図的表現の認識に関する記号論的考察
—小数の乗法における数直線を事例として—

和　田　信　哉

1．はじめに

数学教育における図的表現は，絵，図，グラフなどによる表現のことであり，具体と抽象の中間に位置する表現であるため（中原，1995，p.201），それらの橋渡しをするといった点で重要な表現である。また，記号論的観点からも，意味論的な視点で分析するならば，意志や理解の区分にあてはまる多様な役割を担う記号であり，重要な表現であることが指摘できる（和田，2006）。

その図的表現の認識に関し，布川（2000）や廣井（2003）は，子どもの問題場面の理解の変容に伴って図的表現も変容することを指摘している。すなわち，図的表現の認識の変容は，図的表現そのものの構造の変容として現れるということである。また，川又（2007）は，子どもの図的表現の認識の変容を，図的表現の構造と抽象度の変容としてとらえている。しかしながら，これらの研究は，図的表現の多様な役割に関する認識の変容を明らかにはしていない。これらに対し，日野（2002）は，比例的推論に関わる数学的表記の内化の過程を記述している。ここで主として取り上げている数学的表記は数直線であり，その認識の変容を記述している。本稿は，記号論的観点から，日野の研究をより詳細にする立場で図的表現を検討するものである。

記号論とは，記号活動を意味づけの過程とみなすメタ分野的なアプローチであり，数学と記号論はともに記号をとおした意味づけを行うという点で密接な関係にある（Anderson et al., 2003）。すなわち，算数・数学の授業において，子どもは記号を媒介として数学的知識を構成していくのであるから，記号活動を意味づけの過程とみなす記号論は有益な方法論となりうる。そのため，近年の数学教育研究では，記号論を用いた授業の分析などが多くなされている（例えば，Gravemeijer & Stephan，2002；Otte, 2006；Presmeg, 1997, 2002；Sáenz-Ludlow, 2003a, 2003b, 2004, 2006；岩崎・山口，2000など）。本研究では，C.S.Peirce（1839-1914）の記号論に依拠する。なぜならば，彼の記号論によって外的な記号と内的な解釈との不可分な関係を記述でき，また数学教育において重要な記号の対象化などを同定でき，それらを分析することが可能であるからである。

本研究においては，これまでに，Peirceの記号論の数学教育学的解釈を行ってきた（和田，2004，2006）。とりわけ，和田（2006）において，Peirceの記号の分類を表意体と対象の二つの観点からとらえ，それを数学教育における表現体系（中原，1995）と比較考察し，図的表現の重要性とそれが多様な役割を担うことを指摘した。

しかしながら，多様な役割を担う図的表現の認識の変容を，記号論的観点から明確にしているとは言い難い。また，和田（2006）の記号の分類は，Peirceの記号論の特徴的なものである「解釈項」を取り敢えず考慮せずに，「表意体」と「対象」の二つの観点から，いわば意味論的にとらえなおしたものであった。しかしながら，Peirceの記号論において解釈項は無視できるものではなく，それを考慮した枠組みによって図的表現の多様な役割に関する認識の変容が記述できるであろう。

そこで本稿では，数学教育において重要な記号である図的表現の認識の変容について，解釈項を含めたPeirceの記号論に基づいて分析・考察することをとおして，その活用方法への示唆に言及することを目的とする。具体的には，はじめにPeirceの記号論について概観し，次に解釈項について検討する。そして，小学校第５学年の小数の乗法の事例に基づい

2007．7．2　受理

て，そこで用いられた図的表現の認識の変容を分析・考察していく。

2．分析の枠組み

(1)　Peirceの記号論

記号論における「記号」とは，かかれたものという狭い意味ではなく，思考や活動をも含む広いものであり，「われわれの注意が別のものに向けられると，それは直ちに記号となりうる」(Otte，2006，p.19）という意味のものである。そして，このように記号をとらえる記号論の源流の一つとして，Peirceの記号論が挙げられる。

数学教育における先行研究（Otte，2006；Presmeg，1997，2002；Sáenz-Ludlow，2003a，2003b，2004，2006；岩崎・山口，2000）から，Peirceの記号論が数学的認識論に非常に合致し，また授業における子どもの認知過程や社会的相互作用などの分析に有用であることがわかっている。後者に関連し，Peirceの記号論に限定したものではないが，中村（2005）は，近年の記号論的研究から記号と意味との不可分な関係が導かれることを指摘しつつ，解釈項には相互作用による数学的価値観の構成が含まれ，それによって数学的対象が構成されることを示唆している。

