分数の定義を根拠とする分数の性質の説明
── 明治検定期・第II期の算術教科書を対象として ──

岡　野　　勉*

目　次

0．はじめに

分数には，《分割分数の理論》$\left(\frac{b}{a}=(1\div a)\times b-\frac{1}{a}\times b\right)$，《商分数の論理》$\left(\frac{b}{a}=(1\times b)\div a=b\div a\right)$，2通りの意味があり，従って，分数を定義する方法としては2通りの方法が存在する．この点は，例えば，2010（平成20）年に改訂された学習指導要領において，次の形で記されている（順に，第3学年，第5学年）[1]．

分数は，単位分数の幾つ分かで表せることを知ること．

整数の除法の結果は，分数を用いると常に一つの数として表すことができることを理解すること．

上記の引用に示されている通り，今日の学習指導要領においては，分数を定義する方法として，《分割分数の論理》に依拠する方法，《商分数の論理》に依拠する方法，2通りの方法が区別されている．しかしながら，学習指導要領においては，両者が区別されるに止まり，両者の同一性 $\left(\frac{b}{a}=(1\div a)\times b-(1\times b)\div a\right)$ を示す説明は含まれていない．この点については，平成20年改訂の学習指導要領に止まらず，戦後に発行された学習指導要領・教科書における分数論 ── 学校数学としての分数論 ── に見られる一般的な特徴として位置付けることが可能である．

しかしながら，《分割分数の論理》と《商分数の論理》の同一性は，数としての分数の成立根拠を示す重要な事実である．従って，分数の説明においては，この点に関する説明が必要となる．逆に，この点を欠いた説明は，分数の説明としての一面性を免れることはできない[2]．

日本の算数・数学教育の歴史において，上記の観点に基づく分数論 ── 初等数学としての分数論 ── は，明治検定期（1886年～1904年）の算術教科書において，その原型が形成されている．この点については，特に，第I期・前期（1886年～1891年）の教科書において，その具体的な形態が示されている[3]．第II期（1900年～1904年）の教科書においても，《分割分数の論理》，《商分数の論理》，2つの論理の同一性を示す説明が，多様な方法によって試みられている[4]．

第II期の教科書においては，上記に加え，分数の性質が，《分割分数の論理》，《商分数の論理》，2通りの論理に依拠する方法によって説明されている[5]．この特徴は，第I期・前期の教科書においても，第I期・後期（1892年～1899年）の教科書においても見ることができない．その意味において，第II期の教科書に独自な特徴である．本論文においては，こ

2010.11.15　受理
*教育科学講座

の点に注目する.

上記の特徴においては，その基礎に，《教育内容となる概念・法則の成立を，定義を根拠・理由とする方法によって説明しようとする観点》が設定されている．この点については，現在においても継承・発展を図るべき貴重な遺産として注目に値する.

全般的な特徴として，第II期の教科書においては，第I期・後期の教科書において進行した，第I期・前期の教科書に対する部分的変容の過程が継承されていると同時に(6)，分数を構成する個別の教育内容について，独自の観点・方法に基づく新しい試みが行われている．ただし，新しい試みのすべてが成功的な形で具体化されているわけではない．本論文が対象とする分数の性質についても，特に，《商分数の論理》に依拠した説明の方法に問題点が含まれている点は否定できない．本論文においては，この点に対応する形で，問題点の所在，および，問題点を発生させる要因についても対象に含めることにする．なお，成功的な形で具体化が図られている場合については，それを可能にした要因を明らかにする.

上記により，本論文においては，第II期の教科書が備えていた重要な側面の一端を解明すると同時に，現在または近未来において，その継承・発展を図るために必要な観点を示すことを課題とする.

主要な分析対象とする教科書は次の通りである.

① 学海指針社編『小学算術』高等科教員用，巻2，集英堂，1901（明治34）年.

② 金港堂編『高等算術教科書』教員用，巻2，金港堂，1901（明治34）年.

③ 田中矢徳校閲・金澤長吉編『高等小学筆算教授書』巻2，共益商社，1901（明治34）年.

④ 長澤亀之助編纂・後藤胤保補修『小学算術教科書』高等小学校教員用2年，修正再版，開成館，1902（明治35）年.

⑤ 総川猪之吉編『高等小学教授用算術書』巻1，松栄堂，1903（明治36）年.

次に，《分割分数の論理》，《商分数の論理》，2通りの方法による説明の対象となっている分数の性質を示す（（　）内には，教科書における記述内容と教科書の名称を記した）.

(1) 《約分・倍分の原理》（「分数の分母子を同数にて割り得ること」，学海指針社の教科書（①），「分数ノ分母及ビ分子ヲ同数ニテ乗除スルモ，其ノ値ヲ変セズ」，金港堂の教科書（②））.

(2) 《仮分数→帯分数（整数を含む）の変形》（「仮分数を化して整数若くば混分数［帯分数］とするには，分母を法［除数］とし，分子を実［被除数］としたる除法の商を以て答数とす」（「仮分数化法」），総川猪之吉の教科書（⑤））.

(3) 《分数と整数1との関係》（「分数の分子が分母に等しきときは，その分数は1に等し」，長澤亀之助・後藤胤保の教科書（④））.

(4) 《整数→仮分数の変形》（「整数を仮分数に改むる方法」，学海指針社の教科書（①），「整数を仮分数に化するには，題なる整数に，任意に1又は他の或数を乗じ（中略），之を仮分数の分子とし，件の乗数を其分母とす」（「整数化法」），総川猪之吉の教科書（⑤））.

上記の内，学海指針社の教科書（①）による次の説明においては，本論文が注目する特徴の一端が明確な形で記されている（第1編「分数」，第3課「仮分数帯分数」）.

