明治検定期算術教科書における分数除法の計算規則に関する説明

―― 第Ⅱ期の教科書における《逆数》の位置付けと《結果主義》克服の課題を主要な対象として ――

岡　野　　勉*

目　次

0. はじめに

0. 1. 問題の所在

一般に，演算の説明においては，演算の定義または意味に関する説明，演算の結果を導く手続き（計算規則を含む）に関する説明，2つの側面を区別することが重要である。

問題「毎時12kmで（等速で）進むとき，2.5時間でどれだけ進むか」について，森毅は，次のように述べている(1)。

> この問題にあっては，速度と時間という量がある。それらの概念が作られなくてはしかたがない。そして，そこには，量の結合関係について，この現象の数学的法則性がある。それを定式化するものが，「式」である。さらに，そのあと，ある手段によって，その式を「計算」することが必要になる。こうして，「答」がえられる。ここで，法則性を定式化することが，数学教育として，きわめて基本的なのである。

上記において，まず，「式」とは，具体的には，《12km／時×2.5時間=？km》を意味する。この「式」が成立するためには，その根拠･理由として，「量の結合関係」に関する「数学的法則性」の「定式化」，すなわち，《速さ》，《時間》，《距離》，3つの量が乗法によって結合されることに関する認識が必要となる。この点に関する認識を形成することが，演算の定義または意味に関する説明に該当する。

上記の形で「式」が成立した場合，次に，「その式を『計算』する」「手段」が必要になる。この「手段」は，計算の「アルゴリズム」，すなわち，「ある問題の類に対する，およびその類に属するすべての問題を有限回の操作で一意的に解く手続きの体系」(2)として存在している。この「体系」において，計算規則（分数除法においては$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}$）は，その最も重要な構成要素として位置付けられる。

計算規則の説明においては，演算の定義または意味に関する説明との関連が重要な意味を持っている。特に，計算規則の成立根拠・理由を明確な形で示すためには，それを導く説明の過程を，演算の定義または意味に関する説明を出発点とし，計算規則をその結論とする形で構成することが必要になる。

なお，これに対して，計算規則の説明については，それを導く説明の過程を構成する必要性は存在しないとする立場（《規約主義》）も存在する。この立場によれば，計算規則は，単なる規約として，天下り的な形，すなわち，その成立根拠・理由に関する説明を欠落させた形で示される。

次に，分数除法の計算規則については，第一に，

2013年7月1日　受理
*教育科学講座　教育内容・方法研究室

それを導く説明の過程が《結果主義》に依拠していないか？第二に，説明の過程に《逆数》が位置付けられているか？――上記2点が重要な問題となる。

ここで，《結果主義》とは，分数除法の計算規則を導く説明の過程の構成方法に関する基本的な特徴を示す用語であり，当該の過程が，直接的な方法によってではなく，《演算結果としての同一性を根拠・理由とする間接的な方法》によって構成されていること $\left(\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{b\times c}{a\times d}=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}\right)$ を意味する。

《結果主義》については，現在においても批判の対象となっている。須田勝彦と銀林浩による批判を次に引用する。「『結果としてひっくりかえしてかける』ことになっているという説明が最良のものとは思われない」[(3)]。「原因論でなくては教育的に説得力は弱い」。「計算の結果としてではなく，必然的にそうなるということを示」す必要がある[(4)(5)]。

上記の指摘に応え，《結果主義》の克服に向けた取り組みが進められている。新居信正は，除法によって結合される量の関係，すなわち，（全体量）÷（いくら分）＝（1あたり量）における（いくら分）を《逆数》倍することによって，それを，独自な名称を備えた単位量に変換することを提案している[(6)]。大田邦郎は，（距離）÷（速さ）＝（時間）の関係において，《速さ》（m／分）に対して《遅さ》（分／m），すなわち，《内包量》に対して《逆内包量》を考えることを提案している[(7)]。

上記の取り組みにより，計算規則の説明においては，演算の定義または意味に関する説明との関連が重要な意味を持っていることが示されている。同時に，《逆数》に対する注目の必要性，すなわち，《逆数》を，計算規則の説明の過程における重要な構成要素として位置付ける必要性が示されている。

この点に関連して，次に，学習指導要領における《逆数》の位置付けを見よう。

学習指導要領においては，「除法は，除数の逆数をかける計算に直して考えられること」（1958（昭和33）年版）[(8)]，「逆数の考えを用いて，除法を乗法の計算としてみること」（1968（昭和43）年版）[(9)] 等の記述が見られる。《逆数の乗法》としての除法の見方が示されている。これに加え，《逆数》それ自体に関する記述としては，「逆数は，その数との積が1になるような数を指す」，「単に逆数を分母と分子を取り換えた数として覚えさせる」ことは適当でないとする記述（1989（平成元）年版）が見られる[(10)]。

ただし，上記の記述については，「能率のあがる計算方法をくふうする」手段の一つとして，それに従属した形で位置付けられている場合が存在する（例えば，1958（昭和33）年版）[(11)]。これに加え，「逆数を用いて除法を乗法の計算としてみること（中略）も取り扱うものとする」（傍点は引用者）とする記述に見られる通り，《逆数の乗法》としての除法の見方が付加的・副次的な位置付けに止められている場合も存在する（2008（平成20）年版）[(12)]。

上記の事実に見られる通り，学習指導要領においては，《逆数》それ自体，あるいは，除法を《逆数の乗法》として説明することに対する消極的な立場あるいは副次的な位置付けが示されている。従って，《逆数》についても，必ずしも重要な位置が付与されてきたわけではない。例えば，1998（平成10）年版の学習指導要領においては，分数乗法・除法全般に関して，「乗数，除数が単位分数など簡単な場合を扱う」とされるに止まり，《逆数》に関する記述が消滅している[(13)]。

上記の事実に示されている通り，学習指導要領においては，第一に，《逆数》の位置付けが必ずしも明確ではない。第二に，単なる計算方法の工夫に従属した形で位置付けられている場合が存在する。第三に，分数除法の計算規則を導く説明と，《逆数》に関する説明とが相互関連を欠落させた形で位置付けられていることが予想される。

しかしながら，分数除法において，《逆数》は重要な概念である[(14)]。従って，分数除法の計算規則を導く説明の過程には，《逆数》を何らかの形で位置付けることが必要になるのではないか。同時に，この点は，《結果主義》を克服する課題においても重要な意味を持っているのではないか。

上記2点については，明治検定期の算術教科書においても興味深い展開の過程が見られる。

0. 2. 視点の設定

上記の見方により，本論文においては，明治検定期の算術教科書における分数除法の計算規則に関する説明について，相互に重要な関連を備えた次の3点に注目する。第一に，演算の定義あるいは意味に関する説明との関連，第二に，計算規則を導く説明の過程における《結果主義》への依拠，第三に，《逆数》の位置付け。第一の問題は，計算規則の説明に関する一般的な問題である。これに対して，第二，第三の問題は，分数除法の計算規則に関する説明に特有の問題である。

具体的な分析の視点として，次の3点を設定する。

(1) 計算規則を導く説明の過程が，演算の定義あるいは意味に関する説明と関連付けた形で構成されているか？
(2) 計算規則を導く説明の過程において，《結果主義》への依拠が見られるか？《結果主義》の克服に向けた取り組みは，どのような形で進められているか？
(3) 計算規則を導く説明に過程において，《逆数》は，どのような形で位置付けられているか？それは，《結果主義》の克服に向けた取り組みとの間に，どのような関連を備えているか？

0. 3. 先行研究との関連

明治検定期について，筆者は，特に，教科書における教育内容構成の論理と特徴に注目する立場から，次の時期区分を仮説的に設定している。なお，ここでは，注目する教育内容を《分数》に限定している。

(1) 第Ⅰ期・前期：ひとまとまりの数学的概念に関する，ひとまとまりの教育内容構成により，《初等数学としての分数論》が形成される時期（1886（明治19）年頃から1893（明治26）年頃まで）。
(2) 第Ⅰ期・後期：《初等数学としての分数論》に対する部分的な変容が進行する時期（1894（明治27）年頃から1900（明治33年）頃まで）。
(3) 第Ⅱ期：第Ⅰ期・前期とは異質な教育内容構成の基本的観点が形成され，それにより，《学校数学としての分数論》が形成される時期（1901（明治34）年頃から1904（明治37）年における国定教科書の使用開始前まで）。

上記の時期区分において，《分数論》とは，分数の定義・意味の説明に止まらず(15)，それを含む分数の教育内容構成全般に関する基本的観点の総体を意味する用語である。次に，《初等数学としての分数論》とは，数学教育において，「学問としての数学」を教えることを目的とする立場から，《学校数学としての分数論》とは，「学問としての数学」を教えることに対する否定的な立場から，それぞれ，設定された分数の教育内容構成全般に関する基本的観点の総体を意味する用語である(16)。

次に，上記に時期区分に従った形で，明治検定期算術教科書における分数除法の計算規則に関する説明の論理とその特徴に関する先行研究の成果を整理しておく。

まず，第Ⅰ期・前期の教科書については，計算規則を導く説明の過程が，《結果主義》に依拠した形で構成されている点，《逆数》の定義・説明が欠落している点が指摘されている(17)。

これに対して，第Ⅰ期・後期の教科書は，次の3点において注目される特徴を備えている(18)。

(1) 計算規則を導く説明の過程が，《包含除》あるいは《乗法の逆演算》による演算の定義を出発点とする形で構成されている。
(2) 計算規則を導く説明の過程が，《結果主義》，すなわち，演算の結果としての同一性を根拠・理由とする間接的な方法によってではなく，直接的な方法によって構成されている。
(3) 《逆数》に対する注目が行われ，計算規則を導く説明の過程における重要な構成要素として位置付けられている。

(1)については，第Ⅰ期・後期の教科書に独自の特徴ではなく，第Ⅰ期・前期の教科書から継承された特徴として位置付けることが可能である。ただし，《包含除》としての定義を出発点とする説明については，必ずしも成功的な形態が得られていたわけではなく，端緒的な試みの段階に止まっていた点は否定できない。《乗法の逆演算》としての定義を出発点とする説明についても，演算の結果を導く説明の過程，あるいは，計算規則を導く説明の過程が構成されておらず，この意味において，《天下り的な性格》を含んだ事例も存在していた。全般的に見て，計算規則を導く過程を，演算の定義あるいは意味に関する説明を出発点として，より自然な形で構成することは，第Ⅱ期の教科書の課題として残されていた(19)。

(2)(3)においては，第Ⅰ期・前期の教科書に含まれていた問題点としての《結果主義》への依拠を克服する可能性が示されており，この意味において注目される特徴である。ただし，この可能性は，一部の教科書において具体化されるに止まっていた。全般的に見て，この可能性の具体化についても，第Ⅱ期の教科書の課題として残されていたのである。

0. 4. 課題の設定

上記の課題および可能性に対する取り組みは，第Ⅱ期の教科書において，どのような形で展開したのか？——本論文においては，この点に基本的な観点を設定し，第Ⅱ期の教科書において構成されていた分数除法の計算規則を導く説明の過程について，その論理と特徴を解明することを課題とする。分析の結果については，第Ⅰ期（前期および後期）の教科