それでは，このように数学教育において有用であるPeirceの記号論について概観しよう。Peirceは，プラグマティズムの創始者の一人として知られており，数学に基礎づけられた現象学，そして現象学に基礎づけられた規範学としての記号論的論理学を提唱している（CP1，176-283）[※]。Peirceのいう現象学とは，現象のカテゴリーを考察するものである。Peirceによれば，現象のカテゴリーは三つに分類される。それは，第一次性（Firstness），第二次性（Secondness），第三次性（Thirdness）である（CP2，84-86）。

第一次性とは，そのものの在り方のことで，一項関係的な性格を有するものである。第二次性は，あるものと他のものとの関係のことで，二項関係的な性格を有する。第三次性は，二項関係を媒介するもので，三項関係的な性格を有するものである（CP6，32）。

そして，Peirceの記号論は，その現象学に基づいて記号を表意体（記号そのものの性質；第一次性），対象（記号とその指示対象との関係；第二次性），解釈項（記号とその指示対象とを結びつける解釈；第三次生）の三つからとらえる立場である。

さらに，それぞれにもカテゴリーをあてはめ，表意体を性質記号（記号となりうる記号；第一次性），単一記号（実際に記号として働いている記号；第二次性），法則記号（法則として働いている記号；第三次生）に，対象を類似記号（記号と対象が類似性に基づいて結びつけられている記号；第一次性），指標記号（記号と対象が近接性に基づいて結びつけられている記号；第二次性），象徴記号（記号と対象が規約的に結びつけられている記号；第三次生）に，解釈項を名辞記号（解釈の形式が名辞の記号；第一次性），命題記号（解釈の形式が命題の記号；第二次性），論証（解釈の形式が論証の記号；第三次生）に分類する。この分類を表にしたものが表1である（和田，2004）。

表1　記号のタイプの分類

	第一次性	第二次性	第三次性
表意体	性質記号	単一記号	法則記号
対　象	類似記号	指標記号	象徴記号
解釈項	名辞記号	命題記号	論　証

そして，これら九つの分類を，第二次性は第一次性を含み第三次性は第二次性と第一次性を含むけれどもその逆はあり得ない，という法則にしたがって組み合わせて分類したものが図1の十のクラスである（CP2，254-263；笠松・江川，2002，p.41）。

Ⅰ．名辞的・類似的・性質記号――感覚
Ⅱ．名辞的・類似的・単一記号
Ⅲ．名辞的・指標的・単一記号　意志
Ⅳ．命題的・指標的・単一記号
Ⅴ．名辞的・類似的・法則記号
Ⅵ．名辞的・指標的・法則記号　理解
Ⅶ．命題的・指標的・法則記号
Ⅷ．名辞的・象徴的・法則記号　判断　思考
Ⅸ．命題的・象徴的・法則記号
Ⅹ．論証・象徴的・法則記号――論理的推論

図1　記号のクラスの分類

この分類は，ある記号は表意体，対象，解釈項という三つの観点から同時にとらえることが可能で，その必要があるということを示している。また，図1の右側は，知識の区分に基づいたものであり，こ

こでの知識とは，習慣を確立する自己制御の生じるレベルでの過程のことである（笠松・江川，2002，pp.38-39）。

図１の分類は，記号をとらえる上で有用であると考えられるけれども，分類が多くて煩雑であること，そして解釈項がその内容ではなく形式だけで分類されていることから，和田（2006）において，取り敢えず解釈項を考慮せずに記号のクラスの分類を試みた。それが図２の数学教育における記号のクラスである。

① 類似的・性質記号 ―――― 感覚
② 類似的・単一記号 } 意志
③ 指標的・単一記号 } 意志
④ 類似的・法則記号 } 理解 } 思考
⑤ 指標的・法則記号 } 理解 } 思考
⑥ 象徴的・法則記号 ―― 判断・論理 } 思考

図２　数学教育における記号のクラス

例えば，買い物の状況を設定したとしよう。すると，この状況自体は①になる。なぜならば，この状況はまだ記号にはなっていないけれども，これから記号になりうる前記号的なもので，その指示対象は買い物そのものであるから，それとの関係は類似的なものだからである。

そして，その買い物の状況において，38円の飴と27円のガムを買ったとする。それを実際の飴とガム，お金で表したものも記号となり，②になる。これは，実際に記号として働いており，その指示対象はそのものなので，関係は類似的なものである。

また，その買い物の値段をブロックに置き換え，それを操作して表すと③になる。なぜならば，それは実際に記号として働いており，その指示対象である加法（合併）は直接的に指示されてはいないため，それとの関係が近接的なものだからである。

そのブロックで表した記号を，「合わせる」ということを矢印などを用いて明示的に図で表すことができる。そのような図は，加法という法則として働いており，その指示対象との関係が類似的なものであるため④になる。

