

《小特集》

ウェーブレット変換による異常探知 —広がるウェーブレット変換の世界—

菊池久和*・中静真**

ABSTRACT In this paper, we introduce some extensions of popular wavelet transforms and their applications to signal analysis. Two applications are described: electro cardiogram (ECG) analysis by irregular sampling of the wavelet transform and wavelet packed basis construction for detonation diagnosis of combustion engines. In the characteristic points analysis of ECG waveforms, we apply the wavelet maxima representation to ECG. The wavelet maxima are defined as the modulus maxima of a dyadic wavelet transform. The entire signal is represented by the set of all wavelet maxima. In ECG analysis, we define a basic wavelet as the second-order derivative of a smoothing function. With this wavelet, wavelet, wavelet maxima indicate the location of turning points in ECG waveforms. The decaying behavior along scale in the wavelet maxima indicates the differentiability at turning points. By exploiting this multiscale property, we apply the wavelet maxima to the classification and recognition of characteristic points in ECG. ECG compression, analysis and transmission by the wavelet maxima representation are shown for possible new applications. Detonation detection is critical for clean emission of vehicle engine control, and wavelet packets are applied to it. A wavelet packet system is obtained from arbitrary combinations in wavelet filter banks. An entire set of particular orthogonal transforms are implemented by a single wavelet packet system, and the set covers the orthogonal transforms of which time-frequency decomposition approximates the various decompositions produced by the wavelet, Fourier and short-time Fourier transforms. The best basis for a particular application is selected from the entire set of the wavelet packet bases. To detect detonation, we define a Maharanobis distance criterion for the best basis search. Successful detection was demonstrated in viewing the discriminant score of 96%.

1. はじめに

現在、日本語、英語を問わず膨大な数のウェーブレット変換の解説書^{1)~4)}が出版されている。そこで本解説では、あえてウェーブレット変換の細かい数学的な解説を避け、著者らが現実の異常探知を中心としたアプリケーションにウェーブレットをどのように適応させて使っているかを中心に解説する。ここで紹介する事例には、ウェーブレット変換を定義式のまま利用し

た例はない。目的とする信号処理にいかにしてウェーブレットを適合させるか、その工夫の仕方が少しでも読者の参考になれば幸いである。

第2章では、ウェーブレット変換の定義について説明する。この章では、連続ウェーブレット変換の定義から、スケール・シフトパラメータの離散化を経て直交ウェーブレット変換までを概説する。第3章では、心電図の解析・圧縮へウェーブレット変換を適用した事例を解説する。心電図波形は、医療で広範囲に利用されている信号であり、その読解法も良く知られている。心電図波形の読解で重要な特徴点を詳しく解析するために、連続ウェーブレット変換の極大値が特徴点の座標で発生するようにウェーブレットを設定する。さらに、極大値の発生した座標でウェーブレット変換を標本化する。得られる表現—不規則なシフトパラメータのウェーブレット変換—がどのように特徴を記述するか、さらに特徴記述が原波形全体をどのように再

Singularity Detection by Wavelet Transforms —Applications of Adaptive Sampling of Wavelet Transforms and Wavelet Packets—. By Hisaakazu Kikuchi (Electrical Engineering Department, Faculty of Engineering, Niigata University) and Makoto Nakashizuka (Graduate School of Bio-Applications and Systems Engineering, Tokyo University of Agriculture and Technology).

*新潟大学工学部電気電子工学科

**東京農工大学大学院生物応用システム科学研究科

構成するかを解説する。

第4章では、ウェーブレットを用いて直交関数系を構成し、ガソリンエンジンの異常燃焼検出に適用した例を挙げる。ウェーブレット変換の中には直交ウェーブレット変換という直交関数系があるのにもかかわらず、あえて“ウェーブレットによる直交関数系”という章題にした。それは、ウェーブレットを使って、直交ウェーブレット変換を含むより広範囲な直交関数系の集合“ウェーブレットパケット”を定義できるからである。第4章では、このウェーブレットパケットにより信号識別に最適な直交基底を導出し、異常燃焼振動と正常燃焼振動の判別に用いた事例を解説する。

2. ウェーブレット変換の定義

単純にウェーブレット変換と呼んでも、連続、離散、直交、非直交により、

- (1) 連続ウェーブレット変換
- (2) 離散ウェーブレット変換 (フレーム)
- (3) 直交ウェーブレット変換
- (4) 離散2進ウェーブレット変換

の4つある。連続ウェーブレット変換は、フーリエ変換、窓掛けフーリエ変換との比較を通じて説明されることが多いのに対して、直交ウェーブレット変換の説明は、多重解像度解析から始めることが多い。本解説では、連続ウェーブレット変換から初めて、スケールパラメータ、シフトパラメータの標準化、スケール関数の導入と順にウェーブレットに拘束を加えながら、直交ウェーブレット変換まで概説する。連続ウェーブレット変換は、

$$W(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(a, x-b) f(x) dx \quad (1)$$

で定義される。ここで、 $\Psi(a, b)$ はウェーブレット関数であり、基本ウェーブレット関数 $\Psi(x)$ より

$$\psi(a, x-b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (2)$$

と定義される。ここで、 a はウェーブレットのスケールを示し、 b はシフトを表す。ウェーブレット関数系は基本ウェーブレット関数の移動 (シフト) と伸ばし縮め (スケール) によって作られることがわかる。 $1/\sqrt{a}$ をウェーブレット基底にかけるのは、ウェーブレット基底をスケールによらず二乗積分値を一定にするためである。この基本ウェーブレット関数としての資格を持つ関数は二乗可積分関数で、積分値が零すなわち