（注意）右［「分数の二通りの意義」］は，分数の観念中，最も必要なることの一なれば，充分に之を会得せしむるまでは，決して次へ進む可からず．（中略）已に分数の二通りの意義が，全く同一なることを理解せば，是より以後は，場合に依りて，都合のよき方の意義に随ひて説明すべし．仮分数を帯分数に改むる仕方の説明の如きは，第二の意義に随へば，何の造作もなく理解せしむることを得ん(7).

次に，田中矢徳・金澤長吉の教科書（③）においては，(2)(3)(4)について，《商分数の論理》に依拠した説明が行われる止まり，《分割分数の論理》に依拠した説明が行われているわけではない．この点に加え，分数の定義の導入過程においては，《分割分数の論理》と《商分数の論理》の同一性に関する説明を欠いた形で，定義の方法が前者から後者へと移行している.

上記2点により，田中矢徳・金澤長吉の教科書（③）については，他の教科書には見られない独自な特徴が存在する場合に限って，分析対象に含めることにする．具体的には，(2)に関連して，「帯分数ヲ仮分数ニ化スル法」に関する説明を対象とする.

本論文の構成は次の通りである．まず，第II期の教科書において行われている分数の性質に関する説明について，その具体的な形態と特徴，成功の有無とその要因を明らかにする．順序については，基本的に，上記(1)〜(4)に従う．ただし，(3)については，(2)の特殊な場合として，(2)に含めた形で位置付ける．なお，可能な説明については，当時，流行していたヘルバルト主義教授理論との関連についても考察を

試みる（第１章～第３章）．次に，分析の結果に対して歴史的な位置付けを行うと同時に，現在および近未来において，その重要な側面の継承・発展を図るために必要となる観点を示す（第４章）．

教科書については，東京書籍（株）附設教科書図書館「東書文庫」（①②③④），国立教育政策研究所教育情報研究センター教育図書館（⑤）所蔵の教科書を用いた．

教科書の原文は縦書きであるが，引用に際しては横書きに改めた．また，必要に応じて，現代の字体・記法に改め，句読点を補った．引用における「 ］は筆者による注記を意味する．煩雑を避けるため，ページ数の注記は省略し，対応する編，章，節等の名称を（ ）内に記した．本文において，教育内容とその特徴を表現する重要な用語には《 》を付した．

１．約分・倍分の原理に関する説明

分数の基本性質である《約分・倍分の原理》$\left(\frac{b}{a}=\frac{nb}{na}\right)$については，学海指針社（①），金港堂（②）の教科書において，《商分数の論理》，《分割分数の論理》，２通りの論理に依拠した説明が行われている．

まず，《商分数の論理》に依拠した説明について見よう．

１．１．《商分数の論理》に依拠した説明

学海指針社の教科書（①）においては，《約分・倍分の原理》について，$\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$を例とする説明が行われている（第１編「分数」，第８課「約分」）．

> 菓物６個あり，之を８人に等分せば，一人分幾何となる可きか．答　８分の６．
>
> 又菓物３個あり，之を４人に等分せば，其の一人分は右の場合に比して，多かる可きか，少かるべきか如何．答　同じ事なり．
>
> 何故に同じきか．答．後の場合は菓物が前の半分となりたれども，分つべき人数も亦半分となりたる故なり．
>
> 然るに，３を４つに等分したる数を何と云ふか．答　４分の３．
>
> 然らば，８分の６と４分の３とは何れが多きか．答　同じ事なり．
>
> 然り．全く同じ事なり．何故と云ふに，４分の３を８分の６に比べて見れば，割らるヽ数，即ち分子が前の半分となりたると同時に，割る数即分母も前の半分となりたればなり．
>
> 同じ理に依りて，$\frac{2}{6}$と$\frac{1}{3}$は相等しく，又$\frac{6}{9}$と$\frac{2}{3}$とも相等しきことを知るべし．（中略）
>
> 分数の分母と分子とを同数にて割りても，分数の値は変ずることなし．

上記の説明において，$\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$の成立根拠として示されているのは，「割らるヽ数，即ち分子が前の半分となりたると同時に，割る数即分母も前の半分となりた」るとする「理」である．しかしながら，この「理」は，上記の説明によって，その成立を示すことが必要とされている《約分・倍分の原理》に他ならない．この点に加え，《除法の簡約法則》(ex.　$6\div8=(6\div2)\div(8\div2)$）が説明されているわけではない．この事実は，上記の説明が，説明として成立していないことを示している．

次に，金港堂の教科書（②）による説明を見る（第２章「分数」，第３課「約分」，第１節「約分」）．

> 四．$\frac{3}{7}$ト$\frac{3\times5}{7\times5}=\frac{15}{35}$トハイヅレカ大ナルカ．
>
> 答　相等シ．
>
> （説明）分数ハ分母ヲ以テ分子ヲ割ルベキモノト見ルトキハ，３ヲ７分シタルモノト３ノ５倍ヲ７分シタルモノトヲ比較スルニ，後者ガ前者ノ５倍ナルコト明カナリ$\left[\frac{3}{7}\times5=\frac{3\times5}{7}\right]$．故ニ，割リ方モ亦５倍多クニ割ルトキハ，相等シクナルベシ$\left[\frac{3}{7}=\frac{3\times5}{7\times5}\right]$．

上記においては，《商分数の論理》による定義を出発点として，《分数×整数》の計算規則$\left(\frac{b}{a}\times c=\frac{b\times c}{a}\right)$，《分数÷整数》の計算規則$\left(\frac{b}{a}\div c=\frac{b}{a\times c}\right)$，または，《乗法・除法によって記述される分数の性質》用いた，代数的な方法による説明が行われている．

