論　説

契約理論分析における数値計算アプローチ：モラル・ハザードの場合

橋本日出男*，濱田弘潤†，細江宣裕‡

概　要

本稿は、逆選択問題に対して数値計算によるモデル化手法を適用する方法について論じた橋本他(2011)に続くもので、伊藤(2003, 第 4 章)の「投資家と起業家の間の契約」について数値モデルを構築することにより、モラル・ハザードに関するモデルの特性の理解を深めようとするものである。そのために、起業家がリスク回避的な場合とリスク中立的な場合の 2 経営行動・2 成果モデル、および、リスク回避的な場合の 3 経営行動・3 成果モデルを作る。前者では、モラル・ハザード問題の数値計算手法を詳しく示してある。併せて、ファースト・ベスト解とセカンド・ベスト解を比較することで、理論分析の結果を数値例によって再吟味する。後者では、理論分析においてしばしば用いられる簡単化の仮定が成り立たない場合を考え、それらの仮定の意義について検討する。

キーワード：モラル・ハザード，数値計算モデル，リスク回避的，リスク中立的，尤度比の単調性，分布関数の凸性

* 大阪大学名誉教授
† 新潟大学経済学部准教授
連絡先：〒950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 新潟大学経済学部
Tel. and fax: 025-262-6538
E-mail: khamada@econ.niigata-u.ac.jp
‡ 政策研究大学院大学准教授

1. モラル・ハザード：投資家・起業家の契約問題

1.1　　モラル・ハザードの問題

本稿は、モラル・ハザードの問題を扱うものであり、伊藤(2003)の第 4.2 節の、「投資家と起業家の間の契約問題」の「基本問題」に対応する。[1] そこで構築されたモデルでは、投資家（プリンシパル）が自分の資金を運用する起業家（エージェント）に対して、投資利益の分配スケジュールを契約として提示する。起業家は、すでに事業のアイデアを持っており、投資家からの出資を受けて事業を行う。事業の成否（成功または失敗など）は、起業家の経営行動（積極的行動あるいは消極的行動など）―これは努力水準とも呼ばれる―によって、確率的に決定されるとする。ここでいう契約とは、投資家が起業家に対して、事業の成否に応じて支払う金額をスケジュールとしてあらかじめ定めるものである。

投資家がこの契約内容を考えるときに重要な点は、一旦契約が結ばれた後は、起業家がどのような経営行動をとるかが、投資家に観察できない（非対称情報）ところにある。ただしその場合も、事業の成否は観察可能で、立証可能であるとする。これに対し、起業家の経営行動が観察可能である対称情報の場合についても―この場合は特に非効率性が発生する訳ではないから、契約理論分析として特に重要な意味はないが―比較対象として考える。すなわち、それぞれの状況下で、投資家は起業家の行動を予想しつつ投資家自身の期待効用を最大にする（最適）契約を結ぼうとする。非対称情報を前提とした最適契約を「セカンド・ベスト」解とし、対称情報の場合を前提とした最適解を「ファースト・ベスト」解として求めることになる。

このモラル・ハザードの問題は 2 段階に分けて解いていく。第 1 段階は、起業家の経営行動 a_k を決めておいて、それに対する最適契約を見つける段階である（これを経営行動 a_k に対する遂行問題と呼ぶ）。第 2 段階では、第 1 段階で得られた種々の経営行動 a_k に対する投資家の期待効用の中から、投資家にとって最大の期待効用をもたらす経営行動を選択する。

1.2　　本稿で取り扱うモデル

本稿で取り扱うモデルは、起業家の行動空間および事業の成果の場合の数が、有限かつ離散的なものである。伊藤(2003)の 4.2.3「行動空間が無限の場合」や 4.2.6「成果が連続変数のケース」は取り扱わない。また、同じく 4.3 の「線形契約」も取り扱わない。

本稿第 2 節のモデルは、経営行動（努力水準）y が 2 種類（積極的行動 high、消極的行動 low）で、成果 x が 2 種類（成功 success、失敗 failure）である。すなわち、2 経営行動・2 行動モデルである。そして、起業家がリスク回避的であるとする。起業家がリスク回避的であるとは、起業家の効用関数を $U = u(w) - d(a)$ としたとき、関数 $u(\cdot)$ が厳密に単調増加で、厳密に凹であることを意味する。

[1] 以下、特に断らない限り「伊藤」は伊藤(2003)を指し、それに続く章節番号は伊藤(2003)における章節を指すものとする。

第 3 節では、起業家がリスク中立的である場合の 2 経営行動・2 成果モデルを扱う。ここでは、起業家の効用関数 $U = u(w) - d(a)$ において、$u(\cdot)$ は単調増加の線形関数とする。起業家がリスク中立的である場合には、複数解が存在することと、セカンド・ベストをファースト・ベストの費用で遂行できることを示す。

第 4 節では、経営行動が 3 種類（積極的行動、中位的行動、および消極的行動）で、成果が 3 種類（成功、中間、および失敗）である。すなわち、3 経営行動・3 行動モデルである。ただし再び、起業家がリスク回避的であるとする。ここでは、尤度比の単調性と分布関数の凸性、および解の単調性の問題を論じる。

1.3　モラル・ハザード・モデルの一般形

モラル・ハザードの基本モデルとして、伊藤 4.2 では以下のような問題 $(\mathbf{P})$ を提示している。

$$\max_{w,\, a} \quad B(a) - \sum_{i=0}^{N} p_i(a) w_i \tag{1.1}$$

subject to

$$\sum_{i=0}^{N} p_i(a) u(w_i) - d(a) \geq \bar{u} \qquad \text{(PC)} \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=0}^{N} p_i(a) u(w_i) - d(a) \geq \sum_{i=0}^{N} p_i(a') u(w_i) - d(a'), \quad \forall a' \in A \qquad \text{(IC)} \tag{1.3}$$

しかし、この問題が示すような形で、支払額 w と経営行動 a を**同時に**決定変数としたのでは、モデルは解けない。正しい方法は、伊藤 4.2.1 で説明しているように、第 1 段階としてまず、ある経営行動 a_k をとるものと与えておいた上で、支払額 w を決定変数として投資家の期待効用最大化問題を解き、そのときの投資家の期待効用値を導き出す。これを全ての経営行動 $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_K$ について網羅的に調べる。第 2 段階では、各行動における投資家の期待効用値を比較して、それが最大になる経営行動 a^* を求める。このように 2 段階に分けて最大化問題を解いていくので、本来ならば二段階計画法 (bilevel-programming)の手法を用いなければならない。しかし本稿では、経営行動が 2 種類か 3 種類しかないので、得られた投資家の期待効用値を見比べるだけで最適行動がわかる。したがって二段階計画法を解くための特別のソフトウェアを使うまでもない。

上に述べたことに従い、本稿で扱う**第 1 段階**のモデルは、経営行動を所与として、投資家の期待効用の最大化を図るものである。従って、上の問題 $(\mathbf{P})$ における max の下に決定変数として示されている a を外したものである。これを問題 $(\mathbf{P}')$ とする。念のために書くと次の通りである。

$$\max_{w} \quad B(a)-\sum_{i=0}^{N} p_i(a) w_i$$

subject to

$$\sum_{i=0}^{N} p_i(a) u(w_i) - d(a) \geq \bar{u} \qquad \text{(PC)} \qquad (1.2)$$

$$\sum_{i=0}^{N} p_i(a) u(w_i) - d(a) \geq \sum_{i=0}^{N} p_i(a') u(w_i) - d(a'), \quad \forall a' \in A \qquad \text{(IC)} \qquad (1.3)$$

2 つ示した制約条件については、ファースト・ベスト・モデルにおいては(PC)だけを課し、セカンド・ベスト・モデルにおいては、(PC)と(IC)の両方を課す。[2] また、後段で示される数値計算においては、留保効用 $\bar{u}=0$ とする。

問題 $(\mathbf{P}')$ を解くことにより、目的関数の解の値として投資家の期待効用 U が得られ、モデル内の決定変数の計算は完了する。ただし伊藤において、期待利益 $B(a)$ と期待費用 $C(a)$ が論じられているので、最大化問題の解に基づいてこれらを計算したものを、計算結果の末尾に出力させる（詳しくは次節）。投資家の期待利益は $B(a)=\sum_i p_i(a) b_i$ であり（b_i は投資プロジェクトの生み出す利益を表す）、投資家の期待費用は、投資家の起業家への支払額 w_i を解いた上で、$C(a)=\sum_i p_i(a) w_i(a)$ を計算することにより得られる。期待利益と期待費用の差額、すなわち投資家の期待効用は $Net(a)=B(a)-C(a)$ である。第 1 段階のモデルの目的関数（数値モデルでは U としている）は投資家の期待効用であるので、第 1 段階のモデルを解けば、投資家の期待効用 U の値が得られる。もちろん、$Net(a)$ は U に等しい。（なお、$Net(a)$ は伊藤(2003)では使われておらず、本稿でのみ使われている。）

本稿では一貫して問題 $(\mathbf{P}')$ のみについて論じるが、後述するグラフによる解の説明では、問題 $(\mathbf{IP})$ を基礎にした伊藤の解説に本稿も従うので、ここに問題 $(\mathbf{IP})$ を提示しておく。

$$\min_{w} \quad \sum_{i=0}^{N} p_i(a) w_i$$

subject to (PC) and (IC)

なお問題 $(\mathbf{IP})$ には、問題 $(\mathbf{P}')$ と異なり、投資家の利益 $B(a)$ が含まれていないが、元々の問題 $(\mathbf{P}')$ において、$B(a)$ は支払額 w および起業家の効用 u の値には影響を及ぼさないので、問題

[2] 厳密には、伊藤の問題 $(\mathbf{ip1}_k)$ のように、上の目的関数から出資額 I を差し引かなければならないが、解に影響がないので、簡単化のため I を省略する。

(**IP**) は問題 (**P′**) と同じ解を得る。ただし問題 (**P′**) では、投資家の期待効用の値が直接、解として得られるので、第 2 段階の問題を解くのに便利である。これに対して問題 (**IP**) では、投資家の期待効用の値を直接得ることができない。これが、本稿の数値モデルで問題 (**P′**) を用いる理由である。

第 2 段階は、第 1 段階の問題を解くことにより得られた、与えられた経営行動 a の下での投資家の期待効用 $Net(a)$を比べることにより、$Net(a)$が最大になる経営行動 a を求めるものである。