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 0 \quad (3)$$

を満たせば良い。これは資格条件 (admissible condition) と呼ばれている。なぜ、上記の条件が必要か考えて見る。上記の資格条件を満たさない、すなわち積分値が零でないとする。基本ウェーブレット関数のフーリエ変換は、角周波数 $\omega=0$ で零以外の定数をとる。当然、スケールしたすべてのウェーブレット関数のフーリエ変換も、 $\omega=0$ で等しい定数をとる。そうすると、すべてのウェーブレット変換 $W(a, b)$ には信号の直流成分が含まれ、ウェーブレット変換の二乗値の総和は無限大に発散し、逆変換

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(a, x-b) W(a, b) da db \quad (4)$$

が成立しなくなるからである。ここで肩符*は関数の複素共役を示す。この連続ウェーブレット変換では、スケール値、シフト値とも連続値をとっているが、十分な密度でスケール、シフト空間をウェーブレット基底で覆えるのなら、スケール a 、シフト b を適当な間隔で離散化しても、逆変換により原波形の近似が可能である。これがフレームと呼ばれるウェーブレット展開で

$$W_{i,j} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{i,j}(x) f(x) dx \quad (5)$$

と定義できる。ここで $\Psi_{i,j}$ は

$$\psi_{i,j}(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^i}} \psi\left(\frac{x}{\alpha^i} - j\beta\right) \quad (6)$$

とスケール間隔 α とシフト間隔 $\beta\alpha^i$ によって定義される。 $\alpha=2$ かつ $\beta=1$ と設定することでウェーブレット基底を

$$\psi_{i,j}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^i}} \psi\left(\frac{x}{2^i} - j\right) \quad (7)$$

と定義し、かつ直交性を導入したものが直交ウェーブレット変換となる。直交ウェーブレット変換を作る方法は、多重解像度解析との関連から導出される。ウェーブレットを導くために、スケール関数 $\phi(x)$ を導入する。これは、信号に畳み込んで平滑化する関数であり、低域通過フィルタのインパルス応答に相当する。ここで

$$S_{i,j} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{i,j}(x) f(x) dx \quad (8)$$

で得られる多重解像度解析を考える。スケール関数は

$$\phi_{i,j}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^i}} \phi\left(\frac{x}{2^i} - j\right) \quad (9)$$

で定義される。\$S_{i,j}\$から、スケールごとの成分を

$$s_i(x) = \sum_j \phi_{i,j}^*(x) S_{i,j} \tag{10}$$

によって信号を近似した例を図1に示す。片符号は関数\$f(x)\$に対して\$f(-x)\$を示す。ここでは図1ではスケールインデクス\$i\$のスケール関数による原波形の近似の様子を示している。スケールが増加するにつれ、波形の細部が消え粗い近似となって行くことがわかる。あるスケールにおける近似から次に大きいスケールでの近似の間で細部が失われるが、この失われた部分を表現するのが直交ウェーブレット変換の役割である。直交ウェーブレット変換では、信号をスケール関数とウェーブレット関数で分解する。ある信号が、スケール1のスケール関数の線形和

$$s_1(x) = \sum_j a_j \phi_{1,j}(x) \tag{11}$$

で表せるとしよう。ここでスケール2のスケール関数が、スケール1の関数によって

$$\phi_{2,0}(x) = \sum_j p_j \phi_{1,j}(x) \tag{12}$$

と表せるとする。当然、スケール2のスケール関数だけを使ってもとの信号を再構成することはできない。スケール2のスケール関数では表現できない“細かさ”が、もとの信号にあるからである。そこで、

この足りない“細かさ”をウェーブレット関数

$$\psi_{2,0}(x) = \sum_j q_j \phi_{1,j}(x) \tag{13}$$

を導入することで補い、もとの信号を

$$s_1(x) = \sum_j b_j \phi_{2,j}^*(x) + c_j \psi_{2,j}^*(x) \tag{14}$$

と分解しよう。任意の\$s_1(x)\$を表現するために、2つの数列\$\{p\}, \{q\}\$にいくらかの条件が要求されるだろうか？ Daubechiesのウェーブレット導出法では、ウェーブレット基底関数が直交するという条件を

