# 2点と円があるときの最短距離作図問題
## ―作図不可能性の証明―

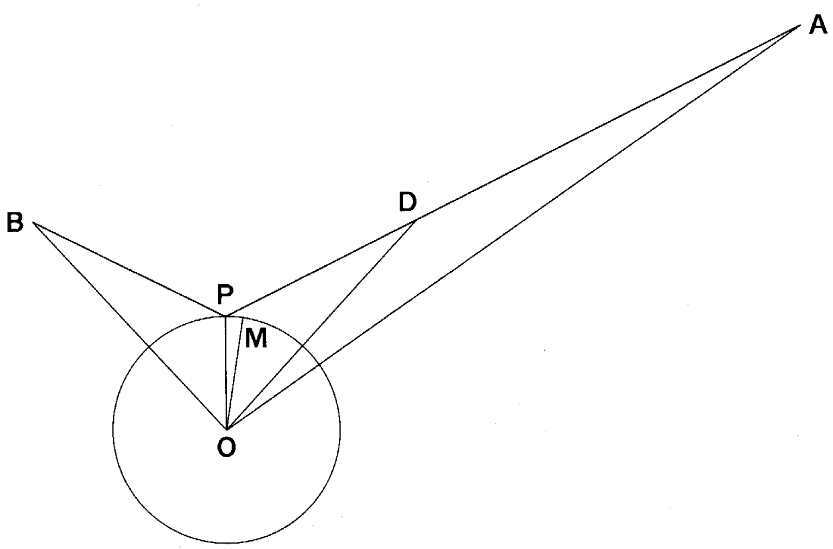
鈴　木　保　高

**問題1．** 同じ平面上に，2点A，Bと円Oがあります。円Oの周上に点Pをとるとき，AP＋PBの長さを最小にする点Pを作図せよ。

同一平面上で考える。点Aと点Bは異なり，直線ABと円Oは交わらず，且つ，AO＞BOのときについて考察する。

円Oの半径を1とする。AO＝$a$，BO＝$b$（$1<b<a$），$\frac{1}{2}\angle \mathrm{AOB}=\theta$（$0^\circ<\theta<90^\circ$），∠AOBの2等分線と円Oとの交点をM，円Oの周上に点Pを，∠APO＝∠BPO，$0^\circ<\angle \mathrm{POM}=\alpha<\angle \mathrm{BOM}=\theta<90^\circ$ととる。直線OPに関して，点Bの対称点をDとする。

**注．** 上記の設定のとき，「AP＋PBの長さが最小である。」ことと，「∠APO＝∠BPOである。」ことは同値である。∠APO＝∠BPO，AO＞BOであるから，点Dは線分AP上にある。




$\angle \mathrm{AOB}=2\theta$
$\angle \mathrm{POM}=\alpha$

三角形AOPにおいて，面積を考える。

$$\angle \mathrm{AOP}=\angle \mathrm{AOM}+\angle \mathrm{MOP}=\theta+\alpha,$$
$$\angle \mathrm{DOP}=\angle \mathrm{BOP}=\angle \mathrm{BOM}-\angle \mathrm{MOP}=\theta-\alpha,$$
$$\angle \mathrm{AOD}=\angle \mathrm{AOB}-\angle \mathrm{BOD}=2\theta-2\angle \mathrm{BOP}=2\theta-2(\theta-\alpha)=2\alpha$$

2006．6.16　受理

が成り立つ。面積について，

$$\triangle AOP = \triangle AOD + \triangle DOP,$$
$$\frac{1}{2}\cdot AO\cdot OP\cdot \sin\angle AOP = \frac{1}{2}\cdot AO\cdot OD\cdot \sin\angle AOD + \frac{1}{2}\cdot DO\cdot OP\cdot \sin\angle DOP,$$
$$a\sin(\theta+\alpha) = ab\sin(2\alpha) + b\sin(\theta-\alpha) \quad \cdots\cdots (1)$$
$$ab\sin(2\alpha) = a\sin(\alpha+\theta) + b\sin(\alpha-\theta),$$
$$ab\sin(2\alpha) = a(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta) + b(\sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta),$$
$$2ab\sin\alpha\cos\alpha = (a+b)\cos\theta\sin\alpha + (a-b)\sin\theta\cos\alpha$$

