ユークリッド平面幾何学再考
—数学教育におけるオリガミの幾何学の理論的考察

Modern Aspects of Euclidean Plane Geometry and Mathematical Education

長谷川　敬　三*
Keizo HASEGAWA

0　はじめに

幾何学の歴史は数学の歴史と同じだけ遡れると言えます．実際，紀元前3世紀に成立したユークリッド原論は幾何学史のみならず数学史上最初の理論体系をもった研究書です．ユークリッド幾何学はその後2000年に渡って数学の分野において不動の座を占めていましたが，19世紀半ばのボリヤイ・ロバチェフスキーによる非ユークリッド幾何学の発見を経て，さらに20世紀初頭にヒルベルトらによって理論的（公理論的）により完成された体系に再構築され，またリーマンによるいわゆるリーマン幾何学というより大きな枠の中で捉えられる様になっています．しかしながら，初等・中等教育上の意義をあわせて考えると，その論理的かつ体系的なユークリッド原論の持つ純粋な魅力は失われるどころかより増して来ている様にさえ思われます．他方，ユークリッド幾何学をより深く的確に理解するには，やはりその後の発展の歴史やより大きな枠を踏まえて捉えなおすことがだいじであると考えます．この論文の目的は，このような状況のもとでユークリッド幾何学における基本概念である，長さ，角，面積，合同，相似および平行についての再考，またコンパスと定規やオリガミの作図問題を理論的に捉えなおすこと，非ユークリッド幾何学であるボリヤイ・ロバチェフスキー幾何学を念頭に置いたユークリッド幾何学の位置づけを出来るだけ分かりやすく概説することです．

2009．6．24　受理
*新潟大学教育学部

ユークリッド幾何学の魅力を多くの方々に伝えるとともに，特に算数・数学教育に携わっている教員の方々にこれらのテーマについての再考・熟考の機会を与えることが出来ればと願っています．

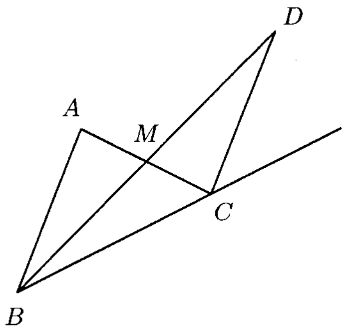
1　絶対幾何学と三角形の合同

ユークリッド幾何学の完全な公理系は，結合，順序，合同，連続および平行の5つの公理から成ります．最後の平行の公理を除いた公理系において，ユークリッド幾何学の線分，角などのほとんどの基本的な概念が定義され，また合同の概念による図形の比較が出来る様になります．この平行の公理を除いた公理系を「絶対幾何学」と呼びます．三角形の合同条件はこの絶対幾何学における定理です．これに対して，あとで見る様に，相似条件は平行の公理に依存したユークリッド幾何学の定理です．

さてよく知られている様に，三角形の合同条件は，二辺夾角相等，二角夾辺相等（または二角と一辺相等），三辺相等がありますが，これらの証明に「三角形の内角の和が二直角である」ことは必要でないことに注意が必要です．三角形の合同条件の二辺夾角相等は容易に示せます．次に，その他の三角形の合同条件や内角に関する定理の証明に関して基本になる次の補題を示します．

［補題1］三角形の外角はその内対角より大きい．

証明は下図の様に，辺ACの中点Mを取り，BMの延長上にDをMD = BMとなる様に取れば△ABM ≡ △CDMとなることに依ります．この補題1より次の命題1が導けます．



[命題 1] 三角形の二つの内角の和は二直角 π より小さい．

また上図において，$\angle$MBC または $\angle$MDC は $\angle$ABC の半分以下になりますから，同じ議論を繰り返すことで次の命題 2 も導けます．

[命題 2] 与えられた三角形に対して，同じ内角の和を持ち，かつひとつの角がいくらでも小さい三角形が存在する．

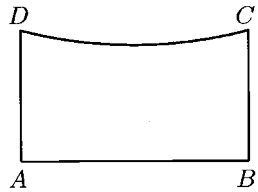
これら二つの命題より次の重要な定理 1 が得られます．

[定理 1] 三角形の内角の和は二直角 π より大きくない．

証明は背理法に依ります．すなわち，もしある三角形で内角の和 σ が二直角 π より大きいものが存在すると仮定しますと，$\sigma-\pi$ より小さい角を持つ三角形に対して他の二つの内角の和が二直角より大きくなり，これは矛盾です．

[注意] 命題 1 の応用として三角形の合同条件の二角夾辺相等（または二角と一辺相等）が示せます．$\triangle$ABC と $\triangle$A′B′C′ において，AB = A′B′，$\angle$B = $\angle$B′，$\angle$C = $\angle$C′ とします．AB と A′B′，$\angle$B と $\angle$B′ を重ね合わせると，C′ は直線 BC 上に来ますが，C が C′ に一致しないとすると $\triangle$ACC′ の 2 角の和が二直角 π に等しいことになり命題 1 に矛盾します．

次にサッケリの四角形について述べます．線分 AB 上に $\angle A=\angle B=\frac{1}{2}\pi$，AD = BC となる様に線分 AD，BC を取り，頂点 C と D を線分 CD で結び，四角形 ABCD が作れます．これをサッケリの四角形と言います．$\triangle$ADC $\equiv$ $\triangle$BCD より $\angle$C = $\angle$D が導けます．

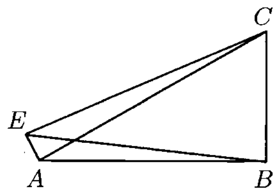


ここで $\angle C=\angle D=\frac{1}{2}\pi$ が成り立つとは限らないし，AB = DC が成り立つとも限りません．実は，一般に次の命題 3 が成り立ちます．

[命題 3] サッケリの四角形 ABCD において，常に $\angle C=\angle D\leq\frac{1}{2}\pi$ であって，さらに次が成り立つ．

(i) $\angle C=\angle D=\frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow$ AB = DC

(ii) $\angle C=\angle D<\frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow$ AB < DC



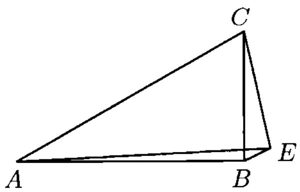
まず，定理 1 より $\angle C=\angle D\leq\frac{1}{2}\pi$ が導かれます．したがって，(i)，(ii) の $\Rightarrow$ を示せばよい．(ii) を示します．$\triangle$CDA を DA が BC 上に来る様に回転させて，$\triangle$ABC 上に重ねると上図の様な状況になります．ここで $\triangle$CDA を $\triangle$EBC として重ねています．$\triangle$CEA は二等辺三角形で二つの底角は等しいことから，頂点 E は $\triangle$ABC の外側にあり，$\angle$BEA < $\angle$EAB が言えます．したがって，対応する辺の長さに関して AB < EB，すなわち AB < DC が示せました．(i) は容易に示せます．