(1) シフトしたスケール関数どうしが直交する。すなわち

$$\int \phi(x-m)\phi(x) dx = \delta_{m,0} \tag{15}$$

この等式に式(12), (13)を導入して

$$\sum_k p_k p_{k-2m} = 2\delta_{m,0} \tag{16}$$

(2) ウェーブレット関数とスケール関数どうしが直交する。すなわち

$$\int \phi(x-m)\psi(x) dx = 0 \tag{17}$$

この等式に式(12), (13)を導入して

$$\sum_k p_k q_{k+2m} = 0, \quad m \in \mathbb{Z} \tag{18}$$

(3) 資格条件から

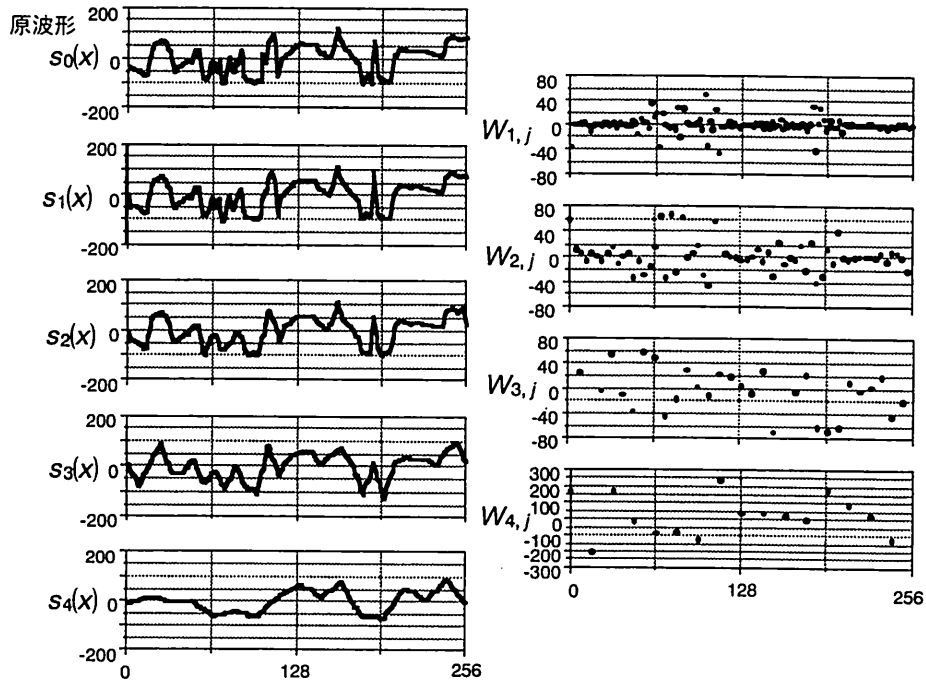


図1 多重解像度と各スケール毎に導出されるウェーブレット変換

$$\sum_k q_k = 0 \quad (19)$$

と求め、さらにウェーブレット関数自体のモーメントに関する条件式から、2つの数列 $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ を決定している。連続関数であるウェーブレット関数とスケーリング関数に対する条件が、式(12)(13)から、すべて数列 $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ についての条件式に置き換わってしまう。式(12)(13)はツースケール関係と呼ばれる等式である。

では、 $s_1(i)$ からウェーブレット変換を計算するにはどうすればよいか？ 現実には、我々がウェーブレット変換しようとする信号は数列である。得られた数列が、 $s_1(i)$ を間隔1で標本化して得られた数列であると仮定し、この数列を $s_1(n)$ とする。スケール2のウェーブレット変換とスケーリング関数がスケール1のスケーリング関数の線形和で示されていることから、数列 $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ をインパルス応答とする離散時間フィルタを用いて、図2に示す離散時間フィルタによってウェーブレット変換とそれに対応する $s_2(n)$ が計算できる。さらにスケール3のウェーブレット変換は、スケール2のスケーリング関数の線形和で表せることより、さらに同じ構造のフィルタによって導出される。これを繰り返すことでスケール1から無限に大きいスケールまでウェーブレット変換を計算することができる。

ここまでで、3つのウェーブレット変換が定義されたが、それらの標本化の様子をスケール空間 (a - b 平面) 上の標本点によって図3に示す。直交ウェーブレット変換の標本化のグリッドを見ると、時間方向の標本化間隔は、各スケール毎に異なっている。これでは、ある時刻におけるウェーブレット変換を各スケ

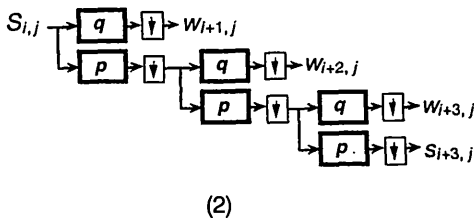
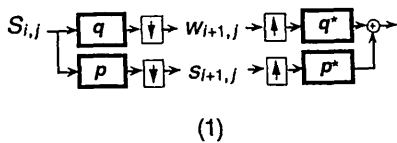


図2 直交ウェーブレット変換を実現するフィルタバンク

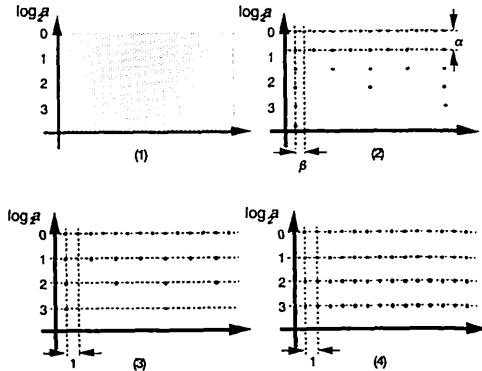


図3 ウェーブレット変換の標本点(1)連続ウェーブレット変換, (2)離散ウェーブレット変換, (3)直交ウェーブレット変換, (4)離散2進ウェーブレット変換

ールで同時に見ることができない。そこで、図2のフィルタバンクのダウンサンプリングを取り除き、フィルタバンクのインパルス応答をアップサンプリングすることで図3(4)のようにすべてのスケールで一定の標本化間隔の離散ウェーブレット変換も使用される。これは離散2進ウェーブレット変換⁵⁻⁷⁾と呼ばれ、本章の特異点解析で利用する。

3. ウェーブレット変換と特異点解析—心電図とウェーブレット極大値—

波形から情報を得るために、解析の目的に応じて、ある特徴だけを抽出することが行われている。画像処理の場合には、2次元信号を対象とした処理である。2次元信号として物体の重なりや背景が画像として表されている。物体とその背景の境界では、輝度に不連続が発生する。この不連続を一般的にエッジと呼んでいる。このエッジが物体の形状を表すことから、画像を利用する研究分野の多くでは画像の特徴としてエッジを用いている。また、エッジをテクスチャ、雑音の中から正確に検出するためのアルゴリズムが数多く検討されてきた。エッジ自体は原信号の不連続点、もしくは勾配が急な点である。そこで、エッジ検出アルゴリズムでは波形を微分し、その極大値の座標をエッジとして検出している。微分操作はハイパスフィルタに相当し、前処理として雑音除去のためにローパスフィルタをかければエッジ検出はバンドパスフィルタに等しい。

