

水の波の運動とその実験用教材

Dynamics of the water wave and an educational material for its experiments

岸本 功¹, 井野部 純一², 高崎 大将³, 根津 元⁴

Isao Kishimoto, Jun'ichi Inobe, Daisuke Takasaki, Gen Netsu

¹ 新潟大学教育学部

² 啓新高等学校

³ 黒部市立高志野中学校

⁴ 魚沼市立堀之内中学校

概要

ここでは、まず、流体力学における完全流体の理論、特に、そこから導かれる Korteweg-de Vries (KdV) 方程式とその孤立波解について簡単にまとめる。次に、この孤立波解の性質を検証するための具体的な実験・測定方法を提案し、理論値と実測値を比較する。この実験装置とその使用方法は、一般の学校等での流体力学の実験教材としても役に立つと期待される。

1 はじめに

流体力学などで扱われる波の現象については、高等学校の物理基礎の教科書においてもその性質が取り上げられている。水の波は、目で簡単に観察できる波の一例で身近なものであるため、流体力学の理論に基づいて数式で表されているものと実際の現象とを比較するのが容易であろうと思われる。ここでは、水の波のうち、特に孤立波と呼ばれる周期的でない単発の波について、理論と実験の両方の側面から調べたことをまとめる。^{*1} 理論については、Korteweg-de Vries 方程式 (略して KdV 方程式) と呼ばれているものに着目し、その解の性質についてまとめる。実験については、新潟大学教育学部自然情報講座において地学実験等で使用されている水路を利用した具体的方法とその結果をまとめる。

高校「物理基礎」「物理」等で扱われている波は、正弦波のように周期的な波形が進行するものが多いが、実験・観測用に用意できる水路は大きさが限られているため、反射など境界条件をきちんと取り入れなければならないと思われる。さらに、周期的な波を作り出すための造波装置も用意する必要がある。このようなことは新潟大学教育学部においては困難であり、また、一般の中学・高校等においても同様に難しいと思われる。そこで、本研究では、文献 [2] で紹介されている Scott-Russell の実験図を参考に、実現方法がより現実的に思える孤立波の実験・観測を行った。

2 KdV 方程式の導出

ここでは、簡単のため水を「粘性」のない完全流体として扱う。流体の速度 \mathbf{v} および流体の圧力・密度 p, ρ に対し、完全流体は、オイラーの連続方程式・運動方程式 [3] :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \quad (1)$$

で記述される。(\mathbf{K} は流体にはたらく単位質量当りの外力である。) さらに水を非圧縮流体 (密度 $\rho = \rho_0$: 一定) として扱い、渦なし ($\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$) の運動を考えると、速度ポテンシャル Φ が存在して $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi$ と表され、オイラーの連続方程式はラプラス方程式: $\Delta \Phi = 0$ に帰着する。また、外力として、ポテンシャル Ω が存在して $\mathbf{K} = -\operatorname{grad} \Omega$ と表される保存力の場合、 $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \operatorname{grad} |\mathbf{v}|^2/2 - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}$ に注意すると、運動方程式は $\operatorname{grad}(\partial \Phi / \partial t + |\operatorname{grad} \Phi|^2/2 + \Omega + p/\rho_0) = 0$ と表される。特に、外力として一様な重力が働

^{*1} これは 2014 年度に著者が行った卒業研究 [1] に基づいている。その中の実験は 2015 年 1 月に行った。

く場合を考えよう。鉛直上向きを z 軸にとると $\Omega = gz$ (g は重力加速度) と表されるので運動方程式は

$$p + \rho_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\text{grad } \Phi|^2 + gz \right) = \text{const.} \quad (2)$$