書を対象とする分析の結果との関連，あるいは，明治検定期全般におけるその位置を明らかにする。

0．5．対象と方法

主要な分析対象とする教科書を次に示す[20][21][22]。

① 学海指針社編『小学算術』高等科教員用，巻2，集英堂，1901（明治34）年。
② 金港堂書籍編『高等算術教科書』教員用，巻3，金港堂，1901（明治34）年。
③ 高浦丈雄著『高等小学算術教科書』教員用，巻2，訂正再版，普及舎，1902（明治35）年。
④ 中山民生編『高等小學新撰算術』教員用，巻2，訂正再版，神戸書店，1902（明治35）年。
⑤ 長澤亀之助編纂・後藤胤保補修『小學算術教科書』高等小学校教員用，2 年，修正再版，開成館，1902（明治35）年。
⑥ 総川猪之吉編『高等小學教授用算術書』巻2，松榮堂書店，1903（明治36）年[23]。
⑦ 大塚薫･小出末三合著『新案小学算術教科書』高等科教員用，巻2，文学社，1904（明治37）年。

第Ⅱ期の教科書において注目される点は，特に分数除法に関する次の記述である。「奇怪なる運算」（学海指針社の教科書（①））。「教授上最も困難を感ずるは，何故に其の分母子を転倒して乗ずるかに在り」（中山民生の教科書（④））。「由来，分数除法は，一般に教授に困難なりと称せらる」（大塚薫・小出末三の教科書（⑦））。

上記の記述は，第Ⅱ期の教科書において，分数除法，特にその計算規則に関する説明が困難な課題として認識されていたことを示している。同時に，この認識を基礎として，分数除法の計算規則を自然な形で説明するための試みが行われていたこと，それが，教科書における教育内容構成において具体化されていることを予想させる[24][25]。その具体的な形態を解明することが本論文の課題である。同時に，その試みは，第Ⅰ期・後期の教科書において残されていた課題，形成されていた可能性との関連において，どのような性格あるいは位置を備えていたのか？――問題はこの点にある。

次に，上記の教科書①～⑦と，先に設定した分析の視点⑴との関連について説明する。それにより，本論文において，上記の教科書がどのような事例として位置付けられるのかを示す。

第一に，第Ⅱ期の教科書においても，計算規則を導く説明の過程が，演算の定義を出発点とする形で構成されている事例が存在する。

本論文においては，《包含除》としての定義が説明の出発点として位置付けられている事例として，長澤亀之助・後藤胤保（⑤），高浦丈雄（③），中山民生（④）の教科書，《乗法の逆演算》としての定義が説明の出発点として位置付けられている事例として，金港堂の教科書（②）を分析対象とする。

第二に，第Ⅱ期の教科書においては，計算規則に関する説明と演算の定義との関連付けの形態における《多様化》の進行を示す事例が存在する。具体的には，計算規則によって演算が定義されている事例，演算の定義から独立した形で，計算規則を導く説明の過程が構成されている事例である。

前者については，計算規則と演算の定義の《一体化》，後者については，逆に，両者の《乖離》が特徴的である。上記の特徴については，分数除法の計算規則に関する説明の困難性に対する独自な対応の形態として位置付けることが可能である。

本論文においては，前者の事例として，学海指針社の教科書（①），後者の事例として，総川猪之吉の教科書（⑥）を分析対象とする。

第三に，上記の内，総川猪之吉の教科書（⑥）においては，《演算における数の比例関係》に依拠する方法によって除法が定義されている。先に指摘した通り，総川猪之吉の教科書（⑥）においては，演算の定義を出発点とする形で，計算規則を導く説明の過程が構成されているわけではない。しかしながら，この方法による定義それ自体には，次の3点において重要な可能性が含まれている。

第一に，演算の定義を出発点とする形で計算規則を導く説明の過程を構成する可能性。第二に，説明の過程において，《逆数》を，その重要な構成要素として位置付ける可能性。第三に，《結果主義》に依拠した，すなわち，《演算結果としての同一性》を根拠･理由とする間接的な方法によってではなく，直接的な方法によって，計算規則を導く説明の過程を構成する可能性。

ただし，総川猪之吉の教科書（⑥）において，上記の可能性は，文字通り，可能性に止まり，教育内容構成として具体化されているわけではない。しかしながら，当時における教育実践研究の成果に依拠するならば，上記の可能性を具体化することは決して不可能ではなかった。同時に，この点については，当時における教育課程の編成形態に起因する限界が含まれていた。

本論文においては，この見方により，総川猪之吉の教科書（⑥）による演算の定義それ自体に含まれ

ている可能性と限界についても分析対象に含めることにする。

本論文の基本的な研究方法は，教科書内容の分析，すなわち，教科書の記述を直接的な対象とし，その内容を具体的な形で解明する作業により，教科書における教育内容構成の論理と特徴，および，その基礎に存在すると考えられる教育内容構成の基本的観点を解明することである。

本論文においては，基本的に次の順序に従う。まず，教科書の記述を引用し，その内容を具体的な命題の形で表現する。これを基礎的な作業として，次に，当該の記述内容に含まれる論理と特徴，および，それに対する評価を示す。なお，教科書における教育内容構成の論理と特徴をより具体的かつ明確な形で示すために，国定教科書との比較を行うと同時に，先に述べた通り，当時における教育実践研究の成果との関連にも注目する。

0．6．構成

上記の対象設定に従い，本論文においては，まず，計算規則を導く説明の過程が，演算の定義を出発点とする形で構成されている事例（第1章），計算規則によって演算が定義されている事例（第2章），演算の定義から独立した形で，計算規則を導く説明の過程が構成されている事例（第3章）を，それぞれ，対象として分析を進める。それにより，分数除法の計算規則に関する説明の困難性の克服に向けた試みが多様な形で行われていたこと，しかしながら，試みの多くが重要な問題――すなわち，《結果主義》に関する問題，《逆数》の位置付けに関する問題（先に設定した分析の視点(2)(3)）――との関連を欠落させた形で行われていたこと，この点に起因して，計算規則の説明における重要な進歩につながらなかったことを示す。なお，上記の特徴（特に，第1章，第3章）をより明確な形で示すために，国定教科書による分数除法の計算規則に関する説明についても合わせて見ることにする（第4章）。

次に，教育内容構成としては具体化されていないけれども，演算の定義それ自体に重要な可能性が含まれている事例に注目し，その可能性と限界を，当時における教育実践研究の成果との関連において具体的に示す（第5章）。

おわりに，本論文の成果および先行研究の成果を対象に含めた形で，明治検定期算術教科書における分数除法の計算規則に関する説明の論理と特徴の展開を整理すると同時に，現在において積極的な継承・発展を図るべき重要な特徴を示す（第6章）。

教科書の原文は，ほとんどの場合，縦書きであるが，引用に際しては横書きに改めた。また，必要に応じて，現代の字体・記法に改めると同時に，句読点等を補った。明らかな誤記については訂正を加えた。引用文における［　］は筆者による注記を，／は原文における改行を，それぞれ意味する。見やすさを考え，教科書からの引用には枠線による囲みを付した。煩雑を避けるため，ページ数の注記については省略し，引用部分が掲載されている編，章，節等の名称を，（　）を付して本文に示した。

教科書については，具体的な書名ではなく，先に示した編著者名と番号を用い，例えば，「学海指針社の教科書（①）」の形で記した。教育内容および教育内容構成の特徴を表現する重要な用語には《　》を付した。

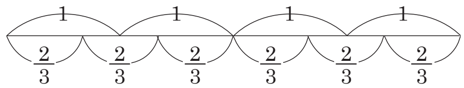
1．演算の定義を出発点とする説明

1．1．《包含除》としての定義を出発点とする説明

1．1．1．《結果主義》に依拠した説明
――《長さ》を用いた説明――

長澤亀之助・後藤胤保の教科書（⑤）において，分数除法の計算規則を導く説明の過程は，《包含除》による演算の定義を出発点とする形で構成されている（第2期，第1節「分数（下）」，第4課「除法」）。

例ヘバ，$4\div\frac{2}{3}$ハ4ノ中ニ$\frac{2}{3}$ガ幾ツ含マルルカトイフコトヲ知ル法ナリ。即チ，次ノ図ノ如ク6アルコトヲ知ル。



而シテ，コレハ4ヲ3倍シテ2ニテ割リタルモノナルコトヲモ知ル。故ニ，コレヲ求ムルニハ次ノ如クス。

$4\div\frac{2}{3}=4\times\frac{3}{2}=2\times\frac{3}{1}=6$，答　（中略）

52．分数を整数にて割るには，その分数の分子と分母とを転倒して，整数に除ず可し。

上記の引用においては，分数除法の計算規則を導く説明の過程が次の形で構成されている。

(1)　例題に関する，《長さ》を用いた説明によって，「次ノ図ノ如ク6アルコトヲ知ル」として，演算の結果が導かれる。$4\div\frac{2}{3}=6$

(2)　演算の結果について，それが，「4ヲ3倍シテ

2ニテ割リタルモノ」，従って，被乗数に対する$\frac{3}{2}$倍操作の結果に等しいことが示される。

$4 \div \frac{2}{3} = 6 = (4 \times 3) \div 2 = 4 \times \frac{3}{2}$

(3)　(1)(2)による説明の結論として，次が導かれる。

$4 \div \frac{2}{3} = 4 \times \frac{3}{2}$

(4)　この事実を基礎とする一般化によって，《分数除法の計算規則》$\left(X \div \frac{b}{a} = X \times \frac{a}{b}\right)$ が導かれる。

(1)に示されている通り，長澤亀之助・後藤胤保の教科書（⑤）においては，演算の結果を導く説明において,《長さ》が用いられている点が特徴的である。分数の説明において《連続量》が用いられている点は注目に値する。同時に，この点については，第Ⅱ期の教科書における独自の試みの一つの形態として位置付けることが可能である。

計算規則の説明に《量》が用いられている事例は，第Ⅰ期の教科書においても存在した。例えば，第Ⅰ期・前期の教科書においては，佐久間文太郎の教科書において《面積図》を，第Ⅰ期・後期の教科書においては，石川富三郎の教科書において《長さ》（線分図）を，それぞれ，用いる方法によって計算規則が導かれていた。ただし，上記の事例において,《量》を用いた説明は補助的な位置に止められていた。これに対して，長澤亀之助・後藤胤保の教科書（⑤）においては,《長さ》を用いた説明を欠落させた場合，演算の結果を導くことそれ自体が不可能となる。その意味において重要な位置が付与されている。

ただし，(2)に示されている通り，分数除法の計算規則は，《演算の結果としての同一性》を根拠・理由とする間接的な方法によって導かれている。この点において，《結果主義》に依拠した説明になっている。《長さ》を用いた説明も，《結果主義》に依拠した説明における重要な構成要素として位置付けられているのである。この点に加え,《逆数》の定義・説明も示されていない。

1．1．2．単位分数に限定した《逆数》の説明 ――除数に対する《分割分数の論理》の適用――

高浦丈雄の教科書（③）においても，分数除法の計算規則を導く説明の過程は,《包含除》による定義を出発点とする形で構成されている。ただし，先に見た，長澤亀之助・後藤胤保の教科書（⑤）とは異なり，除数となる分数に対して《分割分数の論理》が適用されている点が特徴的である。この点についても，第Ⅱ期の教科書による独自の試みの一形態として位置付けることが可能である（第2編「分数」，第9「除法」)。

> 例3．15個を，4分の3にて除せよ。
>
> $15 \div \frac{3}{4} = 15 \times \frac{4}{3} = 5 \times 4 = 20$　答．20個
>
> 15を$\frac{3}{4}$にて除するは，15の内に，$\frac{1}{4}$の3倍が，いくつあるかを見るにあり。而して，15の内には，$\frac{1}{4}$は$\frac{15 \times 4}{3}$［15×4の誤記と見られる］だけありて，$\frac{1}{4}$の3倍は，その3分の1，即ち，$\frac{15 \times 4}{3}$だけあり。故に例示の如し。（中略）
>
> 右の2例によりて，左の規則を知らしむべし。
>
> 整数を分数にて除するには，分数の分母子を置きかへて，これを整数に乗すべし。