さて、ウェーブレット変換における基底関数もバンドパスフィルタのインパルス応答と見なすことができる。当然、適当な基底関数を利用すればウェーブレッ

ト変換によるエッジ検出が実現できるはずである。ウェーブレットを用いるエッジ検出を考えた場合、どのような利点があるだろうか。代表的な活用法として、2つのステレオ画像等で対応をとるために、粗い解像度でエッジ検出を行った結果をもとにエッジ対応をとることで、解像度を上げてさらに詳しい対応をとる例がある。これは粗い情報から細かい情報へと対応をとり、対応づけの誤りを避ける手法である。もう一つ別な利点としては、エッジの鋭さ(エッジの幅とも言う)を検出することが可能な点である。基本的な概念を示すために、図4を参照する。ここでは、Haar基底を用いている。これを2つのエッジ、一つは不連続なエッジであり、もう一つはそれよりも滑らかなエッジの場合である。この例では、いずれのスケールでもウェーブレット基底の絶対値の面積が一致するように規格化している。ウェーブレット変換の対象として、不連続なエッジと滑らかなエッジの2つを例に挙げている。不連続なエッジの場合、どんなに狭い範囲にウェーブレット基底を押し込めても、その中に不連続点がある限り極大値は一定である。それに対して、平滑化されたエッジの場合、スケールが大きい場合、すなわち大まかに見た場合、変換結果は不連続なエッジとそれほど違いがないが、スケールを小さくしていくとウェーブレットがサポートする区間内での変化が小さくなっていき、極大値がスケールと共に減少する傾向を示す。ここで、示した例は最も単純な例であるが、マルチスケールの性質を利用することで、エッジの鋭さ、正確に呼べば高次導関数の微分可能性を解析できることが知られている。S. Mallatらはリブシッツ指数との関連より、ウェーブレット変換の絶対値が

$$|W(a, x)| \leq Ka^{\alpha}$$

で支配されることを示している^{6),7)}。ここでは、ウェ

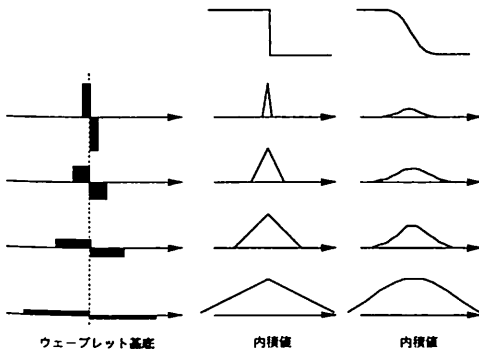


図4 Haar基底によるエッジのウェーブレット変換

ーブレット基底が無限回微分可能であると仮定し、 α が座標 x におけるリブシッツ指数を示している。不連続な場合 $\alpha=0$ 、微分可能な場合 $\alpha=1$ で、さらに高次の微分が可能になるに従い、 α の値も増加する。この性質はフーリエ変換におけるパワー則と類似した性質であるが、ウェーブレットはその基底関数が時間・空間的に局在するために不連続が発生する座標まで正確に把握することが可能である。

さて、物体の輪郭を把握するためにはエッジの座標を知ることが重要であり、その微分可能性についてはあまり重要ではない場合が多いが、特異点の滑らかさ、鋭さが解析の重要なポイントになる分野がある。それが、今回紹介する心電図波形の解析⁹⁻¹¹⁾である。

心電図は一般にP波、Q波、R波、S波、T波の5つの一連の過渡的な波形によって構成されている。これらの発生時刻、ピーク時刻、終了時刻を計測し、それぞれの幅、高さを調べることで疾患を診断している。これらの波形は、波形の1階微分の零交差、2階微分の極大値を検出することで検出されてきた。ある極大値が5つの波形のいずれであるか分類するために、振幅に対してしきい値を設定する、相対的な時間順序から識別するなどの識別ルールが適用されている。この識別の対象となる特徴の記述に単一スケールの微分波形だけでなく、ウェーブレットによるマルチスケール解析を導入することで、変曲点の滑らかさから分類することができる。図5に平滑化関数の2階導関数を基本ウェーブレットとする離散2進ウェーブレット変換を極大値座標で標準化した例を示す。この図では、1階導関数が不連続なピーク波形と連続なピーク波形、さらにインパルス、白色雑音をウェーブレット変換している。滑らかなピークでは、ピークで発生している極大値振幅がスケールの減少に従い急速に減少するのに対して、1階導関数が不連続なピークでは減少するスピードが滑らかなピークに比べて遅いことがわかる。さらに、リブシッツ指数が -1 となるインパルス、 $-1/2$ となる白色雑音ではスケールの減少に従ってウェーブレット極大値の振幅が増加する。このスケール間変化を用いれば、雑音が重畳した心電図波形から、雑音を除去し、心電図の変曲点を検出、分類することが期待できる。

実際に心電図波形に対してウェーブレット極大値を求めたものを図6に示す。R波に見られる急峻な変化点においてはウェーブレット極大値がすべてのスケールで観察されるのに対して、T波の発生、ピーク、消滅が示す緩やかな変化ではスケールの減少に従い極