従って、投資家が起業家に対して望む経営行動を求める**第 2 段階**の問題は、次の通りである。

$$\max_{a \in A} \quad Net(a) = B(a) - C(a)$$

2. 2 経営行動・2 成果モデル: 起業家がリスク回避的な場合

この節では、起業家がリスク回避的な場合の、2 経営行動・2 成果モデルを提示する。ここでのモデルは、積極的行動と消極的行動それぞれの場合に対応するファースト・ベストとセカンド・ベストを 1 つのモデルに含むものである。従って、1 つのプログラムが 4 つのモデルを含んでいる。これらを数値計算ソフトウェア GAMS(General Algebraic Modeling System)を用いて解く。ただし、このように 1 つのプログラムに 4 つのモデルを含むことは、GAMS モデルに慣れていない者にとってはとりわけ複雑であるので、最初に積極的行動だけのセカンド・ベスト・モデルを提示し説明する。[3] 本節で論じる起業家がリスク回避的なモデルでは、全ての場合に、起業家の効用 u （これはコンピュータ・プログラムでは、`u_e` としている）を、$u = w^{\mathbf{0.5}}$ と仮定する。[4] なお、起業家の効用 u は、最大化問題の目的関数である投資家の期待効用 U とは異なるものであることに注意する。

以下、**2.1** で積極的行動だけのセカンド・ベスト・モデル、**2.2** で起業家がリスク回避的である場合の 2 経営行動・2 成果モデル、そして **2.3** でファースト・ベストとセカンド・ベストの解を比較検討する。

2.1　セカンド・ベスト・モデル（積極的行動を前提とした場合）(`mh001.gms`)

投資家が積極的な経営行動を選択させたいと考えたときの問題を考える。（消極的な場合でも本質的には同様である。） プログラムを説明する前に、仮定された一連のパラメータについて列挙しておく。

---

[3] GAMS に関する解説は、まずは前稿（橋本他(2011)）を参照されたい。それ以上に詳細な点については、細江他(2004)や GAMS のマニュアル(Brooke et al.(2012))を参照されたい。なお、ここで構築するコンピュータ・モデルは、全て Web 経由で入手可能である。同様に、Web 経由で入手可能な GAMS のシステムを用いてこれらを解くことができる。

[4] 厳密には、この特定化を行うと「関数 $u(\cdot)$ に下限がない」という伊藤(2003, 4.1.1)の仮定を満たさなくなるが、本稿で論じるような実用的なパラメータの範囲を考える限りは、この特定化は問題を引き起こさない。

・ 経営行動ごとの事業の成功・失敗の確率 $p_{\mathtt{x}}(\mathtt{y})$

$$\begin{pmatrix} p_{\mathtt{failure}}(\mathtt{low}) & p_{\mathtt{failure}}(\mathtt{high}) \\ p_{\mathtt{success}}(\mathtt{low}) & p_{\mathtt{success}}(\mathtt{high}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

・ 経営行動ごとの起業家にとっての不効用 $d(\mathtt{y})$

$$\begin{pmatrix} d(\mathtt{low}) \\ d(\mathtt{high}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

・ 事業の収益[5] $r(\mathtt{x})$

$$\begin{pmatrix} r_{\mathtt{failure}} \\ r_{\mathtt{success}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 45 \end{pmatrix}$$

プログラムの最初（8 行目）に、成果 x が Set として定義されている。failure が失敗を、success が成功を意味する。経営行動（努力水準）y は 9 行目に表されており、low と high の 2 種類から選択される。この経営行動 y のうち、どちらの経営行動の遂行問題を考えるかを示すものとして、y の部分集合 z を定義する。[6] この部分集合 z の要素として、high を用いることで高い努力水準（積極的経営行動）を選択した場合のモデルを解くことができ、逆に low を用いることで低い努力水準（消極的経営行動）を選択した場合のモデルを解くことができる。成果 x が得られる確率 p(x,y)は、経営行動 y の種類によって異なる（13‐17 行目）。たとえば、消極的行動 low を選択した場合に失敗 failure する確率が 0.9 と設定されている。一方、同じ列には、成功 success する確率が 0.1 と設定されている。（これらを足して 1.0 になることは言うまでもない。） 19–22 行目は、それぞれの経営行動 y に対応した不効用 d(y)を定義・設定する。ファースト・ベスト均衡では誘因両立制約が必要ないので、選択された経営行動についてのみ描写すればよいが、セカンド・ベスト均衡では、そこで必要となる誘因両立制約の中に、実際には選択しない経営行動についても描写する必要がある。このために、当該行動（この場合は積極的行動）に伴う成果の確率と不効用の他、それ以外の行動（すなわち消極的行動）の確率と不効用も与える必要がある。24–27 行目は、事業からの利益 r(x)であり、それ自体は成果 x に依存して決まるものであり、経営行動 y には依存しない。

30–35 行目は決定変数 w(x), および U の名称を与え、36‐40 行目は目的関数 obj, 参加制約 pc(z), および誘因両立制約 ic(z,y)の名称を定義している。44–47 行目はモデル中の式を示す。このうち特に、セカンド・ベストを特徴付けるものは、46–47 行目の誘因両立制約である。誘因両立制約

---

[5] 伊藤(2003, 4.1.1)では r を、起業家が投資家に支払う額としているが、本稿では r を事業の収益とする。この r が問題 $(\mathbf{P})$ または問題 $(\mathbf{P}')$ の投資家の期待利益 $B(a)=\sum_i p_i(a)b_i$ における b_i に相当する。

[6] プログラム内で用いられている「z(y)」のうち「y」の部分が、「その部分集合 z が集合 y に属する集合」であると定義されている。

リスト 2.1: モラル・ハザード・モデル(積極的行動を前提とした遂行問題) (mh001.gms)

```
* Definition of Set
Set     x      project outcome /failure, success/
        y      effort level    /low, high/
        z(y)   preferred effort level /high/;

* Definition of Parameters
Table p(x,y)    probability of outcome by effort level
         low     high
failure 0.9     0.2
success 0.1     0.8
;

Parameter      d(y)    disutility by efforts
       /low    1
       high    2/
;

Parameter      r(x)  revenue from project
       /failure 13
       success  45/
;

* Definition of Primal Variables
Positive Variable
              w(x)    entrep's income
;

Variable       U      investor's expected utility
;
Equation
              obj     utility function
              pc(z)   participation constraint
              ic(z,y) incentive compatibility constraint
;

* Defining and Solving the Model
*more active efforts
obj..          U =e= sum((x,z), p(x,z)*(r(x) - w(x)));
pc(z)..         sum(x,p(x,z)*sqrt(w(x)))-d(z) =g= 0;
ic(z,y)..       sum(x,p(x,z)*sqrt(w(x)))-d(z) =g=
              sum(x,p(x,y)*sqrt(w(x)))-d(y);

* Setting Lower Bounds on Variables to Avoid Division by Zero
w.lo(x)=0.0001;

Model MH001  /obj,pc,ic/;
```

```
53 Solve MH001 maximizing U using NLP;
54
55 Parameter
56        u_e(x)  entrep's utility
57        C      investors expected payment
58        B      investors expected revenue
59        Net     investors expected utility
60 ;
61
62 u_e(x)  =sqrt(w.l(x));
63 C      =sum((x,z), p(x,z)*w.l(x));
64 B      =sum((x,z), p(x,z)*r(x));
65 Net     =B-C;
66 Display u_e, C, B, Net;
67 * End of Model
```

の左辺は、z(=high のみ)であるので、起業家が積極的行動をとった場合の起業家の効用である。これに対して右辺は、y(=high, low)であるので、起業家が積極的行動あるいは消極的行動をとった場合の起業家の効用である。事業の成否は不確実であるから、そのどちらも事業の成否を決める確率(p(x,z)または p(x,y))で重みを付けた期待効用が考慮されている。この誘因両立制約によって、積極的行動をとろうという起業家が、消極的行動をとっても得にならないように報酬 w を設定することになる。[7]

52–53 行目で、モデル名とそのモデルを構成する制約式(目的関数を含む)を定義し、投資家の効用を最大化する問題を解くように指示する。MH001 がこのモデルの名前で、その右の「/…/」の中にモデルの構成要素、すなわち目的関数 obj, 参加制約 pc, 誘因両立制約 ic が示されている。なお、ファースト・ベスト・モデルは、モデル MH001 から誘因両立制約 ic を外したものである。55–66 行目で、モデルの解に基づいて起業家の効用 u_e(x), 期待利益 B, 期待支払額 C, およびその差額 Net (=B−C)を計算し、出力ファイル中でその値を表示せよ(Display)と指示する。

モデルの解は出力ファイル(mh001.lst)の中の SOLVE SUMMARY 以降の部分に示されている。まず、**リスト 2.2** の 126 行目に、Optimal solution とあるのを確認する。これがない場合には、解としてそこにどのような値が示されていようとも正しい解ではない。EQU で始まる行に、制約式のラグランジュ乗数が示されている。EQU pc の MARGINAL の列に、参加制約のラグランジュ乗数の解(145 行目)があり、これが 0 でないので参加制約が等号で成立していることがわかる。同様に EQU ic の MARGINAL の下の数値(151–152 行目)も、「high.low」については 0 でない。これは、誘因両立制約

[7] 厳密には、このプログラム内では、(high を選択させたいものとして)以下の 2 本の誘因両立制約を課している。

$$\sum_{x} p_{x}(\mathrm{high}) w_{x}^{0.5} - d(\mathrm{high}) \geq \sum_{x} p_{x}(\mathrm{high}) w_{x}^{0.5} - d(\mathrm{high})$$
$$\sum_{x} p_{x}(\mathrm{high}) w_{x}^{0.5} - d(\mathrm{high}) \geq \sum_{x} p_{x}(\mathrm{low}) w_{x}^{0.5} - d(\mathrm{low})$$

しかし、最初の不等式が等号で成立することは自明なので、プログラムと元の問題との間に本質的な違いはない。

リスト 2.2: モラル・ハザード・モデル(積極的行動を前提とした遂行問題)の解(抜粋) (mh001.lst)

```
...
             S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   MH001             OBJECTIVE  U
     TYPE    NLP               DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  CONOPT            FROM LINE  53

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      2 Locally Optimal
**** OBJECTIVE VALUE             34.2735

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.046      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT        19    2000000000
 EVALUATION ERRORS              0             0
CONOPTD  0.1  Dec  13,  2010  23.6.3  WEX  22848.22869  WEI  x86_64/MS Windows


    C O N O P T 3   version 3.14V
    Copyright (C)   ARKI Consulting and Development A/S
                    Bagsvaerdvej 246 A
                    DK-2880 Bagsvaerd, Denmark


    The model has 3 variables and 4 constraints
    with 9 Jacobian elements, 6 of which are nonlinear.
    The Hessian of the Lagrangian has 2 elements on the diagonal,
    0 elements below the diagonal, and 2 nonlinear variables.

 ** Optimal solution. There are no superbasic variables.
...
                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU obj          38.600    38.600    38.600     1.000

  obj  utility function

---- EQU pc  participation constraint

        LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

high     2.000     2.000     +INF     -4.000