となる。以下では水の運動は 2 次元的であるとし、鉛直上向きに z 軸、水平方向に x 軸をとり、 y 軸方向の依存性はないとする。水の表面を $z = \zeta(x, t)$ で表し、(2) において $z = \zeta(x, t)$ で $p = \text{const.}$ (大気圧) とすると、水の表面では $\Phi_t + (\Phi_x^2 + \Phi_z^2)/2 + g\zeta = 0$ となる。^{*2} また、水の表面にある流体粒子が微小時間 δt 後も表面にとどまる、という条件より、 $z + v_z \delta t = \zeta(x + v_x \delta t, t + \delta t)$ から $z = \zeta(x, t)$ を辺々引いて $\Phi_z = \zeta_x \Phi_x + \zeta_t$ を得る。さらに水の底が $z = -h$ (一定) で与えられる、と仮定する。速度ポテンシャルに対するラプラス方程式と上記の境界条件をまとめると

$$\Phi_{xx} + \Phi_{zz} = 0, \quad (-h < z < \zeta(x, t)), \quad (3)$$

$$\Phi_t + \frac{1}{2} (\Phi_x^2 + \Phi_z^2) + g\zeta = 0, \quad (z = \zeta(x, t)), \quad (4)$$

$$\Phi_z = \zeta_x \Phi_x + \zeta_t, \quad (z = \zeta(x, t)), \quad (5)$$

$$\Phi_z = 0, \quad (z = -h) \quad (6)$$

となる。これらの方程式には非線形形式が含まれており、一般的に解くのは簡単ではない。そこで、さらに適当な近似を行うことで KdV 方程式に帰着させよう。^{*3}

浅い水路での長い波長を扱う問題には、水の深さ h 、波の振幅 a 、波長 λ (波の代表的水平スケール) の 3 つのスケールが関係する。これらの長さの間には $a \ll h \ll \lambda$ の関係が成り立っているとす。また、無次元量 $\alpha \equiv a/h, \beta \equiv (h/\lambda)^2$ は小さい: $\alpha \sim \beta \ll 1$ とする。この水波の問題の水平座標を x_* 、鉛直座標を z_* とし、水面の形を $z_* = \zeta_*(x_*, t)$ で表す。(つまり上述の (3),(4),(5),(6) において、 $x \rightarrow x_*, z \rightarrow z_*, \zeta \rightarrow \zeta_*$ という書き換えをする。) さらに、無次元の $\xi, \tau, \phi, \zeta, z$ を

$$\xi = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{x_* - c_0 t}{\lambda}, \quad \tau = \left(\frac{\alpha^3}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{c_0 t}{\lambda}, \quad \phi = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{c_0 \Phi}{g \lambda a}, \quad \zeta = \frac{\zeta_*}{a}, \quad z = \frac{z_*}{h} \quad (7)$$

($c_0 \equiv \sqrt{gh}$) で定義して (3), (4), (5), (6) を書き直すと次のようになる:

$$\phi_{zz} + \alpha \phi_{\xi\xi} = 0, \quad (-1 < z < \alpha\zeta) \quad (8)$$

$$\zeta - \phi_\xi + \alpha \phi_\tau + \frac{1}{2} (\phi_z^2 + \alpha \phi_\xi^2) = 0, \quad (z = \alpha\zeta) \quad (9)$$

$$\phi_z + \alpha (\zeta_\xi - \alpha \zeta_\tau - \alpha \phi_\xi \zeta_\xi) = 0, \quad (z = \alpha\zeta) \quad (10)$$

$$\phi_z = 0. \quad (z = -1) \quad (11)$$

これらを α の幂で展開して解くことを考える。まず

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \alpha^m (z+1)^{2m} \frac{\partial^{2m}}{\partial \xi^{2m}} f(\xi, \tau) \quad (12)$$

が (8), (11) を満たすことに注意し、 α について $f(\xi, \tau), \zeta(\xi, \tau)$ を次のように展開する:

$$f(\xi, \tau) = f_0(\xi, \tau) + \alpha f_1(\xi, \tau) + \alpha^2 f_2(\xi, \tau) + \dots, \quad \zeta(\xi, \tau) = \zeta_0(\xi, \tau) + \alpha \zeta_1(\xi, \tau) + \dots \quad (13)$$