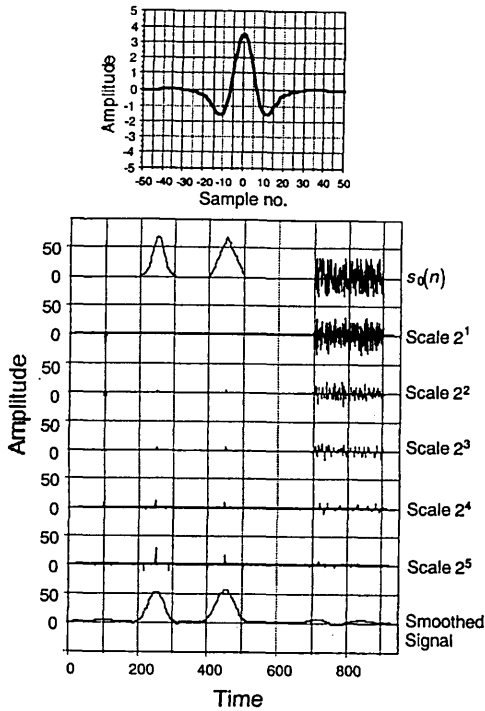


図5 変曲点検出のための基本ウェーブレット関数とウェーブレット極大値

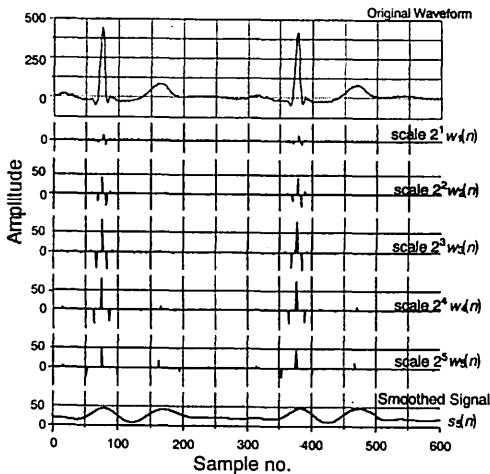
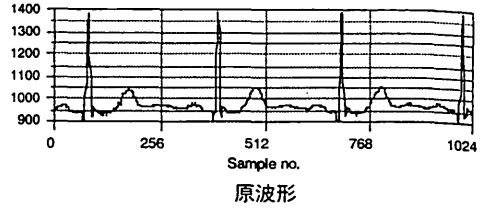
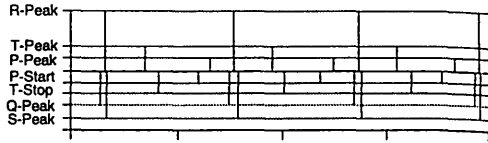


図6 心電図波形のウェーブレット極大値表現

大値が減少する。以上の性質より、各波形の発生、ピーク、消滅点ごとに発生するウェーブレット極大値から特徴ベクトルを作成し、分類した例を図7に示す。この例ではP-QRS-T波の発生順序に関する情報を用いていないにもかかわらず、各波形の発生、ピー



原波形



分類結果

図7 心電図と区分点分類結果

ク、終了点を正確に検出、分類していることがわかる。

さて、マルチスケールによる変曲点検出を行ったが、この検出結果がどこまで原波形を忠実に表現しているのだろうか？ もし、原波形に対して一意にウェーブレット変換の極大値が決まるならば、ウェーブレット変換の極大値から、それを作り出した原波形が一意に決まるはずである。しかしながら、ウェーブレット極大値は、ウェーブレット変換に対して不等間隔に標本化を行ったものであり、通常のウェーブレット逆変換では原波形の再構成は不可能である。そこで、凸射影復元法 (Projection Onto Convex Sets: 頭文字をとってPOCSともいわれる。) の適用が提案されている^{5~10)}。凸射影復元法とは、原信号に対する拘束条件を凸空間で記述し、凸空間の間で交互に射影を繰り返すことで、いずれの条件も満たす原信号を収束解として得る方法である、ウェーブレット極大値からの復元の場合、復元の対象とする信号は、原波形のウェーブレット変換である。それに対する最も基本的な拘束条件は

- (1) 何らかの信号のウェーブレット変換であること。
- (2) 与えられているウェーブレット極大値と同じ座標・スケールで同じ値をとること。

の2つである。さらに、不要な極大値の発生を抑えるために、S. Mallatらはこれらの条件の他に極大値間に滑らかさのペナルティを与えている^{6),7)}。また、Z. Cvetkovicらは極大値のはかに極小値も加え、極大値-極小値間での単調増加・単調減少も条件として加えている⁸⁾。ここでは、(1)の条件を満たす集合を V 、(2)の条件を満たす集合を Γ とかく。初期値として与えられるウェーブレットから Γ への射影は、極大値座標

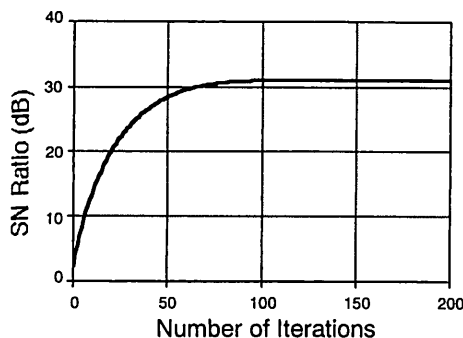


図8 再構成波形のSN比と射影回数

における極大値の代入、 Γ から V への射影はウェーブレット逆変換・順変換で与えられる。これを繰り返すことで、復元過程のウェーブレット変換は、 V と Γ の共通集合へと収束する。得られる解は明らかに、2つの条件を満たしたウェーブレット変換となる。共通集合の要素が原波形のウェーブレット変換だけならば、完全再構成が実現される。では、どの程度の波形復元が可能か、凸射影復元を図7の極大値に適用した例を図8に示す。この図では射影回数と再構成された心電図波形のSN比を示している。ほぼ30回の反復射影でSN比20 dBを超え、診断に用いるには十分な精度で原波形が復元されている。

ここまで、心電図波形の変曲点を多重スケールで分類し、さらに分類に用いたウェーブレット極大値で原波形を復元できることを示した。心電図波形では変曲点がまばらに存在するため、特徴記述だけで原波形の情報圧縮・符号化が実現できることが期待できる。さらに、符号化情報自体が心電図解析結果と一致するために、波形解析と符号化を同時に実現する新しい心電図アプリケーションの可能性がある。そこで、心電図のウェーブレット極大値をもとに変曲点を分類し、最も基本的な解析データから順に