サッケリの四角形 ABCD についてさらに次のことが言えます．

[命題 4] サッケリの四角形 ABCD において，次が成り立つ．

(i) AB = DC $\Leftrightarrow$ $\triangle$ABC の内角の和 = π

(ii) AB < DC $\Leftrightarrow$ $\triangle$ABC の内角の和 < π



(ii) の証明には AB < DC ⇔ ∠ACB < ∠CAD を示せば良いことに注意します．上図において，△CDA は AC が CA にくる様に △ABC 上に △AEC として重ねています．さて，△CBE は二等辺三角形ですから，命題３の証明と同様に頂点 E は △ABC の外側にあり，AB < AE ⇔ ∠ACB < ∠ACE が成り立ちます．(i) は容易に示せます．

[注意] 命題４は △CDA についても成り立ちます．

さて，「平行の公理」を除いた絶対幾何学において三角形の内角の和について議論してきましたが，「ある三角形の和が二直角 π で，別の三角形の和が π より小さい」ことがあり得るかと言う疑問が生じます．これに関して次の定理が成り立ちます．

[定理２] 絶対幾何学において，次のいずれか一方のみが成り立つ．

(i) すべての三角形についてその内角の和は二直角 π に等しい．

(ii) すべての三角形についてその内角の和は二直角 π より小さい．

証明には，ある三角形についてその内角の和が二直角 π に等しければ，すべての三角形についても同様であることを示せばよい．三角形 T に対して，T の内角の和 σ と二直角 π の差 $\pi - \sigma$ を $\tau(\mathrm{T})$ と置きます．常に $\tau(\mathrm{T}) \geq 0$ であり，T を二つの三角形 T1と T2 に分割したとき，$\tau(\mathrm{T}) = \tau(\mathrm{T1}) + \tau(\mathrm{T2})$ が成り立つことに注意してください．したがって，「$\tau(\mathrm{T}) = 0$ であって，三角形 S が T に含まれるならば $\tau(\mathrm{S}) = 0$」が成り立ちます．また「$\tau(\mathrm{Ti}) = 0$ を満たす三角形 Ti を隙間なく並べて出来る三角形 T に関しても $\tau(\mathrm{T}) = 0$」が言えます．さて，仮にある三角形 T で $\tau(\mathrm{T}) = 0$ を満たすものが存在するとします．T は直角三角形としてもよいことは明らかです．すると同じ三角形 T を隙間なく並べていくらでも大きい直角三角形 [T] が作れます（まず二つの T で長方形が作れることに注意）．どんな三角形 S もある [T] にふくまれますから，$\tau(\mathrm{T}) = 0$ が成り立ちます．

2　平行の公理と面積

二直線は共通点を持たないとき平行であると言います．平行の公理は「与えられた直線とその上にない点に対して，その点を通り与えられた直線に平行な直線が唯一つ存在する」と言うものですが，絶対幾何学において，そのような直線は必ずひとつは存在しますから，

(i) 条件を満たす平行な直線が「唯一つ」存在する．

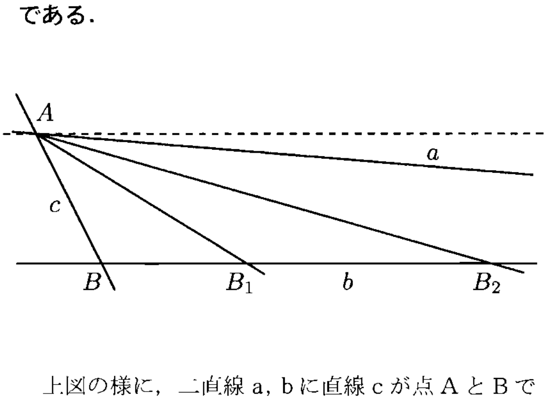
(ii) 条件を満たす平行な直線が「二つ以上」存在する．

の二つの場合に分けられ，平行の公理は前者を公理としたものと考えられます．平行の公理は次の様に言い換えられます．

[平行の公理] 二直線とそれらに交わる直線から出来る同じ側の二つの内角の和が二直角より小さいとき最初の二直線は同じ側で交わる．

ここで二つの内角の和が二直角であれば定理１より二直線は平行になることに注意してください．さて，平行の公理をこのように言い換えると，三角形の内角の和との関連が見えてきます．

[定理３] 絶対幾何学において，「すべての三角形の内角の和は二直角 π に等しい」が成り立てば「平行の公理」が成り立つ．したがって，上に述べた (i)，(ii) はそれぞれ定理２の (i)，(ii) に同値な「公理」である．



上図の様に，二直線 a, b に直線 c が点 A と B で交わり，また ∠A + ∠B < π と仮定します．直線 b 上に点 $\mathrm{B_1}$ を AB = $\mathrm{BB_1}$ となる様に取り，点 $\mathrm{B_2}$ を $\mathrm{AB_1} = \mathrm{B_1B_2}$ となる様に取り，以下同様に点 $\mathrm{B_3}$, $\mathrm{B_4}$, ...を取って行きます．

$\triangle ABB_1$ は二等辺三角形ですから $\angle BAB_1 = \angle BB_1A$（これを Θ とおく）.

$\triangle AB_1B_2$ も二等辺三角形ですから $\angle B_1AB_2 = \angle BB_2A = \frac{1}{2}\Theta$，以下同様に，$\angle B_2AB_3 = \angle BB_3A = \frac{1}{4}\Theta$，一般に $\angle B_{n-1}AB_n = (\frac{1}{2})^{n-1}\Theta$ となり，$\angle BAB_1 = \Theta$; $\angle BAB_2 = (1+\frac{1}{2})\angle\Theta$，$\angle BAB_3 = (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\angle\Theta$，一般に $\angle BAB_n = 2(1-(\frac{1}{2})^n)\Theta$ となる．これを続けると $\angle BAB_n$ は $2\Theta = \pi - \angle B$ に近づき，仮定より $\pi - \angle B > \angle A$ ですから n を十分大きく取れば直線 AB_n は直線 a の上に来ます．したがって直線 a は直線 b と交わることが言えます．

