≫ 論　説 ≪

1対多契約付きマッチングにおける弱マスキン単調性について

高　宮　浩　司[*]

概 要

弱マスキン単調性は Kojima and Manea (2010) によって導入され，それが (契約なしの)1 対多マッチングにおいて他の公理とともに保留受入れルールを特徴付けることが示されている．本稿においては弱マスキン単調性をより一般的な契約付きの 1 対多マッチング (Hatfield and Milgrom, 2005) へ適用し，以下を示す：人員側最適安定ルールは弱マスキン単調性をみたし，しかも安定的かつ弱マスキン単調性をみたす唯一のマッチングルールである．

1　予備知識

1． Hatfield and Milgrom (2005) による 1 対多契約付きマッチングの標準的モデルを以下に導入する．W, F, Θ をそれぞれ非空な有限集合とする．W を**人員**の集合，F を**企業**の集合とする．さらに X を $W \times F \times \Theta$ の非空な部分集合とし，これを**契約**の集合とする．X の元 x に対して，x の W 成分と F 成分とをそれぞれ x_W，x_F と表記する．これはすなわち x とは人員 x_W と企業 x_F との間の契約であることを意味する．また x の Θ 成分は契約の内容を表わすものと解釈される．X' を X の部分集合とするとき，X' を (契約の) **配分**と呼ぶ．配分 X' および W と F とのそれぞれの元 w と f とに対して $X'(w)$ を $\{x \mid x \in X',\ x_W = w\}$，$X'(f)$ を $\{x \mid x \in X',\ x_F = f\}$ と定義する．また X'_W を集合 $\{w \mid \exists x \in X' : x_W = w\}$，$X'_F$ を集合 $\{f \mid \exists x \in X' : x_F = f\}$ とそれぞれ定義する．

各人員 w に対してその選好 $\succ_w$ が与えられているものとする．$\succ_w$ は集合 $\{\{x\} \mid x \in X(w)\} \cup \{\emptyset\}$ 上の線形順序[1]とする．ここで空集合 $\emptyset$ はいかなる企業とも契約を締結しない状態を意味している．各企業 f に対してもまたその選好 $\succ_f$ が与えられているものとする．$\succ_f$ は冪集合 $2^{X(f)}$ 上の線形順序とする．$\succ_f$ と配分 X' に対して，$Ch(X', \succ_f)$ は $2^{X'(f)}$ における $\succ_f$ による (唯一の) 最大元を表わすものとする．Ch を**選択関数**と呼ぶ．なお，誤解の余地のない限り $\succ_f$ を省略したうえで f を添え $Ch_f(X')$ のように書く．企業の選好 $\succ_f$ が**代替的**であるとは以下がみたされることをいう：$S \subset T \subset X \Rightarrow Ch_f(T) \cap S \subset Ch_f(S)$．以上．$\succ_f$ が**総需要の法則**をみたすとは以下が成り立つことをいう：$S \subset T \subset X \Rightarrow |Ch_f(S)| \le |Ch_f(T)|$．

[*]新潟大学経済学部，950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地，takamiya@econ.niigata-u.ac.jp.

[1] $A \succ_w B$ をもって A が B よりも厳密に好まれることを表す．$A \succeq_w B$ は $(A \succ_w B) \vee (A = B)$ を意味する．

契約の配分 X' が**実行可能**であるとは，任意の $w \in W$ に対して $|X'(w)| \leq 1$ なることをいう．配分 X' が**個人合理的**であるとは以下の 3 条件がみたされることをいう．(1) X' が実行可能である．(2) $\forall w \in W,\ X'(w) \succeq_w \emptyset$. (3) $\forall f \in F,\ Ch_f(X') = X'(f)$. 以上．$X'$ が実行可能な配分であるとき，$F \times 2^X$ の元 (f, B) が X' を**阻止**するとは以下の 2 条件がみたされることをいう．(1) $B \neq Ch_f(X')$ かつ $B = Ch_f(B \cup X')$. (2) $w \in B_W$ なる各 w に対して，$|B(w)| = 1$ かつ $B(w) \succeq_w X'(w)$. 以上[2]．配分 X' が**安定的**であるとは以下の 2 条件がみたされることをいう．(1) X' が個人合理的である．(2) いかなる $(f, B) \in F \times 2^X$ も X' を阻止しない．以上．