```

```
147 ---- EQU ic  incentive compatibility constraint
148
149              LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
150
151 high.low      1.000     1.000     +INF     -0.653
152 high.high       .         .       +INF       .
153
154 ---- VAR w  entrep's income
155
156            LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
157
158 failure 1.0000E-4     0.735     +INF       .
159 success 1.0000E-4     5.224     +INF       .
160
161                        LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
162
163 ---- VAR U             -INF     34.273     +INF       .
164
165   U  investor's expected utility
...
177 ----     66 PARAMETER u_e  entrep's utility
178
179 failure 0.857,    success 2.286
180
181
182 ----     66 PARAMETER C      =     4.327  investors expected p
183                                                    ayment
184             PARAMETER B      =    38.600  investors expected r
185                                                    evenue
186             PARAMETER Net    =     34.273  investors expected u
187                                                    tility
...
```

$\sum_x p_x(\text{high}) w_x^{0.5} - d(\text{high}) \geq \sum_x p_x(\text{low}) w_x^{0.5} - d(\text{low})$ が、等号で成立することを示している。なお、「high.high」は左辺と右辺が等しくなり、等号で成立することは自明である。次に、投資家の起業家への支払額 w, 投資家の期待効用 U の解は、それぞれ VAR w, VAR U の LEVEL の列(それぞれ 158–159, 163 行目)に示されている。

さらに、これらの解に基づいて計算された結果が、177–187 行目に示されている。

起業家の効用：`u_e` ＝0.857（失敗の場合）

＝2.286（成功の場合）

期待支払額：`C`＝4.327

期待利益：`B`＝38.600

`Net`（期待純利益＝投資家の期待効用）＝34.273

なお、期待純利益 `Net` は `U` と一致している。

2.2　2 経営行動・2 成果モデル (`mh002.gms`)

これまで 2.1 で提示したモデルを基に、この節では、2 つの経営行動（努力水準）を共に扱い、さらにそれぞれの経営行動に対応するファースト・ベスト解とセカンド・ベスト解（合計 4 種類の解）を一括して解くモデルを構築する。積極的行動と消極的行動の 2 つを 1 つのプログラムで解くことは、期待効用の大きくなる経営行動を投資家が選ぶ第 2 段階の問題を解く上で便利である。

モデルを見ていくと（**リスト 2.3**）、まず 8–10 行目に `Set` で添え字を定義している。ただし 10 行目の `t` は、複数（ここでは 2 種類）の努力水準に対応し、それら全ての場合を `Loop` ルーチン（後述）で解くために、その要素を「`/1, 2/`」として定義してある。11 行目では、添え字 `y` の代わりに `v` も相互可換な形で用いることができるように、添え字の別名(`alias`)を定義している。

27–28 行目は、一般的に定義された制約式や変数の一部を、ある経営行動 `y` を考える問題の中でのみ用いるためのダミー変数 `dummy(y)` を定義している。（28 行目では、さしあたりこのダミー変数全てに 0 を与えておくが、後で具体的にそれぞれの経営行動 `y` の選択を考える際に、ダミー変数に 1 という値を与える。）

本稿 2.1 では、ある 1 つの経営行動 `z`（これにはただ 1 つの要素、`high` または `low` のみが含まれる）だけを考えてきたが、ここではより一般的に、複数の経営行動に関する選択肢 `y`（または `v`）を考えることができるモデルを構築し、このモデルに含まれるそれぞれの経営行動に対応した制約式や変数のうち必要なものだけを、`dummy(y)` 変数を用いて有効にし（すなわち `dummy(y)=1` とする）、必要でないものは無効にする(`dummy(y)=0`)。このため制約式の添え字は、`z` の代わりに `y`（または `v`）を用いて定義する（38–39 行目）。すなわち、それぞれの経営行動 `y` について、

$$\max \quad U = \sum_{\mathrm{x,y}} \mathrm{dummy}(\mathrm{y})\, p_{\mathrm{x}}(\mathrm{y})\left(r_{\mathrm{x}} - w_{\mathrm{x}}\right)$$

subject to

$$\left[\sum_{\mathrm{x}} p_{\mathrm{x}}(\mathrm{y})\, w_{\mathrm{x}}^{0.5} - d(\mathrm{y})\right]\mathrm{dummy}(\mathrm{y}) \ge 0, \quad \forall \mathrm{y}$$

$$\left\{\left[\sum_{\mathrm{x}} p_{\mathrm{x}}(\mathrm{v})\, w_{\mathrm{x}}^{0.5} - d(\mathrm{v})\right] - \left[\sum_{\mathrm{x}} p_{\mathrm{x}}(\mathrm{y})\, w_{\mathrm{x}}^{0.5} - d(\mathrm{y})\right]\right\}\mathrm{dummy}(\mathrm{v}) \ge 0, \quad \forall \mathrm{y}$$

リスト 2.3: モラル・ハザード・モデル(2 つの経営行動の遂行問題を共に扱う) (mh002.gms)

```
...
* Definition of Set
Set     x      project outcome /failure, success/
        y      effort level    /low, high/
        t      loop index      /1,2/;
Alias (y,v);
* Definition of Parameters
Table p(x,y)    probability of outcome by effort level
        low     high
failure 0.9     0.2
success 0.1     0.8
;

Parameter      d(y)    disutility by efforts
        /low    1
        high    2/
;
Parameter      r(x)  revenue from project
        /failure 13
        success  45/
;
Parameter dummy(y)     dummy to enable and disable equations;
dummy(y)=0;
* Definition of Primal Variables
Positive Variable
              w(x)    entrep's income
;

Variable       U      investor's expected utility
;
Equation
              obj     utility function
              pc(y)   participation constraint
              ic(v,y) incentive compatibility constraint
;

* Defining and Solving the Model
*more active efforts
obj..          U =e= sum((x,y), dummy(y)*p(x,y)*(r(x) - w(x)));
pc(y)..         (sum(x,p(x,y)*sqrt(w(x)))-d(y))*dummy(y) =g= 0;
ic(v,y)..       ((sum(x,p(x,v)*sqrt(w(x)))-d(v))
              -(sum(x,p(x,y)*sqrt(w(x)))-d(y)))*dummy(v) =g= 0;

* Setting Lower Bounds on Variables to Avoid Division by Zero
w.lo(x)=0.0001;

Model MH001FB  First Best Model  /obj,pc   /;
```

```
Model MH001SB  Second Best Model /obj,pc,ic/;

Parameter
       w_FB(y,x)  payments
       u_e_FB(y,x) entrep's FB utility
       C_FB(y)    investor's FB expected payment
       B_FB(y)    investor's FB expected revenue
       Net_FB(y)  investor's FB expected utility

       w_SB(y,x)  payments
       u_e_SB(y,x) entrep's utility
       C_SB(y)    investor's expected payment
       B_SB(y)    investor's expected revenue
       Net_SB(y)  investor's expected utility
;

Loop(t,
dummy(y)=1$(ord(t) eq ord(y));

Solve MH001FB maximizing U using NLP;
w_FB(y,x)      $(ord(t) eq ord(y))=w.l(x);
u_e_FB(y,x)     $(ord(t) eq ord(y))=sqrt(w.l(x));
C_FB(y)        $(ord(t) eq ord(y))=sum(x, p(x,y)*w.l(x));
B_FB(y)        $(ord(t) eq ord(y))=sum(x, p(x,y)*r(x));
Net_FB(y)      $(ord(t) eq ord(y))=B_FB(y)-C_FB(y);

Solve MH001SB maximizing U using NLP;
w_SB(y,x)      $(ord(t) eq ord(y))=w.l(x);
u_e_SB(y,x)     $(ord(t) eq ord(y))=sqrt(w.l(x));
C_SB(y)        $(ord(t) eq ord(y))=sum(x, p(x,y)*w.l(x));
B_SB(y)        $(ord(t) eq ord(y))=sum(x, p(x,y)*r(x));
Net_SB(y)      $(ord(t) eq ord(y))=B_SB(y)-C_SB(y);

);

File sol /solution.csv/;
put sol;
sol.pc=5;
sol.pw=32767;


* Generating a solution summary file in CSV
Loop(y,
put "Effort Level:" y.tl /;
put "First Best" "w: payment" "u: entrep's utility" "U: investor's utility" "B: investor's benefit" "C: investor's cost" /;
put "" "" ""  Net_FB(y):10:3 B_FB(y):10:3 C_FB(y):10:3/;
Loop(x, put x.tl w_FB(y,x):10:3 u_e_FB(y,x):10:3 /;);
```

```
100 put /;
101
102 put "Second Best" "w: payment" "u: entrep's utility" "U:
    investor's utility" "B: investor's benefit" "C: investor's
    cost" /;
103
104 put "" "" ""  Net_SB(y):10:3 B_SB(y):10:3 C_SB(y):10:3 /;
105 Loop(x, put x.tl w_SB(y,x):10:3 u_e_SB(y,x):10:3 /;);
106 put //;
107
108 );
109
110 * End of Model
```

という問題を考える。上の問題は、ある経営行動 y について考えたものであるが、経営行動としては複数の選択肢（たとえば high か low）があるので、それら全てについて網羅的に考える必要がある。

上のような複数の経営行動を包含した表記ではわかりにくいかもしれないので、一例として、積極的経営行動(high)をとる場合を考える。この場合の問題は、dummy(high)=1,dummy(low)=0 とすることで、

$$\max \quad U = \sum_{\mathrm{x}} p_{\mathrm{x}}(\mathrm{high})(r_{\mathrm{x}} - w_{\mathrm{x}})$$

subject to

$$\left[\sum_{\mathrm{x}} p_{\mathrm{x}}(\mathrm{high}) w_{\mathrm{x}}^{0.5} - d(\mathrm{high})\right] \geq 0$$

$$\left\{\left[\sum_{\mathrm{x}} p_{\mathrm{x}}(\mathrm{high}) w_{\mathrm{x}}^{0.5} - d(\mathrm{high})\right] - \left[\sum_{\mathrm{x}} p_{\mathrm{x}}(\mathrm{y}) w_{\mathrm{x}}^{0.5} - d(\mathrm{y})\right]\right\} \geq 0, \quad \forall \mathrm{y}$$

となり、2.1 で解いた問題と完全に同じものになる。同様に、消極的経営行動(low)を考える場合には、dummy(low)=1,dummy(high)=0 とすればよい。プログラムの中では、こうした想定される複数の経営行動全てを網羅的に解くために、Loop ルーチンを用いてその中でダミーdummy(y)を利用し、必要な制約式を逐次切り替えながら繰り返し問題を解いている（詳しくは後述）。