次に「多角形の面積」について述べます．「面積」とは，任意の多角形 F に対して非負の実数 $\tau(F)$ を対応させるもので，

(i) $F1 = F2$（合同）$\Rightarrow \tau(F1) = \tau(F2)$

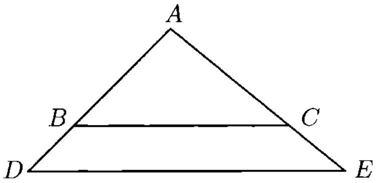
(ii) $F = F1 \cup F2 \Rightarrow \tau(F) = \tau(F1) + \tau(F2)$

（ただし F1, F2は内部を共有しないものとする）

を満たすものと定義されます．例えば，三角形 T に対して $\tau(T) = \pi - \sigma$（ここで σ は T の内角の和）と定めると，定理 2 の証明において見た様に，絶対幾何学における「面積」を定義します．ただし「平行の公理」のもとではすべての三角形 T に対して $\tau(T) = 0$ となり無意味になります．「平行の公理」を加えたユークリッド平面幾何学においては，サッケリの四角形は長方形になり，同じ長方形を隙間なく敷き詰めることが出来るので，一辺の長さ 1 の正方形の面積を 1 として多角形の面積が一意的に定まります．実際，縦と横の長さがそれぞれ有理数 a, b の長方形の面積は ab で無くてはならないし．a, b が実数の場合もそれぞれいくらでも近い有理数が取れることから，面積はやはり ab として一意的に定まります．特に，三角形の面積が $\frac{1}{2}$（底辺×高さ）で与えられることは明らかでしょう．

さて，ユークリッド平面幾何学において面積が定義されたので，応用として有名なピタゴラスの定理が証明できます．そして三角形の相似条件に関係する次の平行線と比の命題が証明されます．

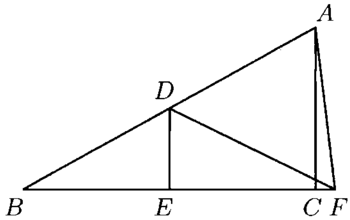
［命題 5］平行の公理が成り立つとする．下図において，AB = b, AC = c, AD = d, AE = e とおきます．このとき，BC ∥ DE ⇔ b : d = c : e が成り立つ．



$\triangle ABC$ と $\triangle ADC$ の面積比は b : d であり，$\triangle ABC$ と $\triangle ABE$ の比は c : e であることに注意すると，「BC ∥ DE ⇔ $\triangle BDC$ と $\triangle CEB$ の面積が等しい」であることから示されます．

三角形の相似条件，二辺の比と夾角相等，二角相等，三辺の比相等は命題 5 より導けます．よくある間違えは命題 5 の証明に三角形の相似条件を使うことです．それでは堂々巡りになってしまいます．

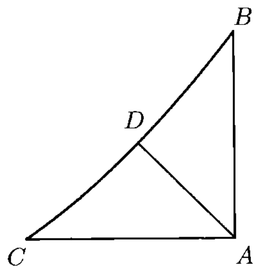
次に，命題 5 を平行の公理が成り立たない，すなわち三角形の内角の和が二直角より小さい場合に考えてみます．下図において，直角三角形 ABC の斜辺 AB の二等点 D から底辺 BC に垂線を下ろしその交点を E とします．このとき，E は BC の中点にはなりません．実際，EC < BE となります．なぜなら，直線 BC 上に BE = EF となる様に点 F を取ると，$\triangle DBF$ および $\triangle DFA$ は二等辺三角形になり，「EC < EF ⇔ $\triangle ABC$ の内角の和が二直角 π より小さい」が言えます．実際，EC < EF とすると，$\angle BFA = \angle BFD + \angle DFA < \frac{1}{2}\pi$．したがって $\angle A + \angle B < \angle BAF + \angle B < \frac{1}{2}\pi$．すなわち，$\triangle ABC$ の内角の和が二直角より小さい．逆は容易に示せます．



つまり，いわゆる「中点連結定理」はユークリッド幾何学のみで成り立つ定理です．ところで，上図において，明らかに DE ∥ ACですが，点 D から辺 AF に垂線を下ろしその交点を G とすると $\triangle DBF$ および $\triangle DFA$ が二等辺三角形ですから DG は DE

とも直交していますから，DE ∥ AF でもあります．つまり点 A を通って直線 DE に平行な直線が 2 本以上あることになります．

同様に「ピタゴラスの定理」もユークリッド幾何学における定理です．「平行の公理」が成り立たないとして，「ピタゴラスの定理」が成り立たない例を挙げましょう．



上図の様に，△ABC は ∠A が直角の二等辺三角形とします．頂点 A から底辺 BC に垂線を下ろしその交点を D とします．ここで BD = DC，および ∠BAD = ∠CAD = $\frac{1}{2}$∠A が成り立ちます．BD = DC = a，AD = b と置くと，「a > b ⇔ $\frac{1}{2}$∠A > ∠B ⇔ △ABC の内角の和が 2 直角より小さい」であることから，ピタゴラスの定理が成り立たないことが導けます．したがって，次の定理が得られました．

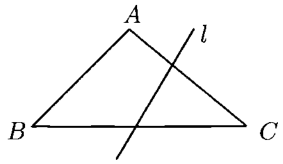
［定理 4］ 絶対幾何学において，
「平行の公理」⇔「三角形の内角の和が二直角」⇔「ピタゴラスの定理」が成り立つ．

［注意］ 面積に関して，定理 2 で見た様に，三角形 T に対して $\tau(\mathrm{T}) = \pi - \sigma$（ここで σ は T の内角の和）は面積を定義します．実際，ボリヤイ・ロバチェフスキー幾何学において「面積」は定数倍を除いてこのかたちで与えられることが示されます．特に，三角形の面積はその内角のみで決まってしまうことになります．

3　パッシュの公理とジョルダンの曲線定理

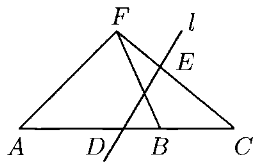
三角形の「内部」をきちんと定義しようとするとその難しさに気づかされます．「三角形の各頂点とその対辺の中点を結ぶ直線はその三角形の「内部」の 1 点で交わる」の厳密な証明を与えるには「内部」をきちんと理解する必要があります．命題 3 と命題 4 の証明において，ある頂点が三角形の「外部」あることを使いました．定理 3 おいては，三角形の頂点からその三角形の「内部」に入る直線はその対辺と交わることを使いました．これらの直感的には明らかであるが何となくしっくりしない主張はすべて次の「パッシュの公理」に帰着されることが分かります．

