，$[X_{ij}]^{1}$，を作成する。

$$[X_{ij}]^{1} = 1/2\{[X_{ij}]^{1L}+[X_{ij}]^{1C}\}$$

$$= 1/2\left\{\begin{bmatrix} 53.33 & 106.67 & 0 \\ 45 & 75 & 30 \\ 24 & 60 & 36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50 & 125 & 0 \\ 30 & 62.5 & 32 \\ 20 & 62.6 & 48 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 51.67 & 115.83 & 0 \\ 37.5 & 68.75 & 31 \\ 22 & 61.25 & 42 \end{bmatrix}$$

これがこの方法によって求めようとする第ｔ年次の中間投入行列の第一次近似である。

② 上記の$[X_{ij}]^{1}$の行和と列和を求め，既知である第ｔ年次の中間需要計及び中間投入計とそれぞれ比較する。それらが一致しない場合には，行修正係数及び列修正係数を同時に計算する。

$$\begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{列和} \\ \\ \text{第t年次中間投入計} \\ \text{列修正行列} \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 51.67 & 115.83 & 0 \\ 37.5 & 68.75 & 31 \\ 22 & 61.25 & 42 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 111.17 & 245.83 & 73 \\ \neq & \neq & \neq \\ 100 & 250 & 80 \\ \dfrac{100}{111.17} & \dfrac{250}{245.83} & \dfrac{80}{73} \end{array} \end{array} \begin{array}{lll} \text{行和} & \text{第t年次中間需要計} & \text{行修正係数} \\ 167.5 & \neq 160 & 160/167.5 \\ 137.25 & \neq 150 & 150/137.25 \\ 125.25 & \neq 120 & 120/125.25 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

③ $[X_{ij}]^{1}$の各行を上記で求めた行修正係数によって修正し，行和を第ｔ年次の中間需要計に一致させた行列を$[X_{ij}]^{2L}$とする。

$$[X_{ij}]^{2L} = \begin{bmatrix} 51.67\times160/167.5 & 115.83\times160/167.5 & 0\times160/167.5 \\ 37.5\times150/137.25 & 68.75\times150/137.25 & 31\times150/137.25 \\ 20\ \times120/125.25 & 61.25\times120/125.25 & 42\times120/125.25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 49.36 & 110.64 & 0 \\ 40.98 & 75.14 & 33.88 \\ 21.08 & 58.68 & 40.24 \end{bmatrix}$$

次に，$[X_{ij}]^1$の各列の要素に上記の列修正係数を乗じて，列和を第 t 年次の中間投入計に一致せしめた行列 $[X_{ij}]^{2C}$とする。

$$[X_{ij}]^{2C} = \begin{bmatrix} 51.67\times100/111.17 & 115.83\times258/245.83 & 0\times80/73 \\ 37.5\times100/111.17 & 68.75\times250/245.83 & 31\times80/73 \\ 22\ \times100/111.17 & 61.25\times250/245.83 & 42\times80/73 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 46.48 & 111.79 & 0 \\ 33.73 & 69.92 & 33.97 \\ 19.79 & 62.29 & 46.03 \end{bmatrix}$$

このようにして求められた $[X_{ij}]^{2L}$と $[X_{ij}]^{2C}$の平均を求め，それを $[X_{ij}]^2$とする。これがこの方法における収束計算の第２段階である。

$$[X_{ij}]^2 = 1/2\,\{[X_{ij}]^{2L}+[X_{ij}]^{2C}\}$$

$$= 1/2\left\{\begin{bmatrix} 49.36 & 110.64 & 0 \\ 40.98 & 75.14 & 33.88 \\ 21.08 & 56.68 & 40.24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 46.48 & 117.79 & 0 \\ 33.73 & 69.92 & 33.97 \\ 19.79 & 62.29 & 46.03 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 47.92 & 114.22 & 0 \\ 37.36 & 72.53 & 33.93 \\ 20.44 & 60.49 & 43.14 \end{bmatrix}$$

④　$[X_{ij}]^2$の行和及び列和を求め，第 t 年次中間需要計及び中間投入計と比較して，それらとの一致が得られない場合には行修正係数及び列修正係数を計算する。

				行和	第t年次中間需要計	行修正係数
	47.92	114.44	0	162.14	≠ 160	160／162.14
	37.36	72.53	33.93	143.82	≠ 150	150／143.82
	20.44	60.49	43.14	124.04	≠ 120	120／124.07
列和	105.72	247.24	77.07			
	≠	≠	≠			
第t年次中間投入額	100	250	80			
列修正係数	$\frac{100}{105.72}$	$\frac{250}{247.24}$	$\frac{80}{77.07}$			

⑤ 以下，このような計算を［X_{ij}］^{n}（n＝1，…，n）の行和と列和がそれぞれ第t年次の中間需要計及び中間投入計に等しくなるまで繰り返す。この第3段階においては，上記の行及び列修正係数を用いて，上記の行列を行及び列について修正した2つの行列を作成し，その平均値を求め，一致が得られない場合には，さらに修正係数を計算する。

$$[X_{ij}]^{3L} = \begin{bmatrix} 47.29 & 112.71 & 0 \\ 38.97 & 75.65 & 35.39 \\ 19.77 & 58.51 & 41.72 \end{bmatrix}$$

$$[X_{ij}]^{3C} = \begin{bmatrix} 45.33 & 115.50 & 0 \\ 35.34 & 73.34 & 35.22 \\ 19.33 & 61.17 & 44.78 \end{bmatrix}$$