モデル mh002.gms の中では、ファースト・ベスト均衡とセカンド・ベスト均衡の両方を解くために、それぞれに対応したモデル（名）を定義している。52 行目では、目的関数 obj と参加制約 pc のみを含むモデルを MH001FB と定義し、これを解くことでファースト・ベスト均衡を得る。同様に 53 行目では、上記 2 つの制約に加えて誘因両立制約 ic を課したモデル MH001SB を解くことで、セカンド・ベスト均衡を得る。

実際にモデルを解くように命じている部分は、69–86 行目の Loop ルーチンの部分である。「Loop(t, …);」は、括弧内の「…」に対応する一連のプログラムを、全ての t について繰り返し実行するためのものである。Loop ルーチンの骨格は以下の数行である。

```
Loop(t,
dummy(y)=1$(ord(t) eq ord(y));
…
Solve MH001FB maximizing U using NLP;
…
Solve MH001SB maximizing U using NLP;
);
```

はじめに、t に含まれる要素(=1, 2)の順番(=1, 2)が、y に含まれる要素(low,high)の順番（low は 1 番目、high は 2 番目）と一致する場合には、dummy(y)の値を 1 とする（それ以外は 0）。具体的には、繰り返しの 1 回目には dummy(low)=1, dummy(high)=0、2 回目には dummy(low)=0, dummy(high)=1 となる。これによって、繰り返しの 1 回目には消極的行動を前提とした（制約式のみを有効にした）モデルのファースト・ベスト均衡とセカンド・ベスト均衡を解き、2 回目には同様に積極的行動を前提としたモデルのファースト・ベスト均衡とセカンド・ベスト均衡を解くことができる。

4 種類あるモデルの解は、出力ファイル中でそれぞれの問題の SOLVE SUMMARY 以下の部分に示される。それぞれの問題で、Optimal solution と表示されていることを確認して先に進む（**リスト 2.4**）。出力ファイル中の解の表示と読み取り方法は、**リスト 2.2** のそれと全く同じである。たとえば、4 つある SOLVE SUMMARY のうちの 2 つ目、すなわち消極的行動をとらせたいときのセカンド・ベスト均衡では、支払額 w は、成功・不成功にかかわらず 1.000 にすることが最適であることがわかる。

先の入力ファイルに戻ると、Loop ルーチン内の主要箇所以外は、繰り返しで得られるそれぞれのモデルの解を用いて様々な値を計算する部分である。具体的には、支払額 w_FB, w_SB, 起業家の効用 u_e_FB, u_e_SB, 投資家の費用 C_FB, C_SB と利益 B_FB, B_SB, およびその差額 Net_FB, Net_SB を計算する。これらはプログラムの最後の部分で、表計算ソフトウェアで読み取りやすいように CSV 形式で出力される。これらを**表 2.1** にまとめて示した。

リスト 2.4: モラル・ハザード・モデル(2 つの経営行動の遂行問題を共に扱う)の解(抜粋) (`mh002.lst`)

```
…
               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   MH001SB            OBJECTIVE  U
     TYPE    NLP               DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  CONOPT             FROM LINE  79
…
 ** Optimal solution. Reduced gradient less than tolerance.
…
                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU obj          16.200    16.200    16.200     1.000

  obj  utility function

---- EQU pc  participation constraint

      LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

low    1.000     1.000     +INF    -2.000

---- EQU ic  incentive compatibility constraint

           LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

low.low      .         .       +INF      .
low.high   -1.000 2.4943E-7     +INF      .

---- VAR w  entrep's income

          LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

failure 1.0000E-4     1.000     +INF      .
success 1.0000E-4     1.000     +INF  3.5633E-8

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR U              -INF    15.200     +INF      .

  U  investor's expected utility
…
```

表 2.1: 4 つのモデルの解

	w_x：支払額	u_x：起業家の効用	U：投資家の効用	B：投資家の利益	C：投資家の費用
努力水準　積極的					
ファースト・ベスト解			34.60	38.60	4.00
失敗	4.00	2.00			
成功	4.00	2.00			
セカンド・ベスト解			34.27	38.60	4.33
失敗	0.74	0.86			
成功	5.22	2.29			
努力水準　消極的					
ファースト・ベスト解			15.20	16.20	1.00
失敗	1.00	1.00			
成功	1.00	1.00			
セカンド・ベスト解			15.20	16.20	1.00
失敗	1.00	1.00			
成功	1.00	1.00			

2.3　ファースト・ベスト解とセカンド・ベスト解の検証

表 2.1 を見ればわかるように、わざわざ大きな努力を投じなくとも済む消極的行動を選択させたい場合には、ファースト・ベストでもセカンド・ベストでも、「定額払い契約」（すなわち $w_{\mathtt{success}} = w_{\mathtt{failure}}$）を用意すれば十分である。（この場合にはそもそもモラル・ハザードの問題は発生しない。）しかし、積極的行動を選択させたい場合、ファースト・ベストであれば同様の「定額払い契約」を用意すれば十分だが、セカンド・ベストでは $w_{\mathtt{success}} > w_{\bullet} > w_{\mathtt{failure}}$（ただし $w_{\bullet}$ はファースト・ベストの定額払い額）となる。すなわち、ファースト・ベストの時と比べてセカンド・ベストの起業家の所得 w_x は、成功の場合に大きく、失敗の場合に小さくなる。この理由は、リスク回避的な起業家に敢えてリスクの大きい積極的行動を選択させるため、成功時の報酬を $w_{\bullet}$ より引き上げて積極的行動を促す一方、失敗時の報酬を $w_{\bullet}$ より引き下げて消極的行動をとりにくくさせることが、（誘因両立制約の成立上）必要であるからである。成功時の報酬の引き上げは、（ファースト・ベスト均衡と比べて）投資家の期待費用 C の増加につながる。

投資家からみれば、セカンド・ベストの場合とファースト・ベストの場合を比べたとき、積極的行動を選択させる場合には、期待収入 B は変わらないのに期待費用 C だけが増えるので、投資家の期待純利益 Net は減少する。（なお本稿で取り上げる問題では、目的関数の中に投資額 I を入れていないので、期待純利益 Net は目的関数 U の値と一致する。）

第 2 段階の問題は、積極的行動を選択させた場合の投資家の期待効用（U または Net）と、消極的行動を選択させた場合のそれとを比べて、どちらの経営行動を選択させるべきかを考えることである。表 2.1 が示す通り、仮定されたパラメータの下では、ファースト・ベストの状況でもセカンド・ベストの状況でも、選択されるべき経営行動は積極的行動であることがわかる。なお、ファースト・ベストでもセカンド・

ベストでも積極的行動が選ばれるが、上で述べたように遂行費用が異なる。この理由は、(リスク回避的であるために消極的行動をとりたがる)起業家のモラル・ハザードを防止するために、追加的な費用が生じるからである。この点は、後ほど**第 3 節**で起業家がリスク中立的な場合を検討することでより明確になる。

2.4　グラフによる説明

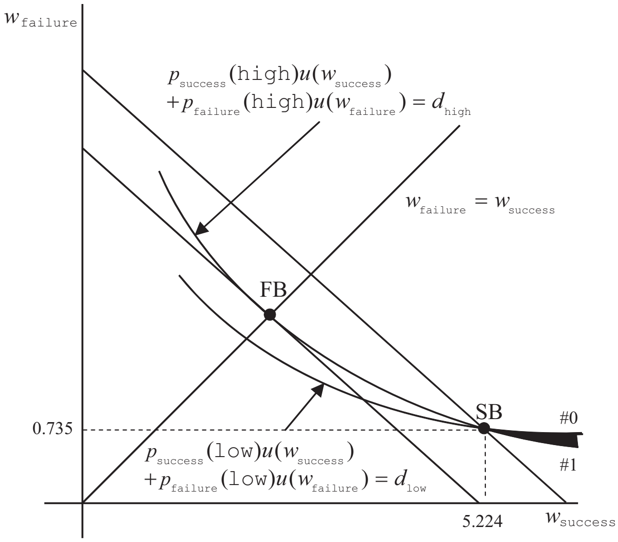
ファースト・ベスト解とセカンド・ベスト解についてのグラフによる説明は、伊藤の図 4.2 に準拠する(**図 2.1, 図 2.2**)。ただし、このグラフを用いるに当たって注意すべきことがある。数値モデルの目的関数は、事業の利益から起業家への支払額を引いた投資家の期待効用であり、その最大化問題を扱うのに対し、伊藤の問題の目的関数は起業家の期待支払額(だけ)であり、その最小化問題を扱っている。そこで以下では伊藤に従い、目的関数を起業家の期待支払額であるとして説明を進める。(これは 1.3 で述べた問題 $(\mathbf{IP})$ に他ならない。)

まず積極的行動の場合は、伊藤の図 4.2 をそのまま用いることができ、**図 2.1** に示される通りである。なお、本稿の**図 2.1** と**図 2.2** では、**表 2.1** のセカンド・ベストの数値解を書き加えてある。これらのグラフでは、起業家がリスク回避的であるとしているので、参加制約の可能域の境界線#1、および誘因両立制約の右辺の値が 0 になる境界線#0 が曲線となっている。[8] これに対して、次節で検討する起業家がリスク中立的な場合には、#1 と#0 が共に直線になっている。

図 2.1 に示されるファースト・ベストの解は、数値モデルで $w_{\mathtt{success}} = w_{\mathtt{failure}} = 4.000$ であるので、グラフに描かれている通り $w_{\mathtt{success}} = w_{\mathtt{failure}}$ であることと一致する。次にセカンド・ベスト解の可能域は、#0 線上とその下部、および#1 線上とその上部で囲まれた斜線の部分であり、かつ起業家への期待支払額の無差別曲線は、原点に向かうにつれて期待支払額が減少するので、セカンド・ベストの解は曲線#1 と曲線#0 の交点 SB である。数値解は $(w_{\mathtt{success}}, w_{\mathtt{failure}}) = (5.224, 0.735)$ である。また、セカンド・ベスト解 SB がファースト・ベスト解 FB よりも、高位(より大きい支払額)の無差別曲線上にあることがわかる。すなわちセカンド・ベストでは、ファースト・ベストよりも費用が大きいことを示している。数値モデルでも、ファースト・ベスト解の費用は 4.000、セカンド・ベスト解の費用は 4.327 である。

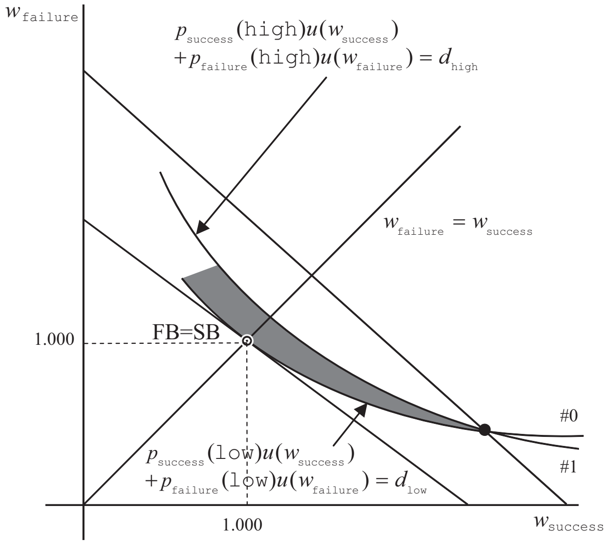
[8] 誘因両立制約の右辺とは、問題 $(\mathbf{P}')$ の誘因両立制約(IC) (1.3)の右辺を指す。他も同様である。