［パッシュの公理］ 三角形 ABC のいずれの頂点も通らない直線 l は，3 つの辺 AB, BC, CA のいずれとも交わらないか，その二つと交わって他の一つと交わらない．



「パッシュの公理」は，点 A, B, C が同一直線上にあっても成り立ちます．すなわち，

［命題 6］一直線上の 3 点 A, B, C のいずれにも交わらない直線は 3 つの線分 AB, BC, CA のいずれとも交わらないか，その二つと交わって他の一つと交わらない．



証明は次の様になります．l が線分 AB と点 D で交わるとし，l 上に D と異なる点 E を取る．線分 CE の E 側の延長上に点 F を取る．l が線分 BC と交わらないとすると，△FBC に関して l は線分 FB と交わる．△FAB に関して l は線分 FA と交わらない．したがって，△FAC に関して l は線分 AC に交わる．

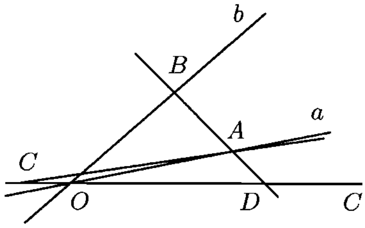
「パッシュの公理」を使うと，任意の直線 l に関して，直線 l にない点全体は共通部分のない 2 つの領域 Δ^+ と Δ^- に分割されることが分かります．すなわち，直線 l にない 2 点 A, B が同じ領域にある

のは線分 AB が l と交わらないときに限ると定義します．直線 l の点 Q と l 上にない P を取り線分 PQ の Q 側の延長上に点 R を取ると，直線 l にない点全体は点 P を含む領域 Δ_P と点 R を含む領域 Δ_R に分割されます．「パッシュの公理」より２つの領域は点 P, Q, R の取り方に依らずに定まります．

さて，角 ∠AOB の「内部」を直線 OA の B を含む領域 Δ_B と直線 OB の A を含む領域 Δ_A の共通部分と定義します．また三角形 ABC の内部を直線 BC の A を含む領域 Δ_A，直線 CA の B を含む領域 Δ_B および直線 AB の C を含む領域 Δ_C の共通部分と定義します．

［命題７］半直線 OC が線分 AB と交われば点 C は角 ∠AOB の「内部」にある．逆に，点 C が角 ∠AOB の「内部」にあれば半直線 OC は線分 AB と交わる．

半直線 OC が線分 AB と点 D で交わるとすると，線分 CD および線分 BD は直線 OA と交わらないので点 C は領域 Δ_B にあり，同様に領域 Δ_A にあることが分かります．逆の証明はその対偶「半直線OC が線分 AB と交わらないならば点 C は角 ∠AOB の「内部」に属さない」を示します．半直線 OC が直線 AB と点 D で交わるときは明らかに点 C は直線 a に関して Δ_B に属しません．半直線 OC が直線 AB と交わらないときは点 C は直線 b に関して Δ_A に属しません．したがって，どちらの場合も点 C は角 ∠AOB の「内部」に属しません．



［注意］ 命題７によって例えば，「三角形の各頂点とその対辺の中点を結ぶ直線はその三角形の「内部」の１点で交わる」の厳密な証明が与えられます．各頂点とその対辺の中点を結ぶ線分は三角形の「内部」にあるから，まず２中線の交点を G とし，もうひとつの中線も G を通ることを示せばよい．

［命題８］三角形 ABC はその上にない点全体を「内部」と「外部」に分割し，内部の点 P と外部の点 Q を結ぶ線分 PQ は必ず三角形 ABC と交わる．

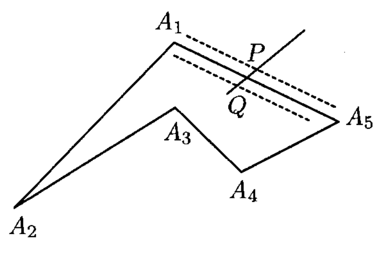
証明は次の様になります．半直線 PQ は，三角形の頂点 A, B, C のいずれとも通らないとすると，∠APB, ∠BPC, ∠CPA のいずれかの内部に含まれる．点 Q は直線 AB, BC, CA に関して点 P と異なる領域に属しているから線分 PQ は辺 AB, BC, CA のいずれかと交わる．

命題８の多角形への一般化は「ジョルダンの曲線定理」と呼ばれる単純閉曲線に関するトポロジーの有名な定理の特別な場合になります．

［定理５］多角形 $A_1A_2\cdots A_n$ はその上にない点全体を「内部」と「外部」に分割し，内部の点 P と外部の点 Q を結ぶ線分 PQ は必ず多角形 $A_1A_2\cdots A_n$ と交わる．

証明は次のアイデアに基づいて示せます．多角形 $A_1A_2\cdots A_n$ 上を動点 Q が頂点 A_1 から A_n を通って A_1 に戻るとき，内部の点 P に対しては，$\angle A_1PA_2, \ldots, \angle A_nPA_1$ の和 $\tau(P)$ は角度の正負を考慮に入れると丁度 2π に成ります．一方，外部の点 P に対しては $\tau(P)$ は 0 になります．そこで，多角形 $A_1A_2\cdots A_n$ の「内部」「外部」をそれぞれ $\tau(P)$ が 2π，0 になる点の全体と定義すればよいと分かります．

まず多角形 $A_1A_2\cdots A_n$ から十分離れたところに点 P を取れば明らかに $\tau(P)$ は 0 です．点 P から多角形 $A_1A_2\cdots A_n$ のどの頂点を通らずに，またどの辺とも平行にならない様に多角形 $A_1A_2\cdots A_n$ と交わる半直線 PQ を引きます．半直線 PQ が最初に交わる辺との交点を R とすると線分 PR 上では τ は 0 のままで，交点 R を超えるときに τ は 0 から π に変わります．点 P を改めて交点 R の十分近くに取り，点 Q も交点 R の十分近くに取って $\tau(Q)=\pi$ と出来ます．



さて，まず多角形$A_1A_2\cdots A_n$の各辺A_iA_{i+1}の両側に辺A_iA_{i+1}に平行かつ十分近くに辺$A'_iA'_{i+1}$と辺$A''_iA''_{i+1}$を取りそれらを繋いで多角形$A'_1A'_2\cdots A'_n$および多角形$A''_1A''_2\cdots A''_n$をそれぞれ点P，点Qを通り，多角形$A_1A_2\cdots A_n$と交わらない様に作ります．多角形$A'_1A'_2\cdots A'_n$上ではτは0，多角形$A''_1A''_2\cdots A''_n$上ではτはπです．