上記の引用においては，次の過程を辿って，分数除法の計算規則が導かれている。ただし，(5)(6)については，対応する記述が明確かつ具体的な形で存在するわけではない。

(1)　《分割分数の論理》により，除数となる分数が《単位分数と整数の積》に分解される。

$15 \div \frac{3}{4} = 15 \div \left(\frac{1}{4} \times 3\right)$

(2)　《単位分数と整数の積を除数とする除法》が，《単位分数による除法》,《整数による除法》，2つの除法を続けて行う演算に分解される（ただし，分解可能性に関する説明は行われない)。

$15 \div \left(\frac{1}{4} \times 3\right) = \left(15 \div \frac{1}{4}\right) \div 3$

(3)　(2)の右辺に対する，$15 \div \frac{1}{4} = 15 \times 4$，および，《商分数の論理》の適用により，(2)が次の形に変形される。$\left(15 \div \frac{1}{4}\right) \div 3 = (15 \times 4) \div 3 = \frac{15 \times 4}{3}$
（ただし，$15 \div \frac{1}{4} = 15 \times 4$の成立を示す説明は行われない)。

(4)　(1)〜(3)により，例題による演算の結果として，$15 \div \frac{3}{4} = \frac{15 \times 4}{3}$ が導かれる。

(5)　(4)において導かれた演算の結果について，それが，乗法 $15 \times \frac{4}{3}$ による演算の結果と等しいことが示される。$15 \div \frac{3}{4} = \frac{15 \times 4}{3} = 15 \times \frac{4}{3}$

(6)　結論として，$15 \div \frac{3}{4} = 15 \times \frac{4}{3}$ が導かれる。

(7)　この事実を基礎とする一般化により，《分数除法の計算規則》$\left(X \div \frac{b}{a} = X \times \frac{a}{b}\right)$ が導かれる。

上記(1)〜(6)による説明の過程全体は，次の形に式

表記される。

$$15\div\frac{3}{4}=15\div\left(\frac{1}{4}\times3\right)=\left(15\div\frac{1}{4}\right)\div3=(15\times4)\div3$$
$$=\frac{15\times4}{3}=15\div\frac{4}{3}$$

第一の変形（(1)）に示されている通り，高浦丈雄の教科書（③）においては，除数となる分数に対して《分割分数の論理》が適用されている点が特徴的である。それにより，《除数となる分数を，単位分数と整数の積に分解すること》が説明の出発点として位置付けられている。ただし，分数除法の計算規則は，《演算の結果としての同一性》を根拠・理由とする間接的な方法によって導かれている((5),(6))。この点に，《結果主義》への依拠が示されている。

上記に加え，高浦丈雄の教科書（③）においては，《逆数》に関する説明が行われていない。しかしながら，(3)において $15\div\frac{1}{4}=15\times4$ の成立を示すためには，少なくとも単位分数について，《逆数》を説明すること，それを用いることが必要になる(26)。

次に，この点との関連において，中山民生の教科書（④）を見よう。

中山民生の教科書（④）においても，《包含除》としての定義を出発点とし，《包含除》としての論理を適用する形で，説明の過程が構成されている。この点においては，高浦丈雄の教科書（③）と共通する特徴を備えている。ただし，次の2点において独自の特徴が見られる。

第一に，計算規則を導く説明の過程が，《整数÷単位分数》，《整数÷真分数》，2つの過程に分節化され，前者から後者へと進む順序に従って構成されている（第2編「分数」，第6課「除法」）。

> 本課に於て教授上最も困難を感ずるは，何故に其の分母子を転倒して乗ずるかに在り。而して，之を教授するに，理論的に之か証明を求めんことは，小学児童には不適当なりとす。故に，先つ分数単位の除法を確実に会得せしめ，然る後，漸次類推せしめて，分数にて除することに移らしむべし。

上記の引用においては，分数除法の計算規則を導く説明の困難性（「教授上最も困難を感ずる」）が指摘されている。同時に，困難性を克服するために，説明の過程を，《整数÷単位分数》，《整数÷真分数》，2つの過程に分節化し，前者から後者へと進む形で構成する必要性が指摘されている。

ただし，上記の形に分節化された説明の過程において，《包含除》としての論理を用いた説明は，《整数÷単位分数》について行われるに止まる。《整数÷真分数》については，除数となる分数に対して《分割分数の論理》を適用する形で説明が行われている。その具体的な形態については後に見る。

除数となる分数に対して《分割分数の論理》が適用されている点においては，先に見た，高浦丈雄の教科書（③）と共通する特徴を備えている。ただし，先に見た通り，高浦丈雄の教科書（③）においては，$15\div\frac{1}{4}=15\times4$ の成立を示す説明が行われていなかった。これに対して，中山民生の教科書（④）においては，《整数÷単位分数》の計算規則 $\left(X\div\frac{1}{a}=X\times a\right)$ の成立を示す説明が行われている。この点が第二の特徴である。

中山民生の教科書（④）においては，第一に，説明の過程が，《整数÷単位分数》から《整数÷真分数》へと進む形で構成されている点，第二に，《整数÷単位分数》の計算規則を導く説明が行われている点，上記2点において，高浦丈雄の教科書（③）と比較して，論理の精緻化が図られているのである。その具体的な形態を次に見ることにしよう。

まず，《整数÷単位分数》に関する説明を見る。次の引用に見られる通り，この内容については，《包含除》としての定義を出発点とし，その論理を適用する形で説明が行われている。被除数となる整数については，1を出発点としながらも（(21)），それに対象を限定することなく，任意の整数へと拡張が図られている（(22)～(27)）。

> (21)　1個の中に$\frac{1}{2}$は幾つあるか。答　2
> 　1個を$\frac{1}{2}$にて除すれば幾何。答　2
> 　1個の中に2分の1は2つあり。故に，1個を2分の1一つゝに分くるときは，2個となるなり（実物又は図形等によりて覚らしむべし）。即ち，1を$\frac{1}{2}$にて除すれば，1の2倍となる。$1\div\frac{1}{2}=1\times2=2$
> (22)　3個の中に$\frac{1}{2}$は幾つあるか。答　6
> 　3個を$\frac{1}{2}$にて除すれば幾何。答　6
> 　3個の中に2分の1は6つあり。故に，3を$\frac{1}{2}$にて除すれば，3の2倍となる。$3\div\frac{1}{2}=3\times2=6$
> (23)　4個を$\frac{1}{3}$にて除せよ。答　12
> 　左の諸問題を計算せよ。
> (24)　$7\div\frac{1}{3}=21$　　(25)　$10\div\frac{1}{4}=40$
> (26)　$12\div\frac{1}{5}=60$　　(27)　$15\div\frac{1}{6}=90$
> 　以上(21)より(27)までの教授によりて，一般に，或数

を$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$等の分数単位にて除すれば，其の数は2倍，3倍，4倍，等せらるゝことを，明確に会得せしむべし。

上記の説明により，《整数÷単位分数》の計算規則$\left(X \div \frac{1}{a} = X \times a\right)$が導かれている。

なお，上記の説明の内，《1を被除数とする除法》$\left(1 \div \frac{1}{a} = 1 \times a\right)$に関する説明（(21)）においては，《逆数》が説明されていると見ることが可能である$\left(1 \div \frac{1}{a} = a \rightarrow \frac{1}{a} \times a = 1\right)$。ただし，説明の対象は《単位分数の逆数》に限定されている。

次に，《整数÷真分数》（「分数にて除すること」）に進む。《整数÷単位分数》に関する説明とは異なり，《整数÷真分数》については，除数となる分数に対して《分割分数の論理》を適用する形で説明が行われている。《包含除》としての説明の論理は適用されない。

(28)　4個を2にて除し，更に$\frac{1}{3}$にて除せよ。答　6
　4個を2分して3倍すれば可なり（即ち4個に$\frac{3}{2}$を乗ずるに等し）。$4 \div 2 \div \frac{1}{3} = 4 \div 2 \times 3 = 6$
＊4個を2と$\frac{1}{3}$との積にて除せよ。答　6
　4個を$2 \times \frac{1}{3}$即ち$\frac{2}{3}$にて除するは，2にて除し，更に$\frac{1}{3}$にて除するに等し。即ち$\frac{3}{2}$を乗ずるに等し。
$4 \div \frac{2}{3} = 4 \times \frac{3}{2} = 6$
(29)　2個を$\frac{2}{3}$にて除せよ。答　3
$2 \div \frac{2}{3} = 2 \times \frac{3}{2} = 3$
(30)　$4 \div \frac{3}{5}$を計算せよ。答　6個3分の2
$4 \div \frac{3}{5} = 4 \times \frac{5}{3} = 6\frac{2}{3}$
(31)　或る数を分数にて除するには，いかにすべきか。
　答　分数の分子にて除し，分母を乗ずべし。即ち，分数の分母子を転倒して乗ずべし。

上記においては，まず，例題に即した説明によって，分数除法の計算規則が導かれている（(28)）。次に，異なる数値を備えた問題に対する適用を図った後（(29)，(30)），分数除法の計算規則が言語によって定式化されている（(31)）。

次に，計算規則を導く説明の過程（(28)）を辿ってみよう。ただし，説明の過程には部分的な重複，繰り返しが含まれている。従って，ここでは，その後半部分，すなわち，先の引用において，＊から開始される記述に対象を限定する。

(1)　問題「4個を2と$\frac{1}{3}$との積にて除せよ」により，《整数(4)を被除数とし，整数(2)と単位分数$\left(\frac{1}{3}\right)$との積$\left(2 \times \frac{1}{3}\right)$を除数とする演算$\left(4 \div \left(2 \times \frac{1}{3}\right)\right)$》を考える。
(2)　(1)の演算が，《整数（2）を除数とする除法》，《単位分数$\left(\frac{1}{3}\right)$を除数とする除法》，2つの演算に分解される$\left(4 \div \left(2 \times \frac{1}{3}\right) = (4 \div 2) \div \frac{1}{3}\right)$。ただし，分解可能性に関する説明は行われていない。
(3)　$(4 \div 2) \div \frac{1}{3}$に対して，まず，《整数÷単位分数》の計算規則$\left(X \div \frac{1}{a} = X \times a\right)$が，次に，《分数乗法の計算規則》$\left(X \times \frac{b}{a} = (X \div a) \times b\right)$が適用される。その結果，それが，整数（2）と単位分数$\left(\frac{1}{3}\right)$の積$\left(\frac{2}{3}\right)$の，分母と分子を入れ換えた数$\left(\frac{3}{2}\right)$を乗数とする乗法に等しいことが示される。
$\left((4 \div 2) \div \frac{1}{3} = (4 \div 2) \times 3 = 4 \times \frac{3}{2}\right)$。
(4)　結論として，$4 \div \left(\frac{1}{3} \times 2\right) = 4 \times \frac{3}{2}$が導かれる。
(5)　この事実を基礎とする一般化により，《分数除法の計算規則》$\left(X \div \frac{b}{a} = X \times \frac{a}{b}\right)$が導かれる。

上記による説明の過程全体を，次に一般的な形で表記する[27]。

$$X \div \frac{b}{a} = X \div \left(b \times \frac{1}{a}\right) = (X \div b) \div \frac{1}{a} = (X \div b) \times a$$
$$= X \times \frac{a}{b}$$