⑤は，そのような関係をことばで表すものがそれにあたり，法則として働いており，その指示対象との関係が近接的なものである。

最後の⑥は，38＋27＝65のような式表現のことであり，法則として働いており，その指示対象との関係が規約的なものである。

この図２の分類は，「記号と対象」までを検討しているものである。言い換えれば，意味論的な検討であるので，解釈項をも含めた記号の検討，すなわち語用論的な観点から図的表現の認識の変容について検討する必要があろう。その際は，知識の区分である図１の右側の「感覚」，「意志」，「理解」，「判断・論理」も考慮する必要があろう。

(2)　解釈項の解釈

Otte（2006）は，「記号の意味をその「解釈項」として同定したものもいる。しかし，このむしろ難解な専門用語が既に示しているように，これは役立たない。なぜならば，われわれは，様々なタイプの解釈項を区別することを強制されるからである」（p.22）と述べている。

このように，解釈項はPeirceの記号論を特徴づけるものであるけれども，それを解釈することは困難であることが指摘されている。そこで，ここでは解釈項の解釈について考察を進める。

Peirceの記号論における解釈項とは，「解釈者である擬似的な精神（quasi-mind）において，記号がその精神をある情態やある活動（exertion）やある記号へと規定することによって創り出されるものであり，この規定が解釈項である」（CP4，536）。また，Peirceは，解釈項は記号が解釈者へ与える効果のことであるとも述べている（CP4，536；5，475；5，476；5，484）。

したがって，解釈項とは，表意体や対象から生じるそれぞれの解釈や，それらのつながりをつくる解釈の過程であり，そしてそれは他の記号として表されるものでもある。その際には，その記号が実際にどのような効果を解釈者にもたらしたかが重要であり，それにしたがって解釈されうるものである。しかしながら，このように解釈項のとらえ方が多義的であるため，前述のOtteのような指摘がなされている。

このような困難に対し，Sáenz-Ludlow（2006）は，これらの解釈項のとらえ方の多義性を指摘し，それらを統一的にとらえるために解釈項を「他の記号への翻訳」とみなしている。すなわち，ある記号の解釈者への効果や，ある記号を他の記号で表すまでの過程と所産などを含めて翻訳とみなしている。また，Vile（2003）は，解釈項の所産としての他の記号を解釈項の「影」とみなし，解釈項自体は，教室という社会・文化の中に，あるいは個人の中に存

在する（Vile & Lerman, 1996）と指摘している。すなわち，前述の中村（2005）で示唆されているように，解釈項の所産としての記号が産出されるまでには，社会的相互作用や個人活動の中でその効果をふまえた解釈がなされ，それらすべてが付与されて翻訳されることに注意しておくべきであろう。

以上のことから，解釈項はある記号を他の記号へと翻訳することであるとみなすことができる。すなわち，異なる記号への変換である。したがって，多くの記号論を用いた研究は，記号の翻訳の連鎖を記述している（例えば，Gravemeijer & Stephan, 2002；Presmeg, 1997, 2002；Sáenz-Ludlow, 2003a, 2003b, 2004, 2006など）。

このことは，数学教育における記号のクラスの例でいうと，③のブロックの表現を翻訳すると④の図的表現になるということである。言い換えれば，ある記号は①から⑥のいずれかにあてはまり，その翻訳によって，すなわち他の記号に変換することによってのみ表意体や対象の質が変容するということである。

しかしながら，解釈項を翻訳としてみなすだけでは不十分である。なぜならば，同じ記号であっても解釈者によって異なる解釈があり，同じ解釈者であってもその解釈の変容があるからである。

これに関連し，小笠原（2001）は，Peirceの記号論における記号の対象の分類に関し，「三つの類に分けるための規準ではなく，一つの記号が対象を指示する時の働き次元の分類と解するべきだと考える。ようするに記号の種類を分けているのでなくて，記号の働きを分けていると解するべきである。したがって，ある…記号は，指示方式によってIcon（類似記号）にもIndex（指標記号）にもSymbol（象徴記号）にもなる」（p.103，括弧は引用者による）と指摘している。

つまり，Peirceの記号論を記号の表意体と対象だけを考慮して意味論的にとらえてしまうと，「この記号はこの類に属する」というような固定的な見方になるということである。これに対し，解釈項をも考慮して語用論的にとらえると，「この記号はこの解釈者の今の状態ではこのように働いている」というような流動的な見方になる。

例えば，GravemeijerとStephan（2002）は，創発的モデルに関し，記号論的連鎖を用いてそのモデル（数直線的な図的表現）の分析を行っている。それは，ある記号から他の記号への「翻訳」のことで，その説明として記号論を使用している。これに対し，解釈項までを含めたPeirceの記号論では，同じ記号の認識についても数学教育における記号のクラスに「変容」が生じることを説明できる。

したがって，本研究では，記号の解釈項を翻訳と変容という二つの観点からとらえ，特に本稿では変容の観点から，解釈者における記号の働きに基づいて数学教育における記号のクラスを適用する。