$$[X_{ij}]^{3} = 1/2\{[X_{ij}]^{3L}+[X_{ij}]^{3C}\} = \begin{bmatrix} 46.31 & 114.11 & 0 \\ 37.16 & 74.50 & 35.31 \\ 19.56 & 59.84 & 43.25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lc|lll} & & \text{行和} & \text{第t年次中間需要計} & \text{行修正係数} \\ & \begin{bmatrix} 46.31 & 114.11 & 0 \\ 37.16 & 74.50 & 35.31 \\ 19.56 & 59.84 & 43.25 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 160.42 \\ 146.97 \\ 122.65 \end{matrix} & \begin{matrix} \neq 160 \\ \neq 150 \\ \neq 120 \end{matrix} & \begin{matrix} 160/160.24 \\ 150/146.97 \\ 120/122.65 \end{matrix} \\ \text{列和} & \begin{matrix} 103.03 & 248.45 & 78.56 \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} \neq & \neq & \neq \end{matrix} & & & \\ \text{第t年次中間投入計} & \begin{matrix} 100 & 250 & 80 \end{matrix} & & & \\ \text{列修正係数} & \begin{matrix} \dfrac{100}{103.03} & \dfrac{250}{248.45} & \dfrac{80}{78.56} \end{matrix} & & & \end{array}$$

このような過程を繰り返すことにより，この方法によって最終的に得られる第t年次の中間投入行列は次のようになる。

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 44.9 & 115.1 & 0 \\ 36.7 & 76.4 & 36.9 \\ 18.4 & 58.5 & 43.1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 160 \\ 150 \\ 120 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 100 & \quad 250 & \quad 80 \end{matrix} & \end{array}$$

投入係数行列［a_{ij}］はこの中間投入行列の各列を対応する商品の産出額によって除することによって求めることができる。

$$\begin{bmatrix} 0.225 & 0.228 & 0.000 \\ 0.184 & 0.191 & 0.123 \\ 0.092 & 0.146 & 0.144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44.9/200 & 115.1/400 & 0/300 \\ 36.7/200 & 76.4/400 & 36.9/300 \\ 18.4/200 & 58.5/400 & 43.1/300 \end{bmatrix}$$

平均増加倍率は，一般に，修正計算の回数はRAS法よりも少なくて済むといわれているが，RAS法の場合のように投入係数の最終的な修正係数をRとSのように有意な形で求めることはできない。

6．ラグランジュ未定乗数法

ラグランジュ未定乗数法も投入係数を数学的に予測推計する方法の１つである。基準時の投入係数行列，予測時の商品別の中間需要計と中間投入計及び産出額という先のケースと同様の情報が与えられた場合，この方法は，このような情報の与える制約の下で，基準時の投入係数と予測される投入係数との差の二乗和を最小にするような予測時の投入係数を求める，という最小二乗法を用いた方法である。即ち，制約下において基準時の投入係数との差が最も小さなものとして予測時の投入係数を求めようという方法である。

この方法の定式化は，例えば，次のように行なわれる（以下の定式化は［21］によるものである）。

$$\sum_{J=1}^{n} a_{ij}^{(t)} X_j^{(t)} = R_i^{(t)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(t)} = \frac{C_j^{(t)}}{X_j^{(t)}} = m_j^{(t)}$$

という制約の下で，

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}^{(t)} - a_{ij}^{(0)})^2$$

を最小にするような$a_{ij}^{(t)}$を求める，というものがこの方法の定式化である。ここで，

$a_{ij}^{(t)}$：求めるべき第ｔ年次の投入係数
$a_{ij}^{(0)}$：基準時である第０年次の投入係数
$X_j^{(t)}$：既知である第ｔ年次の商品別産出額
$R_i^{(t)}$：既知である第ｔ年次の商品別中間需要計
$C_j^{(t)}$：既知である第ｔ年次の商品別中間投入計
$m_j^{(t)}$：既知である（$C_j^{(t)}$／$X_j^{(t)}$によって計算される）第ｔ年次の商品別投入係数の列和

であり，ｎは部門数である。

２本の制約式はそれぞれ第ｔ年次の産業連関表における行制約と列制約を表わす。このような行列制約の下で，基準時（第０年次）の投入係数との差の二乗和を最小にするような予測時（第ｔ年次）の投入係数を求めようとするものである。

この問題は条件付きの最小化問題である。λ_j及びμ_iをそれぞれラグランジュ未定乗数とし，

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}^{(t)} - a_{ij}^{(0)})^2 - 2\lambda_j(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(t)} - m_j^{(t)})$$
$$- 2\mu_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(t)} X_j - R_i^{(t)})$$

とおき，これを$a_{ij}^{(t)}$，λ_j，μ_iについて偏微分したものをゼロとおく。まず，

$$\frac{\partial Q}{\partial a_{ij}{}^{(t)}} = 0,\ より$$

$$a_{ij}{}^{(t)} = a_{ij}{}^{(0)} + \lambda_j + \mu_i X_j{}^{(t)} \tag{1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda_j} = 0,\ より$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}{}^{(t)} = m_j{}^{(t)} \tag{2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \mu_i} = 0,\ より$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^{(t)} X_j{}^{(t)} = R_i{}^{(t)} \tag{3}$$

（1）及び（2）より

$$m_j{}^{(t)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}{}^{(t)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}{}^{(0)} + n\lambda_j + \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_j{}^{(t)}$$

が得られ，これを整理すると

$$\lambda_j = \frac{1}{n}(m_j{}^{(t)} - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}{}^{(0)}) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i X_j{}^{(t)} \tag{4}$$

（4）を（1）に代入すると

$$a_{ij}{}^{(t)} = a_{ij}{}^{(0)} + \frac{1}{n}(m_j{}^{(t)} - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}{}^{(0)}) - (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i - \mu_i)\ X_j{}^{(t)} \tag{5}$$