図 2.1: 積極的行動をとらせるための契約
（伊藤(2003)の図 4.2 を筆者改変）



次に、消極的行動の場合を**図 2.2** に示す。消極的行動の場合は、起業家への期待支払額の無差別曲線は、積極的行動の場合より傾きが緩やかになる。次に、参加制約の可能域の境界線#0 は、積極的行動の場合の誘因両立制約の右辺の値が 0 になる境界線#0 に等しい。参加制約の可能域の境界線#0 は、$w_{\mathtt{success}} = w_{\mathtt{failure}}$ において起業家への期待支払額の無差別曲線に接し、この接点がファースト・ベスト解となることは積極的行動の場合と同じである。一方、誘因両立制約の右辺が 0 になる境界線#1 は、積極的行動の場合の参加制約の可能域の境界線#1 に等しい。従って、消極的行動の場合の参加制約の可能域の境界線#0 は、積極的行動の場合の参加制約の可能域の境界線#1 よりも、傾きが緩やかである。次に、誘因両立制約が付け加わるセカンド・ベスト解の可能域は、#0 線上とその上部、および#1 線上とその下部で囲まれた部分（斜線部分）である。ファースト・ベスト解はこの可能領域にあるので、ファースト・ベスト解が同時にセカンド・ベスト解であることを妨げない。従って、セカンド・ベストをファースト・ベスト費用（数値モデルでは $w_{\mathtt{success}} = w_{\mathtt{failure}} = 1.000$）で遂行できる。

図 2.2: 消極的行動をとらせるための契約
（伊藤(2003)の図 4.2 を筆者改変）



3. 2 経営行動・2 成果モデル: 起業家がリスク中立的な場合

3.1　　モデルの設定

本節は、起業家がリスク中立的である場合の検証である。**第 2 節**のモデルでは、起業家がリスク回避的であるとし、起業家の効用関数$U = u(w) - d(a)$における関数$u(\cdot)$を厳密な凹関数、具体的には$u = w^{0.5}$としていたが、この節では$u(\cdot)$を線形、具体的には$u = w$とする。数値モデルは、**第 2 節**の 2 経営行動・2 成果モデルを使い、(**リスト 2.1** の 45–47 行目に現れる)起業家の効用関数のうち$u(\cdot)$に関する部分だけを差し替えればよい。起業家がリスク中立的である場合の注意点は第 1 に、w（従ってu）が一意に決まらないことである。すなわち複数解が存在することである。第 2 に、ファースト・ベストの行動がa_1のとき、セカンド・ベストにおいてもa_1をファースト・ベスト費用で遂行できることである。

3.2　　起業家がリスク中立的な場合のモデル (mh003.gms)

起業家がリスク中立的な場合に消極的行動をとらせるモデルの解は、事業が失敗した場合の起業家への支払額が 1.11 で、成功した場合のそれが 0.00 となっており、一見したところ、投資家が起業家の失敗を望むようであり不合理に見える(**表 3.1**)。しかしながら、ここで考察している「消極的行動をとらせる」選択自体は、努力してより高い確率で事業に成功しなくともよい、というメッセージを与えることに他ならないという意味で、この最適契約は合理的なものである。実際、解は与えられた制約の下で投資家の

表 3.1: 起業家がリスク中立的な場合のモデルの解(その 1)

	w_x: 支払額	u_x: 起業家の効用	U: 投資家の効用	B: 投資家の利益	C: 投資家の費用
努力水準　積極的					
ファースト・ベスト解			36.60	38.60	2.00
失敗	10.00	10.00			
成功	0.00	0.00			
セカンド・ベスト解			36.60	38.60	2.00
失敗	0.86	0.86			
成功	2.29	2.29			
努力水準　消極的					
ファースト・ベスト解			15.20	16.20	1.00
失敗	1.11	1.11			
成功	0.00	0.00			
セカンド・ベスト解			15.20	16.20	1.00
失敗	1.11	1.11			
成功	0.00	0.00			

効用を確実に最大化している。このように一見したところ奇妙な解が得られる理由は、リスク中立的な場合に、複数解が存在することに帰せられる。

3.3　複数均衡の中から異なる解を得る (mh003b.gms)

上のリスク中立的な場合のモデル(mh003.gms)は複数均衡を持つことがわかっているので、表 3.1 に示された値以外にも、目的関数に同じ最適値を与える異なる解が必ず存在する。[9] そこで、前節で用いたのと全く同じ数値モデルを、異なる数値計算の初期値を用いて解くことで、異なる解を求めてみる。このために、Solve 命令の直前の行に、

```
w.l(x)=0;
```

という行を挿入する。これにより、w_x の初期値を 0 として計算することができる。解が一意であればどのような初期値を与えても同じ解を得るはずであるが、ここでは表 3.1 に示したものとは異なる解を得る（表 3.2）。

目的関数である投資家の期待効用 U は、表 3.1 に示した値と等しいので、このモデルの解も最適解の一つであることに変わりはない。0 以外のさらに異なる初期値を与えて計算すれば、別の異なる最適解を得る。たとえば、w_x の初期値を 1 とする場合には、表 3.3 の計算結果を得る。表 3.3 でも U の値は同じである。これらのことから複数解の存在が示唆される。

[9] モデル mh003b.gms については、紙幅の関係上省略する。詳しくは、以下の Web ページを参照せよ。全てのサンプル・プログラムは Web 上で公開されている。< http://r-center.grips.ac.jp/DiscussionPapersDetails/266/# >

表 3.2: 起業家がリスク中立的な場合のモデルの解(その 2) — w_x の初期値を 0 とする場合

	w_x: 支払額	u_x: 起業家の効用	U: 投資家の効用	B: 投資家の利益	C: 投資家の費用
努力水準　積極的					
ファースト・ベスト解			36.60	38.60	2.00
失敗	0.00	0.00			
成功	2.50	2.50			
セカンド・ベスト解			36.60	38.60	2.00
失敗	0.00	0.00			
成功	2.50	2.50			
努力水準　消極的					
ファースト・ベスト解			15.20	16.20	1.00
失敗	1.11	1.11			
成功	0.00	0.00			
セカンド・ベスト解			15.20	16.20	1.00
失敗	1.11	1.11			
成功	0.00	0.00			

表 3.3: 起業家がリスク中立的な場合のモデルの解(その 3) — w_x の初期値を 1 とする場合

	w_x: 支払額	u_x: 起業家の効用	U: 投資家の効用	B: 投資家の利益	C: 投資家の費用
努力水準　積極的					
ファースト・ベスト解			36.60	38.60	2.00
失敗	6.00	6.00			
成功	1.00	1.00			
セカンド・ベスト解			36.60	38.60	2.00
失敗	0.86	0.86			
成功	2.29	2.29			
努力水準　消極的					
ファースト・ベスト解			15.20	16.20	1.00
失敗	1.00	1.00			
成功	1.00	1.00			
セカンド・ベスト解			15.20	16.20	1.00
失敗	1.00	1.00			
成功	1.00	1.00			

表 3.1–表 3.3 のうちどの計算結果を利用しても良いが、消極的行動をとらせる場合と積極的行動をとらせる場合のいずれの場合においても、ファースト・ベストとセカンド・ベストの遂行費用（すなわち投資家の費用 C ）が、常に等しいことがわかる。この理由は、起業家がリスク中立的である場合、積極的行動を選択させるためにいかなるリスク・プレミアムも必要としないためである。この数値モデルの場合では、投資家の期待効用 U を比べると、ファースト・ベストにおいてもセカンド・ベストにおいても、投資家は起業家に積極的行動を選択させることがわかる。

3.4　グラフによる説明

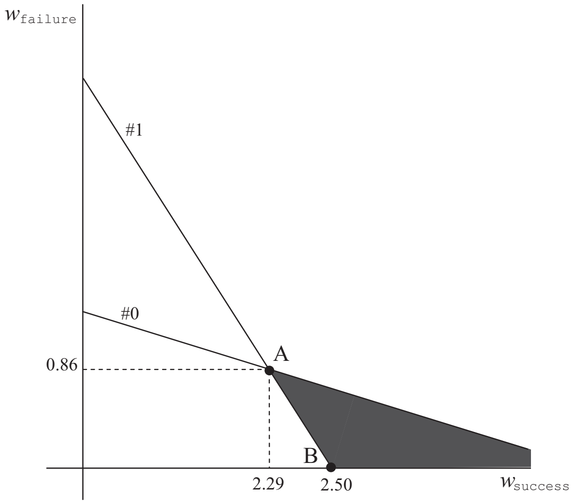
前節同様、伊藤の図 4.2 の枠組みを、リスク中立的な起業家の場合に当てはめて図示する。ただし、前節では起業家がリスク回避的であったので、#0, #1 共に曲線であったのに対し、本節では起業家がリスク中立的であるので、参加制約の可能域の境界線（積極的行動の場合#1、消極的行動の場合#0）は、起業家への期待支払額の無差別曲線と平行になる。従って、誘因両立制約のないファースト・ベストの場合、起業家への支払額が最小になる解は、参加制約の直線上の（非負の領域における）任意の点にある。

次に積極的行動について（図 3.1）、誘因両立制約の右辺が 0 になる境界線#0 を導入する。#0 と#1 の交点 A は、$(w_{\texttt{success}}, w_{\texttt{failure}}) = (2.29, 0.86)$ である。セカンド・ベスト解の可能域は、誘因両立制約の右辺が 0 になる境界線#0 の線上およびその下部であり、かつ参加制約#1 上になければならないので、解は交点 A より右下の、参加制約の線分 AB 上にある。

数値モデルの解をみると、積極的行動をとらせるセカンド・ベスト解は、w_x に関する数値計算の初期値を 1 に設定した場合の解（点 A）は、$(w_{\texttt{success}}, w_{\texttt{failure}}) = (2.29, 0.86)$ になっている（表 3.3）。（この解は偶然#0 と#1 の交点 A と一致している。） 全く同じ問題を、w_x に関する数値計算の初期値を 0 に変更して解いた場合には、解（点 B）は、$(w_{\texttt{success}}, w_{\texttt{failure}}) = (2.50, 0.00)$ となる（表 3.2）。この場合も目的関数 U の解は 36.60 であり、数値計算の初期値を設定しない場合と変わらないので、複数均衡の存在が示唆される。