(3) 記号のクラスの特徴

数学教育における記号のクラスは，翻訳と変容の両者を視野に入れるものである。翻訳を対象としているものとして，GravemeijerとStephan（2002）のモデル化される状況から抽象的に進む活動の四つの水準が挙げられ，それと記号のクラスとを対応させることが可能である。すなわち，モデルになりうる活動を行う「課題状況」の水準と①，有意味なモデルを用いて活動する「参照的」水準と②③，子どもの注意が文脈的意味から数学的関係へと移行する「一般的」水準と④⑤，モデルの支援がなくても数学的に考えることのできる「形式的」水準と⑥が対応している。

さらに，変容を対象としている，日野（2002）の数学的表記の内化における三つの相にも対応させることが可能である。すなわち，自己中心的な解釈で使用する「初期の使用」と②，表記の意味と規則を認識してその適用の基準が構築されていく「基準の構築」と③，適切な場面で表記を選択でき思考の対象としての表記となる「目的的使用」と④⑤である。これらの対応をまとめると，表2のようになる。

表2　記号の認識の区分の対応

記号のクラス	Gravemeijer	日　野
①類似的・性質記号	課 題 状 況	
②類似的・単一記号	参　照　的	初期の使用
③指標的・単一記号		基準の構築
④類似的・法則記号	一　般　的	目的的使用
⑤指標的・法則記号		
⑥象徴的・法則記号	形　式　的	

表2から，共通する境界が③と④との間にあるということが指摘できる。GravemeijerとStephanも日野も，これらの接続が困難であることを指摘している。そのため，図的表現の認識の変容においても，③から④への変容が困難であると予想される。また，記号のクラスはGravemeijerとStephanや日野の区分を詳細にするものであることがわかる。そのため，

図的表現の活用に関してより詳細な示唆が得られると考えられる。

また，この記号のクラスの翻訳・変容は，図3のように図式化できる。

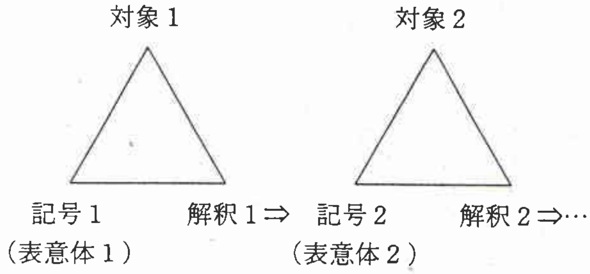

図3　意味の発展モデル（和田，2004を一部改）

解釈1から記号2や対象2が構成されていく過程が翻訳・変容であり，重要な過程である。なぜならば，その過程によって前の記号と次の記号の「つながり」が確立されるからである。

Sáenz-Ludlow（2003b）は，そのつながりの過程において「仮説的抽象」が重要であることを指摘している。仮説的抽象とは，Peirceの概念であり，アブダクション（abduction）とも呼ばれるものである（Mason，1995)。それは，「説明的仮説を形成する過程」（CP5，172）であり，「驚くべき事実Cが観察される。しかし，もしAが真であるならば，Cは当然のことであろう。したがって，Aは真であると考えるべき理由が存在する」（CP5，189）という形式のものである。

このように，アブダクションとは不可解な事実Cを説明できそうな仮説Aを導くものであり，図3の解釈1から記号2と対象2を構成していく過程で働く推論である。翻訳において，それは前の記号を対象とし，それを説明する仮説として新しい記号を導入するものである。すなわち，Peirceの記号論は，数学教育において重要な「記号の対象化」（岩崎・山口，2000，p.3）を同定でき，その要因などを分析することができる。また，数学理解において，記号の間につながりをつけることは重要であり（中原，1995，p.202)，その分析を行うこともできる。

しかしながら，翻訳という観点だけでは，同じ記号に対する認識の変容を同定できないし，もちろんその要因などを分析することができない。そこで，変容という観点から同じ図的表現に対する認識の変容過程を分析し，それらのつながりを分析すれば，その活用方法へのさらなる示唆に言及することができるであろう。また，それによって，Peirceの記号論が数学教育における分析の枠組みとしてより豊かなものとなるであろう。

3．事例の分析と考察

図的表現の多様な役割に関する認識の変容を検討するために，本稿では，小数の乗法における図的表現の事例（川又，2007）を取り上げる。この事例では，小数の乗法の単元における抽出児童の図的表現の変容が記述されているので，本稿における図的表現の認識の変容を分析・考察するのに適していると考える。また，分析の視点は，前節に述べた，解釈項を考慮した数学教育における記号のクラスである。この事例では，次のように小数の乗法の単元が構成されている。