このとき (12) は

$$\begin{aligned} \phi &= f - \frac{1}{2} \alpha (z+1)^2 f_{\xi\xi} + \frac{1}{24} \alpha^2 (z+1)^4 f_{\xi\xi\xi\xi} + O(\alpha^3) \\ &= f_0 + \alpha \left(f_1 - \frac{1}{2} (z+1)^2 f_{0,\xi\xi} \right) + \alpha^2 \left(f_2 - \frac{1}{2} (z+1)^2 f_{1,\xi\xi} + \frac{1}{24} (z+1)^4 f_{0,\xi\xi\xi\xi} \right) + O(\alpha^3) \end{aligned} \quad (14)$$

^{*2} $\Phi_t \equiv \partial \Phi / \partial t$ 等としている。以下では偏微分について同様の記法を用いる。

^{*3} ここでは [4] に従って導出をする。

と展開され、これと ζ の展開式を (9), (10) に代入し、 $z = \alpha\zeta$ とすると

$$\begin{aligned} \zeta_0 + \alpha\zeta_1 - \left[f_{0,\xi} + \alpha \left(f_{1,\xi} - \frac{1}{2}f_{0,\xi\xi\xi} \right) \right] + \alpha f_{0,\tau} + \frac{1}{2}\alpha(f_{0,\xi})^2 + O(\alpha^2) = 0, \\ - (1 + \alpha\zeta_0)f_{0,\xi\xi} + \alpha \left(-f_{1,\xi\xi} + \frac{1}{6}f_{0,\xi\xi\xi\xi} \right) + \zeta_{0,\xi} + \alpha(\zeta_{1,\xi} - \zeta_{0,\tau} - f_{0,\xi}\zeta_{0,\xi}) + O(\alpha^2) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

が得られる。これらの α の 0 次, 1 次の項を比較して

$$\zeta_0 - f_{0,\xi} = 0, \quad (\zeta_0 - f_{0,\xi})_{,\xi} = 0, \quad (16)$$

$$\zeta_1 - f_{1,\xi} = -f_{0,\tau} - \frac{1}{2}(f_{0,\xi})^2 - \frac{1}{2}f_{0,\xi\xi\xi}, \quad (\zeta_1 - f_{1,\xi})_{,\xi} = \zeta_{0,\tau} + \zeta_0 f_{0,\xi\xi} + \zeta_0 \zeta_{0,\xi} - \frac{1}{6}f_{0,\xi\xi\xi\xi} \quad (17)$$

となり

$$\zeta_0 = f_{0,\xi} \equiv u(\xi, \tau) \quad (18)$$

とにおいて $\zeta_1 - f_{1,\xi}$ を消去すると、 $u(\xi, \tau)$ に関する偏微分方程式である KdV 方程式：

$$u_\tau + \frac{3}{2}uu_\xi + \frac{1}{6}u_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (19)$$

が得られる。

3 KdV 方程式の解

前節で完全流体の方程式から適当な近似の元に導かれた KdV 方程式 (19) の解を求めよう。まず次のように、定数 b と 1 変数関数 $v(x)$ を用いて $u(\xi, \tau)$ の形を仮定する：

$$u(\xi, \tau) = \frac{2}{3}v(x), \quad x = \sqrt{2}(\xi - b\tau). \quad (20)$$

これを (19) に代入すると v に関する 3 階の非線形常微分方程式：

$$\frac{d^3v}{dx^3} + 3v \frac{dv}{dx} - 3b \frac{dv}{dx} = 0 \quad (21)$$

を得る。これを 1 回積分して

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{3}{2}v^2 - 3bv = C \quad (22)$$

を得る。ここで C は積分定数である。さらに $\frac{dv}{dx}$ をかけて積分して

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2}v^3 - \frac{3}{2}bv^2 = Cv + C' \quad (23)$$

(C' は積分定数) となる。これは $C = -c_1/2$, $C' = -c_2/2$ において整理すると

$$\left(\frac{dv}{dx} \right)^2 = F(v), \quad F(v) = -v^3 + 3bv^2 - c_1v - c_2 \quad (24)$$