次に、消極的行動について見てみる（図 3.2）。起業家への期待支払額の無差別曲線は、積極的行動の場合より傾きが緩やかになる。さらに消極的行動の参加制約#0 は、積極的行動の場合の誘因両立制約の右辺の値が 0 になる境界線#0 であるので、これも積極的行動の場合の参加制約の直線より傾きが緩やかになる。次に、消極的行動における誘因両立制約の右辺の値が 0 になる境界線は#1 である。このように、積極的行動の場合と比べ、参加制約直線と誘因両立制約の右辺の値が 0 になる境界線が入れ替わっただけであるので、点 A は変わらない。しかし解の可能域は変わっている。すなわち消極的行動の場合の解は、参加制約直線上にあることは変わらないものの、誘因両立制約の右辺の値が 0 になる境界線に関しては、その線上および下部が可能域になる。従って、解は交点より左側の参加制約の線分上にある。ファースト・ベスト解が、参加制約上の交点より左側にある限り、ファースト・ベスト解とセカンド・ベスト解の目的関数の値が等しい。（実際、表 3.1–表 3.3 において、セカンド・ベスト解がファースト・ベスト解に等しくなっている。）

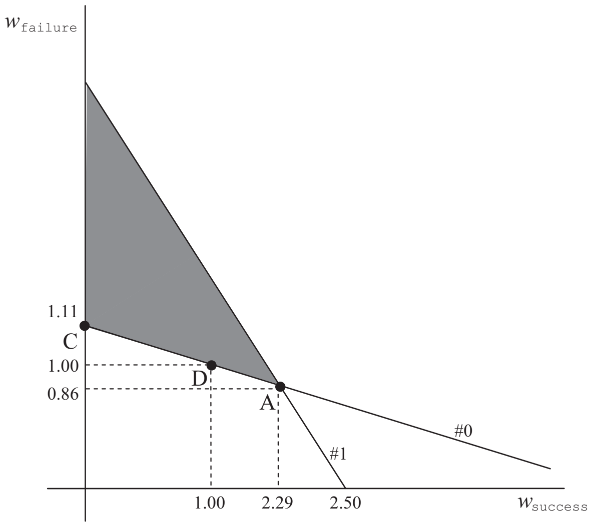
図 3.1: 積極的行動 a_1 の遂行



A: 表 3.3 のセカンド・ベスト解（w_x の初期値を 1 とする場合）

B: 表 3.2 のセカンド・ベスト解（w_x の初期値を 0 とする場合）

図 3.2: 消極的行動 a_0 の遂行



C: 表 3.2 のセカンド・ベスト解（w_x の初期値を 0 とする場合）

D: 表 3.3 のセカンド・ベスト解（w_x の初期値を 1 とする場合）

数値モデルをみると、w_x の初期値を 0 とする場合のセカンド・ベスト解（点 C）は、$(w_{\mathtt{success}}, w_{\mathtt{failure}}) = (0.00, 1.11)$ である（**表 3.1**，**表 3.2**）。これは、参加制約#0 が縦軸を切る点である。次に w_x の初期値を 1 とすると、解（点 D）は $(w_{\mathtt{success}}, w_{\mathtt{failure}}) = (1.00, 1.00)$ になる（**表 3.2**）。いずれの場合も、目的関数の値 U は 15.2 と変わらないので、ここでも複数解の存在が示唆される。

4. 3 経営行動・3 成果モデル: 起業家がリスク回避的な場合

4.1　3 経営行動と 3 成果

第 4 節では、起業家がリスク回避的な場合に戻り、伊藤 4.2.2 に従って、積極・消極の 2 種類の行動を考えた**第 2 節**のモデル(`mh002.gms`)を拡張し、積極的(high)、中位的(middle)、消極的(low)の 3 種類の行動を考えるモデルを作る。[10] 同時に成果も、**第 2 節**のモデルの成功・失敗の 2 種類から、成功(success)、中間(moderate)、失敗(failure)の 3 種類にする。伊藤 4.2.2 では一般的な形として、行動空間 A は $K+1$ 個の要素を持つとし、それぞれの行動を k で表している。この数値問題では $K=2$ として、3 種類の経営行動を選択させる。経営行動の数と成果の数が増えるものの、モデルの構造は 2 経営行動・2 成果モデルと変わらない。ただし、`Set` における成果 `x` が 2 個から 3 個に増え、経営行動 `y` も 2 個から 3 個に増えるのに伴い、経営行動と成果を結び付ける確率、経営行動ごとの不効用と、成果ごとのプロジェクトの利益を表す変数の数が増えるだけである。この問題を、これまでのモデルと同様に一連の `Loop` の中で解く。[11]

4.2　最適分配スケジュールの単調性

3 経営行動・3 成果のモデルで問題になるのが、最適分配スケジュール w_i の単調性である。すなわち、高い成果が得られるにつれて、起業家（エージェント）が投資家（プリンシパル）から受け取る金額 w_i が増えるかどうかという問題である。成功したときの方が失敗したときよりも受け取る金額が少なければ、起業家は満足しないのが現実的な想定であろう。この問題を検討するために、伊藤は次の 2 つの仮定をおいている。

第 1 の仮定は、「尤度比の単調性(monotone likelihood ratio condition, MLRC)」である。数学的には、$k > l$ であれば尤度比 $p_i(a_k)/p_i(a_l)$ が成果 i の増加関数である、というものである。すなわち、高い

[10] ここで、中位的行動というのは、単に積極的行動と消極的行動の中間にある行動という意味であって、統計で用いられる中央値（中位数、メディア(median)）とは無関係である。

[11] 出力ファイル(`mh002.lst`)には、最初に消極的行動を選択させるファースト・ベスト解とセカンド・ベスト解が示され、次に中位的行動を選択させるファースト・ベスト解とセカンド・ベスト解が、最後に積極的行動を選択させるファースト・ベスト解とセカンド・ベスト解が示される。

成果が得られたとしたら、より積極的行動をとった確率が大きいということである。[12]

第 2 の仮定は、「分布関数の凸性(convexity of distribution function condition, CDFC)」である。この条件は、ある $\eta \in [0,1]$ が存在し、ある努力水準 a_k が他の努力水準 a_l, a_m の間に位置する $(a_k = \eta a_l + (1-\eta) a_m)$ ならば、任意の成果 $j = 0, \ldots, N$ に対して、

$F_j(a_k) \le \eta F_j(a_l) + (1-\eta) F_j(a_m)$ が成立する、というものである。ここで確率分布関数 $F_j(a)$ は、本稿の設定では $F_j(a) = \sum_{i=0}^{j} p_i(a)$ として求められる。

上記 2 つの仮定の下で、次の命題が提示されている。

命題 4.6（伊藤(2003, p.167)）

(a) MLRC が成立するならば、a_K を遂行する最適契約は成果の増加関数となる。

(b) MLRC および CDFC が成立するならば、任意の $k = 1, \ldots, K-1$ について、

a_k を遂行する最適契約は成果の増加関数になる。

本節で構築する 3 経営行動・3 成果モデル $(K = 2)$ を、この命題に照らして考えると、数値モデルの 3 つの経営行動のうち、積極的行動 a_2 が命題(a)に関係し、中位的行動 a_1 が命題(b)に関係する。上記 2 つの仮定の役割を検討するために、以下では、**両方の仮定を含むモデルと、それぞれ一方の仮定だけを外した 2 つのモデル**の、合計 3 つのモデルを構築する。

モデル A:	MLRC と CDFC の両方が成立するモデル
モデル B:	MLRC は成立するが、CDFC は成立しないモデル
モデル C:	MLRC は成立しないが、CDFC は成立するモデル

これらのモデルの解を以下で検証する。

4.3 3 経営行動・3 成果モデル A (`mh004a.gms`)

4.3.1 モデルの仮定

成果の確率、経営行動ごとの不効用、および事業の収益について、以下の数値例を考える。

・ 経営行動ごとの事業の成功・中間・失敗の確率 $p_{\mathtt{x}}(\mathtt{y})$

$$\begin{pmatrix} p_{\mathtt{failure}}(\mathtt{low}) & p_{\mathtt{failure}}(\mathtt{middle}) & p_{\mathtt{failure}}(\mathtt{high}) \\ p_{\mathtt{moderate}}(\mathtt{low}) & p_{\mathtt{moderate}}(\mathtt{middle}) & p_{\mathtt{moderate}}(\mathtt{high}) \\ p_{\mathtt{success}}(\mathtt{low}) & p_{\mathtt{success}}(\mathtt{middle}) & p_{\mathtt{success}}(\mathtt{high}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.600 & 0.350 & 0.050 \\ 0.300 & 0.250 & 0.100 \\ 0.100 & 0.400 & 0.850 \end{pmatrix}$$

[12] もちろん、現実には様々な状況が考えられる。たとえば、積極的な行動で高い利益を得ようとしても、同僚・同業者との間で軋轢が生じるために、積極的でない行動をとった方が、かえって成功確率が高くなる状況が起こり得るかもしれない。尤度比の単調性は、このような一種例外的な状況を排除し、現実に起こり得ると考えられる状況に分析を集中させる役割を持っている。

・ 経営行動ごとの起業家にとっての不効用 $d(\texttt{y})$

$$\begin{pmatrix} d(\texttt{low}) \\ d(\texttt{middle}) \\ d(\texttt{high}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 2.2 \\ 3.0 \end{pmatrix}$$

・ 事業の収益 $r(\texttt{x})$

$$\begin{pmatrix} r_{\texttt{failure}} \\ r_{\texttt{moderate}} \\ r_{\texttt{success}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 29 \\ 45 \end{pmatrix}$$

とする。これらの数値例の下で尤度比は、

$$\begin{pmatrix} \dfrac{p_{\texttt{failure}}(\texttt{middle})}{p_{\texttt{failure}}(\texttt{low})} & \dfrac{p_{\texttt{failure}}(\texttt{high})}{p_{\texttt{failure}}(\texttt{middle})} \\ \dfrac{p_{\texttt{moderate}}(\texttt{middle})}{p_{\texttt{moderate}}(\texttt{low})} & \dfrac{p_{\texttt{moderate}}(\texttt{high})}{p_{\texttt{moderate}}(\texttt{middle})} \\ \dfrac{p_{\texttt{success}}(\texttt{high})}{p_{\texttt{success}}(\texttt{middle})} & \dfrac{p_{\texttt{success}}(\texttt{high})}{p_{\texttt{success}}(\texttt{middle})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.583 & 0.143 \\ 0.833 & 0.400 \\ 4.000 & 2.125 \end{pmatrix}$$