Hatfield and Milgrom (2005) により以下の事実が知られている．任意の選好組 $(\succ_W, \succ_F)$ を考える．(1) [最適性定理] このときもしすべての $f \in F$ について選好 $\succ_f$ が代替的であれば，安定配分が存在するのみならず，ある 1 つの安定配分 $\bar{X}$ が存在し，いかなる安定配分 X' に対しても $\forall w \in W,\ \bar{X}(w) \succeq_w X'(w)$ が成り立つ．このような $\bar{X}$ を W **最適安定配分**と呼ぶ．(同様に F 最適安定配分も存在する．) W 最適安定配分は W 側提案の保留受入れアルゴリズム (W-proposing deferred acceptance algorithm, Gale and Shapley (1962) によるよく知られたアルゴリズムと本質的に同一である) によって計算できる．(2) [不変性定理] もし各 $f \in F$ について $\succ_f$ が代替的でありかつ総需要の法則をみたせば以下が成り立つ：任意の $w \in W$ に対して，もしある安定配分 X' で $X'(w) = \emptyset$ であれば他のいかなる安定配分 X'' においても $X''(w) = \emptyset$. さらに，任意の $f \in F$ について，任意の 2 つの安定配分 X', X'' に対して $|X'(f)| = |X''(f)|$.

2. 契約付きマッチングにおける W を参加者とした社会選択環境を以下に導入する．F の選好組 $\succ_F := (\succ_f)_{f \in F}$ を所与とし固定する．W 側の選好は固定せぬものとし変数と考える．$\mathscr{D}^W$ を可能な W の選好組 $\succ_W := (\succ_w)_{w \in W}$ の全体とする．実行可能な配分の集合を $\mathscr{A}$ とする．このとき単価関数 $\varphi : \mathscr{D}^W \to \mathscr{A}$ を**マッチングルール**と呼ぶ．いかなる $\succ_W$ に対しても，$\varphi(\succ_W)$ が $(\succ_W, \succ_F)$ における安定配分の 1 つとなるとき φ を**安定的**という．また同じく W 最適安定配分となるとき φ を W **最適安定ルール**と呼ぶ[3]．

人員 w の選好 $\succ_w$ と $\{\{x\} \mid x \in X(w)\} \cup \{\emptyset\}$ の元 A とに対して，人員 w の選好 $\succ'_w$ が $\succ_w$ の A についての**マスキン単調変換**であるとは，$\forall B \in \{\{x\} \mid x \in X(w)\} \cup \{\emptyset\},\ (B \succ'_w A \Rightarrow B \succ_w A)$ なることをいう．人員の選好組 $\succ_W$ と実行可能な配分 X' に対して，人員の選好組 $\succ'_W$ が $\succ_W$ の X' についての**マスキン単調変換**であるとは，各人員 w に対して $\succ'_w$ が $\succ_w$ の $X'(w)$ についてのマスキン単調変換であることをいう．マッチングルール φ が**弱マスキン単調性** (weak

[2]ただしこのとき少なくとも 1 人の $w \in B_W$ に対して $B(w) \succ_w X'(w)$ なることがしたがうことを注意する．なぜなら，仮に $\forall w \in B_W$，$B(w) = X'(w)$ であるとすると $B \subset X'$ となり，条件 (1) より $B \neq Ch_f(X')$ かつ $B = Ch_f(B \cup X') = Ch_f(X')$ となり，矛盾をみちびくからである．

[3]W 最適安定配分は W 提案保留受入れアルゴリズムにより計算されるため，W 最適安定ルールを (W 提案の) 保留受入れルールとも呼ぶ．

Maskin monotonicity, Kojima and Manea (2010) による) をみたすとは，任意の $\succ_W \in \mathscr{D}^W$ に対して，その $\varphi(\succ_W)$ についての任意のマスキン単調変換 $\succ'_W$ について，$\forall w \in W,\ \varphi(\succ'_W)(w) \succeq'_w \varphi(\succ_W)(w)$ が成り立つことをいう．

2　結果

補題 1 配分 X' を選好組 $(\succ_W, \succ_F)$ における安定配分の 1 つとする．また W の選好組 $\succ'_W$ が $\succ_W$ の X' についてのマスキン単調変換の 1 つであるとする．このとき X' は選好組 $(\succ'_W, \succ_F)$ においてもまた安定配分である．

証明　X' は $(\succ'_W, \succ_F)$ において安定的であることを確認する．第一に個人合理性を確認する．もとより $(\succ_W, \succ_F)$ に対しては X' は安定的であるから当然個人合理的でもあり，したがって $\forall w \in W,\ X'(w) \succeq_w \emptyset$ である．ここで $\succ'_w$ がマスキン単調変換であることより，$\forall w \in W,\ X'(w) \succeq'_w \emptyset$ がしたがう．さらに F にかんしては $\succ_F$ が固定されているため個人合理性の要件がみたされることは自明である．よって X' は $(\succ'_W, \succ_F)$ のもとで個人合理的である．第二に阻止が行われないことを確認する．仮に $(\succ'_W, \succ_F)$ のもとで $(f, B) \in F \times 2^X$ が X' を阻止するものとすれば，$B \neq Ch_f(X')$，$B = Ch_f(B \cup X')$，$\forall w \in B_W$，$(|B(w)| = 1 \wedge B(w) \succeq'_w X'(w))$ がことごとくみたされる．ここで $\succ'_W$ がマスキン単調変換であることから $\forall w \in B_W, B(w) \succeq_w X'(w)$ がしたがう．これはこの (f, B) が $(\succ_W, \succ_F)$ のもとでも X' を阻止することを意味するが，これは矛盾である．□