第1階層：R-R間隔

第2階層：R波を中心としたP-QRS-T波の区分点座標

第3階層：区分点座標からウェーブレット極大値座標までの差分とウェーブレット極大値の振幅

第4階層：残りのウェーブレット極大値

と、波形データを階層化して記録、伝送する。異常検知は第1階層、第2階層を利用して行うことができる。第1階層、第2階層は座標データだけであるから、原波形に比べるとごくわずかなデータ量でしかない。さらに異常個所を見つけたならば、その部分につ

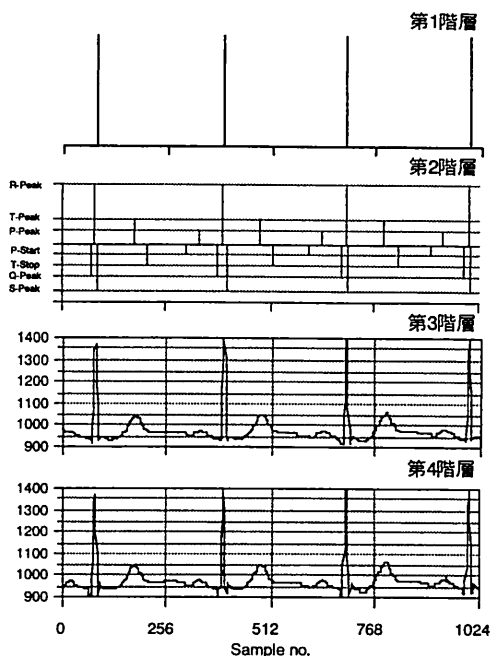


図9 圧縮データの各階層から得られる心電図情報（第1階層ではR-R間隔、第2階層では区分点、第3階層、第4階層では復元波形を示す。）

いて第3、第4階層までを伝送し、詳細な心電図を復元して診断することが可能である。図9に各階層が表す情報を示す。

心電図波形は不整脈検出等で24時間を超える無拘束記録が行われ、全波形を低速な公衆回線等を通じて伝送するためには長い伝送時間が必要となるが、上述の方法で第1階層から順にブラウズすることで、対話的に異常個所を検出・診断することが期待できる。

4. ウェーブレットによる直交関数系—異常燃焼振動とウェーブレットパッケージ—

前章で説明した心電図解析の場合、解析要求のある特徴点が、前もって十分に知られているケースであった。しかしながら、解析対象となる信号がどのような特徴を持ち、解析手法に何が適しているのか不明な場合もある。例えば、ある信号がいくつか与えられ、その信号の特徴は何か調べなければならないでしょう。その場合、フーリエ変換、ウェーブレット変換等の直交変換を適用したり、他のスペクトル解析を適用したり様々な方法が考えられる。ここでは、解析の手法を直交変換にだけ限って考えてみよう。複数の信号系列が与えられた時、それらを二乗誤差最小に近似すると

いう意味においてはKL変換が最適である。(その前に二乗誤差を基準にするのが望ましいかどうかという問題もあるが。)しかしながら、得られた基底関数は、我々が直感的に理解できる(もしくは、関係づけたい)時間軸、周波数軸という観点とは無関係に決まってしまう。逆に、フーリエ変換、直交ウェーブレット変換等、基底関数の性質がよく知られている直交基底で特徴が表せるかどうかかわからない。

一方、既存の直交ウェーブレット変換を拡張し、スケーリング関数と、それに対応するウェーブレット関数から、ウェーブレット変換を含む、より広範囲な直交関数系を導出する方法が提案されている。それが、ウェーブレットパッケージ^{12),13)}である。直感的にウェーブレットパッケージを理解するために、図2に示したフィルタバンク構造を参照して説明する。ウェーブレット変換を実現するフィルタバンクでは、ウェーブレット変換結果が、時間・周波数でそれぞれ図10に示したなわばり領域を代表する。このフィルタバンク構造では、信号をハイパスフィルタとローパスフィルタで2つに分解し、ローパスフィルタの出力を再帰的に分割している。もし、分割する帯域を低域だけと固定せずに、どちらも自由に分割することを許せば、時間・周波数上での分割(タイリング)はウェーブレットパッケージの拘束の中で自由に変更することが可能である。例えば、図10では、ハイパスフィルタ出力、ローパスフィルタ出力とも分割を繰り返すことで、それぞれの帯域を等しくし、フーリエ変換と似た分割も実現できる。直交ウェーブレット変換を含む、広いバリエーションの直交基底を作り出すことが可能となる。また、2分割フィルタバンクを基本として、直交基底を構成するために、時間・周波数の意味で変換結果を解釈することが可能である。さて、ここで問題となるのは、どのパッケージ分割が目的とする信号解析に望ましいかという問題である。M. V. Wickerhauserらは、評価関数の例として、しきい値を超える展開係数の数、展開係数の p 乗ノルムの集中度、展開係数のエントロピー等を挙げ、分割木の決定法を提案している^{12),13)}。著者らは、ウェーブレットパッケージを利用して、ガソリンエンジンの異常燃焼の判定を行っている^{14),15)}。内燃機関の異常燃焼とは、ガソリンエンジンのシリンダ内で燃料点火時に発生する主火炎とは別に、未燃焼混合気が自己着火する現象である。現在の自動車エンジンでは、点火時期を調整することで、最も効率良く、かつ排ガスの少ない状態でエンジンを動かしている。このために、異常燃焼の有無の判定が点火進角制