となり、成果が改善するほど（行列では下の行へ移るほど）尤度比が上昇するから MLRC を満足することが確認できる。また、

$$\begin{pmatrix} F_{\texttt{failure}}(\texttt{middle}) - \left[\eta F_{\texttt{failure}}(\texttt{low}) + (1-\eta) F_{\texttt{failure}}(\texttt{high})\right] \\ F_{\texttt{moderate}}(\texttt{middle}) - \left[\eta F_{\texttt{moderate}}(\texttt{low}) + (1-\eta) F_{\texttt{moderate}}(\texttt{high})\right] \\ F_{\texttt{success}}(\texttt{middle}) - \left[\eta F_{\texttt{success}}(\texttt{low}) + (1-\eta) F_{\texttt{success}}(\texttt{high})\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.14 \\ -0.15 \\ 0.00 \end{pmatrix}$$

と、いずれについても非正であるから、CDFC も満足することが確認できる。

4.3.2　プログラムの内容

前回用いたプログラム(`mh002.gms`)をほとんどそのまま使うことができる。ただし、上で示したように、経営行動と成果がそれぞれ 3 種類に拡張されており、それらに対応したパラメータ設定を行う必要がある。**リスト 4.1** の 8 行目でプロジェクトの成果として、「中間」`moderate` を新しく記入し、9 行目で新しい経営行動（努力水準）「中位的」`middle` を記入する。選択させることができる経営行動が 3 種類になったことから、繰り返してモデルを解くために用いる添え字 `t` についても、「`1,2,3`」の 3 つを定義する。

リスト 4.1: 3 経営行動・3 成果モデル A の入力ファイル（抜粋）(mh004a.gms)

```
…
* Definition of Set
Set     x      project outcome /failure, moderate, success/
        y      effort level    /low, middle, high/
        t      loop index     /1,2,3/;
Alias (y,v);
* Definition of Parameters
Table p(x,y)   probability of outcome by effort level
             low    middle  high
failure       0.6    0.35    0.05
moderate      0.3    0.25    0.1
success       0.1    0.4    0.85
;

Parameter      d(y)   disutility by efforts
       /low    2
       middle  2.2
       high    3/
;
Parameter      r(x)  revenue from project
       /failure 13
       moderate 29
       success  45/
* Definition of Parameters
…
```

4.3.3　モデル A の解の検証：積極的行動を中心にして

出力ファイル(mh004a.lst)には 6 つの SOLVE SUMMARY が示されている。そのうち、積極的経営行動 a_2 を選択させるセカンド・ベスト解（6 番目に示されたもの）に対応するものを見てみる（リスト 4.2）。なお、積極的行動の他、全ての経営行動のモデルの解が、表 4.1 にまとめられている。

最初に、伊藤(2003)の命題 4.5 について検証する。

命題 4.5（伊藤(2003, p.166)）

> 経営行動 a_k が不効用の最も低い行動（本モデルでは a_0）でなければ、起業家にとって、a_k と無差別になる a_l が存在する。

というものである。この命題が成立することは、モデルの誘因両立制約 ic(v,y) が等号で成立する（すなわちそのラグランジュ乗数がゼロでない）ものがあるかどうかを見ればわかる。本稿には紙幅の関係上、リスト 4.2 には全ての解を掲載していないが、そこに示された解（リスト 4.2 の 697 行目）を見ると、積極的行動 a_2 をとらせようとする問題において、積極的行動 a_2 をとった場合の効用と等しい効用を与える中位的行動 a_1 が存在する。このことは中位的行動 a_1 をとった場合の効用が積極的行動 a_2 をとった場

リスト 4.2: 3 経営行動・3 成果モデル A の出力ファイル
—積極的行動を選択させるセカンド・ベスト解（抜粋）(mh004a.lst)

```
…
---- EQU pc  participation constraint

        LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

high     3.000     3.000     +INF     -6.000

---- EQU ic  incentive compatibility constraint

               LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

high.low        1.000     1.413     +INF       .
high.middle     0.800     0.800     +INF     -0.707
high.high         .         .       +INF       .

---- VAR w  entrep's income

            LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

failure  1.0000E-4     0.773     +INF       .
moderate 1.0000E-4     6.100     +INF      EPS
success  1.0000E-4    10.158     +INF       .

                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR U             -INF     32.517     +INF       .

  U  investor's expected utility
…
```

合の効用を上回らない、という誘因両立制約が等号で成り立つことによってわかる。同じく、中位的行動 a_1 をとらせようとする問題では、中位的行動 a_1 をとった場合の効用と等しい効用を与える消極的行動 a_0 が存在する。これに対して、不効用の最も低い消極的行動 a_0 には、それと無差別な経営行動は存在しない。（誘因両立制約が等号で成立するものはない。）

続いて、伊藤(2003)の命題 4.6 についてみると、以下の通りである。

(a) MLRC を満足する本モデルでは、**表 4.1** に見る通り、まず積極的行動 a_2 において、最適契約 w_x は、成果の増加関数になっている。（すなわち最適契約 w_x は、失敗において最も小さく、中間、成功と成果が改善するにつれて大きくなっている。）

表 4.1: 経営行動と最適契約および期待効用（モデル A）

	w_x: 支払額	u_x: 起業家の効用	U: 投資家の効用
努力水準	消極的		
			17.00
失敗	4.00	2.00	
中間	4.00	2.00	
成功	4.00	2.00	
努力水準	中位的		
			24.86
失敗	3.44	1.85	
中間	4.42	2.10	
成功	6.57	2.50	
努力水準	積極的		
			32.52
失敗	0.77	0.88	
中間	6.10	2.47	
成功	10.16	3.19	

(b) 次に、本モデルは MLRC に加えて CDFC も満足するので、中位的行動 a_1 においても、最適契約 w_x は成果の増加関数になっている。

この表には示していないが、ファースト・ベストでは、最適契約 w_x は成果に関わらず一定（すなわち定額払い契約）であること、および消極的行動を選択させる場合のセカンド・ベストの最適契約 w_x が、ファースト・ベスト解に等しいことは、起業家がリスク回避的な場合の 2 経営行動・2 成果モデルと同じである。

4.4　3 経営行動・3 成果モデル B (mh004b.gms)

4.4.1　モデルの仮定

4.3.1 で述べた仮定のうち、成果の確率と事業の収益は変えないで、経営行動ごとの不効用を次の様に変える。

$$\begin{pmatrix} d(\mathtt{low}) \\ d(\mathtt{middle}) \\ d(\mathtt{high}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 2.5 \\ 3.0 \end{pmatrix}$$

ここでは、前のモデルから事業の成功・中間・失敗の確率を変更していない（従って尤度比も同じである）から、従前の通り MLRC を満足する。一方、経営行動ごとの不効用 $d(\mathtt{y})$ として異なった値を仮定しているので、

表 4.2: 経営行動と最適契約および期待効用（モデル B）

	w_{x}: 支払額	u_{x}: 起業家の効用	U: 投資家の効用
努力水準	消極的		
			17.00
失敗	4.00	2.00	
中間	4.00	2.00	
成功	4.00	2.00	
努力水準	中位的		
			21.76
失敗	0.61	0.78	
中間	16.90	4.11	
成功	9.00	3.00	
努力水準	積極的		
			32.66
失敗	2.11	1.45	
中間	7.39	2.72	
成功	9.76	3.12	

$$\begin{pmatrix} F_{\mathtt{failure}}(\mathtt{middle})-\left[\eta F_{\mathtt{failure}}(\mathtt{low})+(1-\eta)F_{\mathtt{failure}}(\mathtt{high})\right] \\ F_{\mathtt{moderate}}(\mathtt{middle})-\left[\eta F_{\mathtt{moderate}}(\mathtt{low})+(1-\eta)F_{\mathtt{moderate}}(\mathtt{high})\right] \\ F_{\mathtt{success}}(\mathtt{middle})-\left[\eta F_{\mathtt{success}}(\mathtt{low})+(1-\eta)F_{\mathtt{success}}(\mathtt{high})\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.025 \\ 0.075 \\ 0.000 \end{pmatrix}$$

といずれも非負となり、CDFC はもはや満足していないことがわかる。

4.4.2　モデル B の解の検証

モデルの解を命題 4.6 の観点からみていくと次の通りである（**表 4.2**）。

(a) CDFC が満足されていないが MLRC が満足されているので、積極的行動 a_2 において、命題 4.6(a) の主張する通り、最適契約 w_{x} は成果の増加関数になっている。

(b) MLRC は満足されていても CDFC が満足されていないこのモデルでは、中位的行動 a_1 において、最適契約 w_{x} は成果の増加関数になっていない。（成果が「中間」から「成功」へと上昇すると、支払額 w_{x} が 16.90 から 9.00 へと減少している。） 命題 4.6(b)は、**MLRC と CDFC の両方が成立する**ときに、a_2（中位的行動）を遂行する最適契約が成果の増加関数になるという主張であるから、MLRC が成立していても **CDFC が成立しない**以上、中位的行動を選択させるモデルにおいて、最適契約 w_{x} が成果の増加関数になっていないことは、命題 4.6(b)と矛盾するものではない。

誘因両立制約についてみると、積極的行動をとらせようとする場合、積極的行動 a_2 と中位的行動 a_1 は起業家にとって無差別である。中位的行動をとらせようとする場合は、積極的行動 a_2 とも消極的行動 a_0 とも無差別である。消極的行動をとらせようとする場合は、従前通り、それと無差別な行動はない。このように、誘因両立制約が等号で成立する状況は 4.3.1 のモデルとは異なり、導かれる最適契約の性質が異なったものとなる。

4.5 3 経営行動・3 成果モデル C (mh004c.gms)

4.5.1 モデルの仮定

3 経営行動・3 成果モデル C として次の仮定をおく。3 経営行動・3 成果モデル A と比べ、事業の収益だけでなく、成果の確率と経営行動ごとの不効用も変更している。

・ 経営行動ごとの事業の成功・中間・失敗の確率 $p_{\mathrm{x}}(\mathtt{y})$

$$\begin{pmatrix} p_{\mathtt{failure}}(\mathtt{low}) & p_{\mathtt{failure}}(\mathtt{middle}) & p_{\mathtt{failure}}(\mathtt{high}) \\ p_{\mathtt{moderate}}(\mathtt{low}) & p_{\mathtt{moderate}}(\mathtt{middle}) & p_{\mathtt{moderate}}(\mathtt{high}) \\ p_{\mathtt{success}}(\mathtt{low}) & p_{\mathtt{success}}(\mathtt{middle}) & p_{\mathtt{success}}(\mathtt{high}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.700 & 0.200 & 0.100 \\ 0.200 & 0.600 & 0.200 \\ 0.100 & 0.200 & 0.700 \end{pmatrix}$$

・ 経営行動ごとの起業家にとっての不効用 $d(\mathtt{y})$

$$\begin{pmatrix} d(\mathtt{low}) \\ d(\mathtt{middle}) \\ d(\mathtt{high}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 2.1 \\ 3.0 \end{pmatrix}$$