上記の過程においては，第一に，除数となる分数に対する《分割分数の論理》の適用により，当該の分数が《整数と単位分数の積》に分解されている。第二に，《整数と単位分数の積を除数とする除法》が，《整数による除法》，《単位分数による除法》，2つの除法に分解され，この順序に従った形で実行されている。第三に，その結果に対して，先に導かれた《整数÷単位分数》の計算規則が，第四に，《分数乗法の計算規則》が，順に適用されている。第五に，上記による説明の結論として，分数除法の計算規則が導かれている。

上記の内，第二の変形においては，その根拠・理由が示されていない。ただし，第一および第三の変形においては，《分数の定義》および《分数乗法の

計算規則》が根拠・理由とされている。この点により，計算規則を導く説明の過程全般については，《演算結果としての同一性》を根拠・理由とする間接的な方法（《結果主義》に依拠した方法）によってではなく，直接的な方法によって構成されていると見ることが可能である。

《逆数》に関する説明は，先に見た通り，《単位分数の逆数》$\left(\frac{1}{a}\times a=1\right)$ に対象を限定した形で行われるに止まっている。《真分数の逆数》については説明されていない。これは，上記，第一の変形に見られる通り，除数となる分数に対して《分割分数の論理》が適用されている点に起因する。中山民生の教科書（④）においては，《分割分数の論理》の適用により，《除数となる分数を整数と単位分数の積に分解すること》$\left(\frac{b}{a}=b\times\frac{1}{a}\right)$ が，計算規則を導く説明の出発点として位置付けられている。この点は，先に見た，高浦丈雄の教科書（③）に共通する特徴である。同時に，この点に起因して，高浦丈雄の教科書（③）においても，中山民生の教科書（④）においても，《逆数》に関する説明の対象が《単位分数の逆数》に限定される結果になっているのである。

1. 2.《乗法の逆演算》としての定義を出発点とする説明――《乗法・除法によって記述される分数の性質》の適用――

次に，計算規則を導く説明の過程が，《乗法の逆演算》としての定義を出発点として構成されている事例として，金港堂の教科書（②）を見る。

金港堂の教科書（②）においては次の2点が注目される。第一に,《乗法の逆演算》としての定義（「除法ハ乗法ノ逆ナリ」）を出発点とする説明により，分数除法の計算規則が，まず，$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{b\div d}{a\div c}$ の形で示されている。第二に，この計算規則に対して,《乗法・除法によって記述される分数の性質》を適用する方法により，分数除法の計算規則 $\left(\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}\right)$ が導かれている。なお，ここで,《乗法･除法によって記述される分数の性質》とは,《分数の分子または分母に対して，整数を乗数・除数とする乗法・除法を行うことによって生ずる，分数の大きさの変化に関する一連の命題》を意味する。

上記，第二の特徴については，教科書において次の説明がある（第1章「分数」，第8課「除法」）。

> 要旨　分数ヲ以テ他ノ数ヲ除スルコトヲ授ケントス。
> 本課ノ方法ハ乗法ニ熟達セルモノニハ頗ル容易ナリトイヘドモ，其ノ理由ヲ悟ラシメンニハ，分数ノ分子ヲ除スル代リニ同数ヲ以テ分母ヲ倍シテモ可ナルコト，及ビ分母ヲ除スル代リニ同数ヲ以テ分子ヲ倍スルモ不可ナキコトヲ根拠トスベシ。

この点を含め，分数除法の計算規則を導く説明を次に引用する。

> $\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{5\times3}{8\times7}=\frac{15}{56}$　故ニ，$\frac{15}{56}\div\frac{3}{7}=\frac{15\div3}{56\div7}=\frac{5}{8}$
> 解．除法ハ乗法ノ逆ナリ。然ルニ，乗法ヲ行フニハ分母ヲ相乗シ又分子ヲ相乗ジテ各新分母子トナシタルヲ以テ，其ノ逆タル除法ニ於テハ，法［除数］ノ分母ヲ以テ実［被除数］ノ分母ヲ割リ，又法ノ分子ヲ以テ実ノ分子ヲ割リ，其ノ商ヲ各新分母子トナスベキナリ。（中略）
> 分数ノ分子ヲ割ルハ同数ヲ以テ分母ニ乗ズルニ等シク，又分母ヲ割ルハ同数ヲ以テ分数ヲ乗ズルニ等シキヲ以テ，
> $\frac{2}{3}\div\frac{3}{5}=\frac{2\div3}{3\div5}$ トスル代リニ，
> $\frac{2}{3}\div\frac{3}{5}=\frac{2\times5}{3\times3}$ トナシテ可ナリ。
> 然ルニ，$\frac{2}{3}\div\frac{3}{5}=\frac{2\times5}{3\times3}=\frac{2}{3}\times\frac{5}{3}$ ナリ。
> 故ニ左ノ規則アリ。
> 三．分数ヲ以テ分数ヲ除スルニハ法ノ分母子ヲ転倒シテ乗法ヲ行フベシ。
> 四．$\frac{3}{7}\div\frac{2}{5}=\frac{3}{7}\times\frac{5}{2}=\frac{3\times5}{7\times2}=\frac{15}{14}=1\frac{1}{14}$

上記の引用において，分数除法の計算規則を導く説明の過程は次の形で構成されている。

(1)　《乗法の逆演算》としての分数除法の定義（「除法ハ乗法ノ逆ナリ」）から，まず，計算規則として，「法ノ分母ヲ以テ実ノ分母ヲ割リ又法ノ分子ヲ以テ実ノ分子ヲ割リ，其ノ商ヲ各新分母子トナスベキナリ」$\left(\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{b\div d}{a\div c}\right)$ が導かれる。

(2)　例題として，「分子，分母ヲ割リ切ル能ハザルトキ」が示され，上記の計算規則をこの場合に適用した結果 $\left(\frac{2}{3}\div\frac{3}{5}=\frac{2\div3}{3\div5}\right)$ が示される。

(3)　(2)の結果に対して，《乗法・除法によって記述される分数の性質》が適用される。具体的には，上記の引用において「根拠トスベシ」として示されていた次の性質が順に適用される[(28)]。

①「分数ノ分子ヲ除スル代リニ同数ヲ以テ分

母ヲ倍シテモ可ナルコト」$\left(\frac{b \div c}{a}=\frac{b}{a \times c}\right)$。

②「分母ヲ除スル代リニ同数ヲ以テ分子ヲ倍スルモ不可ナキコト」$\left(\frac{b}{a \div c}=\frac{b \times c}{a}\right)$。

それにより，演算の結果が導かれる。すなわち，$\frac{2}{3} \div \frac{3}{5}=\frac{2 \div 3}{3 \div 5}=\frac{2 \times 5}{3 \times 3}$

(4) (3)の結果に対して《分数乗法の計算規則》$\left(\frac{b}{a} \times \frac{d}{c}=\frac{b \times d}{a \times c}\right)$ を適用することにより，まず，$\frac{2 \times 5}{3 \times 3}=\frac{2}{3} \times \frac{5}{3}$，結論として，$\frac{2}{3} \div \frac{3}{5}=\frac{2}{3} \times \frac{5}{3}$ が導かれる。

(5) (4)の結論を基礎とする一般化により，《分数除法の計算規則》$\left(\frac{b}{a} \div \frac{d}{c}=\frac{b}{a} \times \frac{c}{d}\right)$ が導かれる。

金港堂の教科書（②）において，分数除法の計算規則を導く説明は，《乗法・除法によって記述される分数の性質》を用いた，代数的な方法によって行われている（(3)）。この方法が採用されている点それ自体については，金港堂の教科書（②）に独自の特徴として位置付けることが可能である。ただし，《結果主義》に依拠した説明になっている点，《逆数》に関する説明を欠落させている点は明らかである（(3), (4), (5)）[29]。

第1章においては，計算規則を導く説明の過程が，演算の定義を出発点とする形で構成されている事例を対象とする分析を試みた。具体的には，第一に，《包含除》としての定義を出発点とし，その論理を適用する方法による説明が行われている教科書として，長澤亀之助・後藤胤保（⑤），高浦丈雄（③），中山民生（④）の教科書（1．1），第二に，《乗法の逆演算》としての定義を出発点とする説明が行われている教科書として，金港堂の教科書（②）を対象とする分析を試みた（1．2）。

分析の結果に示されている通り，上記の教科書においては，分数除法の計算規則に関する説明が，《長さ》を用いた説明（長澤亀之助・後藤胤保の教科書（⑤）），除数となる分数に対して《分割分数の論理》を適用した説明（高浦丈雄の教科書（③）），《乗法・除法によって記述される分数の性質》を用いた代数的な方法による説明（金港堂の教科書（②））等，多様な概念・方法を用いる形で行われていた。この点に加え，《整数÷単位分数》から《整数÷真分数》へと進む順序の構成（中山民生の教科書（④））に見られる通り，説明の過程を2つに分節化する試みも行われていた。

上記の試みについては，第Ⅱ期の教科書としての独自の試みの諸形態として位置付けることが可能である。同時に，その結果，第Ⅰ期・後期の教科書と比較して，説明の過程において論理の《精緻化》が図られている点が注目される。

しかしながら，序章において述べた通り，上記の試みに対しては，次の点を問うことが必要になる。すなわち，第Ⅱ期の教科書としての独自の試みは，第Ⅰ期・後期の教科書に含まれていた重要な可能性――《結果主義》の克服，《逆数》に対する注目――との関連において，どのような位置あるいは性格を備えていたのか？

この点について注目される特徴は，第一に，中山民生の教科書（④）において，《結果主義》を克服する可能性が示されている点，《逆数》に関する説明が行われている点である。ただし，《逆数》については，説明の対象が《単位分数の逆数》に止められており，この意味における限界の存在は否定できない。

第二に，これに対して，高浦丈雄（③），長澤亀之助・後藤胤保（⑤），金港堂（②）の教科書においては，説明の過程における《結果主義》への依拠，《逆数》に関する説明の欠落が見られた。上記の教科書においては，第Ⅰ期・後期の教科書に含まれていた重要な可能性の継承・発展を図る方向性とは逆に，第Ⅰ期・前期の教科書が備えていた特徴を継承する方向性が含まれている。第Ⅱ期の教科書としての独自の試みについても，その方向性を基本的な方向性とし，それに従属する形で位置付けられ，具体化されていたと見ることが可能である。

本章において見た通り，演算の定義を出発点とする教科書においては，分数除法の計算規則に関する説明の困難性に対して，その克服を意図した試みが多様な形で具体化されていた。しかしながら，その試みは，必ずしも，第Ⅰ期・後期の教科書に含まれていた重要な可能性の継承・発展を図る方向性に基礎付けられていたわけではなかったのである。

2．演算の定義と一体化した説明
――《乗法の相互関係》の適用――

学海指針社の教科書（①）において特徴的な点は，第一に，計算規則によって演算が定義されている点，第二に，計算規則を導く説明の過程において，《乗

法の相互関係》$\left(X\times\frac{b}{a}=Y\leftrightarrow Y\times\frac{a}{b}=X\right)$ が重要な構成要素として位置付けられている点である（第2編「分数及小数の続」，第23課「分数割算第二」)。

> 此場合にも掛算の場合の如く，先づ，分数にて他の数を割ると云ふことの意義より始めざる可からず。即ち，分母子を転倒して之を掛けることを称して「割る」と云ふものなることを教ふべし。然れども，最初より突然に斯る定義を授けば，児童は，斯る奇怪なる運算が如何なる場合に必要なるかを解する能はざる可し。
>
> 故に，先づ最初は，次に示せる如き心算を課し，簡易なる掛算の還元を自ら行はしめ，然る後，始めて割算の意義を授け，割算はツマリ掛算の還元法なることをも知らしむるを要す。
>
> （心算）
>
> (1)　3は幾つの2分の1に當るか。
>
> (2)　4は幾つの3分の1に當るか。
>
> (3)　6は幾つの4分の3に當るか。
>
> 例．幾つに$\frac{3}{5}$を掛けて12となるべきか。
>
> $(12\div3)\times5=20\qquad 12\times\frac{5}{3}=20$
>
> 分数の分母と分子とを転倒して，他の数に掛けることを「分数で割る」と云ふ。
>
> 例へば，$\frac{3}{5}$を以て12を割るとは，12に$\frac{3}{5}$［$\frac{5}{3}$の誤記と見られる］を掛けることなり。