ただし，上記の説明を行う時点において，説明の過程において用いられる規則・性質がすべて説明されているわけではない．

具体的に見よう．まず，《分数×整数》の計算規則については，「整数ヲ分数ニ乗スルニハ，乗数ヲ

分子ニ乗ジテ得タル積ヲ分子トシ，元ノ分母ヲ分母トシタル分数ヲ作ルベシ」として，すでに説明されている（同，第2課「簡易ナル加減乗除」，第2節「乗法」）．従って，上記の説明において，この計算規則を用いることは可能である．

次に，上記の説明においては，《分数÷整数》の計算規則が用いられている．しかしながら，金港堂の教科書（②）において，この規則に関する説明は，上記の説明の後に行われる．「整数ヲ以テ分数ノ分母ヲ倍スルトキハ，其ノ整数ヲ以テ分数ヲ割ルコトヽナル」（同，第3課「約分」，第2節「練習」）．上記の説明が行われている時点においては，《分数÷整数》の計算規則としては，「整数ヲ以テ分数ヲ除スルニハ，法ヲ以テ分子ヲ割リタル結果ヲ分子トシ，元ノ分母ヲ分母トセル分数ヲ求ムレバ可ナリ」$\left(\frac{b}{a}\div c=\frac{b\div c}{a}\right)$ が説明されているに止まる（同，第2課「簡易ナル加減乗除」，第3節「除法」）．

次に，上記の説明においては，《乗法・除法によって記述される分数の性質》を用いることも可能である．

《乗法，除法によって記述される分数の性質》とは，《ある分数と，当該の分数の分子，または，分母に対して，整数を乗数とする乗法，または，整数を除数とする除法を行うことによって得られる分数との大小関係に関する一連の諸命題》である．分数乗法，除法との関連を備えているけれども，分数乗法，除法からは独立した形で成立しており，分数の定義の自然な延長として，比較的容易に導くことが可能な内容である．同時に，その内容からは，分数の基本的な性質である《約分・倍分の原理》を導くことが可能である．その意味において，重要な教育内容である．

第I期・前期の教科書においては，この性質について，「分数性質」，「分数定理」，「分数定説」等の項目設定により，ひとまとまりの教育内容が構成されていた．その具体例として，下河邊半五郎編纂『小学校教師用筆算書』（1888（明治21）年）から[8]，対応する記述を次にまとめて引用する（第5章「分数」，第6節「分数定説」）．

(2) 分数ノ分子ヲ幾倍或ハ幾分スルハ，分数ノ値ヲ同幾倍或ハ同幾分スルナリ．

(3) 分数ノ分母ヲ幾倍或ハ幾分スルハ，分数ノ値ヲ同幾分或ハ同幾倍スルナリ．

(4) 同一数ヲ以テ分数ノ分母子ニ乗ジ或ハ除スルトキハ，分数ノ値ヲ変セズ．

しかしながら，金港堂の教科書（②）においては，《乗法・除法によって記述される分数の性質》が教育内容として構成されていない．この点については，第I期・後期の教科書において進行した部分的変容の過程が，第II期の教科書においても継承されていることを示す事実として位置付けることが可能である．

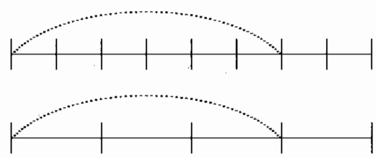
上記の分析結果に示されている通り，金港堂の教科書（②）においても，《商分数の論理》に依拠した《約分・倍分の原理》の説明は，説明の過程において根拠・理由として用いられる規則・性質に関する説明を部分的に欠落させた形で構成されており，この点において問題点が含まれている．

はじめに指摘した通り，第II期の教科書においては，分数の性質について，《教育内容となる概念・法則が成立する根拠・理由を，定義を基礎とする方法によって説明しようとする観点》が設定されている．この観点の設定それ自体は，第I期・前期の教科書において形成された，初等数学としての分数論の継承・発展を示す事実として，重要な意味を備えている．しかしながら，上記の事実が示す通り，第I期・後期の教科書において進行した部分的な変容過程の継承が，上記の観点に基づく教育内容の構成に問題点を発生させる要因となっているのである．

1．2．《分割分数の論理》に依拠した説明

次に，同じく，《約分・倍分の原理》について，《分割分数の論理》に依拠した説明を見る．学海指針社の教科書（①）において，この原理は次の形で説明されている（第1編「分数」，第8課「約分」）．

> 右［前節において見た説明］は分数の第二の意義に随ひたる説明なり．之と同時に，左の如く，第一の意義に随ひ，図を以て説明せば益々明瞭に了解せしめ得べし．



八分の六

四分の三

上記においては，先に見た，《商分数の論理》に依拠した，代数的な方法による説明とは異なり，量を用いる方法が採用されている．すなわち，例示された2つの分数を《長さ》（線分）を用いて表現し，《長さの相等性》を根拠・理由として，《分数の相

等性》$\left(\frac{6}{8}=\frac{3}{4}\right)$ が具体的かつ明確な形で示されている．「明瞭に了解せしめ得べし」とする解説については，この意味において理解可能である．

なお，前節において見た，《商分数の論理》に依拠した説明においても，《量》（例えば，長さ）を用いる方法を採用することは可能である．しかしながら，学海指針社の教科書（①）において，この方法は採用されていない．その理由については不明である．