が成り立つ。式(1)を満たす $\alpha$ は $-180^\circ < \alpha_1 < 0^\circ < \alpha_2 = \alpha < \alpha_3 < \alpha_4 < 180^\circ$ の4個存在します。そのうち，$\alpha_2$，$\alpha_4$ は $\angle APO = \angle BPO$ を満たしていて，$\alpha_1$，$\alpha_3$ は $\angle APO + \angle BPO = 180^\circ$ を満たしている。

$$t = \tan\frac{\alpha}{2} \text{ とおくと，} \sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$$

であるから，

$$2ab\cdot\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} = (a+b)\cos\theta\cdot\frac{2t}{1+t^2} + (a-b)\sin\theta\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2},$$
$$(2ab)(2t)(1-t^2) = (1+t^2)(2t)(a+b)\cos\theta + (1+t^2)(1-t^2)(a-b)\sin\theta,$$
$$4abt - 4abt^3 = (2(a+b)\cos\theta)t + (2(a+b)\cos\theta)t^3 + (a-b)\sin\theta - ((a-b)\sin\theta)t^4,$$
$$((a-b)\sin\theta)t^4 + (-4ab - 2(a+b)\cos\theta)t^3 + (4ab - 2(a+b)\cos\theta)t - (a-b)\sin\theta = 0 \quad \cdots\cdots (2)$$

が成り立つ。

最初の問題1は，$K = Q(a, b, \sin\theta, \cos\theta)$ とおくと，「体 $K$ が与えられたとき，（これは，円O，点A，点Bが与えられたとき，または，$a, b, \sin\theta$，$\cos\theta$ の値が与えられたときということと同じです。）上の $K$ 係数の $t$ についての4次方程式(2)の解の1つである $t = \tan\frac{\alpha}{2}$（$0^\circ < \alpha < \angle BOM = \theta < 90^\circ$）の値を作図せよ。」という問題となります。

**定理2．** 問題1は一般に作図不可能である。

**注．** 以下に，作図不可能な例と，その不可能性の説明を述べます。下の例のとき，$t$ についての4次方程式(2)の解はすべて作図不可能であることを証明します。

**例3．** $a = 6$，$b = 3$，$\sin\theta = \frac{3}{5}$，$\cos\theta = \frac{4}{5}$ $(30^\circ < \theta < 45^\circ)$ とする。

この場合の円Oと点Aと点Bは具体的に作図できます。そして，$K = Q(a, b, \sin\theta, \cos\theta) = Q$ です。単位の長さ1のみが与えられているとき，または，単位の長さ1のみを決めて，スタートしていることになっています。

$$(a-b)\sin\theta = (6-3)\cdot\frac{3}{5} = \frac{9}{5},$$

$$-4ab - 2(a+b)\cos\theta = -2\left(2\cdot6\cdot3 + (6+3)\cdot\frac{4}{5}\right)$$
$$= \frac{-2}{5}\cdot36\cdot(5+1) = \frac{-2^4\cdot3^3}{5} = \frac{-432}{5} = \frac{-9\cdot48}{5},$$

$$4ab - 2(a+b)\cos\theta = 2\left(2\cdot6\cdot3 - (6+3)\cdot\frac{4}{5}\right)$$
$$= \frac{2}{5}\cdot36\cdot(5-1) = \frac{2^5\cdot3^2}{5} = \frac{288}{5} = \frac{9\cdot32}{5}$$

であるから，式(2)より，次の方程式が得られる。

$$\frac{9}{5}t^4-\frac{432}{5}t^3+\frac{288}{5}t-\frac{9}{5}=0$$

$$f(t)=t^4-48t^3+32t-1=0 \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

**定理4．** $f(t)=t^4-48t^3+32t-1\cdots(3)$は有理数係数の範囲で既約である。

**証明．** 整数係数多項式に対して，有理数係数の範囲での既約性と整数係数の範囲での既約性は一致する。従って，$f(t)$ が整数係数の範囲で既約であることを示せば良い。

$f(1)=1-48+32-1=-16\neq 0$ かつ $f(-1)=1+48-32-1=16\neq 0$ であるから，因数定理により，$f(t)$ には1次の因数は存在しない。

2次の因数が存在しないことは，未定係数法により，

$$\begin{aligned} f(t)&=t^4-48t^3+32t-1 \\ &=(t^2+ut+1)(t^2+vt-1), \quad (u, v\in Z)\end{aligned}$$

と分解しないことが示せる。証終.