（5）を（3）に代入すると

$$\begin{aligned} R_i{}^{(t)} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^{(t)} X_j{}^{(t)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^{(0)} X_j{}^{(t)} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(m_j{}^{(t)} - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}{}^{(0)})\ X_j{}^{(t)} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n}(X_j{}^{(t)})^2 (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i - \mu_i) \end{aligned} \tag{6}$$

（6）を整理すると

$$\mu_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1 \Big/ \left(\sum_{j=1}^{n} (X_j{}^{(t)})^2 \right)$$
$$\times \left\{ R_i{}^{(t)} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^{(0)} X_j{}^{(t)} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(m_j{}^{(t)} - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}{}^{(0)})\ X_j{}^{(t)} \right\} \tag{7}$$

かくして，（7）を（5）に代入すると

$$a_{ij}^{(t)} = a_{ij}^{(0)} + \frac{1}{n}\left(m_j^{(t)} - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(0)}\right) + \left(X_j^{(t)} \Big/ \sum_{j=1}^{n} (X_j^{(t)})^2\right)$$
$$\times\left(R_i^{(t)} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(0)} X_j^{(t)}\right) - \left(X_j^{(t)} \Big/ n\sum_{j=1}^{n} (X_j^{(t)})^2\right)$$
$$\times \sum_{j=1}^{n} (m_j^{(t)} - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(0)})\, X_j^{(t)} \qquad (8)$$

かくして，（8）式の右辺は全て既知のものであるので，第 t 年次の投入係数 $a_{ij}^{(t)}$ を計算することができる。これがラグランジュ未定乗数法による投入係数の予測式である。

ラグランジュ未定乗数法によって求められる第 t 年次の投入係数の式もある種の経済的意味をもつものとなっている。即ち，（8）式の第２項

$$\frac{1}{n}(m_j^{(t)} - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(0)})$$

は第 j 列の投入係数の列和の第０年次から第 t 年次への変化の単純平均であり，（8）式の第３項

$$(X_j^{(t)} / \sum_{j=1}^{n} (X_j^{(t)})^2)(R_i^{(t)} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(0)} X_j^{(t)})$$

は産出額をウエイト評価した第 i 行の投入係数の変化の平均であり，さらに第４項

$$(X_j^{(t)} / n \sum_{j=1}^{n} (X_j^{(t)})^2) \sum_{j=1}^{n} (m_j^{(t)} - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(0)}) X_j^{(t)}$$

は上記の２つの要素の交絡項であると解することができ，かくして，（8）式は基準年次の投入係数 $a_{ij}^{(0)}$ に対して，列方向と行方向の両面からの変化を和の形によって修正して，予測年次の投入係数を得るような形となっている。

$$A^{(t)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(t)} & a_{12}^{(t)} & \cdots\cdots & a_{1n}^{(t)} \\ a_{21}^{(t)} & a_{22}^{(t)} & \cdots\cdots & a_{2n}^{(t)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(t)} & a_{n2}^{(t)} & \cdots\cdots & a_{nn}^{(t)} \end{pmatrix}$$

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots\cdots & a_{1n}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \cdots\cdots & a_{2n}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \cdots\cdots & a_{nn}^{(0)} \end{pmatrix}$$

及び

$$M^{(t)}=\begin{pmatrix} m_1^{(t)} \\ m_2^{(t)} \\ \vdots \\ m_n^{(t)} \end{pmatrix},\quad R^{(t)}=\begin{pmatrix} R_1^{(t)} \\ R_2^{(t)} \\ \vdots \\ R_n^{(t)} \end{pmatrix},\quad X^{(t)}=\begin{pmatrix} X_1^{(t)} \\ X_2^{(t)} \\ \vdots \\ X_n^{(t)} \end{pmatrix},\quad i=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくならば，上記の（8）式は以下に示すような行列とベクトルによって表わすことができる。

$$A^{(t)} = A^{(0)} + \frac{i\,[M^{(t)\prime} - i' A^{(0)}]}{i' i} + \frac{[R^{(t)} - A^{(0)} X^{(t)}]\,X^{(t)\prime}}{X^{(t)\prime} X^{(t)}} - \frac{i\,X^{(t)}\,[M^{(t)\prime} - i' A^{(0)}]\,X^{(t)}}{i' i\,X^{(t)\prime} X^{(t)}}$$

ここで，′は行列及びベクトルの転置を表わしている。

かくして，先の数値例を用いて，このラグランジュ未定乗数法による投入係数の予測を行なってみる。ここでの数値例によると

$$A^{(0)}=\begin{bmatrix} 0.250 & 0.333 & 0.000 \\ 0.150 & 0.167 & 0.100 \\ 0.100 & 0.167 & 0.150 \end{bmatrix},\quad M^{(t)}=\begin{bmatrix} 0.500 \\ 0.625 \\ 0.267 \end{bmatrix},\quad R^{(t)}=\begin{bmatrix} 160 \\ 150 \\ 120 \end{bmatrix}$$

$$X^{(t)}=\begin{bmatrix} 200 \\ 400 \\ 300 \end{bmatrix}$$

であることがわかっており，また，

$$i' i = [1 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$X^{(t)\prime} X^{(t)} = [200 \quad 400 \quad 300]\begin{bmatrix} 200 \\ 400 \\ 300 \end{bmatrix} = 290000$$