先に指摘した第一の特徴は，次の記述に具体的に示されている。「分数の分母と分子とを転倒して，他の数に掛けることを『分数で割る』と云ふ」。第二の特徴に関連して，《乗法の相互関係》は「掛算の還元」と記述されている。上記2点を含め，計算規則を導く説明の過程を次の辿ってみよう。

(1)　分数乗法の例題について，「簡易なる掛算の還元」$\left(X\times\frac{b}{a}=Y\rightarrow Y\times\frac{a}{b}=X\right)$ が行われる。例えば，上記の引用における「心算」(1)(3)に即した形で，次の説明が行われる。

$$x\times\frac{1}{2}=3\rightarrow x\div2=3\rightarrow x=3\times2=6$$

$$y\times\frac{3}{4}=6\rightarrow(y\div4)\times3=6\rightarrow y\div4=6\div3$$
$$\rightarrow y=(6\div3)\times4\rightarrow y=6\times\frac{4}{3}=8$$

(2)　例題「幾つに$\frac{3}{5}$を掛けて12となるべきか」（$X\times\frac{3}{5}=12$となる数Xを求める問題）について，(1)と同じ方法により，次の形で，「掛算の還元」が行われる。

$$X\times\frac{3}{5}=12\rightarrow(X\div5)\times3=12\rightarrow X\div5=12\div3$$
$$\rightarrow X=(12\div3)\times5\rightarrow X=12\times\frac{5}{3}\ (=20)$$

(3)　(2)によって導かれた，$12\times\frac{5}{3}=X$ を求める演算として，分数除法が定義される。すなわち，《$12\div\frac{3}{5}=X$を求める $\overset{}{\underset{\text{def.}}{\longleftrightarrow}}$ $12\times\frac{5}{3}=X$を求める》。

(4)　《分数除法の計算規則》$\left(X\div\frac{b}{a}=X\times\frac{a}{b}\right)$が同時に導かれる。

なお，学海指針社の教科書（①）においては，上記による説明の過程の内，(1)に対応する記述が明確かつ具体的な形で存在するわけではない。(2)については，「掛算の還元」に対応する式が部分的に記されるに止まる。上記による説明の過程全体を次に示す。

《$X\times\frac{3}{5}=12$ となる数Xを求める $\longleftrightarrow$
$12\times\frac{5}{3}=X$ を求める $\underset{\text{def.}}{\longleftrightarrow}$ $12\div\frac{3}{5}=X$ を求める》

先に見た通り，説明の過程(1)(2)においては，「掛算の還元」により，《乗法の相互関係》が示されていた $\left(X\times\frac{3}{5}=12\rightarrow12\times\frac{5}{3}=X\right)$。この関係は，上記の前半部分に示されている。(3)(4)においては，(2)によって導かれた命題 $\left(12\times\frac{5}{3}=X\right)$ に依拠する形で，分数除法 $\left(12\div\frac{5}{3}=X\right)$ の定義と計算規則が示されていた。この点が，上記の後半部分に該当する。

説明の過程全般において，《結果主義》への依拠を示す事実は特に存在しない。ただし，《逆数》については，「分母と分子とを転倒し」た数としての説明に止まっており，《逆数》の定義は示されていない。

上記2点に関連して，学海指針社の教科書（①）においては次の点が注目される。すなわち，説明の過程(2)（「掛算の還元」）において，《$X\times\frac{5}{3}=12$》の両辺に対して行われている操作（$\div3\times5$）は，除数の《逆数》による乗法 $\left(\times\frac{5}{3}\right)$ に他ならない。説明の過程(1)「簡易なる掛算の還元」においても，この点は同じである。この乗法を《$X\times\frac{5}{3}=12$》の両辺に対して行うことにより，次の説明が可能となる。

$$\left(X\times\frac{5}{3}\right)\times\frac{5}{3}=12\times\frac{5}{3}\rightarrow X\times\left(\frac{3}{5}\times\frac{5}{3}\right)=12\times\frac{5}{3}$$
$$\rightarrow X=12\times\frac{5}{3}$$

この事実は，分数除法の計算規則を導く過程に，《逆数》の定義を位置付ける必要性と有効性を示している[30]。

3. 演算の定義から乖離した説明
——除数に対する《商分数の論理》の適用——

総川猪之吉の教科書（⑥）においては，計算規則を導く説明の過程が，演算の定義を出発点とする方法ではなく，それとは乖離した方法によって構成されている。この点が第一の特徴である（なお，演算の定義については第5章において検討を加える）。

次に，先に見た通り，高浦丈雄（③），中山民生（④）の教科書においては，説明の出発点において，除数となる分数に対して《分割分数の論理》が適用されていた $\left(X\div\frac{b}{a}=X\div\left(\frac{1}{a}\times b\right)\right)$（第1章）。これに対して，総川猪之吉の教科書（⑥）においては，除数となる分数に対して《商分数の論理》が適用されている $\left(X\div\frac{b}{a}=X\div(b\div a)\right)$。この点が第二の特徴である。

総川猪之吉の教科書（⑥）において，計算規則を導く説明は次の引用から開始される（第5編「前ノ続」，第16章「分数除法」）。

> 二．分数ヲ以テ，整数又ハ分数ヲ除スル算法ノ観念ヲ啓発スヘシ。
> ○ 今，一学級若干人ノ学生ヲ等分シテ2組トナシ，其ノ一組ノ人々ニ一箱ノ蜜柑ヲ分ケ与ヘテ，一人ガ若干個ヅツ得タリトセヨ。又，別ニ其ノ学級ノ学生ヲ幾組ニモ分ツコトナク，其代リニ，此ノ度ハ前ノ2倍即2箱ノ蜜柑ヲ持チ来リテ，之ヲ全級ノ学生ニ分チ与ヘテ，一人ガ若干個ヅツ得タリトセヨ。サテ問ハン。前ニ一人ノ得タル蜜柑ノ数ト，後ニ一人ノ得タル蜜柑ノ数ト，其ノ多寡如何。
> ● 前ハ一組ニ一箱ノ蜜柑ヲ与ヘ，後ハ二組ニ二箱ノ蜜柑ヲ与ヘタル理ナレバ，一人ノ得タル蜜柑ノ数ハ，前後全ク相等シ。
> ○ 然ラバ，一学級ヲ3組ニ分チテ，其ノ一組ニ一箱ノ蜜柑ヲ与ヘタルト，組ヲ分タズシテ，3箱（箱ノ数ハ前ノ組数ニ同ジ）ノ蜜柑ヲ全級ニ分チタルト，一人ノ得タル蜜柑ノ数ノ多寡如何。
> ● ソハ矢張前後相等シ。要スルニ，其ノ分チ方ニテハ，組数ト箱数ト相等シキ以上ハ，一人ノ得ル所ハ前後常ニ相等シ。
> ○ 今，試ミニ，右ノ事柄ニ，一々数ヲ当テ嵌メテ見ン。注意セヨ。
>
> （前） 60 ÷ （12 ÷ 3）
> 一箱ノ蜜柑ノ数 一学級ノ人員 分ツ組数
> = 60 ÷ 4 = 15
> 一組ノ数 一人ノ所得
>
> （後） 60 × 3 ÷ 12
> 一箱ノ蜜柑ノ数 箱数即前ノ組数 一学級ノ人数
> = 180 ÷ 12 = 15
> 蜜柑ノ総数 一人ノ所得
>
> ○ 是ニ由リテ，一般ニ，60÷（12÷3）ノ如キ形ノ式ハ，之ヲ 60×3÷12 ノ如クニ変化シテモ，其ノ値ハ猶，変ラザルコトヲ記憶スベシ。

上記の引用においては，2通りの方法による配分において，「一箱ノ蜜柑ノ数」(X)，「一学級ノ員数」(b)，「箱数即前ノ組数」(a)の間に成立する量的な関係が説明されている。その関係は，一般的には，次の形で表記される（X，a，bは，0ではない自然数）。

$$X\div(b\div a)=(X\times a)\div b$$

上記の関係は，2通りの方法による配分の結果（「一人ノ所得」）が等しいことを示している。次に，この関係を用いて，計算規則を導く説明が行われる。

> 次ニ，左ノ問題，15個ヲ4分ノ3ニテ除セヨ，ヲ与ヘ，問答法ニテ其ノ算法ヲ教授スベシ。其ノ数理ノ説明ハ，次ノ式ニ拠ルベキコト勿論ナリトス。
>
> $15\div\frac{3}{4}=15\div(3\div4)=15\times4\div3=\frac{15\times4}{3}$
>
> 然ルニ，$15\times\frac{4}{3}=\frac{15\times4}{3}$
>
> 故ニ， $15\div\frac{3}{4}=15\times\frac{4}{3}$
>
> 次ニ，左ノ問題，5分ノ4ヲ3分ノ2ニテ除セヨヲ与ヘ問答法ニテ教授スベシ。其ノ説明前ニ準ズ。

上記の引用においては，主として，《整数÷分数》の例題 $\left(15\div\frac{3}{4}\right)$ に即した説明によって，分数除法の計算規則が導かれている。説明の過程を次に辿っておく。

(1) 除数となる分数に対して，《商分数の論理》が適用される $\left(15\div\frac{3}{4}=15\div(3\div4)\right)$。

(2) (1)の結果に対して，先に導かれた関係 $X\div(b\div a)=(X\times a)\div b$，《商分数の論理》が適用される $\left(15\div(4\div3)=(15\times4)\div3=\frac{15\times4}{3}\right)$。

(3) (2)の結果について，それが，除数の《分母と分子を交換した分数》$\left(\frac{4}{3}\right)$ による乗法の結果と等しいことが示される $\left(\frac{15\times4}{3}=15\times\frac{4}{3}\right)$。

(4) (1)～(3)により，結論として，$15\div\frac{3}{4}=15\times\frac{4}{3}$ が導かれる。

(5) この事実を基礎とする一般化により，《分数除法の計算規則》$\left(X\div\frac{b}{a}=X\times\frac{a}{b}\right)$ が導かれる。

上記(1)〜(5)による説明の内容を，次に一般的な形で式表記する。

$$X \div \frac{b}{a} = X \div (b \div a) = (X \times a) \div b = \frac{X \times a}{b} = X \times \frac{a}{b}$$

先に指摘した通り，総川猪之吉の教科書（⑥）においては，除数となる分数に対して《商分数の論理》$\left(\frac{b}{a} = b \div a\right)$ が適用されている点が特徴的である。それにより，《除数となる分数を整数の除法に変形すること》を出発点として説明の過程が構成されている（(1)）。この点は，総川猪之吉の教科書（⑥）に独自の特徴であると同時に，《逆数》に関する説明を不要にする要因になっている。この点に加え，《結果主義》への依拠が見られる（(3)，(4)）。

計算規則を導く説明の過程が，演算の定義を出発点とする形で構成されている事例（第1章）に続いて，計算規則が演算の定義と一体化した事例（第2章），計算規則を導く過程が，演算の定義からは乖離した形で構成されている事例（第3章）を見た。