**定理5．** 4次の有理数係数多項式$g(x)$が，有理数係数の範囲で既約とする。単位の長さ1のみが与えられたとき，方程式$g(x)=0$の解の1つが作図可能ならば，$g(x)=0$の4つの解すべてが作図可能である。

**証明．** スタートの体が$K$のとき，(今は$K=Q$です。) 4次の$K$係数多項式$g(x)=c_0x^4+c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4(c_0\neq 0)$ が$K$係数の範囲で既約とする。方程式$g(x)=0$の解の1つ$\alpha$が作図可能であるとする。

$\alpha\in C$が作図可能であるための必要十分条件は，

$$\alpha\in K_m, \quad [K_i:K_{i-1}]=2 \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

を満たす有限個の体の列

$$K=K_0\subseteq K_1\subseteq K_2\subseteq\cdots\subseteq K_{m-1}\subseteq K_m$$

が存在することである。このとき，$K_m$の元はすべて作図可能である。

$g(x)$ が$K$係数の範囲で既約な4次の多項式であるから，$\alpha\notin K$である。上の体の列のうち，$\alpha\in K_{i+1}$，$\alpha\notin K_i$であるとする。$[K_{i+1}:K_i]=2$であるから，$K_{i+1}=K_i(\sqrt{d})$ である$d\in K_i$が存在し，

$$\alpha=a+b\sqrt{d} \quad (a, b\in K_i,\ b\neq 0)$$

と表される。$\beta=a-b\sqrt{d}$，$s(x)=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-2ax+a^2-b^2d$とおくと，$s(x)$は2次の$K_i$係数多項式で，$\alpha\notin K_i$であることから，$K_i$係数の範囲で規約である。一方，$g(\alpha)=0$，$g(x)\in K_i[x]$であるから，$g(x)$は$s(x)$ を因数とする。従って，方程式$g(x)=0$の4つの解は，$s(x)=0$の2つの解$\alpha$，$\beta$と，残りの2つの解である。残りの2つの解を$\gamma$，$\delta$とする。

再度確認しておくと，$K_i$の元はすべて作図可能です。$\sqrt{d}$も$\alpha$も$\beta$も作図可能です。解と係数の関係により，

$$\gamma+\delta=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)-(\alpha+\beta)=-\frac{c_1}{c_0}-2a\in K_i$$

$$\gamma\cdot\delta=\frac{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta}{\alpha\cdot\beta}=\frac{c_4}{c_0}\cdot\frac{1}{a^2-b^2d}\in K_i$$

が成り立つから，$\gamma$，$\delta$は$K_i$係数の2次方程式の2つの解である。従って，$\gamma$も$\delta$も作図可能である。以上により，方程式$g(x)=0$の解はすべて作図可能であることが示された。証終.

**注．** 上の証明に於いて，証明には必要ありませんが，以下のことが示されています。$[K(\alpha):K]=4$，$K_i(\alpha)=K_i(\beta)=K_{i+1}$，$K_i(\gamma)=K_i(\delta)$，拡大次数 $[K_i(\gamma):K_i]$ の値は1または2である。$\sqrt{d}\notin K_i$ 等が成り立っています。

4次方程式$f(t)=0\cdots(3)$を解いていくことにします。途中で，作図不可能性が証明されます。

$$\begin{aligned} f(t) &= t^4-48t^3+32t-1 \\ &= (t^2-24t+k)^2-(ut+v)^2 \\ &= (t^2-24t+k)^2-(At^2+Bt+C),\quad D=B^2-4AC=0 \end{aligned}$$