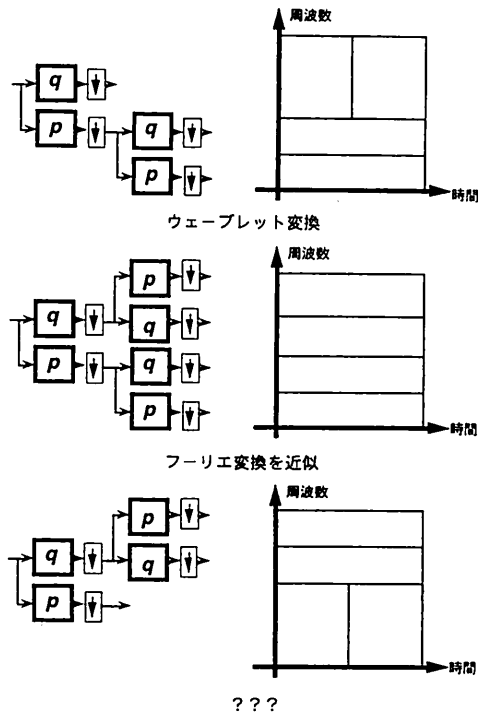


図10 ウェーブレットパッケージによる時間・周波数タイリング

御には必須となっている。シリンダ内の圧力変動を調べれば、異常燃焼の発生は十分な確度で検出できる。しかしながら、製造、調整、保守に関して安価で実用的な方法は、エンジン筐体に取り付けられた振動センサーから異常燃焼を判定する方法である。振動センサーからの出力から異常燃焼振動だけを取り出すことは不可能であり、機械振動と燃焼振動等が重畳する中で異常燃焼の有無を判定しなければならない。

筆者らが行った異常燃焼判定では、異常燃焼振動が、主に爆発時のインパルス状の衝撃波と、そのシリンダ内への残響から構成されていると仮定した。いずれの成分も、時間・周波数で局在することから、ウェーブレットパッケージによる解析を適用した。また、判別を目的として、パッケージ分割を決定する評価関数にはマハラノビス距離を採用した¹⁵⁾。マハラノビス距離とは、多変量解析の分野で用いられる評価尺度で、2つの分布の分離の度合いを示す尺度として用いられている。2つのスカラー量のグループ

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

が与えられた時、マハラノビス距離は

$$D = \frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{s}$$

で与えられる。ここで、 \bar{X} は $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ の平均値、 \bar{Y} は $\{y_i\}_{1 \leq i \leq n}$ の平均値を示し、 s は $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ の分散 s_x^2 と $\{y_i\}_{1 \leq i \leq n}$ の分散 s_y^2 の算術平均

$$s^2 = \frac{s_x^2 + s_y^2}{2}$$

によって定められる。2つのグループの平均値が離れるに従い、また、それぞれの分布が平均値を中心に集中するほど、2つのグループの分布は離れ、マハラノビス距離は増加する。このマハラノビス距離を用いて、異常燃焼と正常燃焼に対する展開係数の分布のマハラノビス距離が最大となる基底関数を持つウェーブレット packets を導出する。パケット分割を求めるにあたり、筒内圧変動から異常燃焼の有無を判定した信号グループを用意する。この2つのグループに対して、各帯域をすべて分割するウェーブレット packets を適用し、パケットで得られるすべての展開係数を求める。これらの展開係数の中で、マハラノビス距離を最大とするものを探し、それを出力するフィルタバンクのパスを解として決める。次に、初めの選択で決まったパスを固定して、2番めにマハラノビス距離を最大とする展開係数を探し、それを出力する枝フィルタバンクのパスを求める。以上の手順を繰り返し、すべてのパスが決まった段階で操作を終了する。

図11に正常燃焼振動と異常燃焼振動の例を挙げ、これより得られた異常判別のためのウェーブレットパケ

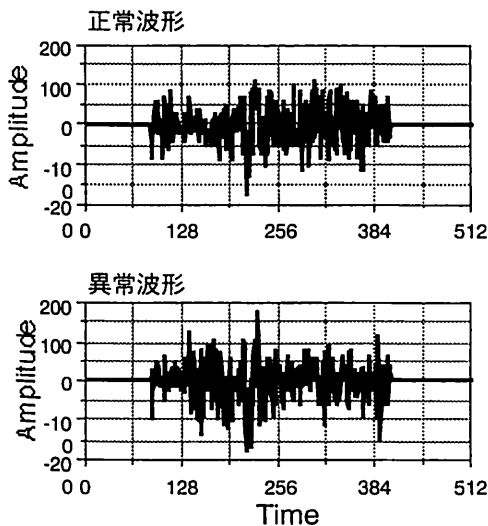


図11 異常燃焼振動と正常燃焼振動

ットによる時間・周波数分割を図12に示す。図12の時間・周波数タイリングではマハラノビス距離が大きいタイルを明るく、小さいタイルを暗く表示している。これを観察すると、高周波領域では周波数分解能よりも時間分解能が優先されて分割されていることがわかる。また、差違の大きい時間帯は信号の前半部に集中している。低域では周波数分解能が優先されて分割され、差違の大きな周波数帯域とその高調波成分について分解能が高く分割が行われていることがわかる。実際にこのパケットを利用して、パケットの作成に用いなかった未知の燃焼振動に対して正解率90%以上の識別結果が得られている。