となる。 $F(v)$ は v^3 の係数が -1 で v^2 の係数が $3b$ の 3 次多項式なので、一般に

$$F(v) = -(v - v_1)(v - v_2)(v - v_3), \quad v_1 + v_2 + v_3 = 3b \quad (25)$$

の形に因数分解できる。以下ではこの v_1, v_2, v_3 (3 次方程式 $F(v) = 0$ の解) が全て実数で

$$v_1 < v_2 < v_3 \quad (26)$$

を満たす場合を考えよう。物理的状況から v とその微分は実数なので、1 階微分方程式：(24) の第 1 式において右辺がゼロ以上になる部分のみが意味をもつ。従って 3 次関数 $F(v)$ の性質から $v \leq v_1$, $v_2 \leq v \leq v_3$ となるが、今の状況で v は有限の範囲なので $v_2 \leq v \leq v_3$ のほうを考え、次のように積分する：

$$x = \int_v^{v_3} \frac{dv}{\sqrt{F(v)}}, \quad (v_2 \leq v \leq v_3). \quad (27)$$

積分定数は $v = v_3$ で $x = 0$ となるように選んだ。この右辺の定積分を楕円積分を用いて表現するために、変数変換： $z = \sqrt{\frac{v_3 - v}{v_3 - v_2}}$ を施すと

$$v = v_3 - (v_3 - v_2)z^2, \quad F(v) = (v_3 - v_2)^2 z^2 (1 - z^2)(v_3 - v_1 - (v_3 - v_2)z^2) \quad (28)$$

となることから (27) は

$$x = \frac{2}{\sqrt{v_3 - v_1}} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = \frac{2}{\sqrt{v_3 - v_1}} \int_0^{\arcsin z} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad k = \sqrt{\frac{v_3 - v_2}{v_3 - v_1}}. \quad (29)$$

(26) の大小関係から $0 < k < 1$ を満たすことに注意しておく。この形の積分について、一般に

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\sin \varphi} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (30)$$

は第 1 種楕円積分、 k は母数と呼ばれる。また $y = F(\varphi, k)$ の (k の値の一つ決めたときの) 逆関数として定義される y の関数を $\varphi = \text{am}(y, k)$ と表す。(am は振幅関数と呼ばれる。) これを使うと (28), (29) より

$$v = v_3 - (v_3 - v_2) \sin^2 \text{am}(X, k) = v_2 + (v_3 - v_2) \text{cn}^2(X, k), \quad X = \frac{\sqrt{v_3 - v_1}}{2} x \quad (31)$$

のように cn 関数 ($\text{cn}(X, k) = \cos \text{am}(X, k)$)^{*4} を用いて書ける。特に (24) で積分定数を $c_2 = 0, c_1 < 0$ とし、 $v_2 = 0$ となるように選んだとする。さらに $v_3 = a_0 (> 0)$, $v_1 = a_0 - a_1 (< 0)$ とおくと

$$b = \frac{2a_0 - a_1}{3}, \quad k = \sqrt{\frac{a_0}{a_1}}, \quad v = a_0 \text{cn}^2(X, k) \quad (33)$$

となり、さらに $a_0 = 3\hat{a}/2, a_1 = 3d$ と書き換えて、もとの $u(\xi, \tau)$ に戻すと

$$u(\xi, \tau) = \hat{a} \text{cn}^2 \left(\sqrt{\frac{3\hat{a}}{2}} (\xi - b\tau), k \right), \quad k = \sqrt{\frac{\hat{a}}{2d}}, \quad b = \hat{a} - d, \quad (34)$$

となり、これは KdV 方程式のクノイダル波解とよばれる。 $\text{cn}^2(X, k) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\text{am}(X, k)))$ に注意するとこの解は $(\xi - b\tau) \rightarrow (\xi - b\tau) + \Lambda$ で周期的になっている。この周期 Λ は

$$\Lambda = \sqrt{\frac{8}{3d}} K(k) \quad (35)$$

で与えられる。なお、 $k \rightarrow 1$ の極限では $d = b = \hat{a}/2$ であり、(30) の積分は

$$y = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\cos \theta} = \int_0^{\varphi} \frac{\cos \theta d\theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right) = \log \frac{e^{i\varphi} + i}{ie^{i\varphi} + 1} \quad (36)$$