の形に直す。

$$\text{右辺}= t^4-48t^3+(2k+24\cdot 24-A)\ t^2+(-48k-B)\ t+k^2-C$$

より，

$$\begin{aligned} 0 &= 2k+576-A, \\ 32 &= -48k-B, \\ -1 &= k^2-C. \end{aligned}$$

依って，

$$\begin{aligned} A &= 2k+576, \\ B &= -48k-32, \\ C &= k^2+1. \end{aligned}$$

そして，

$$D=B^2-4AC=0$$

より，

$$\begin{aligned} &(-48k-32)^2-4(2k+576)(k^2+1)=0 \\ &-8((k+288)(k^2+1)-(48k+32)(6k+4))=0 \\ &(k^3+288k^2+k+288)-(288k^2+192k+192k+128)=0 \\ &h(k)=k^3-383k+160=0 \quad \cdots\cdots (4) \end{aligned}$$

が導かれる。

**定理６．** $h(k)=k^3-383k+160 \cdots (4)$ は有理数係数の範囲で既約である。

**証明．** このときも，定理４と同様に，整数係数の範囲で既約であることを示せば良い。最高次の係数が１である３次の整数係数多項式に，１次の因数が存在しないことを示すには，因数定理が使えます。しかし，今は160の約数が沢山あるので，未定係数法を使うことにします。

$$\begin{aligned} h(k) &= k^3-383k+160 \\ &= (k^2+ck+d)(k+e),\quad (c,d,e\in Z) \end{aligned}$$

と分解しないことを示す。まず，$k^2$の係数が０であることを使い，次に，$c$が偶数のとき，奇数のときを考えることにより証明できる。証終.

グラフ $y=h(k)=k^3-383k+160$ の概形を考え，以下のことを調べれば，方程式 $h(k)=0$ の解の大体の大きさと，$h(k)$ の既約性も示せます。

$$\begin{aligned} &h(-20)=-8000+7660+160=-180<0 \\ &h(-19)=-6859+7277+160=+578>0 \\ &h(0)=+160>0 \\ &h(1)=1-383+160=-258<0 \\ &h(19)=6859-7277+160=-258<0 \\ &h(20)=8000-7660+160=+500>0 \end{aligned}$$

であるから，方程式 $h(k)=0$ の３つの解 $k_1$, $k_2$, $k_3$ はすべて実数で

$$-20<k_1<-19<0<k_2<1<19<k_3<20$$

を満たす。３つの解はすべて整数でないだけでなく，有理数でないことも説明できます。

**定理７．** 単位の長さ１のみが与えられたとき，方程式

$$h(k)=k^3-383k+160=0 \quad \cdots\cdots (4)$$

の解はすべて作図不可能である。

**証明.** 今はスタートの体が有理数体$Q$である。有理数係数の範囲で既約な$n$次方程式の解が作図可能ならば，$n$は$n=2^d$（$d$は非負な整数）の形である。このことは良く知られた結果です。逆は，一般に成り立ちません。この事実を使うことにより，3次の多項式$h(k)$は有理数係数の範囲で既約であるから，方程式$h(k)=0$の解はすべて作図不可能である。証終.

4次方程式$f(t)=0\cdots$(3)の解法に戻ります。$k$は方程式

$$h(k)=k^3-383k+160=0 \quad\cdots\cdots (4)$$

の解の1つとする。(どの解でも良い。)

$$\begin{aligned} f(t) &= t^4-48t^3+32t-1 \\ &= (t^2-24t+k)^2-(At^2+Bt+C) \\ &= (t^2-24t+k)^2-((2k+576)t^2-(48k+32)t+(k^2+1)) \\ &= (t^2-24t+k)^2-(2k+576)\left(t^2-\frac{48k+32}{2k+576}t+\frac{k^2+1}{2k+576}\right). \end{aligned}$$