である。以下，上記のような数値を用いて，行列表示の予測式の各項を計算していく。

かくして，上記の式の第2項は

$$\frac{i\,[M^{(t)\prime} - i' A^{(0)}]}{i' i}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\left\{[0.500 \quad 0.625 \quad 0.267] - [1 \ 1 \ 1]\begin{bmatrix} 0.250 & 0.333 & 0.000 \\ 0.150 & 0.167 & 0.100 \\ 0,100 & 0.167 & 0.150 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}[0\ -0.042\quad 0.017] = \begin{bmatrix}0 & -0.014 & 0.0057\\ 0 & -0.014 & 0.0057\\ 0 & -0.014 & 0.0057\end{bmatrix}$$

さらに，第３項は次のように計算される。

$$\frac{[R^{(t)} - A^{(0)}X^{(t)}]X^{(t)\prime}}{X^{(t)\prime}X^{(t)}}$$

$$= \frac{1}{290000}\left\{\begin{bmatrix}160\\150\\120\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0.250 & 0.333 & 0.000\\ 0.150 & 0.167 & 0.100\\ 0.100 & 0.167 & 0.150\end{bmatrix}\begin{bmatrix}200\\400\\300\end{bmatrix}\right\} - [200\quad 400\quad 300]$$

$$= \frac{1}{290000}\begin{bmatrix}-23.33\\23.33\\-11.67\end{bmatrix}[200\quad 400\quad 300]$$

$$= \frac{1}{290000}\begin{bmatrix}-4666.7 & -9333.3 & -7000\\ 4666.7 & 9333.3 & 7000\\ -2333.4 & -4666.3 & -3500\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.161 & -0.0322 & -0.0241\\ 0.161 & -0.0322 & 0.0241\\ -0.080 & -0.0161 & -0.0121\end{bmatrix}$$

さらに，第４項は，

$$\frac{i\,X^{(t)\prime}[M^{(t)\prime} - i^{\prime}A^{(0)}]X^{(t)}}{i^{\prime}i\,X^{(t)\prime}X^{(t)}}$$

$$= \frac{1}{870000}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}[200\quad 400\quad 300]$$

$$\times\left\{[0.500\quad 0.625\quad 0.267] - [1\ 1\ 1]\begin{bmatrix}0.250 & 0.333 & 0.000\\ 0.150 & 0.167 & 0.100\\ 0.100 & 0.167 & 0.150\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}200\\400\\300\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{87000}\begin{bmatrix}200 & 400 & 300\\ 200 & 400 & 300\\ 200 & 400 & 300\end{bmatrix}[0\quad -0.047\quad 0.017]\begin{bmatrix}200\\400\\300\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{87000}\begin{bmatrix}-2333.3 & -4666.7 & -3500\\ -2333.3 & -4666.7 & -3500\\ -2333.3 & -4666.7 & -3500\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.0027 & -0.0054 & -0.0040\\ -0.0027 & -0.0054 & -0.0040\\ -0.0027 & -0.0054 & -0.0040\end{bmatrix}$$

かくして，求められるべき第ｔ年次の投入係数行列$A^{(t)}$は基準時である第０年次の投入係数行列$A^{(0)}$に上記で計算された各変化分を加減算したものとなる。

$$
A^{(t)}=\begin{bmatrix}0.250 & 0.333 & 0.000\\ 0.150 & 0.167 & 0.100\\ 0.100 & 0.167 & 0.150\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -0.014 & -0.0057\\ 0 & -0.014 & -0.0057\\ 0 & -0.014 & -0.0057\end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix}-0.0161 & -0.0322 & -0.241\\ 0.0161 & 0.0322 & -0.241\\ -0.0080 & -0.0322 & -0.121\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-0.027 & -0.0054 & -0.0040\\ -0.027 & -0.0054 & -0.0040\\ -0.027 & -0.0054 & -0.0040\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}0.250 & 0.333 & 0.000\\ 0.150 & 0.167 & 0.100\\ 0.100 & 0.167 & 0.150\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.0134 & -0.0408 & -0.0144\\ 0.0188 & 0.0236 & -0.0338\\ -0.0053 & -0.0247 & -0.0024\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}0.2366 & 0.2922 & -0.0144\\ 0.1688 & 0.1906 & 0.1338\\ 0.0947 & 0.1423 & 0.1476\end{bmatrix}
$$

かくして，これが求める第t年次の投入係数行列である。第t年次の中間投入行列はこれに第t年次の商品別産出額を乗ずることによって求めることができる。

$$
\begin{bmatrix}0.2366 & 0.2922 & -0.0144\\ 0.1688 & 0.1906 & 0.1338\\ 0.0947 & 0.1423 & 0.1476\end{bmatrix}\begin{bmatrix}200 & 0 & 0\\ 0 & 400 & 0\\ 0 & 0 & 300\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}47.3 & 116.9 & -4.2\\ 33.8 & 76.2 & 40.0\\ 18.9 & 56.9 & 44.2\end{bmatrix}
$$

この中間投入行列の行和及び列和は，それぞれ，所与の行制約及び列制約を満たしていることがわかる。即ち，

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c}\text{行和}\end{array}\\
 & \begin{bmatrix}47.3 & 116.9 & -4.2\\ 33.8 & 76.2 & 40.0\\ 18.9 & 56.9 & 44.2\end{bmatrix}\begin{array}{c}160\\150\\120\end{array}\\
\text{列和} & \begin{array}{ccc}100 & 250 & 80\end{array}
\end{array}
$$