金港堂の教科書（②）においても，前節において見た説明に続いて，次の説明がある（第２章「分数」，第３課「約分」，第１節「約分」）．

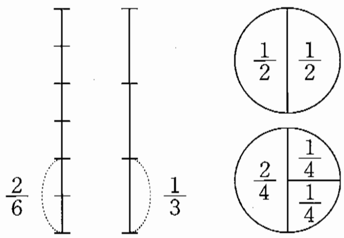
> 若シ又分数ヲ他ノ側ヨリ見テ，単位ヲ分母ダケニ分チ，其ノ一部分ヲ分子ダケ集メタルモノトスルトキハ，１ノ７分ノ１ハ１'35分ノ１ヨリ大ナルコト５倍ナリ $\left[\frac{1}{7}=\frac{1}{35}\times 5\right]$．従テ，其ノ３部分ヲ集メタル７分ノ３モ亦35分ノ３ノ５倍ナラサルベカラズ $\left[\frac{1}{7}\times 3=\left(\frac{1}{35}\times 3\right)\times 5\right]$．故ニ，35分ノ３ノ５倍ナル35分ノ15ハ７分ノ３ニ等シカルベシ $\left[\frac{3}{7}=\frac{15}{35}\right]$．

この説明においても，《乗法・除法によって記述される分数の性質》，または，《分数×整数》の計算規則 $\left(\frac{b}{a}\times c=\frac{b\times c}{a}=\frac{b}{a\div c}\right)$ を用いた，代数的な方法による説明が行われている．しかしながら，この説明が行われる時点において，上記の規則・性質に関する説明が行われているわけではない．

この事実に示されている通り，《分割分数の論理》に依拠した説明は，説明の過程において根拠・理由として用いられる規則・性質に関する説明を欠落させた形で構成されている．この意味において，先に見た，《商分数の論理》に依拠した説明に含まれていた問題点と同じ問題点が含まれているのである．

ただし，金港堂の教科書（②）において特徴的な点は，上記において見た代数的な方法に加え，《長さ》（線分），《面積》（円）等，《量》を用いる方法が採用されている点である．次の引用においては，《量の相等性》を根拠とする方法により，《分数の相等性》が明確な形で示されている．

> 一．１尺ヲ３分シタル１部分ト，１尺ヲ６分シタル２部分ト，イズレカ長キカ．
>
> 答．同一ノ長サナリ．
>
> 解．１尺ヲ６分シタル１部分ハ，之ヲ３分シタル１部ニ比シテ，其ノ長サ半分ナリ．故ニ，６分ノ２ハ３分ノ１ニ等シ．
>
> 二．円ノ２分ノ１ト，同シ円ノ４分ノ２トハ，イズレカ大ナルカ．
>
> 解．４分ノ２モ２分ノ１モ共ニ半円トナルヲ以テ，相等シ．



そして，上記において見た，代数的な方法，量的な方法による説明の結果を一般化する形で，《約分・倍分の原理》が示されている．

> 五．以上ノ解説ニヨリ，左ノ規則ニ到達ス．
>
> 分数ノ分母及ビ分子ヲ同数ニテ乗除スルモ，其ノ値ヲ変セズ．

先に指摘した通り，金港堂の教科書（②）においては，《約分・倍分の原理》に関する説明において，代数的な方法に加え，量的な方法が用いられている点が特徴的である．ただし，量的な方法は，《分割分数の論理》に依拠した説明において用いられるに止まり，《商分数の論理》に依拠した説明においては用いられていない．この点は，学海指針社の教科書（①）においても共通する形で存在している．その理由については不明である．

しかしながら，説明の対象として，適当な具体例，すなわち，《長さ》（線分）を用いて比較的容易に表示可能な数値を分母，分子とする分数を用いるならば，《商分数の論理》に依拠した説明においても，量的な方法を用いることは可能である．例えば，学海指針社の教科書（①）における具体例 $\left(\frac{6}{8}=\frac{3}{4}\right)$ についても，金港堂の教科書（②）における具体例 $\left(\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\right)$ についても，線分を用い，《長さの相等性》を根拠とする説明は可能である．この事実は，《量（連続量）の表現として数（分数）を説明する》という観点の必要性と有効性を示している．

この点に加え，代数的な方法による説明——特に，前節において見た，《商分数の論理》に依拠した説明——において，特定の規則・性質を根拠・理由と

して用いる場合には，その前提として，当該の規則・性質に関する説明が，それ以前に行われていることが必要になる．繰り返しになるが，この点に関する説明を欠落させている理由については，第Ⅰ期・後期の教科書において進行した部分的変容の過程が，第Ⅱ期の教科書においても継承されている点 ── 具体的には，《乗法・除法によって記述される分数の性質》が教育内容として構成されていない点 ── に対する注意が必要である．この点に起因して，第Ⅱ期の教科書が備えていた重要な特徴に問題点が含まれる結果となっているのである．

2．仮分数→帯分数（整数を含む）の変形に関する説明

《仮分数→帯分数（整数を含む）の変形》については，総川猪之吉（⑤），田中矢徳・金澤長吉（③）の教科書において説明されている．長澤亀之助・後藤胤保の教科書（④）においては，その特殊な場合として，《分数と整数 1 との関係》$\left(\frac{a}{a}=1\right)$ が説明されている．順に見よう．

総川猪之吉の教科書（⑤）においては，《仮分数→帯分数（整数を含む）の変形》について，次の例題が示されている（第 5 編「分数」，第 3 章「分数化法 2（仮分数化法）」）．