更に，判別式$D=B^2-4AC=0$が成り立っているから，

$$\begin{aligned} f(t) &= (t^2-24t+k)^2-(2k+576)\left(t-\frac{24k+16}{2k+576}\right)^2 \\ &= (t^2-24t+k)^2-\left(\sqrt{2k+576}\,t-\frac{24k+16}{\sqrt{2k+576}}\right)^2 \\ &= \left((t^2-24t+k)+\left(\sqrt{2k+576}\,t-\frac{24k+16}{\sqrt{2k+576}}\right)\right) \\ &\quad \times\left((t^2-24t+k)-\left(\sqrt{2k+576}\,t-\frac{24k+16}{\sqrt{2k+576}}\right)\right) \\ &= \left(t^2+(\sqrt{2k+576}-24)t+\left(k-\frac{24k+16}{\sqrt{2k+576}}\right)\right) \\ &\quad \times\left(t^2-(\sqrt{2k+576}+24)t+\left(k+\frac{24k+16}{\sqrt{2k+576}}\right)\right) \end{aligned}$$

と2次式の積に分解する。このことから，次の定理が成り立つ。

**定理8.** 方程式$f(t)=t^4-48t^3+32t-1=0 \quad\cdots\cdots (3)$

の解は，次の4つである。

方程式 $h(k)=k^3-383k+160=0 \quad\cdots\cdots (4)$

の解の1つを$k$として，2次方程式

$$t^2+(\sqrt{2k+576}-24)t+\left(k-\frac{24k+16}{\sqrt{2k+576}}\right)=0 \quad\cdots\cdots (5)$$

の2つの解と，2次方程式

$$t^2-(\sqrt{2k+576}+24)t+\left(k+\frac{24k+16}{\sqrt{2k+576}}\right)=0 \quad\cdots\cdots (6)$$

の2つの解とを合わせた4個である。

**証明.** 定理の直前の式が成り立つことから明らかである。証終.

**定理9.** 単位の長さ1のみが与えられたとき，方程式

$$f(t)=t^4-48t^3+32t-1=0 \quad\cdots\cdots (3)$$

の解はすべて作図不可能である。つまり，例３の設定のとき，点Ｐの作図は不可能である。

**証明．** 方程式 $f(t)=0$ の解のうち，すくなくとも１つの解が作図可能であると仮定する。すると，定理５により，４つの解すべてが作図可能である。２次方程式

$$t^2+(\sqrt{2k+576}-24)t+\left(k-\frac{24k+16}{\sqrt{2k+576}}\right)=0 \quad \cdots\cdots (5)$$

の２つの解を $\alpha$，$\beta$ とする。解と係数の関係から，

$$\alpha+\beta=24-\sqrt{2k+576}$$

が成り立つ。$\alpha$，$\beta$ は方程式 $f(t)=0$ の解であって，作図可能である。

$$k=\frac{(\sqrt{2k+576})^2-576}{2}=\frac{(24-\alpha-\beta)^2-576}{2}$$

が成り立つことから，$k$ も作図可能となる。しかし，これは，定理７に矛盾する。従って，方程式 $f(t)=0$ の解はすべて作図不可能である。証終.

**追加10．** 以上で，例３の設定のとき，点Ｐの作図は不可能であることの証明は終わりました。証明には必要ありませんが，４次方程式

$$f(t)=t^4-48t^3+32t-1=0 \quad \cdots\cdots (3)$$

の解を，もっと具体的に表してみます。

まず，３次方程式

$$h(k)=k^3-383k+160=0 \quad \cdots\cdots (4)$$

を解きます。$k=u+v$ とおいて，$h(k)=0$ に代入する。

$$(u+v)^3-383(u+v)+160=0$$
$$u^3+3u^2v+3uv^2+v^3-383(u+v)+160=0$$
$$(u^3+v^3+160)+(u+v)(3uv-383)=0$$

と変形する。ここで，

$$u^3+v^3+160=0 \quad \text{かつ} \quad 3uv-383=0 \quad \cdots\cdots (7)$$

を満たす $u$，$v$ に対して，$k=u+v$ とすれば，$h(k)=0$ が成り立つから，(7)を満たす $u$，$v$ を求める。

$$uv=\frac{383}{3},\ (uv)^3=\frac{383^3}{3^3},\ (u^3+v^3)=-160$$

であるから，$u^3$，$v^3$ は２次方程式

$$t^2+160t+\frac{383^3}{27}=0 \quad \cdots\cdots (8)$$

の２つの解である。２次方程式(8)の２つの解を $A$，$B$ とする。$A$ の共役複素数を $\overline{A}$ と表しておくと，$B=\overline{A}$ です。$x^3=A$ の解の１つを $u$ として，$v=\overline{u}$ とすれば，$u$，$v$ は(7)式を満たす。