ウェーブレット packets を用いずに、ある信号に対して、ある評価関数を最小にする意味で最適な直交関数系を求めようとするれば、それは無限個の直交関数系の中から1つを選び出すことを意味する。しかし、ウェーブレット packets を用いれば、基本ウェーブレットを一つ決めることで、たかだか有限個の中から1つの直交関数系を見つけ出す操作になり、はるかに容易な問題となる。どんな評価関数を与えたとしても、最悪の場合、総当たりで調べればウェーブレット packets の中で最適な基底関数系を選び出すことができる。また、基底関数は時間・周波数分布の意味で理解することもできる。信号解析の目的に合致した評価関数を選び、その評価関数から最適なウェーブレット packets を求めれば、得られたパケットがフーリエ変換、直交ウェーブレット変換等、既知の直交変換よりも目的

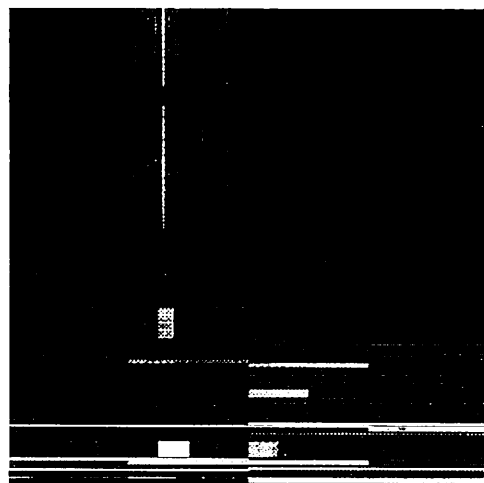


図12 正常燃焼振動と異常燃焼振動を判別するための時間周波数タイリング

とする信号解析, 処理に適することは明らかである。

5. まとめ

異常探知というテーマで, 心電図の解析, さらに内燃機関異常燃焼解析と2つの応用を中心に解説した。この2つの例では, 基本的なウェーブレット変換の定義から, いずれの場合も目的とする信号処理にあわせてウェーブレットを拡張, 特化した表現を定義している。心電図の例では, 解析の対象となる座標のまわりにだけウェーブレットが存在し, 2進ウェーブレット変換を不規則に標準化した表現を用いている。また, 異常燃焼検出では, 直交ウェーブレット変換を拡張したウェーブレットパケットを用い, 差違を最も明確にする直交関数系を探している。ウェーブレット変換は過剰系も直交系も作ることができ, さらに, ウェーブレットそのものが時間・周波数で局在する単純な波形であることから, 拡張, 一般化ないし特化の自由度がある。どのような可能性がウェーブレット変換にあるか, 読者の参考となれば幸いである。

参考文献

(ウェーブレット変換一般の解説書 特に日本語で書かれた文献を挙げる。)

- 1) R. K. Young: Wavelet Theory and its Applications, Kluwer Academic Publishers (1993)
日本語訳: ウェーブレット—信号処理とシステム推定への応用—, トップラン (1997)
- 2) J. J. Benedetto and M. W. Frazier Ed.: Wavelets: Mathematics and Applications, CRC Press (1994)
日本語訳: ウェーブレット—理論と応用—, シュブリンガー・ファラーク東京 (1995)
- 3) C. K. Chui: An Introduction to Wavelets, Academic Press (1992)
日本語訳: ウェーブレット入門, 数理科学セミナー, 東京電機大学出版局 (1993)
- 4) 榎原 進: ウェーブレットビギナーズガイド, 数理科学セミナー, 東京電機大学出版局 (1995)
(特異点解析に関する論文)

- 5) S. Mallat: Zero-Crossings of a Wavelet Transform, IEEE Trans. on Information Theory, 37-4, 1019/1033, July 1991
- 6) S. Mallat and W. L. Hwang: Singularity Detection and Processing with Wavelets, IEEE Trans. on Information Theory, 38-2, 617/643, March 1992
- 7) S. Mallat and S. Zhong: Characterization of Signals from Multiscale Edges, IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 14-7, 710/732, July 1992
- 8) Z. Cvetkovic and M. Vetterli: Discrete-Time Wavelet Extrema Representation: Design and Consistent Reconstruction, IEEE Trans. on Signal Processing, 43-3, 681/693, March 1995
- 9) M. Nakashizuka, H. Kikuchi, H. Makino and I. Ishii: ECG Data Compression by Multiscale Peak Analysis, Proc. on International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2, 1105/1108, Detroit, May 1995
- 10) 中静 真, 菊池久和, 牧野秀夫, 石井郁夫: 多重解像度ピーク解析による心電図圧縮, 電子情報通信学会論文誌D-2, J79-D-2-8, 1412/1421 (1996)
- 11) 杉原弘祐, 中静 真, 菊池久和, 牧野秀夫, 佐々木重信: 多重スケールピーク解析によるECG区分点解析, 第11回デジタル信号処理シンポジウム予稿集, C1-6, 103/108 (1996)

不規則サンプリングからの復元に関しては参考文献2)の第8章も詳しい。

(ウェーブレットパケットに関する論文)

- 12) M. V. Wickerhauser: Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software, IEEE Press (1994)
- 13) R. R. Coifman and M. V. Wickerhauser: Entropy Based Algorithms for Best Basis Selection, IEEE Trans. on Information Theory, 38-2, 713/718, March 1992

R. R. CoifmanとM. V. Wickerhauserらの解説は参考文献2), 第10章にもある。

(異常燃焼解析に関する論文)

- 14) H. Kikuchi, M. Nakashizuka, H. Watanabe, S. Watanabe and N. Tomisawa: Fast Wavelet Transform and its Application to Detection of Detonation, IEICE Trans. Fundamentals, E75-A-8, 980/987, Aug. 1992
- 15) 千吉良和明, 中静 真, 菊池久和, 石井郁夫, 牧野秀夫: マハラノビス距離によるウェーブレットパケットとその信号識別への応用, 第12回デジタル信号処理シンポジウム予稿集, (印刷中), 1996年11月