例題 1．$\frac{24}{8}$ヲ化シテ整数若クバ混分数トセヨ．

運算　$8\overline{)24}$ 商 3，24　　答．3

例題 2．$\frac{35}{17}$なる仮分数を化して整数若しくば混分数とせよ．

運算　$17\overline{)35}$ 商 2，34，1　　答．$2\frac{1}{17}$

まず，例題 1 について，「問答式ニテ教授スベシ」として，次の「教授法」が示されている．

○　先，例題ヲ掲ゲテ，$\frac{24}{8}$ハ如何ナル意味ヲ表セルナルカ．

○　此ノ場合ニ於イテ，単位ハ 8 分ノ 1 ヲ幾ツ含メルト考フルコトヲ得ベキカ．

●　$\frac{24}{8}$ノ場合ニ於イテハ，単位ハ 8 分ノ 1 ヲ 8 ツ，即，其ノ分母ノ数ダケ含メリ．

○　単位ガ其 8 分ノ 1 ヲ 8 ツダケ含メルモノナラバ，同ジ 8 分ノ 1 ヲ24ダケ集メタルモノノ中ニハ，単位ヲ幾ツ含メルカ，之ヲ知ルニハ如何ナル算法ヲ施スベキカ．

●　ソハ，24ノ中ニ 8 ツヲバ幾ツ含メルカヲ求ムレバヨシ．而シテ，其算法ハ 24÷ 8 ナリ．

○　結局，$\frac{24}{8}$ノ中ニハ単位ヲ幾ツ含メルカ．

●　$\frac{24}{8}$ハ単位ヲ丁度 3 ツ含メリ．

○　右ニテ $\frac{24}{8}=3$ ナルヲ知レリ．

例として示された分数に対して《商分数の論理》を適用する直接的な方法ではなく，間接的な方法による説明が行われている．すなわち，まず，《分割分数の論理》に依拠した説明が行われ，次に，この説明によって導かれる方法が，《商分数の論理》に依拠した説明によって導かれる方法と同じ方法になることが示されている．説明の過程を次に辿ってみよう（ただし，(4)については，対応する記述が明確な形で存在するわけではない）．

(1)　「$\frac{24}{8}$ハ如何ナル意味ヲ表セルナルカ」，「8 分ノ 1 ヲ24ダケ集メタルモノ」により，《分割分数の論理》に依拠した定義 $\frac{24}{8}=\frac{1}{8}\times 24$ が示される．

(2)　「単位ハ 8 分ノ 1 ヲ幾ツ含メルト考フルコトヲ得ベキカ」，「単位ハ 8 分ノ 1 ヲ 8 ツ，即，其ノ分母ノ数ダケ含メリ」により，$1=\frac{1}{8}\times 8$ が示される．

(3)　「8 分ノ 1 ヲ24ダケ集メタルモノノ中ニハ，単位ヲ幾ツ含メルカ，之ヲ知ルニハ如何ナル算法ヲ施スベキカ」により，$\frac{1}{8}\times 24=1\times X$ を満たす数Xを求める方法が問題となる．

(4)　(2)において示された $1=\frac{1}{8}\times 8$ を(3)の式に代入することにより，まず，$\frac{1}{8}\times 24=\left(\frac{1}{8}\times 8\right)\times X$，次に，結合法則により，$\frac{1}{8}\times 24=\frac{1}{8}\times(8\times X)$，$24=8\times X$ を経て，$X=24\div 8$ が導かれる．

(5) 結論として，「ソハ，24ノ中ニ8ツヲバ幾ツ含メルカヲ求ムレバヨシ」，すなわち，$24\div 8=3$が導かれる．

上記の結論を基礎とする一般化により，《仮分数→帯分数（整数を含む）の変形規則》が，次の形で定式化される．

総ベテ此ノ如ク，仮分数ノ分母ヲ以テ其分子ヲ除スレバ，其商ハ整数若クハ混分数トナリテ，其値ハ即，元ノ分数ニ等シ．是レ，仮分数ヲ化シテ整数若クハ混分数トナス法ナリ．

次に，上記の形で定式化された規則について，それが，同じ分数に対して《商分数の論理》を適用した結果 $\left(\frac{24}{8}=24\div 8\right)$ と同じ式によって記述可能であることが示される．

前ニ，総テ分数ノ形，$\frac{\text{分子}}{\text{分母}}$ナルハ，分子÷分母ト同ジ意味ナリト心得テ可ナルコトヲ教諭シ置キタルガ，今，仮分数ヲ化シテ整数若クハ仮分数［「混分数」の誤記と見られる］トナスハ，即，是ニ当レリ．善ク考ヘテ見ルベシ．

次に例題2に進む．この場合についても，《分割分数の論理》に依拠する方法により，「$\frac{35}{17}$ノ意味」，すなわち，「17分ノ1ヲ35ダケ集メタル中ニハ，単位ガ幾ツアルカ」を出発点とする形で説明が行われている．

これに対して，田中矢徳・金澤長吉の教科書（③）においては，《仮分数→帯分数（整数を含む）の変形》について，《商分数の論理》を適用する直接的な方法によって説明が行われている（第6編「分数」，第3章「分数化法」，(1)「仮分数ヲ帯分数ニ化スル法」）．

例1．3分ノ8ヲ帯分数ニ化スレバ如何．

答　2個3分ノ2　$\frac{8}{3}=8\div 3=2\frac{2}{3}$

教授法　分数トハ如何○分母ヲ以テ分子ヲ割レバ，商2個トナリテ2余ル．依テ，2個3分ノ2ヲ以テ答トス○運算ノ方法ヲ述ブベシ○各自ノ石盤上ニ一度運算スベシ．

ただし，田中矢徳・金澤長吉の教科書（③）においては，《商分数の論理》に依拠した説明に止まり，《分割分数の論理》に依拠した説明は行われていない．

長澤亀之助・後藤胤保の教科書（④）においては，特に《分数と整数1との関係》$\left(\frac{a}{a}=1\right)$について，次の説明がある（第2節「分数（上）」，第5課「分数ノ意義」）．