上記の結果をみてわかるように，このラグランジュ未定乗数法によれば，第0年次の投入係数行列においてゼロであった要素がゼロとなっていない。さらに，より問題であることは，この例ではその要素がマイナスの値となっており，かくして，負の要素を含む投入係数が得られたことになる。かくして，この方法は予測される投入係数の非負性を保証するものではない。投入係数は原則として非負でなければならないので，この方法の適用においてはこの点の注意が必要であるが，この欠点を克服する方法も提案されている。これに対して，先のRAS法や平均増加倍率法では基準年次においてゼロであった要素は予測年次においてもゼロであり，得られる係数は全て非負となることが証明されている。但し，基準年次においてゼロであった要素が予測年次においても実際にゼロであるということは必ずしもいえないことは明らかであり（例えば，全く使用されていなかった新材料の使用など），この点の実態に即した検討が必要であろう。なお，このように数学的に投入係数を予測する方法はその後においても改善された方法が提示されている。なお，経済産業省の延長表［24］及び平成12年度産業連関表［28］にお

いてはラグランジュ未定乗数法がバランス調整に使用されている。

7．投入係数の数学的予測法の予測精度の問題

上記において示したいくつかの数学的方法によって求められる投入係数は産出額や最終需要額などと独立ではなくなり，本来，生産水準とは独立であるはずの技術係数である投入係数が生産水準に依存して決まるということになる。このような点は1つの重大な問題点ではあるが，このような方法はともかくも機械的にせよ全体として整合性のある投入係数行列をもたらしている，ということはいえそうである。

かくして，次に問題となるのは，いわゆるノンサーヴェイ法の中心となる，このような機械的予測方法がどの程度正確に投入係数を予測することができるかということである。以下では，RAS法を取り上げて，その予測結果の精度を検討したいくつかの例によってこの問題を考えてみる。

RAS法によって投入係数を予測することに対する代替的な方法の1つは，例えば，基準時の投入係数行列A_0を単純に予測年次にも用いることであろう。このことは，換言すれば，この間に技術変化がなかったと仮定することである。従って，RAS法の精度を測る1つの方法は，技術変化がないと仮定してA_0をそのまま固定して用いた場合とRAS法によって求められる投入係数RA_0Sとのいずれが予測年次の真の投入係数行列A_tに近いかを検討することであろう。

例えば，Paelnick とWaelbroeck［16］はベルギーの1953年の産業連関表をベースとしてRAS法によって1959年の産業連関表を推計し，この結果と1959年の実際の産業連関表との比較を行なった。また，彼らはアメリカについて1947年表に基づく1958年表のRAS法による予測を行ない，これと1958年の実際の産業連関表との比較を行なっている。このような比較検討に基づくPaelnick とWealbroeckの結論は，RAS法によって修正予測された投入係数行列は過去の投入係数を固定して用いるよりも実際の投入係数に近いということ，即ち，RA_0SはA_0よりも真の投入係数行列に近いということであった。また，適切な外生的情報によって一部の投入係数が事前に正確に予測されるならば，RAS法の予測精度は向上するということ，即ち，単純なRAS法に比べて，先に第4節で示した追加情報を利用するRAS法は，そのような情報が正確であれば，全体的な予測精度を大幅に向上させると述べている。Paelnick とWaelbroeckは石炭に対する石油の代替を外生的に予測し，この結果をRAS計算により取り入れることによって投入係数の予測精度が大幅に向上したことを示すことによってこのように結論している。

また，Parikh［13］はいくつかの国の1959年の産業連関表をベースにして1965年のRAS法による推計を行ない，そのような予測結果と1965年の実際の産業連関表との比較を行なうことによってRAS法の予測精度を検討している。Parikhはベルギー，西ドイツ，フランス，イタリア，オランダ，ノルウエイ，ポルトガル，スペイン及びイギリスの9ケ国のヨーロッパ諸国についてこのような検討を行なった。Parikhの結論もまたRAS法による推計は基準年次の投入係

数A_0を固定して予測年次に適用するよりもよりよい結果が得られるというものであり，特に製造業についてはよい結果が得られるとしている。しかし，いくつかの部門，例えば，建設業などでは，著しくよくない結果を示している例もあり，RAS法も必ずしも十分なものとはいえないということも指摘されている。Parikhの各国についての検討結果は以下の表のように要約されている。

下記の表の各々の指標は次のようなものである。まず，

$$\text{不一致係数} = \sum_i \sum_j (a_{ij}^{RAS} - a_{ij}^{1965})^2 / \sum_i \sum_j (a_{ij}^{1965})^2$$

ここで，

a_{ij}^{RAS}：ＲＡＳ法による1965年の投入係数の予測値

a_{ij}^{1965} ：1965年の投入係数の実際値

即ち，$a_{ij}^{RAS} = a_{ij}^{1965}$であれば，RAS法の結果は実際値と一致し，不一致係数はゼロとなる。また，

ParikhによるＲＡＳ法による推計結果の精度の検討

	不一致係数	平均二乗誤差		回帰係数ｄとその標準誤差	
		1959年係数	ＲＡＳ推計結果	ｄ	標準誤差
ベルギー	0.1071	0.1369	0.0734	0.8898	0.0546
西ドイツ	0.1506	0.1084	0.1049	0.8494	0.0294
フランス	0.3674	0.0913	0.1059	0.7409	0.0290
イタリア	0.0653	0.1927	0.0808	0.9412	0.0453
オランダ	0.0771	0.2103	0.0514	1.3220	0.0762
ノルウエイ	0.2180	0.0815	0.0605	0.7541	0.0471
ポルトガル	0.1313	0.1418	0.1165	0.7827	0.0405
スペイン	0.0782	1.8400	0.0598	2.2155	0.2679
イギリス	0.2588	0.1055	0.1276	0.8498	0.0294

$$\text{平均二乗誤差（1959年係数）} = \frac{1}{n^2} \sum_i \sum_j (a_{ij}^{1959} - a_{ij}^{1965})^2$$

$$\text{平均二乗誤差（ＲＡＳ係数）} = \frac{1}{n^2} \sum_i \sum_j (a_{ij}^{RAS} - a_{ij}^{1965})^2$$