$\tau(P')=0$である点P'は点Pと「外部」に含まれる折れ線で結べることを示します．実際，上の議論で点Pを定めたときの様に，点P'から半直線を多角形$A_1A_2\cdots A_n$と交わる様に取り，その最初に交わる点をR'とします．線分$R'P'$上では$\tau=0$ですから，線分$R'P'$またはそのP'側の延長と多角形$A'_1A'_2\cdots A'_n$との交点をTとすると，線分$P'T$上で$\tau=0$です．したがって点P'は点Pと「外部」に含まれる折れ線で結べることになります．同様にして，$\tau(Q')=0$である点Q'は点Qと折れ線で結べることが示せます．

最後に，$\tau(P')=0$である点P'と$\tau(Q')=\pi$である点Q'を結ぶ折れ線は必ず多角形$A_1A_2\cdots A_n$と交わることを示します．しかし，折れ線上の十分小さい部分では，上で議論した様にτが変わるのは多角形$A_1A_2\cdots A_n$と交わるときですから，もしこの折れ線が多角形$A_1A_2\cdots A_n$と交わらなければどの小さい部分においてもτは変化しないはずです．したがって全体としてもτは変化しないことになり仮定の$\tau(P')=0$かつ$\tau(Q')=\pi$に矛盾します．

4 作図問題とオリガミの幾何学

ユークリッド平面における「作図問題」とは「与えられた有限個の点（図形）から有限回のある決められた操作で，ある新たな点（図形）が作図できるか」という問題です．コンパスと定規による作図問題が歴史的にも有名です．平面上の点(x, y)を複素数$x+yi$で表し，作図可能な複素数点全体が四則演算について閉じていれば，問題を代数的に扱うことが出来ます．例えば「与えられた角の3等分はコンパスと定規による作図可能か」の問題は，代数の問題に帰着され，比較的容易に答えることが出来ます．すなわち，与えられた2点O, Eをそれぞれ原点と1に対応させ，実軸，虚軸を取り複素座標が導入出来ます．作図可能な複素数α，βに対して$\alpha\pm\beta$，$\alpha\beta$，α/βは作図可能であることは容易に示せます．したがってコンパスと定規による作図可能な複素数全体は四則演算について閉じたいわゆる「体」を成すことが分かります．特に有理数Qや有理複素数$\gamma=p+qi, (p, q\in Q)$は作図可能です．その他にも$\sqrt{2}$や一般に$\sqrt{p}, (p\in Q)$も作図可能です．

さて，コンパスと定規による作図は，与えられた点Pを中心として与えられた半径の円rを描き，直線や別の円との交点を求める操作ですから，与えられた複素数α_i，β_j $(i, j=1, 2, \ldots)$と正の実数rjに対して，直線の方程式：$\alpha_i\bar{z}+\overline{\alpha_i}z=\beta_i$，円の方程式：$|z-\alpha|_j^2=r_j^2$の共通根を求める問題になります．ところが，円の方程式達の2次の係数はすべて1ですから，円の方程式は一つだけの場合に帰着され，したがって連立2次方程式の根を求める問題に帰着されます．逆に連立2次方程式の根は（存在すれば）コンパスと定規により求められることは，与えられた複素数αに対して$\sqrt{\alpha}$が作図可能であることから明らかでしょう．

結局，複素数βがコンパスと定規による作図可能であるのは，有理複素数$\overline{Q}$に，ある$\overline{Q}$係数の2次方程式の根α_1 $(\alpha_1\not\in\overline{Q})$を「付加」して出来る$\overline{Q}$の拡大体$K_1=\overline{Q}(\alpha_1)$，$K_1$係数の2次方程式の根$\alpha_2$ $(\alpha_2\not\in K_1)$を「付加」して出来るK_1の拡大体$K_2=K_1(\alpha_2)$，と拡大体の列$K_i, i=1, 2, \ldots$を取って，$\beta\in K_n$となるK_nが存在するときかつそのときに限る，ということに成ります．ここで，拡大体$K_1=\overline{Q}(\alpha_1)$とは，$p+q\alpha$ $(p, q\in\overline{Q})$全体の複素数のことで，$\overline{Q}$を含む「体」であって，$\overline{Q}$上のベクトル空間として次元は2です．したがってK_nの$\overline{Q}$の次元は2^nです．このことから3次方程式は一般にコンパスと定規による作図不可能であることが分かります．なぜなら既約な3次方程式の根を「付加」した拡大体は一般にその係数体上3次または6次のベクトル空間になるからです．例を挙げると，3次方程式$x^3-2=0$の根は$\sqrt[3]{2}$，$\omega\sqrt[3]{2}$，$\omega^2\sqrt[3]{2}$，ここで$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$は2次方程式$x^2+x+1=0$の一つの根で，$K_1=\overline{Q}(\omega)$，$K_2=K_1(\sqrt[3]{2})$とおくと，$K_1$は$\overline{Q}$の2次の拡大体，$K_2$は$K_1$の3次の拡大体に成ります．上の議論より$\omega$はコンパスと定規による作図可能ですが，$\sqrt[3]{2}$は作図不可能です．

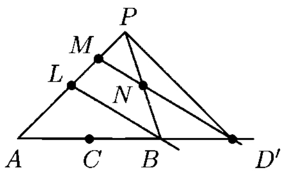
次に，オリガミによる作図の問題について考えてみます．オリガミの「折る」操作は折線を作ることと考えると，(1) 2点A, Bを結ぶ折線，(2)点Aを点Bに重ねる折れ線，(3) 2点A, Bと直線a, bに

対して，点Ａを直線ａに重ね，かつ点Ｂを直線ｂに重ねる折れ線，を作図することと考えられます．藤田文章氏らの考案による「オリガミの公理系」の原型にはこれら以外に(4)直線ａを直線ｂに重ねる折れ線，(5)点Ｐを通り直線 l に垂直な折れ線，(6)点Ａと直線ａ，ｂに対して，点Ａを直線ａに重ね，かつ点ｂに垂直な折れ線，(7) ２点Ａ，Ｂと直線ａに対して，点Ａを直線ａに重ね，かつ点Ｂを通る折れ線，が含まれています．ただし，これから見る様に，これらは上の３つの操作によって作図可能です．また，これらの３つの操作の中で，特に(3)がオリガミ独自の操作と思われますので，後で考察する「オリガミの幾何学の公理系」において，(3)を「オリガミの公理」として扱います．