より、この逆関数のコサインは $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + 1/e^{i\varphi}}{2} = \frac{i}{2} \left(\frac{e^y - i}{e^y + i} - \frac{e^y + i}{e^y - i} \right) = \frac{2}{e^y + e^{-y}} = \text{sech } y$ のように書き直されるので、(34) は孤立波解：

$$u(\xi, \tau) = \hat{a} \text{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{3\hat{a}}{4}} \left(\xi - \frac{1}{2} \hat{a} \tau \right) \right) \quad (37)$$

*4 この $\text{cn}(X, k)$ は X の関数として周期 $4K(k)$ をもつ。ここで

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (32)$$

は第 1 種完全楕円積分。

に帰着する。(実際, 周期 Λ (35) は $k \rightarrow 1$ で無限大になる。)

クノイダル波解および孤立波解を数式処理ソフト *Mathematica* を用いてプロットするとそれぞれ図 1, 図 2 のようになる。

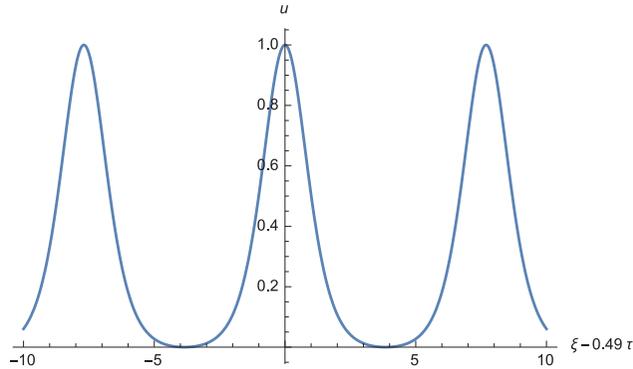


図 1 $\hat{a} = 1, d = 0.51$ ($k = 0.990148$) のクノイダル波解 (34) のプロット。(周期 $\Lambda = 7.69196$)

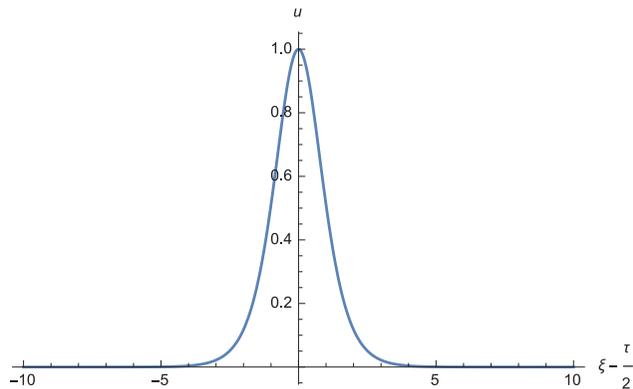


図 2 $\hat{a} = 1$ の孤立波解 (37) のプロット。(図 1 で周期 $\Lambda \rightarrow \infty$ としたものに对应。)

以上では, KdV 方程式を無次元量で表して, 周期的なクノイダル波解とその長周期極限とみなせる孤立波解を導いてきたが, 実際の水波の実験と比較する際には, 物理的な次元を持つ量で書き直しておくほうが便利である。そのために $u = \eta/a, x_* - c_0 t = \xi_*$ とおいて $\xi = (\alpha/\beta)^{1/2}(x_* - c_0 t)/\lambda = h^{-3/2}a^{1/2}\xi_*$, $\tau = (\alpha^3/\beta)^{1/2}(c_0 t)/\lambda = h^{-5/2}a^{3/2}c_0 t$ に注意すると KdV 方程式 (19) は [2]

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{3c_0}{2h} \eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi_*} + \frac{c_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi_*^3} = 0, \quad c_0 = \sqrt{gh} \quad (38)$$