・ 事業の収益 $r(x)$

$$\begin{pmatrix} r_{\mathtt{failure}} \\ r_{\mathtt{moderate}} \\ r_{\mathtt{success}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 29 \\ 45 \end{pmatrix}$$

この仮定の下で尤度比は、

$$\begin{pmatrix} \dfrac{p_{\mathtt{failure}}(\mathtt{middle})}{p_{\mathtt{failure}}(\mathtt{low})} & \dfrac{p_{\mathtt{failure}}(\mathtt{high})}{p_{\mathtt{failure}}(\mathtt{middle})} \\ \dfrac{p_{\mathtt{moderate}}(\mathtt{middle})}{p_{\mathtt{moderate}}(\mathtt{low})} & \dfrac{p_{\mathtt{moderate}}(\mathtt{high})}{p_{\mathtt{moderate}}(\mathtt{middle})} \\ \dfrac{p_{\mathtt{success}}(\mathtt{high})}{p_{\mathtt{success}}(\mathtt{middle})} & \dfrac{p_{\mathtt{success}}(\mathtt{high})}{p_{\mathtt{success}}(\mathtt{middle})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.286 & 0.500 \\ 3.000 & 0.333 \\ 2.000 & 3.500 \end{pmatrix}$$

と、単調性が成立せず MLRC を満足しないことが確認できる。一方、

表 4.3: 経営行動と最適契約および期待効用（モデル C）

	w_x: 支払額	u_x: 起業家の効用	U: 投資家の効用
努力水準	消極的		
			17.00
失敗	4.00	2.00	
中間	4.00	2.00	
成功	4.00	2.00	
努力水準	中位的		
			24.58
失敗	3.77	1.94	
中間	4.59	2.14	
成功	4.55	2.13	
努力水準	積極的		
			28.93
失敗	3.48	1.87	
中間	2.89	1.70	
成功	12.48	3.53	

$$\begin{pmatrix} F_{\mathtt{failure}}(\mathtt{middle})-\left[\eta F_{\mathtt{failure}}(\mathtt{low})+(1-\eta)F_{\mathtt{failure}}(\mathtt{high})\right] \\ F_{\mathtt{moderate}}(\mathtt{middle})-\left[\eta F_{\mathtt{moderate}}(\mathtt{low})+(1-\eta)F_{\mathtt{moderate}}(\mathtt{high})\right] \\ F_{\mathtt{success}}(\mathtt{middle})-\left[\eta F_{\mathtt{success}}(\mathtt{low})+(1-\eta)F_{\mathtt{success}}(\mathtt{high})\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.44 \\ -0.04 \\ 0.00 \end{pmatrix}$$

といずれも非正であるから、CDFC を満足することが確認できる。

4.5.2　解の検証

表 4.3 に、経営行動（努力水準）ごとの最適契約 w_x を示している。第 1 に、積極的行動における最適契約 w_x は、成果の増加関数になっていない。命題 4.6(a)は、MLRC が成立するならば、積極的行動における最適契約 w_x が成果の増加関数になるという主張であるから、MLRC が満足されていない本モデルで、積極的行動における最適契約 w_x が成果の増加関数になっていないことと矛盾しない。第 2 に、中位的行動においても最適契約 w_x は、成果の増加関数になっていない。命題 4.6(b)は、MLRC と CDFC の両方が成立するとき、最適契約 w_x が成果の増加関数になるという主張であるから、MLRC が満足されていない本モデルで、中位的行動における最適契約 w_x が成果の増加関数になっていないことと矛盾しない。

誘因両立制約についてみると、積極的行動をとらせる場合、積極的行動 a_2、中位的行動 a_1、および消極的行動 a_0 の 3 つ全ての行動が起業家にとって無差別である。中位的行動をとらせる場合は、中

位的行動 a_1 と消極的行動 a_0 が無差別である。ここでも、誘因両立制約が等号で成立する状況は、4.3.1 および 4.4.1 のモデルの解と異なり、MLRC や CDFC の仮定が最適契約の性質を吟味する際に非常に重要な仮定となっていることがわかる。

5. 結語

契約理論に必ずしも精通していない読者に、伊藤(2003)が理論的に展開した契約理論分析を「実感」してもらうのが、本稿の目的であった。本稿は、同様の目的で逆選択問題の数値計算手法に関して書かれた橋本他(2011)に続く内容であり、今回は伊藤(2003)の第 4 章「投資家と起業家の契約」(モラル・ハザード問題)を採り上げた。

契約理論分析を数値計算手法によって「実感」してもらうための方策は、2 つの方向で行われた。第 1 の方向は、2 経営行動・2 成果、および 3 経営行動・3 成果のコンピュータ・モデルを構築し、数値計算で解くことにより、解の性質を観察することである。起業家がリスク回避的な場合とリスク中立的な場合とでは、解にどのような違いが出るのかを数値計算結果で確認した。前者では、一般的に解は一意であり、セカンド・ベストでは積極的行動をファースト・ベストの費用で遂行できない。これに対して後者では、複数解になることが確認できると同時に、セカンド・ベストで積極的行動をファースト・ベストの費用で遂行できることが確認された。このことはグラフによって、さらに視覚的にも「実感」できるであろう。

第 2 の方向として、3 経営行動・3 成果モデルにおける成果と最適契約 w_x との間の関係を検討した。3 経営行動・3 成果モデルでは、解析的分析の簡単化のために導入された MLRC および CDFC の仮定の重要性を、数値計算を通じて明らかにした。伊藤の命題 4.6 より、MLRC および CDFC が成立すれば、積極的行動および中位的行動を遂行させる最適契約 w_x は、成果の増加関数となる。MLRC および CDFC が成立している本稿**第 4 節**の前半のモデルでは、積極的行動および中位的行動について、最適契約 w_x が成果の増加関数になっていることが数値計算を通して確認された。一方、MLRC または CDFC が成立しない場合にどうなるかについて、本稿**第 4 節**の後半では、MLRC は成立するが CDFC が成立しないモデルや、MLRC が成立しない数値計算モデルを構築し、積極的行動および中位的行動を遂行させる最適契約 w_x が、成果の増加関数とならないことを確認した。これらの数値計算モデルの解を検証することにより、伊藤の命題 4.6 の前提条件の有効性を「実感」することができる。

本稿のモデルは、前稿(橋本他(2011))で示された逆選択問題のモデルと同様、GAMS というソフトウェアを利用することを前提に作られている。GAMS は有料のソフトウェアであるが、その試用版は GAMS Development Corporation の Web サイト から無料でダウンロードして、規模の小さいモデルであれば動かすことができる。そして本稿のモデルは全て、GAMS の Web サイトにある GAMS Model

Library に入っている。[13] これらをダウンロードして各自思い思いに、モデルのパラメ―タや起業家の効用関数の関数形を変えていけば、契約理論をさらに「実感」することができるであろう。また、解析的手法がこれまでの契約理論の主な分析手法であったが、最近ではコンピュータを用いた数値計算手法が用いられ始めている（たとえば毛利他(2011)）。当然こうした手法を身につけるためには、一連の数値計算技法を獲得しておく必要があり、本稿で例示したようなプログラムがその足掛かりを与えるであろう。

なお、本稿 2.1 の「セカンド・ベスト・モデル（積極的行動を前提とした場合）」(`mh001.gms`)以外は、`Loop` ルーチンを用いた高度なプログラミング手法を使っている。こうしたプログラミング手法に詳しくない読者は、基本モデルである `mh001.gms` に立ち返り、積極的行動を消極的行動に変えたり、また起業家をリスク回避的からリスク中立的に変更するために、起業家の効用関数を厳密な凹関数から 1 次関数に変えたりする必要がある。こうしたプログラミング変更について鍛錬を重ねることを通じて、多くの読者が契約理論を数値計算の結果を通じて「実感」してもらうことが、われわれの将来の望みである。

[13] GAMS Development Corporation の Web サイトは http://www.gams.com/に、Model Library は http://www.gams.com/modlib/modlib.htm にある。

謝辞

本研究は、文部科学省科学研究費補助金(No. 24580317)、野村財団社会科学助成、および政策研究大学院大学政策研究センターによる支援を受けた。ここに記して謝意を表す。

参考文献

伊藤秀史(2003)『契約の経済理論』, 有斐閣.

橋本日出男, 濱田弘潤, 細江宣裕(2011)「契約理論:プログラミング・モデル・アプローチ」, GRIPS Discussion Paper 10-34.
<http://r-center.grips.ac.jp/DiscussionPapersDetails/133/#>

Hashimoto, Hideo, Hamada, Kojun, Hosoe, Nobuhiro (2012) “A Numerical Approach to the Contract Theory: the Case of Adverse Selection,” GRIPS Discussion Paper 11-27.
<http://r-center.grips.ac.jp/DiscussionPapersDetails/247/#>

橋本日出男, 濱田弘潤, 細江宣裕(2012)「契約理論分析における数値計算アプローチ:逆選択問題の場合」,『新潟大学経済論集』, Vol.93, No.2012-I, pp.91-135.

橋本日出男, 濱田弘潤, 細江宣裕(2012)「契約理論分析における数値計算アプローチ:モラル・ハザードの場合」, GRIPS Discussion Paper 12-03.
<http://r-center.grips.ac.jp/DiscussionPapersDetails/266/#>

細江宣裕, 我澤賢之, 橋本日出男(2004)『テキストブック応用一般均衡モデリング―プログラムからシミュレーションまで―』, 東京大学出版会.

毛利貴之, 杉町勇和, 東藤大樹, 岩崎敦, 横尾真(2011)「自動メカニズムデザインのデータからのルール抽出」, 2011 年度人工知能学会全国大会.

A Numerical Approach to the Contract Theory: the Case of Moral Hazard Problem

Hideo Hashimoto*, Kojun Hamada†, Nobuhiro Hosoe‡

Abstract

We develop a few numerical models to examine the moral hazard problems exemplified by Itoh (2003, Ch. 4), following our earlier study (Hashimoto et al. (2011)) on the adverse selection problems. To this end, we first model a risk-averse or risk-neutral entrepreneur who selects his action among two options (e.g., low effort and high effort). The results of the models, whose computer programs are explained in detail for novice modelers, numerically illustrate the essence of the contract theory analysis. Second, the similar models, applied to the case with three effort level options, are built with and without the assumptions often employed to simplify the theoretical analysis. Through these exercises the significance of such assumptions in the contract theory analysis would be understood clearly.

Keywords:

moral hazard, numerical approach, risk averse, risk neutral, convexity of distribution function condition, monotone likelihood ratio condition

* Professor Emeritus, Osaka University

† Associate Professor, Faculty of Economics, Niigata University

‡ Associate Professor, National Graduate Institute for Policy Studies