第1時　（整数）×（整数）
第2時　（小数）×（整数）の意味と計算の仕方
第3時　（小数）×（1位数の整数）の筆算の仕方
第4時　末尾0の処理の仕方
　　　　（小数）×（2位数の整数）の筆算の仕方
第5時　（整数）×（小数）の意味
第6時　（整数）×（小数）の計算と筆算の仕方
第7時　（小数）×（小数）の計算の仕方
第8時　（小数）×（小数）の筆算の仕方
第9時　積と被乗数の大小関係
　　　　（純小数）×（純小数）の計算の仕方
第10時　小数の加法・減法の公刊・結合法則
第11時　小数の乗法の分配法則
第12時　（小数第二位の小数）×（小数第一位の小数）の筆算の仕方

本稿では，特に抽出児童の図的表現の認識の変容が顕著にみられた第1時，第5時，第7時を取り上げる。

(1)　第1時

第1時では，新しく二本の数直線で表現される図的表現を導入するための中間段階として，操作的に構成したテープから数直線を抽象化した。

はじめに，「1mの重さが75gの棒があります。この棒□mの重さは何gでしょう」という問題が提示され，6mの場合が尋ねられた。その際に，児童は同じ長さの短く切ったテープを渡され，その一つ分が1mで75gの棒に相当するものとして操作活動

を行った。抽出児童は，そのような活動をとおして，テープを６つつなげて表現した。そして次に，教師がそのテープの上下の線だけを残す形で二本の数直線で表現される図を導入した。抽出児童はそれをノートに写し，整数の乗法の適用問題においてその図的表現を用いることができた。

この第１時で，はじめのテープを用いた活動を行う状況は，数直線の前記号的な役割を担っていた。すなわち，教師の提示した状況は，その状況における累加的活動を対象とした記号であり，その類似記号であるとともに性質記号であったので，数学教育における記号のクラスの①類似的・性質記号である。

そしてその後，それは数直線へと翻訳された。その際に，テープを用いた活動を抽象化するという教師の意図で数直線へと翻訳されたので，この数直線の対象はテープの状況である。したがって，間接的にテープの状況における活動を対象としており，その状況の類似記号として働いていた。それは，抽出児童が適用問題においても数直線を用いることができたことからいえることであり，またこのことから数直線は実際の記号として働いていたこともわかる。すなわち，第１時における数直線は，抽出児童にとっては，数学教育における記号のクラスの②類似的・単一記号であった。これらを図式化したものが図４である。

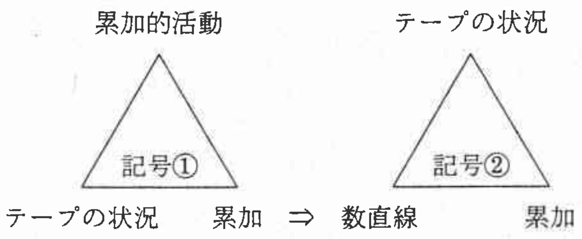

図４　第１時の図式化

図４から，第１時で生じた解釈項は「翻訳」であり，記号①の記号であるテープの状況が次の記号の対象になっていることがわかる。すなわち，第１時では記号の対象化が生じており，記号①の対象「累加的活動」を表す「テープの状況」が記号②の主題となり，それを説明する仮説として新しい記号「数直線」が導入された。

ここでは，記号①における活動によって，翻訳を容易にしている。すなわち，記号①から②への翻訳の場合，①における活動を適切に設定すれば，②への翻訳がスムーズに進むということである。

(2)　第５時

第５時では，(整数) × (小数) の意味について授業が行われた。第５時までの被乗数が小数の場合には，抽出児童は困難を示さず，図的表現にも困難を示さなかった。第５時での問題は，「１mの重さが20ｇの針金があります。この針金4.3mの重さは何ｇでしょう」というものであった。

抽出児童は「長さは4.3m重さは20ｇ。対応数直線であれするならできる」と述べて数直線をかいた。しかしながら，これまでの場合とは異なり，乗数が小数ということで困難を示し，二本の数直線に「20ｇ」とかいた状態からそれ以上進むことができなかった。この後，他の児童の発表を聞く中で数直線上に他の数値をかき加え，さらに他の児童の整数倍の考えを用いた小数倍の説明を聞き，数直線上に倍を表す矢印をかき加えた図をかいた。その後の適用問題では，そのような図的表現を用いることができた。

この第５時の初期では，抽出児童にとって数直線はまだ②類似的・単一記号であった。すなわち，あくまでもそれは問題状況と類似関係にあるものであって，その記号が暗黙的に指示している活動における「倍」を対象として認識していなかった。しかしその後，他の児童の意見を聞く中でその図的表現が活動において暗黙的な「倍」を指示していることを認識し，それを用いることができるようになった。しかしながら，ここでの「倍」は比例的（割合的）な見方に基づくものではなく，「いくつ分」のような加法的な見方のままであったと考えられる。