と表される。ここで h は水深, g は重力加速度の大きさであり, η は平均水面からの水面の高さを表す。このときの孤立波解 (37) は, $a\hat{a} = \eta_0$ とすると,

$$\eta = \eta_0 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3\eta_0}{h^3}} (x_* - ct) \right), \quad c = c_0 \left(1 + \frac{\eta_0}{2h} \right) = \sqrt{gh} \left(1 + \frac{\eta_0}{2h} \right) \quad (39)$$

となる。つまり, 重力加速度 (g), 水深 (h), 波の高さ (η_0) が分かれば孤立波の伝搬速度 (c) が求まる。この c は浅い水 (長い波) の速さ $c_0 = \sqrt{gh}$ [3] に補正が加わった形になっていることに注意しておく。

4 実験方法

孤立波の実験・測定のために準備した主要なものは図 3 に示したものである：
水路 (測定用に白い目盛を記入した黒い紙を側面に貼ったもの)、発泡スチロール製の仕切り板 (水路の大きさに合うように加工する)、デジタルカメラ (CASIO EX-SC100 (理科実験用・連写機能付き))。



図 3 実験器具

ここでは [2] で紹介されている Scott-Russell の実験を参考に

1. 水路に水を張る。2. 仕切り板の左側にさらに水を注ぐ。3. 仕切り板を素早くはずす。
- により孤立波を発生させた。(図 4)

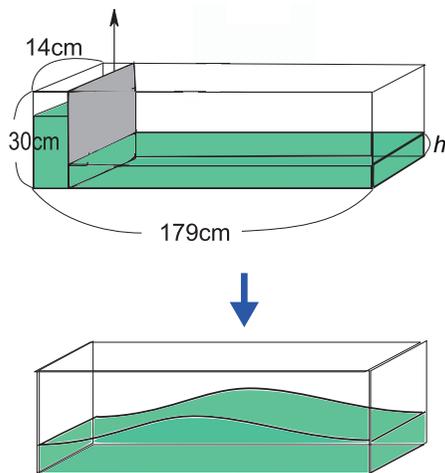


図 4 孤立波の起こし方。仕切り板の左側に貯める水の量により、生じる波の高さを調整できる。

このような方法により、いくつかの水深の場合に、高さを変えた孤立波を発生させ、それぞれの波の速さを測定した。特にこの実験による波の速さ c_{ex} については次の方法で求めた：

図 4 の方法で波を起こし、カメラの連写機能を使って波を撮影する。使用したカメラの連写機能は 1 秒間に 30 枚の写真を撮るため、連写の間隔は 1/30 秒ということになる。撮影後、写真で波の動きを解析する。具体的には、図 5 のように、水路に貼られた 5cm 間隔の目盛りを見て波の進行方向に 50cm の間隔を定める。孤立波の頂点がこの 50cm を通過するのに連写の何コマ分かったのかをパソコン上で調べることで、

波が何秒で 50cm を通過するのかがわかる。この結果を元に波の進行速度を求める。

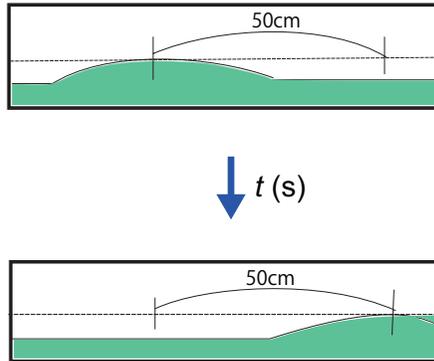


図5 孤立波の速さの求め方。これら上下の写真の時間間隔が連写の k コマ分なら $t = k/30\text{s}$ かかっているので、速さは $c_{ex} = 50\text{cm}/(k/30\text{s}) = 15/k$ (m/s) となる。

5 実験結果

ここでは実際の実験の様子とその結果について述べる。(詳細なデータは [1] 参照。)