ここで，

a_{ij}^{1965}：1959年産業連関表による投入係数

かくして，前者は1959年の投入係数を固定して用いた場合の1965年の真の投入係数との誤差の二乗の平均であり，後者は1965年の投入係数をRAS法によって予測した場合の実際の係数との誤差の二乗の平均である。従って，

平均二乗誤差（1959年）＞平均二乗誤差（RAS係数）

即ち，RAS予測値についての誤差の方が小さいならば，RAS法は基準時のa_{ij}^{1959}を固定して用いるよりも有効な方法であるということができる。

回帰係数dとは

$$(a_{ij}^{1959} - a_{ij}^{1965}) = d(a_{ij}^{RAS} - a_{ij}^{1965})$$

のような回帰式の回帰係数であり，標準偏差とはdの標準誤差である。ここで，dが1であるならば，RAS修正は基準時の係数a_{ij}^{1959}を固定して用いることと差がないということになる。ここでの結果においてdが有意に1と異なると推定されているのはオランダとスペインである。

上記の結果によれば，全般的にみて，RAS推計結果がよくないのはフランスとイギリスであり（不一致係数が大きく，平均二乗誤差もRAS推計結果の方が大きい），西ドイツやノルウエイの結果も相対的によくない。スペイン及びオランダにおいてはよい結果が得られており，イタリアやベルギーの結果もまず良好である。このような結果を総括的にみれば，RAS推計値は基準時投入係数a_{ij}^{1959}を固定して用いるよりもよい結果をもたらしていると判定できるように思われるということがParikhの結論である。

日本におけるRAS法による投入係数予測の精度を検討した例として森一夫［26］の研究を取り上げてみる。この例においては，昭和35年産業連関表をベースとして昭和40年の投入係数をRAS法によって推計した結果と昭和40年産業連関表における実際の投入係数との比較が行なわれている。

まず，昭和40年の投入係数のナイーヴな予測方法として昭和35年の投入係数を昭和40年にそのまま適用するという方法を考える。従って，この場合の予測誤差は，例えば，

$$e_{ij}^{N} = \frac{a_{ij}^{35}}{a_{ij}^{40}}$$

として表わすことができる。これに対して，RAS法を適用して求められた昭和40年の予測値をa_{ij}^{RAS}とすると，この場合の予測誤差は

$$e_{ij}^{RAS} = \frac{a_{ij}^{RAS}}{a_{ij}^{40}}$$

として表わすことができるであろう。予測誤差がない場合には，このような比率は１であり，それが１前後であれば予測誤差は小さいということになるであろう。

この２つの誤差率の度数分布を調べたものが以下の表である。(この検討は20部門×20部門の産業連関表を用いて行なわれているので，a_{ij}の数は400あることになるが，ゼロの要素があるために誤差指標の数は400よりも少ない。)

下記の表より２つの誤差率が10％以内及び20％以内に留まる割合を比較してみると，

	10％以内	20％以内
ナイーヴ予測の誤差	88 (23.5％)	150 (40.1％)
ＲＡＳ予測の誤差	119 (31.8％)	192 (51.3％)

誤差率の度数分布

誤差率	e_{ij}^{N}	e_{ij}^{RAS}
1.50以上	58	58
1.50～1.45	7	4
1.45～1.40	5	7
1.40～1.35	9	13
1.35～1.30	9	11
1.30～1.25	12	6
1.25～1.20	22	14
1.20～1.15	11	18
1.15～1.10	13	23
1.10～1.05	21	30
1.05～1.00	24	39
1.00～0.95	17	26
0.95～0.90	26	24
0.90～0.85	22	21
0.85～0.80	16	11
0.80～0.75	12	15
0.75～0.70	17	15
0.70～0.65	18	6
0.65～0.60	15	6
0.60～0.55	10	6
0.55～0.50	8	2
0.50以下	22	19

という結果が得られる。RAS法による予測結果は，投入係数を固定して用いるというナイーヴな予測と比べると，10以下或いは20％以下という相対的に小さな誤差の割合はそれぞれ10％程度大きくなっている。

このような結果からの森の結論は，RAS法はある程度有効に働いている，ということである。しかし，当初の予想としては，森はナイーヴ予測において大きな誤差率を示している要素

の数がRAS法によって大幅に減少するものと考えていたが，しかし，この点については，特に，1.3以上の誤差率を示しているものについてそのような結果が得られなかったということは意外であったと述べている。このような点については，大きな技術変化がみられた部門についてはRAS法による修正には限界があり，具体的な技術についての情報により密着した投入構造の予測が必要であるということを示すものであるとみることができるであろう。

8．投入係数のその他の予測方法について

上記のRAS法等による機械的な投入係数の予測や更新は個々の投入係数についての情報があまり利用可能でない場合に用いられるある意味で止むを得ない方法であり，より本格的な予測方法は投入係数についての何らかの情報を可能なかぎり用いて予測を行なうものであるべきだろう。何らかの情報を用いて行なうような投入係数の予測方法としては，大きく分けて，投入係数の時系列的な変化を分析して，その変化を何らかの方法によって説明しようとするものと，利用可能な技術についての情報を可能な限り体系的に活用して投入係数を予測しようとするものがある。