この段階における「倍」が暗黙的に指示されていたということは，それと数直線とが近接的な関係にあったということである。したがって，この段階で数直線は，抽出児童にとって数学教育における記号のクラスの③指標的・単一記号になった。これらを図式化したものは，図５になる。

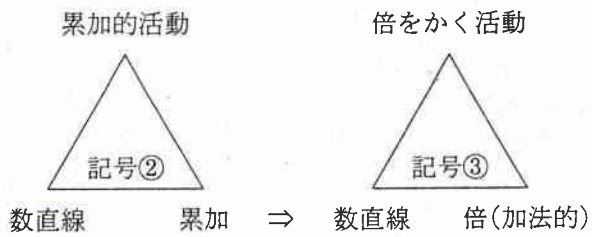

図５　第５時の図式化

図５から，第５時で生じた解釈項は「変容」であるため，記号②の記号である数直線は記号③におい

てもそのままであることがわかる。ここでは，翻訳における「記号の対象化」とは異なり，「対象の修正」が生じたのである。すなわち，同じ「数直線」で説明がつかないような状況が生じ，その際にそれが指示する対象を「倍」に修正すれば説明がつく，というアブダクションが働いて変容が生じた。

(3) 第7時

第7時では，（小数）×（小数）の計算について授業が行われた。ここでは，「１mの重さが2.1kgのの鉄の棒があります。この棒3.2mの重さは何kgでしょう」という問題が提示された。

はじめに，抽出児童は何度も「ん？」といい，「今日は対応数直線じゃない方が考えやすいかもしれない」といってかきかけていた数直線を消し，テープのような図をかきはじめた。その後の他の児童の数直線の説明を聞き，それをノートに写した。第8時になるが，抽出児童は，適用問題に対して数直線を用いることができていた。

前時までに，抽出児童にとって数直線は③指標的・単一記号になっていた。しかしながら，（小数）×（小数）という抽出児童にとって非常に困難な状況に出くわした際，その図的表現は役に立たなかった。その記号は「倍」を対象としているはずなのに，抽出児童にとってはそう認識されなかった。言い換えれば，このときの抽出児童にとって，数直線がより抽象的な数学的対象である「比例的構造」を指示していると認識される必要があったけれども，そのようには働いていなかった。

したがって，この段階で数直線は，抽出児童にとって数学教育における記号のクラスの③指標的・単一記号のままであった。そのため，より具体的な図に一度戻り，他の児童の発表を聞いた後，数直線を用いて適用問題を考えることができていた（第8時）ので，④類似的・法則記号になった。ただし，記号④の解釈は直観的な理解であったであろう。これらを図式化すると，図6になる。

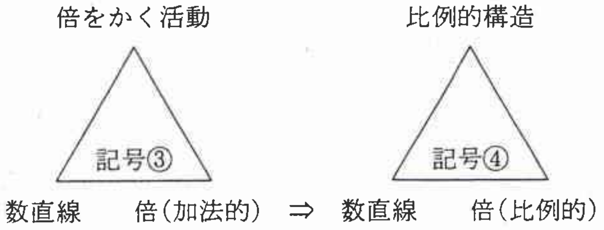

図6　第7時の図式化

第7時で生じた解釈項は「変容」である。ここでも，「対象の修正」が生じたけれども，第5時よりも困難なものであった。なぜならば，第5時が具体的な「活動」のレベルでの修正であったのに対し，第7時では具体的な「活動」から抽象的な「数学的対象（比例的構造）」への修正であったからである。したがって，第5時と同じようにアブダクションが働いて変容が生じたけれども，その困難性には違いがみられた。

(4) 総合的考察

はじめに，前節までに分析した記号のクラスの流れを簡単にまとめておこう。

第1時　①類似的・性質記号
　　　　②類似的・単一記号
第5時　②類似的・単一記号
　　　　③指標的・単一記号
第7時　③指標的・単一記号
　　　　④類似的・法則記号

この流れから，基本的に記号のクラスの順序が単元をとおした授業の流れと一致することがわかる。第1時のテープの状況は，数直線の前記号であったので，類似的・性質記号として働いていた。次の数直線へのつながりは翻訳なので，本稿では特に注目するわけではないけれども，類似的・性質記号は授業をデザインする際に非常に重要であることはいうまでもない。

その次の数直線は，類似的・単一記号として働いていた。抽出児童は，その数直線に困難を感じることなく用いることができた。これは，その前の類似的・性質記号であるテープの状況において，操作活動を行い構成したことによるところが大きい。すなわち，抽出児童は，はじめて使用する数直線を累加的活動を指示するものとしてみなしていた。