例ヘバ，$\frac{3}{3}$ノ如キハ，「1ヲ3ツニ等分シ，ソノ3ツヲ取リタルモノ」或ハ「3ヲ3ニテ割リタルモノ」ニシテ，1ニ等シ．同様ニ，$\frac{4}{4}$，$\frac{5}{5}$，等モ皆1ニ等シ．

31．分数の分子が分母に等しきときは，その分数は1に等し．

まず，《分割分数の論理》により，$\frac{a}{a}=(1\div a)\times a=1$，次に，《商分数の論理》により，$\frac{a}{a}=a\div a=1$，上記2通りの方法によって，$\frac{a}{a}=1$の成立が示されている．

3．帯分数（整数を含む）→仮分数の変形に関する説明

《帯分数（整数を含む）→仮分数の変形》については，総川猪之吉（⑤），学海指針社（①）の教科書において，特に，帯分数の整数部分に注目する観点により，《整数→仮分数の変形》を対象とする形で，説明が行われている．

総川猪之吉の教科書（⑤）においては，特に，《整数→1を分母とする仮分数の変形》を対象として，《商分数の論理》，《分割分数の論理》，2通りの論理に依拠した説明が行われている．まず，《商分数の論理》に依拠した説明を見よう（第5編「分数」，第4章「分数化法3（整数化法）」）．

○ $\frac{5}{1}$ト5トハ其値同一ナルコトヲ証シ得ルカ．

● $\frac{5}{1}$ハ$5\div 1$ト考フルコトヲ得．而シテ，此ノ式ノ値ハ5ニシテ，即，元ノ整数ニ異ナラズ．故ニ，$\frac{5}{1}$ト5ト其ノ値相等シキコトヲ知ル．

次に，$5=\frac{5}{1}$について，「前ニ説明シタルヨリ，更ニ別ナル方面ヨリ説明スルコトヲ得ルカ」として，《分割分数の論理》に依拠した説明が行われる（第

5編「分数」，第4章「分数化法3（整数化法）」).

● 総ベテ単位ヲ幾ツカニ等分シタル場合ニ於イテ，単位ハ即，其幾等分ノ全部ヲ含メルガ故ニ，其値ハ，件ノ幾ツト云フ数ヲ分母並ニ分子トシタル分数ニ等シキコト，即，ソハ例ヘバ，3等分ノ場合ニハ $\frac{3}{3}$，5等分ノ場合ニハ $\frac{5}{5}$，6等分ノ場合ニハ $\frac{6}{6}$ ニ等シキヨシハ前ニ学ビタリ．

此ニ由リテ，今，$\frac{1}{1}$ ヲ以テ単位ヲ表スモ，数理ニ於イテハ不適当ナラザルコトヲ知ル．

果シテ，$\frac{1}{1}$ ヲ以テ単位ヲ表スコトヲ得ルトセバ，5ツノ単位ハ固［もと］ヨリ其5倍ニ当ラザルベカラズ．然ルニ，第1章ノ数理第4ニ據レバ，

$$\frac{1\times 5}{1}=\frac{1}{1}\times 5=\frac{5}{1}$$

ニシテ，$\frac{5}{1}$ ハ即5ニ等シカルベキ理ナリ．

上記による説明の過程を次に辿っておく．

(1) 《分割分数の論理》により，$1=(1\div a)\times a=\frac{a}{a}$，

従って，a＝1の場合には，$\frac{1}{1}=1$．

(2) 例題の数値5に対して(1)の結果を適用して，

$5=1\times 5=\frac{1}{1}\times 5$．

(3) (2)の結果に対して，「第1章ノ数理第4」，すなわち，「或数を分子に乗ずるは，其分数に乗ずるに等し」$\left(\frac{b}{a}\times c=\frac{b\times c}{a}\right)$ を適用して，

$\frac{1}{1}\times 5=\frac{1\times 5}{1}=\frac{5}{1}$．

(4) 結論として，$5=\frac{5}{1}$．この事実を基礎とする一般化により，$a=\frac{a}{1}$．

上記による説明の過程(3)においては，《乗法・除法によって記述される分数の性質》が用いられている．ただし，総川猪之吉の教科書（⑤）においては，上記の説明の前に，この点に関する説明が行われている（第5編「分数」，第1章「分数概説」，「数理」)．この点により，根拠・理由を明確に示した形で説明の過程を構成することが可能となっている．

学海指針社の教科書（①）においては，《整数→仮分数の変形》について，次の説明が行われている（第1編「分数」，第4課「前課［仮分数帯分数］の続」).

（本課の目的）

1．整数を仮分数に改むる方法

2．帯分数を仮分数に改むる方法

第1時 教授

（豫備）豫備として左の心算を課すべし．

(1) 3は2分の幾つなるか．

(2) 5は3分の幾つなるか．

(3) 6は4分の幾つなるか．

(4) 7は5分の幾つなるか．

（教授）すべて整数は，仮分数の形に書きかふることを得べし．

例一 13を8分の幾つと云ふ仮分数にせよ．

$\frac{13\times 8}{8}=\frac{104}{8}$．

（注意）之を説明するに，初は分数の第二の意義に依る方便利なり．之に依れば次の如く説明せらるべし．13に8を掛けたるもの（即ち104）を又8で割れば13となること明なり．故に13は8で104を割るものなり．故に，$13=\frac{104}{8}$．

又第一の意義に従って説明すれば左の如し．

1の中には $\frac{1}{8}$ が幾つあるか．答 8つ．

然らば，13の中には $\frac{1}{8}$ が幾つ．答 $8\times 13=104$．

故に，13の中には $\frac{1}{8}$ が104個あり．故に，$13=\frac{104}{8}$．

（練習）適宜練習題を課すべし．

第2時 練習

（練習）

(1) 左の数を11分の幾つと云ふ仮分数にせよ．

$3=\frac{33}{11}$，$5=\frac{55}{11}$，$8=\frac{88}{11}$，$13=\frac{143}{11}$，$25=\frac{275}{11}$．