そして，３次方程式 $h(k)=k^3-383k+160=0$ …(4)の解は

$$u+\overline{u},\ u\omega+\overline{u}\omega^2,\ u\omega^2+\overline{u}\omega \quad \cdots\cdots (9)$$

の３つである。これらはすべて実数です。ここで，$\omega$ は１の原始３乗根の１つとする。

根号記号を使って，もっと具体的に表してみます。２次方程式(8)の解の１つを

$$A=\frac{-27\cdot 80+\sqrt{(27\cdot 80)^2-27\cdot 383^3}}{27}$$
$$=\frac{-3\cdot 9\cdot 80+\sqrt{9\cdot(9\cdot 80)^2-9\cdot 3\cdot 383^3}}{3\cdot 9}$$

$$=\frac{-9\cdot 80+\sqrt{(9\cdot 80)^2-3\cdot 383^3}}{9}$$
$$=-80+\frac{\sqrt{-168027261}}{9}$$

とする。次に，$u\in C$は$u^3=A$，$0^\circ<\arg(u)<90^\circ$を満たすとする。ここでは，$u$，$\overline{u}$を仮に

$$u=\sqrt[3]{-80+\frac{\sqrt{-168027261}}{9}}\,,\quad \overline{u}=\sqrt[3]{-80-\frac{\sqrt{-168027261}}{9}}$$

と表しておく。すると，3次方程式$h(k)=k^3-383k+160=0$ …(4)の解は

$$k_3=u+\overline{u}=\sqrt[3]{-80+\frac{\sqrt{-168027261}}{9}}+\sqrt[3]{-80-\frac{\sqrt{-168027261}}{9}}$$

と$k_1=u\omega+\overline{u}\omega^2$と$k_2=u\omega^2+\overline{u}\omega$の3個で，

$$-20<k_1<-19<0<k_2<1<19<k_3<20$$

が成り立つ。

そして，4次方程式$f(t)=t^4-48t^3+32t-1=0$ …(3)の解は，定理8により，2次方程式

$$t^2+(\sqrt{2k+576}-24)t+(k-\frac{24k+16}{\sqrt{2k+576}})=0 \qquad \cdots\cdots (5)$$

の2つの解と，2次方程式

$$t^2-(\sqrt{2k+576}+24)t+(k+\frac{24k+16}{\sqrt{2k+576}})=0 \qquad \cdots\cdots (6)$$

の2つの解とを合わせた4個である。2次方程式(5)の解$t_1$，$t_2$（$t_1<t_2$）と2次方程式(6)の解$t_3$，$t_4$（$t_3<t_4$）は

$$t_2,\ t_1=\frac{-k-288+12\sqrt{2k+576}\pm\sqrt{-k^2+288k+165888-6896\sqrt{2k+576}}}{\sqrt{2k+576}}$$

$$t_4,\ t_3=\frac{k+288+12\sqrt{2k+576}\pm\sqrt{-k^2+288k+165888+6896\sqrt{2k+576}}}{\sqrt{2k+576}}$$

と表せる。ここで$k$として，$k=k_3=u+\overline{u}$を使うと，最初に求めようとした$t=\tan\frac{\alpha}{2}$は$t_2$に等しく，

$$t_1<0<t_2=\tan\frac{\alpha}{2}<t_3<t_4$$

が成り立ちます。

$$k=u+\overline{u}=\sqrt[3]{-80+\frac{\sqrt{-168027261}}{9}}+\sqrt[3]{-80-\frac{\sqrt{-168027261}}{9}}\,,\quad (0^\circ<\arg(u)<90^\circ)$$

とするとき，

$$\mathrm{t}=\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{-k-288+12\sqrt{2k+576}+\sqrt{-k^2+288k+165888-6896\sqrt{2k+576}}}{\sqrt{2k+576}}$$

である。 以上.