まず，(1)，(2)だけで作図可能な点（図形）について考察します．

［補題２］ ２点Ａ，Ｂを結ぶ直線 l 上に，Ａ，Ｂの中点Ｃ，およびＢを中点とする点Ｄは作図可能．

(2)よりＡ，Ｂの中点Ｃは作図可能．直線 l 上にない点Ｐを取り，線分PAの中点Ｌ，線分PLの中点Ｍ，および線分PBの中点Ｎを取る．直線MNと l の交点D′とするとAB＝CD′が成り立つ．同様にして，CD′＝BDを満たす点Ｄを取ればよい．



［補題３］ 直線 l 上にない点Ｐを通って l に平行な直線ｍは作図可能．

直線 l 上の点Ａ，Ｂに対し，点Ｑを点Ｐが線分QAの中点となる様に取り，点Ｐと線分QBの中点Ｒを結ぶ直線をｍとすればよい．

［補題４］ 直線 l 上にない点Ｐから l への垂線ｍは作図可能．

直線 l 上に垂線ｍ′を取り，点Ｐを通りｍ′に平行な直線をｍとすればよい．

［補題５］ 直線 l 上にない点Ｐの l に関する対称点Ｑ（鏡映点）は作図可能．

点Ｐから l への垂線ｍを取り l と交点をＲとする．補題２よりｍ上にＲを中点とする線分PQを取ればよい．

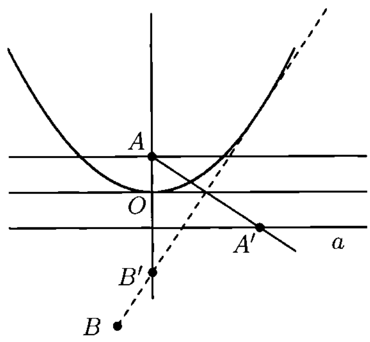
［注意］(5)は，補題４から明らかに作図可能．(6)は，点Ａを通りｂに平行な直線 l を取りａとの交点をＢとし，(2)を使えばよい．(7)は，(3)において，点Ｂが直線ｂ上にある場合にあたります．さらに(4)は，次の補題に示す様に(1)，(2)および(7)から，したがって(1)，(2)，(3)から導けることになります．

［補題６］ 直線ａ，ｂの２等分線 l は作図可能．

直線ａ，ｂが点Ｏで交わっているとき，ａ上にＯ以外の点Ｂを取ると，(7)よりＢをｂに重ねＯを通る直線 l が作図可能．ａ，ｂが平行なとき，補題４より，ａ上の２点 A_1，A_2 からｂへ下ろした垂線の足をそれぞれ B_1，B_2 とする．線分 A_1B_1 の中点と線分 A_2B_2 の中点を結ぶ直線 l は作図可能．

以下，(3)（および(7)）について詳しく考察します．

まず，(7)の「２点Ａ，Ｂと直線ａに対して，点Ａを直線ａに重ね，かつ点Ｂを通る折れ線」はＡを焦点としａを準線とする放物線の接線でＢを通るものを求めることになります．下図において，Ｏを原点とすると，Ａ(0, 1)，ａ：y＝－1，B′(0, －r)に対して，作図された点A′のx座標がちょうど $2\sqrt{r}$ になります．放物線は $y=\frac{1}{4}x^2$ で与えられます．



［注意］ 上の図で，点Ｂが放物線の上側にあるときは明らかに接線は引けません．つまり，この(7)の作図はいつでも可能とは限らない．

次に，(3)「2点A，Bと直線a，bに対して，点Aを直線aに重ね，かつ点Bを直線bに重ねる折れ線」はAを焦点としaを準線とする放物線とBを焦点としbを準線とする放物線との共通接線を求めることになります．(7)はBがb上にある場合として含まれます．ただし，次の補題で示す様に，(3)の作図は常に可能です．(7)の作図は条件がより強い訳です．

［補題7］ 2つの放物線γ_1, γ_2は，それらの準線が平行である場合を除いて少なくとも一つ共通接線が引ける．

一般に，平面上で直線が曲線に接しているということは，平面上のアファイン変換：

$$x = c_{11}x' + c_{12}y' + d_1,\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + d_2,$$

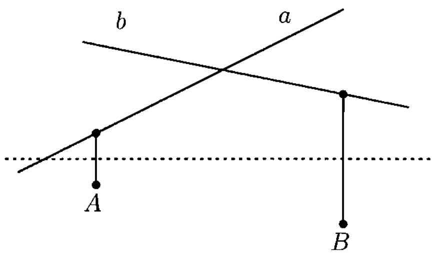
ここで(c_{ij})は2次正則行列，によって変わりません．したがって，はじめから2つの放物線の準線は直交していて，さらに，γ_1，γ_2は

$$\gamma_1 : x = \frac{1}{4r}y^2,\ \gamma_2 : y = \frac{1}{4}(x-p)^2 - q$$

のかたちであると出来ます．共通接線の傾きλ，γ_1との接点を(x_1, y_1)，γ_2との接点を(x_2, y_2)とすると，$\lambda = \frac{2r}{y_1} = \frac{1}{2}(x_2 - p)$が得られます．これにより，$\lambda(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)$を$\lambda$の方程式に書き直すと，

$$\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0$$

が得られ，この3次方程式の実解に共通接線が対応することになります．3次方程式は少なくとも一つの実解を持ちますから，少なくとも一つ共通接線が引けることになります．



［注意］ 与えられた実係数p，q，rに対して上の3次方程式の実解が(3)によって求められます．

以上の議論によって，与えられた実係数の2次および3次方程式の実解が，オリガミの「折る」操作によって求められることが分かりました．作図可能な複素数はその実部と虚部がともに作図可能な実数ですから，複素係数の2次および3次方程式の場合も実係数の場合に帰着されます．

結論として，オリガミによる作図可能な複素数全体は，平方根および立方根をとる操作で閉じた複素体Cの最小な部分体ということになります．

5 ユークリッド平面幾何学の公理系

オリガミの「折る」操作はユークリッド平面上の合同変換としてみると「鏡映」と見なせます．良く知られている様に，平面上の合同変換（例えば，平行移動，回転，斜行）は「鏡映」の積で表されます．この最後の節において，ヒルベルトの「公理系」とはひと味違った，クライン流の「変換群」を幾何学の中心に据えて，より直感的な「ユークリッド平面幾何学の公理系」を考察します．

「群」とはその上に演算を持った集合Gで，演算に関して，

(1) 任意のf，g，h∈Gに対して，(f・g)・h＝f・(g・h)（結合律）の成立，
(2) 任意のg∈Gに対して，g・e＝e・g＝gを満たす単位元eの存在，
(3) 任意のg∈Gに対して，$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$を満たす逆元$g^{-1}$の存在，