まず，投入係数の時系列分析について述べる。産業連関表が多くの年次について利用可能であるならば,個々の投入係数の詳細な時系列的な変化をみることはより容易になる。かくして,例えば，多くの年次の産業関連表から得られる投入係数にトレンド的変化があるかどうかを検討し,そのようなトレンドによって投入係数を補外推計するという方法を考えることができる。しかし，このような単純なトレンド延長法は必ずしも十分な結果をあげ得ないという報告もある。かくして，そこには何らかの技術情報による補完が必要とされるであろう。

しかし，現状では，必ずしもそれほど多くの産業連関表が作成されているわけではない。詳細で正確な産業連関表の作成には多くの時間と労力を必要とするからである。しかし，年々の生産額や最終需要を推計することは比較的高い精度でもって可能である。かくして，ArrowとHoffenberg［2］はある1時点の産業連関表から得られる投入係数と各年次別に推計される最終需要の推計値を用いて，それらから求められる生産額の推計値を計算し，これと各年次の生産額の実績値との差額を算出して，この差額に何らかの規則性がないかどうかを検討し，それによって投入係数の変化の方向を確かめようとした。即ち，

$$\pi_t = X_t - [I - A_0]^{-1} F_t$$

ここで,

π_t：生産額の実績値（X_t）と推計値（$[I - A_0]^{-1} F_t$）との差額

X_t：生産額の実績値

A_0：ある基準時点の投入係数行列

F_t：最終需要の実績値

t ：比較年次

0 ：基準年次

次に，このようにして求められたπ_tを説明する何らかの説明変数を見いだし，その間の回帰分析を行なう。

$$\pi_t = F(Z_t)$$

ここで，Z_tはπ_tを説明すると考えられる説明変数である。Arrow と Hoffenberg はπ_t或いは投入係数の変化に影響を与える要因として次のようなものを取り上げている。

(a) 生産額の変化率

(b) 実質可処分所得

(c) 防衛費の対ＧＮＰ比率

(d) タイムトレンド

(e) 過去の生産のピークを越える超過生産額

Arrow と Hoffenberg はこれについて必ずしも十分な結果を得ておらず，その後においてもこの方法はあまりうまく適用されていない。また，そのような結果を個々の詳細な投入係数の変化に還元する方法も明確であるとはいえない。

日本においては，今井賢一［20］がこの方法を昭和26年産業連関表を用いて適用した例があり，それによれば，いくつかの産業について次のような結果が得られている。

化学 $\pi_t = -347.4 + \underset{(8.5)}{14.7Y_t} + 48t \qquad R = 0.99$

鉄鋼 $\pi_t = -109.1 + \underset{(16.9)}{21.2Y_t} + 6.3Q_t \qquad R = 0.91$

電力 $\pi_t = -258.4 + \underset{(3.3)}{14.3Y_t} - \underset{(6.4)}{19.9t} \qquad R = 0.94$

石炭製品 $\pi_t = -34.5 - \underset{(1.8)}{16.8t} + \underset{(0.4)}{0.2P_{rt}} \qquad R = 0.96$

石油製品 $\pi_t = 83.8 + \underset{(2.5)}{32.3t} + \underset{(0.5)}{1.1P_{rt}} \qquad R = 0.98$

ここで Y ：実質ＧＮＰ

t ：タイムトレンド

Q ：重工業化比率

Pr ：重油価格／石炭価格

であり，添字の t は時間を，かっこ内の数字は係数の標準誤差，Rは相関係数を表わす。

C. Almon［1］の方法はより単純である。Almon は A_0X_t によって計算される中間投入の推計値と実際の中間投入の比率をとり，これにロジスティック曲線をあてはめることによって投入係数の変化を予測しようとしている。

次に，技術情報を利用した投入係数の予測方法について考える。

技術についての情報を体系的に利用して投入係数を予測する方法として開発されたものとしては，例えば，Battelle Institute［10］による事前的アプローチ exante approach がある。この方法の手順は次のようである。

① 投入係数の予測を行なうべき部門を定義する。
② その部門の専門家によって試算的な係数を作成してもらう。
③ その産業の技術や企業内容に詳しいインターヴューアーを選ぶ。
④ 上記によって選ばれた調査員とその部門の専門家とのインターヴューを行なう。ここでインターヴューアーはその研究プロジェクトの目的を説明し，関連する投入係数行列の各要素ごとに詳しい精査を行なう。
⑤ このような手順を経て，その産業部門の投入係数の変化についての専門家の提示を得る。

E. Fontela は Battelle 法などの方法を用いて投入係数行列のいくつかの要素を事前的に決定し，それらに基づいてRAS法を適用する方法を weak RAS法とよんでいるが，これは第4節において紹介した外部情報を利用したRAS法と全く同じものであると考えてよいであろう。

より長期的な投入構造の予測については，技術変化や新製品の開発等についての長期シナリオを作成し，そのようなシナリオに基づいて技術の構造的変化を予測していこうとする試みも行われている。