前半の証明の中で，以下の定理が使われています。

### 1．三角関数

**定理11．** (加法定理)

**定理12．** (倍角半角の公式)

**定理13．** (但し，$-180^\circ < \alpha < 180^\circ$)

$t = \tan\dfrac{\alpha}{2}$ とおくと，$\sin\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\tan\alpha = \dfrac{2t}{1-t^2}$ である。

**定理14．** (面積の公式)

$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積$= \dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}$ が成り立つ。

### 2．方程式

**定理15．** (方程式の解と係数の関係)

**定理16．** (2次方程式の解の公式)

**定理17．** (因数定理) 多項式 $f(x)$ に対して，次の条件は同値である。
(A) $f(\alpha) = 0$ が成り立つ。
(B) $f(x)$ は1次式 $x - \alpha$ を因数にもつ。

**定理18．** 実数係数方程式 $f(x) = 0$ に対して，$f(\alpha) = 0$，$\alpha = a + bi$，$a, b \in R$ ならば，$f(\overline{\alpha}) = 0$，$\overline{\alpha} = a - bi$ が成り立つ。

**定理19．** $K$ は体，$g(x), s(x) \in K[x]$，$s(x)$ は $K$ 係数の範囲で既約，共通の $\alpha$ に対して，$g(\alpha) = 0$，$s(\alpha) = 0$ が成り立っているならば，$g(x)$ は $s(x)$ を因数にもつ。

**定理20．** (3次方程式の解法)

**定理21．** (4次方程式の解法)

### 3．整数係数方程式

**定理22．** 整数係数方程式

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

に，整数の解が存在すれば，それは，$a_n$ の約数である。

**注．** 約数，倍数は負の約数，負の倍数も考える。以下同様とする。

**定理23．** 最高次の係数が $a_0$（$a_0 \neq 0$）の整数係数方程式

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

に，有理数の解 $q$ が存在すれば，$a_0$ のある約数 $b$ と，$a_n$ のある約数 $c$ が存在して，$q = \frac{c}{b}$ と表される。

**定理24．** 最高次の係数が１の整数係数方程式

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

に，有理数の解が存在すれば，それは整数であって，$a_n$ の約数である。

**定理25．** 整数係数多項式に対しては，整数係数の範囲での既約性と，有理数係数の範囲での既約性は一致する。

## ４．可換体，拡大次数について

**定義．** 体の定義（略）

**定義．** 可換体の定義（略）

**定義．** 拡大体，部分体，中間体の定義（略）

**定義．** 最小多項式の定義（略）

**定理26．** $Q \subseteq K \subseteq C$ である集合 $K$ に対して，次の条件は同値である。
(A) $K$ は体である。
(B) $K$ は四則で閉じている。

**注．** これ以後は，体は $Q \subseteq K \subseteq C$ である体のみを考える。つまり，これ以後考える体 $K$ は，集合としては，$Q \subseteq K \subseteq C$ を満たしていて，四則で閉じている集合 $K$ を考えることにします。

**定義．**（拡大次数）$L$ は体 $K$ の拡大体とする。体 $L$ は体 $K$ 上のベクトル空間である。ベクトル空間 $L$ の体 $K$ 上の次元 $\dim_K L$ を体 $L$ の体 $K$ 上の拡大次数といい，$[L:K]$ と表す。
$\dim_K L$ が有限のとき，体 $L$ は体 $K$ の有限次拡大であるという。有限次拡大でないとき，無限次拡大という。$\dim_K L = n$（$n \in N$）のとき，体 $L$ は体 $K$ の $n$ 次拡大であるという。

**定理27．** $K \subseteq M \subseteq L$ である体 $K, M, L$ に対して，次の等式が成り立つ。

$$[L:K] = [L:M] \cdot [M:K]$$

**定義．** 体 $K \subseteq C$ と集合 $S \subseteq C$ に対して，$K$ と $S$ を含む体のうちで，最小の体を，体 $K$ に $S$ を添加した体であるといい，$K(S)$ と表す。
$K(S)$ は，$K$ の元と $S$ の元の四則で表せる数全体からなる集合である。
$S = \{a\}$ のときは，$K(\{a\})$ を $K(a)$ と表す。