定理 1 F 側の選好組 $\succ_F$ を所与とし，各 $f \in F$ について $\succ_f$ が代替的とする．$\varphi : \mathscr{D}^W \to \mathscr{A}$ を W 最適安定ルールとする．このとき φ は弱マスキン単調性をみたす．

証明　任意の $\succ_W$ を考え，$\succ'_W$ を $\succ_W$ の $\varphi(\succ_W)$ についてのマスキン単調変換の 1 つとする．すると補題 1 により $\varphi(\succ_W)$ は $(\succ'_W, \succ_F)$ においてもまた安定配分である．一方で $\varphi(\succ'_W)$ は $(\succ'_W, \succ_F)$ における W 最適安定配分であるから，$\forall w \in W,\ \varphi(\succ'_W)(w) \succeq'_w \varphi(\succ_W)(w)$ がしたがう．よって φ は弱マスキン単調性をみたす．□

定理 2 F 側の選好組 $\succ_F$ を所与とし，各 $f \in F$ について $\succ_f$ が代替的でありかつ総需要の法則をみたすとする．いまマッチングルール $\varphi : \mathscr{D}^W \to \mathscr{A}$ が安定的かつ弱マスキン単調性をみたすとする．このとき φ は W 最適安定ルールにほかならない．

証明　φ が安定的で弱マスキン単調性をみたすとする．任意の $\succ_W$ を考え，$(\succ_W, \succ_F)$ のもとでの W 最適安定配分を $\bar{X}$ とする．以下で $\varphi(\succ_W) = \bar{X}$ をみちびく．

$\succ'_W$ を以下をみたす W の選好組の 1 つとする．すなわち，各 $w \in W$ について，$\bar{X}(w) \neq \emptyset$ なる w については，$\succ'_w$ は $\bar{X}(w)$ のすぐ下に $\emptyset$ を順位付け，$\emptyset$ 以外の元についての順序はすべて $\succ_w$ と一致する．$\bar{X}(w) = \emptyset$ なる w については，たんに $\succ'_w = \succ_w$ である．以上．このとき $(\succ'_W, \succ_F)$ のもとで $\bar{X}$ が唯一の安定配分であることを以下に示す．まず $\succ'_W$ は $\succ_W$ の $\bar{X}$ についてのマスキン単調変換であるから補題 1 より $\bar{X}$ が $(\succ'_W, \succ_F)$ のもとで安定的であることがしたがう．いま仮に $(\succ'_W, \succ_F)$ のもとで $\bar{X}$ 以外にも安定配分が存在するものとしその 1 つを $\tilde{X}$ とする．このとき第一の場合として $\forall w \in W,\ \tilde{X}(w) \succeq'_w \bar{X}(w)$ であるときが考え得る．$\succ_W$ は $\succ'_W$ の $\tilde{X}$ についてのマスキン単調変換にもなっているから，補題 1 より $(\succ_W, \succ_F)$ のもとでもまた $\tilde{X}$ は安定配分である．同時に $\forall w \in W,\ \tilde{X}(w) \succeq_w \bar{X}(w)$ であることも明らかである．しかしこれは $\bar{X}$ が $(\succ_W, \succ_F)$ のもとでの W 最適安定配分であることに矛盾する．したがって第一の場合は起こり得ない．第二の場合として，第一の場合の否定，すなわちある $\bar{w} \in W$ が存在して $\bar{X}(\bar{w}) \succ'_{\bar{w}} \tilde{X}(\bar{w})$ であることが考え得る．すると $\tilde{X}$ の個人合理性と $\succ'_W$ の構築とから $\tilde{X}(\bar{w}) = \emptyset$ であることがしたがう．しかし不変性定理によりこのとき $\bar{X}(\bar{w}) = \emptyset$ でなくてはならず，これは矛盾である．よって第二の場合もあり得ない．したがって $(\succ'_W, \succ_F)$ のもとでは $\bar{X}$ 以外に安定配分は存在しないことが判明する．φ は安定的であるので，このことから $\varphi(\succ'_W) = \bar{X}$ がしたがう．