が成り立つものです．

集合上X上の「群Gの作用」とは，g∈Gとx∈Xに対して，g・x∈Xが定まって，(i)(g・h)・x＝g・(h・x)，(ii) e・x＝x，が成り立つものです．任意のx∈Xに対してg・x＝xならば，g＝e，が成り立つとき，作用は「効果的」である，任意のx，y∈Xに対して，g・x＝yと満たすg∈Gが存在するとき「推移的」であると言います．任意のg∈GはX上の変換（上への1対1写像）を定めます，効果的かつ推移的なGをX上の「変換群」といいます．

［ユークリッド平面幾何学の公理系］

点の集合Pと直線の集合L及びPとL上の変換群Gで次の公理を満たしているものを考える．

(1) **「2点A，Bに対して直線l_{AB}が唯一に定まる．」**
このとき2点A，Bは直線l_{AB}上にある，または直線l_{AB}は点A，Bを通るという．
(2) **「一直線上にない点が存在する．」**

(3) **「直線 l と l 上の点Pに対して共通部分のない l^+，l^-（l^+，$l^- \neq \emptyset$）が定まって，$l-\{P\}=l^- \cup l^+$ が成り立つ.」**l^+，l^- をPから出る半直線という．AからBを含む半直線を l_A^+，BからAを含む半直線を l_B^- として，$l_A^+ \cap l_B^-$ を線分ABという．

(4) **「線分AB内の点Cに対して，l_{AB} 上の点D, Eで，DCはAを，CEはBを含むものが存在する.」**

(5) **「［パッシュの公理］が成り立つ.」**

(6) **「直線 l に対して次の条件を満たす変換 Φ_l が存在する.」**

(i) $\Phi_l^2 = I$

(ii) $\Phi_l | l = I$

(iii) $\Phi_l(\Delta^+) = \Delta^-$

(iv) $\Phi_l(l_{AB}) = l_{\Phi_l(A)\Phi_l(B)}$

(7) **「$\Phi(P)=P$, $\Phi(l_P^+)=l_P^+$ を満たす変換Φは，恒等変換Iまたは Φ_l に限る.」**ただし，l_P^+，l_P^- はPから出る半直線.

(8) **「2点A, Bに対して $\Phi_l(A)=B$ を満たす直線 l が存在する.」**

(9) **「変換群Gは $\{\Phi_l\}$，$l \in L$ で生成される.」**すなわち，任意の変換Φは有限個の Φ_l ($l\in L$) の積で表せる.

(10) **「2直線a, bに対して $\Phi_l(a)=b$ を満たす直線 l が存在する.」**

(11) **「［平行の公理］が成り立つ.」**

「ユークリッド平面幾何学の公理系」は，さらに**［連続の公理］**を加えたものです.「オリガミの幾何学の公理系」は(10)を次の公理で置き換えたものです.

［オリガミの公理］2点A, Bと交わる2直線a, bに対し，直線 l で $\Phi_l(A)$ がa上に，$\Phi_l(B)$ がb上にあるものが存在する.

(1)から(5)までは結合・順序の公理，(6)から(10)までは合同の公理にあたります．まず，結合・順序の公理から，直線上の順序を定義します．

［補題8］線分ABに対して，点CがAB上にある為の必要十分条件は，Cから出る半直線 l_C^-，l_C^+ が $A\in l_C^-$，$B \in l_C^+$ を満たすことである.

$C\in AB$ とすると，B, $C \in l_A^+$ かつA, $C\in l_B^-$ が成り立つ．公理(4)より，点D，Eが存在して，$A\in l_C^-$，$C\in l_D^+$，かつ $B \in l_C^+$，$B\in l_E^-$ が成り立つ．同様に，逆も成り立つ．

［補題9］点Cが線分AB内にあるとき，線分ACおよびCBは線分ABに含まれる.

$AC\cap CB=\emptyset$ ゆえ，パッシュの公理より，$P\in AC$ ならば $P\in AB$，$P\in CB$ ならば $P\in AB$ が成り立つ．

［補題10］直線 l 上の点Oに関する半直線 l^+ (l^-) 上の2点A, Bに対して，$AB\subset l^+$ (l^-) が成り立つ.

$A\in l_B^-$ ならば $A\in OB$，$A\in l_B^+$ ならば $B\in OA$ が成り立つ．補題9より，それぞれ $AB\subset OB$，$BA\subset OA$ が成り立ち，$OB\subset l^+$，$OA\subset l^+$ であるから，$AB\subset l^+$ が成り立つ．

［命題9］直線 l 上の点Oから出る半直線を l^+，l^- とする．Oにおいて l と交わる直線mに関する領域を Δ^+，Δ^- とすると，$l^+=\Delta^+\cap l$，$l^-=\Delta^-\cap l$，または，$l^+=\Delta^-\cap l$，$l^-=\Delta^+\cap l$ が成り立つ.

l^+，l^- からそれぞれ点A, Bを取ると，線分ABはmとOで交わるからA, Bはmに関して異なる領域に属します．$A\in\Delta^-$，$B\in\Delta^+$ とします．補題10より，$P\in l^-$ に対し $AP\subset l^-$ であるから，$P\in\Delta^-$，すなわち $l^-\subset\Delta^-$．同様にして，$l^+\subset\Delta^+$．したがって $l^+=\Delta^+\cap l$，$l^-=\Delta^-\cap l$ が成り立つ．

直線 l 上に次の様に「順序」を定義します．すなわち，直線 l 上の点Oを取りOから出る半直線 l^+，l^- を定めます．2点A, Bに対して，$A, B\in l^+$ のときは線分OBがAを含むとき，$A, B\in l^-$ ときは線分AOがBを含むとき，および $A\in l^-$，$B\in l^+$ のとき，$A<B$，と定義します．

補題10より，$A, B\in l^+$ のとき，$A\in OB$ または $B\in OA$ が成り立つから，それぞれ $A<B$ または $B<A$ が成り立つ．他の場合も同様．したがって，任意の2点A, Bに対して $A<B$ または $B<A$ が成り立つ．推移律 $A<B$ かつ $B<C$ ならば $A<C$ も容易に示せます．$A<B$ または $A=B$ のとき $A\le B$ と定義すると，直線 l は $\le$ における「全順序」を定める．

［注意］次の補題より，$A, B\in l^+$ (l^-) に対して，$A\le B \Leftrightarrow OA\subset OB$ ($OA\supset OB$) が成り立つ．

［補題11］任意の線分ABは空でない．特に，$OA=OB \Leftrightarrow A=B$ が成り立つ.