**定理28．** 可換体 $L$ は体 $K$ の拡大体とする。$\alpha \in L$ は体 $K$ 上代数的，$f(x) \in K[x]$ を $\alpha \in L$ の体 $K$ 上の最小多項式，$\deg(f(x)) = n$ とする。このとき，

$$[K(\alpha):K] = n$$

が成り立つ。

## ５．２次体

**注．** $L$が体$K$の拡大体のとき，$[L:K]=1 \Leftrightarrow L=K$

**定義．**（平方根）$\alpha \in C$に対して，$x^2=\alpha$を満たす$x \in C$を，$\alpha$の平方根という。

**例．** $Q(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$ は四則で閉じている。$[Q(\sqrt{2}):Q]=2$である。

**定理29．** 体$K$の拡大体$L$の拡大次数が２，つまり，$[L:K]=2$のとき，次が成り立つ。

(1)　$\alpha \in L$は$K$係数２次方程式の解である。

(2)　$\alpha \in L$，$\alpha \notin K$ならば$L=K(\alpha)$ である。

(3)　$\alpha^2=c \in K$（つまり，$\alpha$は$c$の平方根），$L=K(\alpha)$ を満たす$\alpha \in L$が存在する。

(4)　$L=K(\alpha)$，$\alpha \in L$ならば，$L$の元$x$は$x=a+b\alpha$（$a, b \in K$）と表せる。

## ６．作図可能な数について

平面と複素数平面を同一視すれば，平面上の点が作図できるか，作図できないかは，目的の複素数が作図できるか，作図できないかを考えれば良いことになります。

**定理30．** 作図できた数を使って，四則で表せる数は作図できる。作図できた数の平方根は作図できる。
逆に，作図できるのは，作図できた数を使って，四則や平方根をとる操作を，有限回施して表せる数に限る。

次の定理で成り立つ３つの事実は，ほぼ同じことを言っています。

**定理31．** 次の作図は可能です。

(1)　$\alpha \in C$が与えられたとき，$\alpha$の平方根は作図可能である。

(2)　体$K$が与えられたとき，$K$係数の２次方程式の解は作図可能である。

(3)　体$K$が与えられたとき，$L$が体$K$の拡大体で，拡大次数 $[L:K]=2$ ならば，$L$の元はすべて作図可能である。

**定理32．** 体$K$が与えられたとき，$\alpha \in C$が作図可能であるための，必要かつ十分な条件は，以下の条件を満たす有限個の体の列が存在することである。

$$\alpha \in K_m,\quad [K_i:K_{i-1}]=2 \quad (i=1,2,3,\cdots,m-1,m),$$
$$K=K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \subseteq K_{m-1} \subseteq K_m.$$

「体$K$が与えられたとき」と表現しているのは，$K$は最初に与えられた数はすべて含み，今までに作図できた数や作図可能な数を含んでいる体であるということです。そのような体の１つ$K$を基礎の体として考えるということです。例えば，単位の長さ１のみが与えられているときは，有理数はすべて作図できるので，基礎の体としては，有理数体$Q$を考えます。
定理32と体の理論から，次の定理が導かれます。また，定理33を適用すると，定理34が導かれます。定理34には，代表的な作図不可能な例が挙げてあります。

**定理33．** 体$K$が与えられたとき，$K$係数の範囲で既約な，$n$次方程式の解の１つが作図可能ならば，$n$は

$n=2^d$（$d$ は非負な整数）の形の整数である。

**注.** 既約であることは必要です。また，逆は一般に成り立ちません。

**定理34.** 次の作図は不可能です。

(1) $\alpha$ が与えられたとき，$\alpha$ の3乗根は一般に作図できません。

(2) 角が与えられたとき，その角の3等分線は一般に作図できません。

(3) 単位の長さ1のみが与えられたとき，整数係数の範囲で既約な，3次の整数係数方程式の解は作図できません。