また，より直接的な技術情報を利用する方法もある。例えば，各生産部門の研究所や設計部門から得られる技術情報を用いて投入係数の予測を行おうとするような場合が考えられる。旧ソ連の産業連関表の作成においてはこのような方法がしばしば用いられている［4］。例えば，トラックの生産に対する圧延鋼材の投入を予測しようとする場合，使用される鋼材とトラックの積載トン数の間の相関関数を求め，このような関係式と将来のトラックのトン別生産構造の予測から，トラックの生産に対する鋼材の予測するような例があげられており，

$$y=-0.1678+0.67605x$$

y：鋼材使用量

x：トラック積載トン数

のような関係式が推定されている。

9．投入係数の実際の予測或いは更新にあたって

技術や経済の構造に大きな変化が予想される場合，投入係数にも大きな変化が生じているものと考えられる。かくして，計画や予測に産業連関モデルを使用する際には，将来の投入係数がどのようになるかを予測することは極めて重要である。また，現状分析を行なう場合においても，利用可能な産業連関表の年次がすでに古いものになっていることがしばしばあり，可能ならば簡便な方法を利用してでも最新のデータに基づく投入係数の更新を行なっていることは望ましいことであろう。例えば，現在利用可能な正規の産業連関表は平成12年表であるが現在は平成17年であり，すでに４年以上が経過している。次の平成17年表が公表されるのは平成20年末になるものと思われる。この間にあっては，当然のこととして投入係数，従って，レオンティエフ逆行列は変化しているものと思われ，年次が経過するにつれて単純な適用には問題が生じてくるであろう。かくして，このような時間的な遅れを埋めるために，延長表という形での速報的年次別推計が行なわれるようになっており，ここでは様々な投入係数の予測及び更新方法が用いられている。経済産業省は速報として利用可能な最新の延長表を公表しているが，12年表に基づく延長表はまだ作成されていない。内閣府経済社会総合研究所国民経済計算部においてはSNA産業連関表を毎年作成しており，そこではRAS法が補完的に使用されている。しかし，延長表のような補間的な推計は地域産業連関表においては日本では一般には行なわれてはいない。([12] は地域表をも含めた広範なRAS法適用の展望を行なっている。)

上記においては主としてノンサーヴェイ法と呼ばれる投入係数の予測や更新の方法について述べてきたが，本格的なサーヴェイ法に比べると，そのいずれの方法も一つの便法にすぎないといえる。従って，実際に投入係数の予測や更新を行なうにあたっては，各種の方法のそれぞれの長所をうまく組み合わせるような総合的な方法を工夫することが必要となるであろう。例えば，可能な限り技術変化やその他の投入係数に影響を与える経済変化に関する情報を活用して，投入係数の予測を行ない，それらによって予測し切れない部分についてはRAS法等の機械的な予測方法を適用するというような，様々な方法の組合わせが考えられる。先に述べた外部情報を利用したRAS法やFontelaのいうようなweak RAS法はそのような方法の１つであるといえるであろう。

参　考　文　献

1．Almon, C., Investment in Input-Output Models and the Treatment of Secondary Products, in Carter and Brody［7］.

2．Arrow, K. J. and Hoffenberg, M., A Time Series Analysis of Inter-industry Demands, North-Holland, 1959.

3．Bacharach, M. O. L., Bi-Proportional Matrices and Input-Output Change, Cambrige University Press, 1969.

4. Buzunov, R. A., Technical Economic Projection of Coefficients of Direct Material Inputs, in Carter and Brody [8].
5. Carter, A. P., Changes in the Structures of the American Economy, 1947 to 1958 and 1962. The Review of Economics and Statistics, May 1967.
6. Carter, A. P., Structural Changes in the American Economy, Harvard, 1970.
7. Carter, A. P. and Brody A. eds., Contributions to Input-Output Analysis, North-Holland, 1970.
8. Carter, A. P. and Brody, A. eds., Applications of Input-Output Analysis, North-Holland, 1970.
9. Department to Applied Economics, University of Cambrige, Input-Output Relationships, 1954-1966, Chapman and Hall, 1963.
10. Fontela, A., Duval, A., Gabus, A., Brolin, M. and Velay, C., Forecasting Technical Coeffients and Changes in Relative Prices, in Carter and Brody eds. [8].
11. Friedlander, D., A Technique for Estimating a Contingency Table, Given the Marginal Totals and Some Supplementary Data, Journal of the Royal Statistical Society, Series A, Vol. 124, Part 3, 1961.
12. Miller, R. E. and Blair, P. D., Input-Output Analysis: Foundations and Extensions, Prentice-Hall, 1985.
13. Parikh, A., Forecasts of Input-Output Matrices Using the RAS Method, The Review of Economics and Statistics, Aug. 1979.
14. Sato, R. and Ramachandran, R., Measuring the Impact of Technical Progress on Demand for Intermediate Goods, A Survey, Journal of Economic Literature, Sept. 1980.
15. Stone, R. and Brown, A., A Computable Model of Economic Growth, Vol. 1, Programme for Growth, Chapman and Hall, 1962.
16. United Naions, Input-Output Tables and Analysis, Studies in Methods, Series F, No.14, Rev. 1, New York, 1973.
17. United Nations, Handbook of Input-Output Table, Compilation and Analysis, Studies in Methods, Series, F, No.74, New York, 1999.
18. Vaccara, B., Changes over Time in Input-Output Coefficients for United States, in Carter and Brody eds. [7].
19. Watanabe, T. and Shishido S., Planning Applications of the Leontief Model in Japan, in Carter and Brody eds. [7].
20. 今井賢一,「投入係数の予測と産業連関分析」, 経済研究1961年10月。
21. 金子敬生, 産業連関の理論と応用, 日本評論社, 1971年。
22. 金子敬生,「2段階RAS＝ラグランジュ未定係数法による投入係数の予測」, 早稲田大学政治経済学雑誌, 266, 267合併号, 1981年。
23. 金子敬生, 産業連関の経済分析, 勁草書房, 1990年。
24. 経済産業省経済産業政策局調査統計部編, 産業連関表（延長表）, 各年。
25. 宮沢健一編, 産業連関分析入門（新版）, 日経文庫, 2002年。
26. 森一夫, 日本の経済予測, 東洋経済新報社, 1976年。
27. 内閣府経済社会総合研究所, SNA産業連関表, 各年。
28. 総務省, 平成12年産業連関表, 2004年。