（中略）第3時 教授及練習

（教授）例2 $5\frac{2}{3}$ を仮分数にせよ．

$5=\frac{15}{3}$，$\frac{15}{3}+\frac{2}{3}=\frac{17}{3}$．

（練習）左の帯分数を仮分数にせよ．$3\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$．

（以下略）

上記の引用においては，まず，「分数の第二の意義に依る方便利なり」として，《商分数の論理》に

依拠する方法により，次の説明が行われている．

(1)　《$13=\frac{X}{8}$となる数Xを求める》問題について，《商分数の論理》により，$\frac{X}{8}=X\div 8$，従って，$13=X\div 8$．

(2)　従って，$X=13\times 8=104$，結論として，$13=\frac{104}{8}$.

次に，「又第一の意義に従って説明すれば左の如し」として，《分割分数の論理》に依拠する方法による説明が行われている．

(1)　《分割分数の論理》により，$\frac{1}{8}=1\div 8\,(\times 1)$，従って，$1=\frac{1}{8}\times 8$．

(2)　《$13=\frac{1}{8}\times X$となる数Xを求める》問題について，(1)および結合法則により，$13=1\times 13=\left(\frac{1}{8}\times 8\right)\times 13=\frac{1}{8}\times(8\times 13)=\frac{1}{8}\times 104$.
従って，$X=104$.

(3)　結論として，$13=\frac{1}{8}\times 104=\frac{104}{8}$.

上記の説明は，学海指針社の教科書（①）において用いられているカテゴリーによれば，「教授」，あるいは，それに対する「注意」に該当する．先の引用においては，これに加え，「目的」，「予備」，「練習」等を用いる形で記述が構成されている．説明内容の全体構成を次に示す．

《整数→仮分数の変形》（「目的」）について，まず，比較的容易な場合が問題として示され（「豫備」），その結果に即した形で，変形の可能性と方法が説明される（「教授」）．次に，変形方法の適切性について，同じ具体例を用い，《分割分数の論理》，《商分数の論理》，２通りの論理に依拠する方法によって説明が行われる（「注意」）．最後に，その他の具体例に対する適用によって，変形方法の定着が図られる（「練習」）．

上記の説明においては，「目的」，「豫備」，「教授」，「注意」，「練習」等，当時，流行していたヘルバルト主義教授理論のカテゴリーが用いられている[9]．この点について，学海指針社の教科書（①）においては次の説明がある（「凡例」）．

　教授の順序方法に就き，特別に注意を要する場合には，豫備，教授，及，練習の諸項に別ちて，之を詳述し，又時として，１課を小分して各時間に配当したり．

上記の説明に見られる通り，学海指針社の教科書（①）において，ヘルバルト主義教授理論のカテゴリーは，説明の順序または方法に対する特別な注意が必要であると判断された場合に限って，用いられている．教科書において教育内容として構成されているすべての概念，法則について，上記のカテゴリーの組み合わせにより，上記の順序に従った形で，指導過程が構成されているわけではない．

この点に関連して，先に見た，《整数→仮分数の変形》に関する説明が「教授の順序方法に就き，特別に注意を要する場合」に該当すると判断された点については，説明の方法との関連において理解可能である．すなわち，先の引用においては，《整数→仮分数の変形》について，《分割分数の論理》（「第一の意義」），《商分数の論理》（「第二の意義」），２通りの論理に依拠する方法によって説明が行われている．この説明においては，どの論理に依拠するかが基本的に重要となる．この点が，説明の「方法」において「特別に注意を要する」と判断された根拠になっている．ただし，説明の「順序」については，仮にそれが逆転しても特別な支障は発生しない．

なお，ヘルバルト主義教授理論のカテゴリーとしては，上記に加え，「総括」がある．「総括」とは，「既ニ授ケタル個々ノ知識ヲ整理シテ，概念又ハ原則トシ，簡明ナル言語又ハ記述ヲ以テ表出スル作用」である[10]．先の引用において，このカテゴリーに該当する内容は，《整数→仮分数の変形》に関する一般的な方法$\left(a=\frac{X}{b}\rightarrow X=ab\right)$である．しかしながら，この内容に対応する記述は存在しない．学海指針社の教科書（①）においては，《整数→仮分数の変形》については，具体例に即した形で説明されるに止まり，その結果を基礎とする形で，一般的な方法が導かれているわけではないのである．

4．おわりに

はじめに述べた通り，明治検定期・第II期の教科書においては，分数の性質が，《分割分数の論理》，《商分数の論理》，２通りの論理に依拠する方法によって説明されていた．第１章～第３章における分析の結果，上記の方法による説明の具体的な形態と特徴，成功の有無とその要因が示された．本章にお

いては，分析の結果に対する歴史的な位置付けを行うと同時に，現在または近未来において，その積極的な側面の継承・発展を図るための観点を示す．

第Ｉ期・前期の教科書においては，ひとまとまりの数学的概念に対応する形で，ひとまとまりの教育内容が構成されていた．第Ｉ期・後期の教科書においては，この特徴に対する部分的変容（解体，消滅，分散）の過程が進行した．第II期の教科書は，この過程の延長線上に位置付けられる．ただし，第II期の教科書について注目される特徴は，分数の性質について，《商分数の論理》，《分割分数の論理》，２通りの論理に依拠する方法によって，その成立が示されている点であった．