直線 l_{AB} 上にない点Cを取り，線分ACのC側の延長上に点Dを取る．線分DBのB側の延長上に点Eを取り，CとEを結ぶ直線をmとする．こ

のとき，三角形 DAB において，m は DA と C において交わり，DB とは交わらない．したがって，パッシュの公理より，m は AB と交わる．

集合 L 上の「全順序≤」とは，任意の A, B ∈ L に対して A ≤ B または B ≤ A が成り立ち，(1) A ≤ A, (2) A ≤ B, B ≤ C ⇔ A ≤ C, (3) A ≤ B かつ B ≤ A ならば A = B，が成り立つときをいう．

全順序集合 {L; ≤} において，部分集合 M の任意の元 x に対して x ≤ m (x ≥ m) を満たす m ∈ M を M の最大元（最小元）という．全順序集合 {L; ≤} が「連続」であるとは，M の任意の「切断」，すなわち二つの部分集合 M, N (M ∩ N = ∅, L = M ∪ N) で，任意の (x, y) ∈ M × N に対して x ≤ y を満たすものに対して，M の最大限 m または N の最小元 n のいずれか一方のみが存在するときをいう．

[連続の公理] 直線は順序 ≤ に関して連続である．

[注意] 整数 Z の任意の切断は最大元，最小元を持つ．有理数 Q の切断で最大元，最小元を持たないものがある．実数 R は連続な全順序集合である．

同一直線上にない点 O と 2 点 A, B に対し，直線 l_{OA} の B を含む領域を Δ^+_A，直線 l_{OB} の A を含む領域を Δ^-_B として，$\Delta^+_A \cap \Delta^-_B$ を角 AOB（∠AOB と表す）という．直線 l, m が垂直であるとは，$\Phi_l(m) = m$, $\Phi_m(l) = l$ が成り立つときをいう．任意の直線 l と点 P に対し，P から l への垂線が唯一存在する．

[注意] 線分 AB は単に点 A, B の対 {A, B} と定義して，その内部を公理(3)にある様に定義してもよい．同様に，角 AOB も，点 O から出る半直線 l^+, m^+ の対 {l^+, m^+} とも定義出来ます．三角形 ABC は単に 3 点集合 {A, B, C} としても，3 頂点 A, B, C と 3 辺 AB, BC, CA から成る集合（図形）としても定義出来ます．

次に，「合同」の概念を導入します．線分 AB と線分 CD が合同（AB ≡ A′B′）とは，変換 Φ で Φ(A) = A′, Φ(B) = B′ となるものが存在するときとします．このとき，公理(6)より Φ は直線 l_{AB} を直線 $l_{A'B'}$ に移します．また公理(7)より，この様な変換 Φ は $\Phi_{l_{AB}}$ または $\Phi_{l_{A'B'}}$ を除き一意的に決まります．∠AOB と ∠A′O′B′ が合同（∠AOB ≡ ∠A′O′B′）とは，変換 Φ で $\Phi(l^+_{OA}) = l^+_{O'A'}$, $\Phi(l^+_{OB}) = l^+_{O'B'}$ となるが存在するときとします．ただし，ここで l^+_{OA} は直線 l_{OA} の A を含む半直線，l^+_{OB} は直線 l_{OB} の B を含む半直線を表す．

三角形 ABC が三角形 A′B′C′ が合同（△ABC ≡ △A′B′C′）とは，変換 Φ で Φ(A) = A′, Φ(B) = B′, Φ(C) = C′ となるものが存在するときとします．このとき，Φ(AB) = A′B′, Φ(BC) = B′C′, Φ(CA) = C′A′ が成り立ちます．三角形の合同条件の一つ「二辺夾角相等」を示します．

[補題12] 任意の線分 AB と点 O から出る半直線 l^+ に対し，l^+ 上の点 C で AB ≡ OC となるものが一意的に存在する．任意の角 AOB と点 O′ から出る半直線 l^+ に対し，点 O′ から出る半直線 m^+ で，A′, B′ をそれぞれ l^+, m^+ から取ると，∠A′O′B′ ≡ ∠AOB となるものが Φ_l を除いて一意的に存在する．

公理10より，直線 l_{AB} を直線 l に移す変換を取り，さらに公理(8)より Φ(A) を O に移す変換を取る．必要があればさらに点 O における l の垂線 m に関する Φ_m を取って，B は l^+ 上の点 C に移すことが出来る．補題11より，点 C は一意的に定まる．角の場合も同様にして示すことが出来ます．

[命題10] △ABC と △A′B′C′ において，AB ≡ A′B′, AC ≡ A′C′, ∠BAC ≡ ∠B′A′C′ ならば，△ABC ≡ A′B′C′．

線分 AB を線分 A′B′ に移す変換 Φ を取る．必要であれば $\Phi_{l_{A'B'}}$ をさらに取ると，$\Phi(l_{AC})$ と $l_{A'C'}$ は $l_{A'B'}$ に関して同じ領域に属する様に出来る．∠BAC ≡ B′A′C′ より，$l_{AC} = l_{A'C'}$ となり，さらに AC ≡ A′C′ であることから，Φ(C) = C′ でなくてはならない．

公理(8)より，任意の線分 OE の中点 M が存在する．また C を B に移す変換により A は B が AN の中点となる様な点 N に移る．繰り返すことで，任意の m, n ∈ N に対して，mAB および $\frac{1}{2^n}$ AB が取れる．したがって，線分 OE の長さを 1 として直線上の点と有理数が 1 対 1 対応が取れます．「連続の公理」より直線と実数 R の全順序集合としての 1 対 1 対応が存在することが分かります．

[注意] 直線と R が全順序集合として同型であることは，（平行の公理を除いた）絶対幾何学において成り立つ性質です．

オリガミの公理系は「連続の公理」の独立性を示しています．すなわち，「連続の公理」が成り立た

ない「モデル」として「オリガミの幾何学」を捉えることが出来ます．一方，「ユークリッド平面幾何学の公理系」はその「モデル」が一意的に定まり，その意味で「完備」であるといわれます．「オリガミの幾何学」は可算集合上のモデルであり，より身近な幾何学といえます．

参考文献

［1］D. ヒルベルト：幾何学基礎論，ちくま学芸文庫，2005.
［2］小平邦彦：幾何学への誘い，岩波現代文庫，1991.
［3］A.B. パガレロフ：幾何学の基礎，内田老鶴圃，1980.