演算の定義を出発点とする形で構成されている事例（第1章）においては，分数除法の計算規則に関する説明に含まれていた困難性を克服することが意図されており，この意図を実現するための独自の取り組みが，第Ⅰ期・後期の教科書との比較によれば，より多様な概念・方法を用いた説明，説明の過程を分節化する試みの形で行われていた。

計算規則が演算の定義と一体化した事例（第2章），計算規則を導く過程が，演算の定義からは乖離した形で構成されている事例（第3章）についても，次の点を指摘することが可能である。すなわち，学海指針社の教科書（①）においては，《乗法の相互関係》が説明の過程における重要な構成要素として位置付けられていた。説明の過程において，《結果主義》への依拠を示す事実は特に存在していないけれども，《逆数》の定義も示されていない（第2章）。総川猪之吉の教科書（⑥）においては，説明の出発点として，除数となる分数に対して《商分数の論理》が適用されていた。この点に起因して，《逆数》の定義が示されていないと同時に，《結果主義》への依拠が見られた（第3章）。

上記の事実は，全般的に見て，第Ⅱ期の教科書としての独自の試みが，計算規則の説明に関する重要な問題との関連を欠落させた形で行われていたこと，その結果，その試みが，計算規則の説明における重要な進歩につながらなかったことを示している。ただし，学海指針社の教科書（①）を対象とする分析の結果（第2章）は，分数除法の計算規則を導く過程に《逆数》の定義を位置付ける必要性と有効性を示しており，この意味において注目に値する。

4. 《乗法との逆の関係》および《逆数》の定義を用いた説明
――国定教科書に見る――

第1章において見た通り，高浦丈雄（③），中山民生（④）の教科書においては，除数となる分数に対して《分割分数の論理》が適用する方法が採用されていた $\left(X \div \frac{b}{a} = X \div \left(b \times \frac{1}{a}\right)\right)$。次に，第3章において見た通り，総川猪之吉の教科書（⑥）においては，同じく，除数となる分数に対して，《商分数の論理》が適用されていた $\left(X \div \frac{b}{a} = X \div (b \div a)\right)$。上記の特徴は，明治検定期・第Ⅱ期の教科書に見られる独自の特徴として位置付けることが可能である。

上記の特徴をより明確な形で示すために，本章においては，国定教科書による説明を見る。

国定教科書においては，上記の特徴に対する批判的な見方が示されている。この点について，まず，次の解説を見よう(31)。

> 蓋シ小数及ヒ分数ニ於テハ，其数ノ成立ニ於テ既ニ乗除ノ意義ヲ含メルヲ以テ，之ヲ以テ乗除スル如キハ，複雑ナル思考ヲ要スルカ為メニ，児童ハ大ニ困難ヲ感スルヲ常トス。然レトモ，小数及ヒ分数ヲ単ニ一ツノ数ナリト考ヘシメテ，其数ノ成立ヲ顧ミシメス，上記ノ原則ニ拠リテ計算セシムル時ハ，此困難ヲ除去スルコトヲ得ヘケレハナリ。

上記の解説においては，高浦丈雄（③），中山民生（④），総川猪之吉（⑥）の教科書において採用されていた説明の方法が，「複雑ナル思考ヲ要スルカ為メニ，児童ハ大ニ困難ヲ感スルヲ常トス」として，批判の対象とされている。同時に，「此困難ヲ除去スル」方法として，「分数ヲ単ニ一ツノ数ナリト考ヘシメテ，其数ノ成立ヲ顧ミシメス」に説明する方法が対置されている。

国定教科書による次の説明には，その具体的な形態が示されている(32)。

> ［分数を分数にて割ること］
> 或数を分数にて割るには，その分母分子を取り換へて得る分数をその数に掛けてよし。
> 例. $\frac{5}{7}\div\frac{2}{3}=\frac{5}{7}\times\frac{3}{2}$ ／験算. $\left(\frac{5}{7}\times\frac{3}{2}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{5}{7}$

上記の引用において，分数除法の定義あるいは意味に関する説明は示されていない。計算規則を導く説明の過程も構成されていない。計算規則については，例題に対する適用の具体例 $\left(\frac{5}{7}\div\frac{2}{3}=\frac{5}{7}\times\frac{3}{2}\right)$ が示されるに止まっている。成立根拠・理由に関する説明を欠落させており，この意味において《天下り的な性格》が含まれている。国定教科書による説明は《規約主義》に依拠しているのである。

ただし，事後的な形においてではあるけれども，計算規則の成立を示す説明が行われている点が注目される。上記の引用においては，適用の具体例に続く形で,《乗法との逆の関係》$\left(\frac{5}{7}\div\frac{2}{3}=X\leftrightarrow X\times\frac{2}{3}=\frac{5}{7}\right)$，および,《逆数》の定義 $\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=1\right)$ を用いた説明が行われ，それにより，適用の具体例の成立が示されている(「験算」)$\left(\left(\frac{5}{7}\times\frac{3}{2}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{5}{7}\times\left(\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{7}\right)$[(33)]。

国定教科書による説明について，高浦丈雄（③），中山民生（④），総川猪之吉（⑥）の教科書との比較において注目される特徴は，第一に，除数となる分数に対して,《分割分数の論理》または《商分数の論理》が適用されていない点，第二に，事後的な形においてではあるけれども，計算規則の成立を示す説明が,《逆数》の定義を用いる方法によって行われている点である。

先に見た通り，高浦丈雄（③），中山民生（④），総川猪之吉（⑥）の教科書においては，第一に,「数ノ成立ニ於テ既ニ乗除ノ意義ヲ含メル」点が注目され，除数となる分数に対して,《分割分数の論理》または《商分数の論理》が適用されていた。第二に，この点に起因して,《逆数》は，全く説明されない，あるいは，単位分数に対象を限定した形で説明されるに止まっていた（第1章，第3章）。

国定教科書による説明には，上記2点の特徴に対する批判的な見方が示されている。

5.《演算における数の比例関係》に依拠した定義の可能性と限界
――教育実践研究の成果に注目して――

先に見た通り，総川猪之吉の教科書（⑥）においては，分数除法の計算規則を導く説明の過程が，演算の定義を出発点とする形ではなく，定義から乖離した形で構成されていた(第3章)。本章においては，総川猪之吉の教科書（⑥）における分数除法の定義それ自体に注目する。それは次の理由による。

総川猪之吉の教科書（⑥）において,分数除法は,《演算における数の比例関係》に依拠する方法によって定義されている。この方法による定義それ自体には，計算規則に関する説明との関連において重要な可能性が含まれている。重要な可能性とは，具体的には次の3点である。

第一に，演算の定義を出発点とする形で計算規則を導く説明の過程を構成する可能性，第二に，説明の過程において,《逆数》の定義を，その重要な構成要素として位置付ける可能性,第三に,《結果主義》に依拠した，すなわち,《演算結果としての同一性》を根拠･理由とする間接的な方法によってではなく，直接的な方法によって，計算規則を導く説明の過程を構成する可能性である[(34)]。

明治検定期算術教科書における分数除法の計算規則に関する説明の論理の展開において，上記3点の可能性は次の形で位置付けられる。第一の可能性においては，第Ⅰ期・前期および第Ⅰ期・後期の教科書が備えていた重要な特徴が継承されている。第二および第三の可能性においては，第Ⅰ期・前期の教科書に含まれていた問題点――《結果主義》への依拠,《逆数》に関する説明の欠落――の克服を意図する，第Ⅰ期・後期の教科書に含まれていた可能性が継承されている。

この意味において，総川猪之吉の教科書（⑥）による除法の定義には，明治検定期の算術教科書における分数除法の計算規則に関する説明の論理が備えていた重要な特徴が集約された形で成立しているのである。ただし，上記の可能性は，文字通り，可能性に止まり，教育内容構成として具体化されていない。しかしながら，当時における教育実践研究の成果に注目するならば，上記の可能性を具体化することは決して不可能ではなかった。

上記の見方により，本章においては，当時における教育実践研究の成果を参照すると同時に，その成果との関連において，総川猪之吉の教科書（⑥）に

おける除法の定義を検討する。それにより，上記3点に渡る可能性を，その限界と合わせた形で，具体的に示すことを課題とする。教育実践研究の成果としては，三輪三吉によって行われ，当時の教育雑誌（1891（明治24）年）に発表された，除法の意味と規則の説明に関する研究の成果に注目する[35]。

第一に，三輪三吉の研究においては，乗法，除法について，《演算における数の比例関係》に依拠した定義が提案されていた。関連する部分を次にまとめて引用する。

> 実数［被除数］ハ或数ノ法数［除数］ダケニ相当セルモノナリ。法数ヲ以テ実数ヲ除スルハ，即チ或数一ツダケヲ求ムルモノナリ。
>
> 除法ノコノ場合ニ求ムルモノハ，一ツニ当レル全キ数ナリト知ルベシ。是レ甚ダ緊要ノコトナリ。

総川猪之吉の教科書（⑥）においては，分数除法について，次の定義が示されている（第5編「前ノ続」，第16章「分数除法」）。

> 総べて除法の一つの意義は，実なる数を法なる数に相當する数と見る場合に於いて，如何なる数が法の単位に相當するかを求むるに在り。

三輪三吉の提案においても，総川猪之吉の教科書（⑥）においても，分数除法の定義については同じ方法が採用されている。すなわち，《演算における数の比例関係》に依拠し，まず，《被除数と除数の関係（倍）》に注目し，次に，これと同じ関係が成立する関係として，《商と1との関係（倍）》を導く方法である。この方法による除法の定義を，式を用いて一般的な形で次に表記する（表記においては，「相当する」を記号：によって表記し，「相当する」とされている数を，記号：の左右に記した。以下においても同じ方法による）[36]。

《$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=X$ を求める $\overset{}{\underset{\text{def.}}{\longleftrightarrow}}$ $\frac{b}{a}:\frac{d}{c}=X:1$ となる数 X を求める》

第二に，三輪三吉の研究においては，上記の定義を出発点とする形で，計算規則を導く説明の過程を構成する可能性が指摘されている。関連する部分を，次にまとめて引用する。

> 分数除法ノ運算ヲ説明スルニ於テモ，此解釈ハ甚タ便利ナルヲ覚ユ。
>
> 1園ノ5分ノ3ニ植ウル所ノ樹数124本ナルトキ，全園ニ植ウヘキ樹数幾何（中略）。
>
> コヽニ前題ヲ運算セハ，$124\div\frac{3}{5}=124\times\frac{5}{3}=302\frac{2}{3}$ ナルヘシ。除法ノコノ場合ハ全キ一ツタケヲ求ムルモノニテ，実数ハ法数ト相當セルコト故，一ツ即5分之5ガ法数5分之3ニ対スル割合如何ヲ思考セシムルトキハ，$\frac{5}{3}$ 即1ト3分之2ナルヲ知得スヘシ。然ラハ，全園即一ツニアタル樹数ハ124本ノ1ト3分之2タケニシテ，即 $124\times\frac{5}{3}$ ニテ計算シ得ベキコトヲモ亦解シ得ン。

計算規則を導く説明は，先に引用した演算の定義を出発点とし，次の過程を辿って行われる。

(1)　まず，先に引用した演算の定義を上記の例題に適用した結果を次に示す。
《$124\div\frac{3}{5}=X$ を求める $\underset{\text{def.}}{\longleftrightarrow}$ $124:\frac{3}{5}=X:1$ となる数Xを求める》

(2)　「一ツニアタル樹数」Xを知るために，まず，《$\frac{3}{5}$ と1との関係（倍）》（「一ツ即5分之5ガ法数5分之3ニ対スル割合如何」）について考える。その結果，$\frac{3}{5}\times\frac{5}{3}=1$ が導かれる。これは，$\frac{3}{5}$ の《逆数》を考えることと同じである。