はじめに述べた通り，この特徴それ自体は，《定義を根拠・理由とする方法によって，教育内容となる概念・法則の成立を説明しようとする観点》の具体化であり，この点において，初等数学としての分数論の構成要素として位置付けることが可能である．ただし，上記の観点は，第Ｉ期・前期の教科書において構成されていた，ひとまとまりの教育内容としての《分数の性質》を対象として，その具体化が図られていたわけではなかった．

先に述べた通り，第Ｉ期・後期の教科書においては，第Ｉ期・前期の教科書における教育内容構成に対する部分的変容の過程が進行した．その結果については，次の２点が重要である．第一に，教育内容の基本的性格が，ひとまとまりの教育内容としての《分数の性質》から，《個別的・限定的な分数の諸性質の単なる集合体》へと変容した．第二に，上記の諸性質が，複数の学年に渡って分散する方法に従って編成されると同時に，《四則演算の説明における直接的な必要性》に応じる形で従属的に位置付けられた．上記２点は，第II期の教科書においても継承されている．本論文において注目した観点は，上記の性格と位置を備えた分数の性質を対象とする形で，その具体化が図られていたのである．

この点については，第II期の教科書における，分数全般に関する教育内容の編成形態に起因する限界として理解することが可能である．同時に，この限界は，現在に至るまで継承されている．この点に，第II期の教科書が備えていた重要な特徴の継承・発展を図るための観点が逆説的な形で示されている．

この点に加え，本論文による分析の結果により，次の２点が示された．第一に，教育内容に対する，量と数の数学論による基礎付けの必要性であり，第二に，説明の過程において根拠・理由として用いられる規則・性質に関する説明の必要性である．上記２点においても，第Ｉ期・前期の教科書が備えていた特徴の重要性と同時に，第II期の教科書が備えていた重要な特徴の継承・発展を図るための観点が示されている．

《註》

(1)　文部科学省『小学校学習指導要領』東京書籍，2010年，49ページ，55ページ．なお，本論文の用語によれば，前者が《分割分数の論理》に依拠した分数の定義，後者が《商分数の論理》に依拠した分数の定義である．

(2)　この観点に基づく教育内容・教材構成の試みの一端については次を参照．岡野勉・佐藤敬行「授業書『新しい数 ― 分数』（第２版）による授業」『教授学の探究』第22号，北海道大学大学院教育学研究科教育方法学研究室，2005年．

(3)　第Ｉ期・前期の教科書における分数の教育内容構成全般については次を参照．『学校数学としての分数論の原型の形成過程 ―― 明治期の算術教科書を対象として』2005～2007年度，日本学術振興会科学研究費補助金（基盤研究(C)）研究成果報告書，研究代表者，岡野勉，2008年．

(4)　岡野勉「明治検定期算術教科書における分数の導入過程 ―― 意味付け・説明の方法に注目して」『教育方法学研究』第25巻，日本教育方法学会，1999年．

(5)　この点については，前掲(4)において指摘した．ただし，教科書における教育内容・教材構成を対象とする具体的な検討は行っていない．

(6)　この点については次を参照．岡野勉「明治検定期算術教科書における教育内容構成原理の変容過程 ―― 第Ｉ期・後期および第II期における，分数の性質，大小関係，加法，減法を対象として」『カリキュラム研究』第11号，日本カリキュラム学会，2002年．

(7)　この観点により，学海指針社の教科書（①）において，《仮分数→帯分数の変形》は「練習」として位置付けられ，変形方法に関する具体的な説明は省略されている．対応する記述を次に示す．

「（練習）仮分数を整数或は帯分数の形に改むることを得べし．例１．$\frac{15}{5}$は３に等し．例２．$\frac{17}{5}$は$3\frac{2}{5}$に等し．(1) 左の仮分数を整数又は帯分数

の形に改むべし．(イ) $\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$　(ロ) $\frac{24}{6}=4$

（中略）(2) 左の計算を行ひ，若し仮分数が出でたる時は，整数或は帯分数に改むべし．

(1) $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=1\frac{2}{5}$，(2) $\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=1$（以下略）」

（第１編「分数」，第３課「仮分数帯分数」）．

(8) 下河邊半五郎編纂『小学校教師用筆算書』第１，訂正再版，普及舎，1888（明治21）年，東京書籍（株）附設教科書図書館「東書文庫」所蔵．

(9) これらのカテゴリーの意味内容について，当時の教授法書による説明を見ておく．「目的ノ提示」については，「先ヅ教授ノ目的ヲ示シ，生徒ヲシテ教授ノ向フ所ヲ知ラシメザルベカラズ．目的ヲ提示スレバ生徒ノ注意ハ専ラ教授ノ題目ニ向ヒ，無用ノ観念ヲ想起スルヲ止メテ，唯新教材ト関係アル観念ノミヲ喚起スルニ至ルベシ」と説明されている．「予備」については，「新教材ト関係アル既知ノ観念ヲ喚起シ，之ヲ分解シ，整理シテ，収識［ママ］ノ基礎ヲ作ルモノナリ」と説明されている．「教授」，「練習」はカテゴリーとして設定されていない．ただし，同じ意味内容を備えていると見られるカテゴリーとして，「提示」，「応用」がある．「提示」とは「新教材ヲ授クルノ作用」である．「応用」については次のように説明されている．「既授ノ知識ヲ特殊ノ場合ニ適用スル作用ニシテ，之ニ依リ収得ヲ確実ニシ，併セテ運用ヲ自在ナラシムルモノナリ」．槇山栄次『新説教授学』金港堂書籍，1899（明治32）年．引用は次による．仲新・稲垣忠彦・佐藤秀夫編『近代日本教科書教授法資料集成』第４巻，教授法書４，東京書籍，1982年，45～46ページ．

(10) 前掲(9)，45ページ．