また，第5時では，抽出児童にとって数直線はまだ類似的・単一記号であったけれども，その図的表現が指示している累加的活動において暗黙的にみられる「倍」を認識できた後，それは指標的・単一記号になった。すなわち，活動において暗黙的なものを対象として認識できたとき，その記号は指標的・単一記号になる。

そして，第7時では，抽出児童は数直線を使用しなかった。なぜならば，それは前の時間までに「倍」を指示するものであったけれども，比例的な見方で

の「倍」ではなく加法的な見方の延長上にある「倍」という意識であったからである。すなわち，抽出児童が「倍」に関して数直線上の矢印で表現していたとき，それは「いくつ分」という累加的な見方から抜け出していなかった。ここでは，より抽象的な比例的な「倍」を指示するものとして認識を変容する必要があった。したがって，ここでは，数直線は活動を対象とするものではなく，数学的対象（比例的構造）を指示するものという認識に変容しなければならなかったのである。第8時以降は，そのような変容が生じ，数直線は数学的対象を指示するものとして働いた。

これらのことから，図的表現の認識の変容に関し，大きくは二つに区分することができる。すなわち，問題状況における活動を指示する記号として働いている場合（①～③）と，問題状況から離れ数学的対象を指示する記号として働いている場合（④～⑥）である。これは，GravemeijerとStephan（2002）の「model of」と「model for」の区別に対応しており，Peirceが対象に関して行っている直接的対象と力動的対象との区別にも対応している。

直接的対象と力動的対象とは，それぞれ，記号がそれを表すとおりの対象，何とか記号を規定して自分自身を表させようとしている対象，というものである（CP4，536）。換言すれば，「思考の道具としての記号」と「思考の対象としての記号」という区分であると解釈でき，そのような区分があることを十分にふまえる必要がある。とりわけ，③と④との接続が困難であることに注意する必要がある。

さて，以上の分析・考察の結果とGravemeijerとStephan（2002）の水準，日野（2002）の三つの相の特徴を加味すると，変容におけるそれぞれの記号のクラスは次のように特徴づけることができる。

①：この前記号的な記号を用いた活動が重要であり，その活動によって解釈者は感覚的に解釈を行っていく。
②：前の活動を参照し，感覚的ではない意図的な解釈を行うけれども，その意味などの解釈は自己中心的なものである。
③：前の活動を参照し，その活動において暗黙的である記号の意味などを認識してその適用の基準を構築する。
④：指示対象が活動から数学的対象へと移行し，その意味などを直観的に理解する。
⑤：数学的対象に関し，その暗黙的な意味などを反省的に理解する。
⑥：数学的対象に関し，形式的に判断・推論する。

また，上述のようなクラスを考えるならば，むしろそれぞれのクラスの間のつながりが重要になるであろう。第1時から，翻訳の際には「記号の対象化」が生じることが，第5時と7時から，変容の際には「対象の修正」が生じることがわかった。したがって，翻訳と変容では，その過程に現れるアブダクションの様相は異なるものになる。また，翻訳と変容のどちらにおいても，指標的・単一記号から類似的・法則記号への移行が困難であることから，各クラスの間の違いによってもアブダクションの様相は異なるものになると考えられる。

図的表現の認識の変容の場合を考えると，それが指示する対象の修正を図るような援助を与え，修正された対象も同じ図で表現できるということを実感させる必要があるということが示唆される。そのことによって，変容前と後のつながりが強化され，よりよい理解につながっていくであろう。

4．まとめと今後の課題

本稿の目的は，数学教育において重要な記号である図的表現の認識の変容について，解釈項を含めたPeirceの記号論に基づいて分析・考察することをとおして，その活用方法への示唆に言及することであった。その結果，記号のクラスの変容とクラス間のつながりという二つの点から，その示唆について言及することができた。

記号のクラスの変容という点からは，とりわけ指標的・単一記号から類似的・法則記号への変容が重要であり，その変容の特徴は活動から数学的対象へと対象が変容するということを指摘した。また，他の記号のクラスの特徴についても記述した。これらの特徴は，図的表現を活用するための示唆となるものである。

また，クラス間のつながりという点では，アブダクションが重要であることを指摘した。とりわけ，翻訳と変容，各クラス間ではその様相が異なることを指摘し，変容の場合は対象の修正を図る援助を与え，修正された対象も同じ図で表現できるということを実感させる必要があることが示唆された。