(3)　この関係と同じ関係を備えた関係として，《被除数124と商Xとの関係（倍）》について，$124\times\frac{5}{3}=X$ が導かれる。

(4)　(1)〜(3)による説明の結果，結論として，次が得られる。$124\times\frac{3}{5}=124\times\frac{5}{3}$

(5)　この事実を基礎とする一般化により，《分数除法の計算規則》$\left(X\div\frac{b}{a}=X\times\frac{a}{b}\right)$ が導かれる。

三輪三吉の研究においては，《逆数》の定義が一般的な形で記されているわけではない。ただし，分数除法の計算規則を導く説明の過程においては，「一ツ即5分之5ガ法数5分之3ニ対スル割合如何ヲ思考セシム」として，除数の《逆数》を考えることが求められている（(2)）。同時に，《逆数》は，説明の過程における重要な構成要素として位置付けられている（(3)，(4)）。

総川猪之吉の教科書（⑥）には，次の例題が示されている（第5編「前ノ続」，第16章「分数除法」）。

> (40)　3日5分の1を以て34里4分の3の道程を歩みたりとせば，1日に幾里づつ歩みたる割合なるか。

この問題についても，先に見た，三輪三吉の研究成果を適用することにより，次の説明が可能となる。

(1)　まず，除法の定義を上記の例題に適用した結果を次に示す。

《$34\frac{3}{4}\div3\frac{1}{5}=X$ を求める $\underset{\text{def.}}{\longleftrightarrow}$ $34\frac{3}{4}:3\frac{1}{5}=X:1$ となる数Xを求める》

計算規則を導く説明については，上記の定義を出発点として，次の過程を構成することが可能である。

⑵　$34\frac{3}{4}$ とXとの関係（《被除数と商との関係（倍）》）を導くために，$3\frac{1}{5}=\frac{16}{5}$ と1との関係（《除数と1との関係（倍）》）について考える。その結果，$\frac{16}{5}\times y=1\rightarrow y=\frac{5}{16}$ が導かれる。これは，$3\frac{1}{5}=\frac{16}{5}$ の《逆数》を考えることと同じである。

⑶　⑵により，《被除数と商との関係（倍）》について，$34\frac{3}{4}\times\frac{5}{16}=X$ が導かれる。

⑷　⑴～⑶による説明の結果，結論として，次が得られる。$34\frac{3}{4}\div\frac{16}{5}=34\frac{3}{4}\times\frac{5}{16}$

⑸　この事実を基礎とする一般化により，《分数除法の計算規則》$\left(\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}\right)$ が導かれる。

上記の説明において，先に指摘した3点の可能性が実現されていることは明らかであろう。

第Ⅰ期・後期の教科書においても，説明の過程に《逆数》が位置付けられている事例は存在した。しかしながら，この事例に該当する教科書においては，次の意味において《天下り的な性格》が含まれていた。例えば，樺正董の教科書においては，演算の結果を導く過程を欠落させた形で，演算の結果が示されていた。澤田吾一の教科書においては，計算規則を導く説明の過程を欠落させた形で，計算規則が示されていた。これに対して，上記⑴～⑸によれば，《逆数》を重要な構成要素として位置付け，かつ，《天下り的な性格》を含まない形で，説明の過程を構成することが可能となる。

次に，総川猪之吉の教科書（⑥）においては，上記㊵とは異なるタイプの例題も示されている（巻2，第5編「前ノ続」，第16章「分数除法」）。三輪三吉の研究においては，このタイプの問題は示されていない。しかしながら，このタイプの問題についても，分数除法の計算規則を導くことは可能である。この点について次に見よう。

㊲　1日に8畝4分の1づつ耕すならば，5段3畝8分の3の地を耕すには幾日を要すべきか。

この例題については，総川猪之吉の教科書（⑥）による，次の定義が適用される。

総べて除法の一つの意義は，法なる数［除数］を1に相當する数と見る場合に於いて，実なる数［被除数］を如何なる数に相當する数と見るべきかを求むるにあり。

上記の定義において採用されている方法は，まず，《除数と1との関係（倍）》に注目し，次に，これと同じ関係が成立する関係として，《被除数と商との関係（倍）》を導く方法である[37]。

⑴　説明の出発点として，例題㊲に上記の定義を適用した結果を次に示す。

《$5\frac{3}{8}\div8\frac{1}{4}=X$ を求める $\underset{\text{def.}}{\longleftrightarrow}$ $8\frac{1}{4}:1=5\frac{3}{8}:X$となる数Xを求める》

⑵　$5\frac{3}{8}$とXとの関係（《被除数と商との関係（倍）》）を導くために，$8\frac{1}{4}=\frac{33}{4}$ と1との関係（《除数と1との関係（倍）》）を考える。その結果，$\frac{33}{4}\times z=1\rightarrow z=\frac{4}{33}$ が導かれる。これは，$8\frac{1}{4}=\frac{33}{4}$ の《逆数》を考えることと同じである。

⑶　⑵により，《被除数と商との関係（倍）》として，$5\frac{3}{8}\times\frac{4}{33}=X$ が導かれる。

⑷　⑴～⑶による説明の結論として，次が得られる。$5\frac{3}{8}\div\frac{33}{4}=5\frac{3}{8}\times\frac{4}{33}$

⑸　この事実を基礎とする一般化により，《分数除法の計算規則》$\left(\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}\right)$ が導かれる。

先に引用した通り，総川猪之吉の教科書（⑥）においては，分数除法の定義について，2通りの方法が採用されている。第一の方法は，《被除数と除数の関係（倍）》から，これと同じ関係が成立する関係として，《商と1との関係（倍）》を導く方法である（例題㊵）。第二の方法は，《除数と1との関係（倍）》から，これと同じ関係が成立する関係として，《被除数と商との関係（倍）》を導く方法である（例題㊲）。ただし，定義が依拠している《数の比例関係》については，その成立を示す説明が行われているわけではなかった。

本章において見た通り，上記2通りの方法による定義それ自体には重要な可能性が含まれている。しかしながら，先に見た通り，総川猪之吉の教科書（⑥）において，計算規則を導く説明の過程は，演算の定義からは乖離した形で構成されていた（第4章）。その結果，上記の可能性は実現されない形に終わっている。この点において，総川猪之吉の教科書（⑥）には限界が含まれていたのである。

この限界を克服し，上記の可能性を実現するためには，具体的には次の2点が必要になる。第一に，分数除法の定義が依拠している《比例関係の成立》それ自体に関する説明を行うこと。第二に，その説明を分数除法の前に位置付けること。しかしながら，当時の法令（「小学校令施行規則」（1900（明治33）年））に示された教育課程において,「簡易ナル比例」（第2学年),「比例」（第3学年）は，ともに,「分数」（第2学年, 第3学年）の後に位置付けられていた[38]。総川猪之吉の教科書（⑥）における限界はこの点に起因する。

上記の意味における限界を含みながらも，先に見た通り,《演算における数の比例関係》に注目した，総川猪之吉の教科書（⑥）による分数除法の定義それ自体には，3点に渡る重要な可能性が含まれている。同時に，この点により，第Ⅰ期・後期の教科書に含まれていた重要な特徴——すなわち,《結果主義》の克服,《逆数》に対する注目——についても，その継承・発展を図る方向性が示されている。第Ⅱ期の教科書に含まれていた重要な可能性として，ここでは，この点に注目しておきたい。

6. おわりに

《結果主義》に関する問題,《逆数》の位置付けに関する問題，2点を主要な視点として設定し，第Ⅱ期の教科書における分数除法の計算規則に関する説明について，その論理と特徴の解明を試みた。本章においては，本論文の成果に加え，第Ⅰ期（前期，後期）の教科書に関する研究成果を対象に含めた形で，明治検定期算術教科書全般における分数除法の計算規則の説明について総括的な考察を試みたい。

分析の結果は，明治検定期算術教科書における分数除法の計算規則に関する説明について，次の2つの立場が形成されたことを示している。第一に,《結果主義》に依拠すると同時に,《逆数》に関する説明の必要性は特に存在しないと考える立場，これに対して，第二に,《結果主義》を克服し,《逆数》の定義を重要な構成要素として位置付けた形で説明の過程を構成することを志向する立場である。第Ⅰ期・前期の教科書においては，第一の立場が，これに対して，第Ⅰ期・後期の教科書においては，第二の立場が，それぞれ，形成されていたと見ることが可能である。

本論文の結果が示す通り，第Ⅱ期の教科書においては，計算規則に関する説明の困難性が認識され，その克服に向けた試みが多様な形で行われていた。しかしながら，試みの多くが重要な問題——すなわち,《結果主義》に関する問題,《逆数》の位置付けに関する問題——との関連を欠落させており，この点に起因して，その試みが計算規則の説明における重要な進歩につながらない結果となっていた。第Ⅱ期の教科書においては，第Ⅰ期・後期の教科書において形成されていた立場・特徴の継承・発展が十分な形で図られない結果に終わったと見ることが可能である。この結果は，教育内容の本質に関する考察の重要性，それを欠落させた説明の工夫の空しさを示している。

明治検定期算術教科書における分数除法の計算規則に関する説明については，第Ⅰ期・後期の教科書において形成されていた立場・特徴が注目される。現在においては，その積極的な継承・発展を図ることが課題となるだろう。

《註》

(1)　森毅『算数教育の基礎理論』明治図書出版，1965年，52ページ。

(2)　須田勝彦「アルゴリズム」青木一・大槻健・小川利夫他編『現代教育学事典』労働旬報社，1988年，11ページ。

(3)　須田勝彦「自由で，開かれた数学の世界を，すべての学校段階で」『北海道の教育［97年版］』北海道合同教研研究推進委員会, 1997年, 164ページ。

(4)　銀林浩「分数除法の問題点」『数学教室』第504号，数学教育協議会，国土社，1993年11月，67ページ。

(5)　次においても,「結果論」，すなわち,「結果をみて, 事後的に解釈する様式」が批判の対象となっている。同時に,「逆数を掛けるということ」を直接的な方法によって説明する可能性を探る必要性が指摘されている。銀林浩「分数の除法についての1提案」『数学教室』第398号, 数学教育協議会, 国土社，1985年7月，86～87ページ。

(6)　新居信正「分数の割り算はなぜひっくり返してかけるのか(3)」数学教育協議会・銀林浩編『算数・数学なぜなぜ事典』日本評論社，1993年。

(7)　大田邦郎・佐藤洋子「授業のプログラミングに関する実証的研究——分数除法の指導を素材と

して」『千葉大学教育工学研究』第9号，千葉大学教育学部附属教育工学センター，1988年。

(8) 付録2「小学校学習指導要領　第2章各教科，第3節算数」，文部省『小学校算数指導書』大日本図書，1960年，228ページ。

(9) 付録2「小学校学習指導要領　第2章　第3節　算数」，文部省『小学校指導書算数編』大阪書籍，1969年，188ページ。

(10) 文部省『小学校指導書算数編』東洋館出版社，1989年，158ページ。

(11) 付録2「小学校学習指導要領　第2章各教科，第3節算数」，文部省『小学校算数指導書』大日本図書，1960年，228ページ。

(12) 文部科学省『小学校学習指導要領』2008年，東京書籍，59ページ。

(13) 付録3「小学校学習指導要領」，文部省『小学校学習指導要領解説算数編』東洋館出版社，1999年，211ページ。

(14) 例えば，Edwin E. Moise著，彌永昌吉・淺田照子・小林光子・山本敦子訳『数体系入門』（日新出版，1974年，原著1966年，139 ～ 140ページ）は，《逆数》の存在を示した後，「割り算は，逆数を用いて定義すれば，最もたやすく扱うことができる」として，《逆数の乗法》としての除法の定義 $\frac{p}{q}\div\frac{r}{s}=\frac{p}{q}\cdot\left(\frac{r}{s}\right)^{-1}$を示している。これに加え，「他の方法で次のように導入することもできる」として，《乗法の逆演算》としての定義を出発点とし，《逆数》を用いた説明により，$\frac{p}{q}\div\frac{r}{s}=\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{r}$を導いている（p，q，r，sは正の整数）。直接的な方法，間接的な方法，いずれの方法による説明においても，《逆数》は，その重要な構成要素として位置付けられている。