さていま $\succ_W$ は $\succ'_W$ の $\bar{X}(= \varphi(\succ'_W))$ についてのマスキン単調変換であるから，φ の弱マスキン単調性より，$\forall w \in W,\ \varphi(\succ_W)(w) \succeq_w \varphi(\succ'_W)(w)$ がしたがう．ところがもともと $\bar{X}$ は $(\succ_W, \succ_F)$ における W 最適安定配分であり，しかも φ の安定的であることにより $\varphi(\succ_W)$ は $(\succ_W, \succ_F)$ における安定配分の 1 つであるから，$\forall w \in W,\ \varphi(\succ'_W)(w) \succeq_w \varphi(\succ_W)(w)$ でなければならない．これらより結果として $\forall w \in W,\ \varphi(\succ'_W)(w) = \varphi(\succ_W)(w)$，すなわち $f(\succ_W) = \bar{X}$ がしたがう．□

系 1 F 側の選好組 $\succ_F$ を所与とし，各 $f \in F$ について $\succ_f$ が代替的でありかつ総需要の法則をみたすとする．このときマッチングルール $\varphi : \mathscr{D}^W \to \mathscr{A}$ が安定的かつ弱マスキン単調性をみたすことと φ が W 最適安定ルールであることとは同等である．

3　注意

1. [先行結果について] Kojima and Manea (2010) によって契約なしの 1 対多マッチングにおいて F 側の選好が代替的かつ「受容的」(acceptant) の場合について定理 1, 2 と同様の結果が示されている．本稿の設定は彼らのものより一般的であることを注意する．定理 1 について，彼らの証明は多少迂遠であり，それ

が契約付きのマッチングモデルに拡張できるか否かは自明ではない．本稿では別の議論によるきわめて簡潔な証明を与えた．

その数学的な形式上弱マスキン単調性は耐戦略性と類縁の性質といえよう．耐戦略性に関連しては本稿のものと同じモデルにおいて F 側の選好が代替的かつ総需要の法則をみたすときについて以下が結果が得られている．まず Hatfield and Milgrom (2005) は W 最適安定ルールが耐戦略的であることを示している．さらに Hatfield and Kojima (2009) はこの結論を弱連立耐戦略性に拡張している．Sakai (2011) は W 最適安定ルールが安定的かつ耐戦略的な唯一のマッチングルールであることを示している．

Bando and Imamura (2016) は契約なしのマッチングのおいて弱マスキン単調性と弱連立耐戦略性とを以下のように関連付けている．すなわち，弱マスキン単調性と「非浪費性」(non-wastefulness) との連言が，弱連立耐戦略性と「ある条件」との連言に同等であることを彼らは示している．この結果が契約付きマッチングにどのように一般化できるか筆者は未確認である．

2. [結果の拡張について] F 側の選好を順序関係ではなく選択関数から定義することもできる．その場合，代替性のみならず整合性 [4] をも仮定せねばならない．また，代替性をより弱い「片務代替性」(unilateral substitute, Hatfield and Kojima (2010) による) におきかえても本稿の定理は成立する．

3. [弱マスキン単調性の研究について] Kojima and Manea (2010) 以降弱マスキン単調性について研究は少ない．筆者の気がついたところでは上述の Bando and Imamura のほかには Morrill (2013) がある程度である．これも契約なしのマッチングモデルについてであり，保留受入れルールのいま一つの特徴付けを行っている．

謝辞

科研費基盤研究 (C)26380234 による助成に謝意を表する．

参考文献

[1] Bando, K. and Imamura, K. (2016) A necessary and sufficient condition for weak Maskin monotonicity in an allocation problem with indivisible goods. *Social Choice and Welfare* 47, 589–606.

[2] Gale, D. and Shaley, L. S. (1962) College admissions and the stability of marriage. *American Mathematical Monthly* 69, 9–15.

[4] $(Ch(T) \subset S \subset T \subset X) \Rightarrow Ch(S) = Ch(T)$．なお現行の設定のとおり Ch_f を線形順序 $\succ_f$ から定義した場合整合性は自動的にみたされる．

[3] Hatfield, J. W. and Kojima, F. (2009) Group incentive compatibility for matching with contracts. *Games and Economic Behavior* 67, 745–49.

[4] Hatfield, J. W. and Kojima, F. (2010) Substitutes and stability for matching with contracts. *Journal of Economic Theory* 145, 1704–23.

[5] Hatfield, J. W. and Milgrom, P. R. (2005) Matching with contracts. *American Economic Review* 95, 913–35.

[6] Kojima, F. and Manea, M. (2010) Axioms for deferred acceptance. *Econometrica* 78, 633–53.

[7] Morrill, T. (2013) An alternative characterization of the deferred acceptance algorithm. *International Journal of Game Theory* 42, 19–28.

[8] Sakai, T. (2011) A note on strategy-proofness from the doctor side in matching with contracts. *Review of Economic Design* 15, 337–42.