これらの示唆は，図的表現の認識の変容はもちろん，他の記号の翻訳・変容にも適用可能であると考える。しかしながら，その際には，教材の特性など

を考慮しなければならないことはいうまでもない。また，図的表現だけに焦点をあてないような授業を記号論的に考察する場合，翻訳と変容が混在した連鎖になるであろう。

今後は，翻訳と変容の両者の視点からの記号論的分析を，すなわち図的表現だけに焦点化せずに小数の乗法における児童の認識についての研究を進めていきたい。

付　記

本稿は，第26回全国数学教育学会の発表資料に，加筆・修正を加えたものである。建設的なご意見をくださいました皆様に，深く感謝申し上げます。また，本研究は，科学研究費補助金若手研究(B)（課題番号19730534）の助成を受けている。

註及び引用・参考文献

（※）慣例にしたがい，Peirceの論文集（Peirce，1931-35，1958）からの引用・参考の場合には，（CP巻数，パラグラフ数）と表記する。

Anderson，M.，Sáenz-Ludlow，A.，Zellweger，S. & Cifarelli，V. V.（2003）. The art，craft，and science of mathematical meaning-making. In Anderson，M. et al.（Eds.），*Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing*, pp.1-13. Brooklyn，NY：LEGAS.

Gravemeijer，K. & Stephan，M.（2002）. Emergent models as an instructional design heuristic. In Gravemeijer，K. et al.（Eds.），*Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education*, pp.145-169. Dordrecht / Boston / London：Kluwer Academic Publishers.

Mason，J.（1995）. *Abduction at the heart of mathematical being*. A Celebration of David Tall.

Otte，M.（2006）. Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics*, Vol.61，No.1-2，pp.11-38.

Peirce，C. S.（1931-35，1958）. *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. Cambridge，MA：Harvard University Press.

Presmeg，N. C.（1997）. Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning. In English，L. D.（Ed.），*Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*, pp.267-279. Mahwah，NJ：Lawrence Erlbaum Associates.

Presmeg，N.（2002）. Transitions in emergent modeling. In Gravemeijer，K. et al.（Eds.），*Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education*, pp.131-137. Dordrecht / Boston / London：Kluwer Academic Publishers.

Sáenz-Ludlow，A.（2003a）. Classroom discourse in mathematics as an evolving interpreting game. In Anderson，M. et al.（Eds.），*Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing*, pp.253-281. Brooklyn，NY：LEGAS.

Sáenz-Ludlow，A.（2003b）. A collective chain of signification in conceptualizing fractions：A case of a fourth-grade class. *Journal of Mathematical Behavior*, Vol.22，No.2，pp.181-211.

Sáenz-Ludlow，A.（2004）. Metaphor and numerical diagrams in the arithmetical activity of a fourth-grade class. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol.35，No.1，pp.34-56.

Sáenz-Ludlow，A.（2006）. Classroom interpreting games with an illustration. *Educational Studies in Mathematics*, Vol.61，No.1-2，pp.183-218.

Vile，A.（2003）. Mathematics in flatland：A Peircean，trialectic view of the nature of mathematics. In Anderson，M. et al.（Eds.），*Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing*, pp.35-48. Brooklyn，NY：LEGAS.

Vile，A. & Lerman，S.（1996）. Semiotics as a descriptive framework in mathematical domains. In the *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.4，pp.395-402. Valencia，Spain.

岩崎秀樹・山口武志（2000），「一般化の過程に関す

る認知論的・記号論的分析」, 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, 第75巻, pp.1-22.
小笠原喜康（2001）,『Peirce記号論によるVisual記号の概念再構成とその教育的意義』, 筑波大学博士論文（http://www.tulips.tsukuba.ac.jp/pub/dl/e_thesis/thesis_kyo.html).
笠松幸一・江川晃（2002）,『プラグマティズムと記号学』, 勁草書房.
川又由香（2007）,『図的表現を活用した算数授業に関する研究』, 新潟大学修士論文（未公刊).
中原忠男（1995）,『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』, 聖文社.
中村光一（2005）,「授業における数学的対象に関する考察：数学的価値観の観点」, 日本数学教育学会,『第38回数学教育論文発表会論文集』, pp.463-468.
布川和彦（2000）,「数学的問題解決における図と情報の生成」, 上越教育大学数学教室,『上越数学教育研究』, 第15号, pp.9-18.
日野圭子（2002）,「授業における個の認知的変容と数学的表記の役割：「単位量あたりの大きさ」の授業の事例研究を通して」, 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, 第79巻, pp.3-23.
廣井弘敏（2003）,「小学校5年生に見られる図による問題把握」, 日本数学教育学会誌『算数教育』, 第85巻, 第6号, pp.10-19.
和田信哉（2004）,「算数・数学教育におけるPeirceの記号論の検討」,『新潟大学教育人間科学部紀要　自然科学編』, 第7巻, 第1号, pp.1-12.
和田信哉（2006）,「数学教育におけるPeirceの記号論の基礎的研究ー表現体系との比較考察をとおしてー」, 日本数学教育学会,『第39回数学教育論文発表会論文集』, pp.763-768.