(15) 「分数論」という用語の直接的な使用例として，遠山啓『教師のための数学入門（数量編）』（国土社，1960年，第9章「分数論」）がある。ここでは，分数について，「二つの自然数の関係」とする見方（いわゆる「割合分数」）に対置する形で，「連続量の抽象的表現」とする見方（「量の分数」）が示されている。ここでは，《分数の定義・意味の説明に関する基本的観点》を意味する用語として，「分数論」が用いられている。

(16) この時期区分および概念設定においては，数学教育の目的設定の歴史的展開を，「学問としての数学」を教えることを目的とする立場と，それに対する否定的・消極的な立場，2 つの立場の相互対立の過程として記述する可能性に依拠している。この可能性については次を参照。須田勝彦「算数の教科書のあり方――算術から数学へ」柴田義松編『教科書』有斐閣，1983 年。同「量概念をめぐって」『教授学の探究』第11 号，北海道大学教育学部教育方法学研究室，1993 年。

(17) 岡野勉「明治検定期算術教科書における分数除法の教育内容構成――第Ⅰ期・前期の教科書を主要な対象として」『教授学の探究』第24号，北海道大学大学院教育学研究科教育方法学研究室，2007年。本論文においては，特に断らない限り，第Ⅰ期・前期の教科書については上記の研究成果に依拠する。

(18) 岡野勉「明治検定期算術教科書における分数除法の意味と規則に関する説明――第Ⅰ期・後期の教科書に見る，《逆数》に対する注目と《結果主義》克服の可能性」『数学教育史研究』第9号，日本数学教育史学会, 2009年。本論文においては，特に断らない限り，第Ⅰ期・後期の教科書については上記の研究成果に依拠する。

(19) 第Ⅱ期の教科書における分数除法の意味に関する説明の論理については次を参照。岡野勉「明治検定期算術教科書における分数除法の意味に関する説明の論理――第Ⅱ期の教科書に見る，整数除法の意味に関する説明の論理との間における《連続性》の構成を主要な対象として」『数学教育史研究』第11号, 日本数学教育史学会, 2011年。

(20) 教科書検定との関連を次に示す。学海指針社の教科書（①）は明治34年9月検定。金港堂の教科書（②）は明治34年9月検定。高浦丈雄の教科書（③）は明治35年検定。中山民生の教科書（④）は明治35年4月検定。長澤亀之助・後藤胤保の教科書（⑤）は明治35年3月検定。総川猪之吉の教科書（⑥）については不明。大塚薫・小出末三の教科書（⑦）は明治37年2月検定不認可。「算数教科書総目録」『日本教科書大系』近代編, 第14 巻, 算数(5)，講談社，1964 年，86～92ページ。

(21) 総川猪之吉の教科書（⑥）は，「算数教科書総目録」（前掲(20)）にも，『検定済教科用図書表（小学校用）』（文部省総務局図書課，1902（明治35）年6月）にも掲載されていない。発行時期（1903（明治36）年10月）と国定教科書制度の成立（1903（明治36）年4月），施行（1904（明治37）年4月）の時期との関係から，検定への申請それ自体が行われなかった可能性がある。

(22) 本論文においては，東京書籍（株）附設教科

書図書館「東書文庫」(①②③⑤）および国立教育政策研究所教育研究情報センター教育図書館（④⑥⑦）所蔵の教科書を用いた。

(23) 総川猪之吉の教科書（⑥）に加え，総川猪之吉編『高等小学新編算術』(全4巻，松栄堂書店，1898（明治31）年8月）がある。この教科書については，1898（明治31）年11月，訂正4版により同月検定とされている（「算数教科書総目録」（前掲(20)），85ページ)。この教科書は，国立国会図書館近代デジタルライブラリーに所蔵されている。ただし，所蔵されている巻は，巻1，巻3，巻4であり，分数について参照可能な教育内容は，定義，性質・大小関係（巻1，第5編「分数」，第1章「概説」，第2章～第7章「分数化法1～6」）に限られる。

(24) 大塚薫・小出末三の教科書（⑦）においては，説明の困難性への対応として，本文の引用に続き，「実物或は図画を用ひ，能く之を解説し，一般の規則に到着せしむれば，決して困難なるものにはあらざるなり」と記されている。しかしながら,「解説」の内容・方法が具体的かつ十分な形で示されているとは考えにくい。それは次の3点による。

第一に，例題「2分の1を3分の1にて除せよ」について，「$\frac{1}{2}\div\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{1}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$　即ち1個2分の1を以て答とす」と記述されるに止まり，計算規則を導く説明の過程が構成されていない。第二に，「一般の規則に到着せしむ」るための例題として，上記のような特殊な事例（《単位分数÷単位分数》）が示されるに止まっている。第三に，「実物或は図画」を用いる必要性が一般的に指摘されるに止まり，具体的な方法が示されていない（巻2，第1編「分数」，第10章「分数除法」，「3.分数を分数にて除すること」，「注意」)。

(25) 本文において指摘した認識，試みの成立に関連する歴史的要因として，当時における高等小学校の入学生徒数，卒業生数の急速な増加が考えられる。永田英治・板倉聖宣「小学校の卒業生の増大と科学教育」板倉聖宣・長谷川純三編著『理科教育史資料』第3巻，理科教授法・実践史，東京法令出版，1986年，98～100ページ。

(26) この点については，例えば，次の説明が考えられる。なお，(2)においては，第Ⅰ期・後期の教科書（川越守男・吉田彌作・開原賞編纂『高等小学算術教科書』巻2，教育書房，1894（明治27）年，東京書籍（株）附設教科書図書館「東書文庫」所蔵）による説明の論理を適用している。

(1) 《分数の定義》により,$1\div4=\frac{1}{4}\rightarrow\frac{1}{4}\times4=1$，従って，$1\div\frac{1}{4}=4$

(2) $15\div\frac{1}{4}=(1\times15)\div\frac{1}{4}=\left(1\div\frac{1}{4}\right)\times15$

(3) (2)の結論に対して，まず，(1)を代入し，次に，その結果に対して《交換法則》を適用することにより，$15\div\frac{1}{4}=\left(1\div\frac{1}{4}\right)\times15=4\times15=15\times4$

(4) 結論として，$15\div\frac{1}{4}=15\times4$ が導かれる。

(27) 部分的な重複，繰り返しの存在に関連して，本文に示した説明の過程(28)の前半部分における説明内容を，一般的な形で次に表記しておく。
$(X\div b)\div\frac{1}{a}=(X\div b)\times a=X\times\frac{a}{b}$

(28) 金港堂の教科書（②）においては，これらの性質が教育内容として明確かつ具体的な形で構成されているわけではない。ただし,関連する規則・性質はそれ以前に説明されている。例えば，前者の性質，「分数ノ分子ヲ除スル代リニ同数ヲ以テ分母ヲ倍シテモ可ナルコト」$\left(\frac{b\div c}{a}=\frac{b}{a\times c}\right)$ に関連して,次の規則・性質が説明されている。①「整数ヲ以テ分数ヲ除スルニハ，法ヲ以テ分子ヲ割リタル結果ヲ分子トシ，元ノ分母ヲ分母トセル分数ヲ求ムレバ可ナリ」$\left(\frac{b}{a}\div c=\frac{b\div c}{a}\right)$（巻2，第2章「分数」，第2課「簡易ナル加減乗除」，(3) 除法)。②「整数ヲ以テ分数ノ分母ヲ倍スルトキハ，其ノ整数ヲ以テ分数ヲ割ルコト丶ナル」$\left(\frac{b}{a\times c}=\frac{b}{a}\div c\right)$（巻2，第2章「分数」，第3課「約分」)。前者の性質については，上記①②から容易に導くことが可能である。

(29) 金港堂の教科書（②）においては，その一部において，ヘルバルト主義教授理論のカテゴリーが採用されている。例えば，本文において示した説明の過程⑴～⑸は「(二) 教授」，この説明に先立つ形で示されている，《分数÷整数》《分数×分数》に関する個別の演算とその結果は「(一) 予備」として，それぞれ，位置付けられている。この点については，注(28)において指摘した，教育内容の関連性に起因すると考えられる。なお，この時期の教科書とヘルバルト主義教授理論による教授法書との関連については，次において，その一端に関する検討を試みた。岡野勉「日本の公教育形成期における教科書，教育方法に関する先行研究の批判的検討――教育内容史研究の立場から」『新潟大学教育学部研究紀要』人文・社会科学編，第

4巻，第1号，2011年，32～34ページ。

(30)　第一の変形 $\left(\left(X\times\frac{3}{5}\right)\times\frac{5}{3}=X\times\left(\frac{3}{5}\times\frac{5}{3}\right)\right)$ においては，《乗法の結合法則》の成立を示す説明が必要になる。ただし，学海指針社の教科書（①）において，この点に関する説明が行われているわけではない。

(31)『尋常高等小学算術書編纂趣意書（国定教科書編纂趣意書続編）』1905（明治38）年，仲新・稲垣忠彦・佐藤秀夫編『近代日本教科書教授法資料集成』第12巻，編纂趣意書2，東京書籍，1983年，24～25ページ。

(32)『高等小学算術書』児童用，第2学年，文部省，1905（明治38）年，24ページ［『日本教科書大系』近代編，第13巻，算数(4)，講談社，1962年，82ページ］。

(33)　この点 $\left(\left(\frac{5}{7}\times\frac{3}{2}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{5}{7}\times\left(\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\right)\right)$ については，《分数乗法の結合法則》の成立を示す説明が必要になる。ただし，国定教科書において，この点に関する説明は行われていない。

(34) 総川猪之吉の教科書（⑥）による除法の定義には，本文において指摘した3点に加え，第四の可能性として，整数除法に関する定義の方法との間に《連続性》を備えた形で，分数除法を定義する可能性も含まれていた。

(35)　三輪三吉「算術乗除ノ教授ニ就テ」『信濃教育會雑誌』第58号，1891（明治24）年7月，7～12ページ。なお，煩雑を避けるため，引用においてはページ数の注記を省略する。

(36) 除法の定義として，今日においては，（全体量）÷（いくら分）＝（1 あたり量）による定義が知られている。本文に示した定義においては，上記の定義における量の関係が，当該の量を表現する数の《比》として記述されている。

(37) この定義においては，（全体量）÷（1 あたり量）＝（いくら分）における量の関係が，数の《比》として記述されている。

(38) 教育史編纂会編『明治以降教育制度発達史』第4巻，龍吟社，1938年，110ページ。

《謝辞》

本論文の作成にあたり，北海道大学教育学部教育方法学研究グループのみなさんには，何度も報告の機会を与えて頂き，貴重なご意見，ご指摘を頂きました。教科書の閲覧に際しては，東京書籍（株）附設教科書図書館「東書文庫」，国立教育政策研究所教育研究情報センター教育図書館にお世話になりました。記して感謝申し上げます。