前節で述べた実験装置において、水路に差し込む仕切り板の左側に貯める水の量を調整し、図6のような孤立波を発生させる。

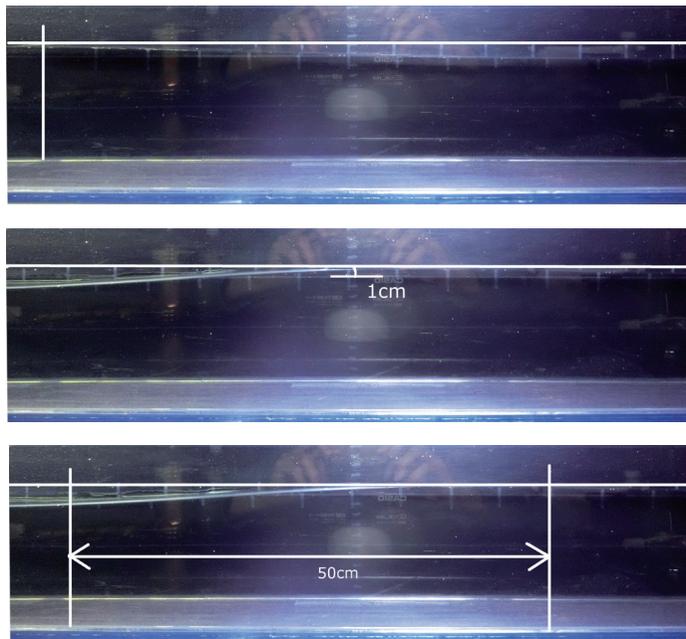


図6 実際の孤立波の様子。この場合は水深 $h = 10\text{cm}$ 、波高 $\eta_0 = 1\text{cm}$ で右向きに進行している。

同様にして同じ水深、波高の波を繰り返し発生させ、それぞれカメラの連写機能により撮影をしておく。写真を解析した結果は表1のようになった。

	50cm のコマ数	波の速さ (m/s)
1 回目	13	1.15
2 回目	11	1.36
3 回目	11	1.36
4 回目	11	1.36
5 回目	11	1.36
6 回目	12	1.25
7 回目	12	1.25
8 回目	11	1.36
9 回目	13	1.15
10 回目	12	1.25

表 1 水深 $h = 10\text{cm}$, 波高 $\eta_0 = 1\text{cm}$ の孤立波の実測値。

この表 1 の 10 個のデータから平均と標準偏差を求めると波の速さの実測値 c_{ex} と標準偏差 σ はそれぞれ $c_{\text{ex}} = 1.28\text{m/s}$, $\sigma = 0.088\text{m/s}$ となる。

一方, $g = 9.8(\text{m/s}^2)$, $h = 10\text{cm}$, $\eta_0 = 1\text{cm}$ の場合の KdV 方程式の孤立波解 (39) の速さ c の理論値は $c = \sqrt{gh}(1 + \eta_0/(2h)) \simeq 1.04(\text{m/s})$ となる。この場合の孤立波の速さの実測値と理論値を比較するとその差の割合は $\{(c_{\text{ex}} - c)/c (\pm\sigma/c)\} \times 100 = 23.9\%(\pm 8.4\%)$ となっており, おおよそ 24% ほど実測値のほうが速いという結果になった。

同様の実験および解析方法で, 水深および波高を変えて孤立波を発生させ, 同じ水深・波高に対しそれぞれ 10 回ずつ測定した結果を表 2 に示す。

水深 $h(\text{cm})$	波高 $\eta_0(\text{cm})$	波の速さ $c_{\text{ex}}(\text{m/s})$	理論値 $c(\text{m/s})$	実測値との差 (%)
10	1	1.28	1.04	23.9(± 8.4)
10	2	1.20	1.09	10.5(± 6.6)
10	3	1.29	1.14	13.1(± 7.7)
10	4	1.52	1.19	27.9(± 7.4)
10	5	1.47	1.24	19.0(± 4.6)
5	1	0.93	0.77	20.7(± 7.6)
15	1	1.41	1.25	12.9(± 11.3)

表 2 水深 h , 波高 η_0 を変えたときの, 波の速さの実測値 c_{ex} と KdV 方程式の孤立波解の速さ (理論値) c およびそれらの差の割合。

この表 2 をみると, 波の速さの実測値 c_{ex} と KdV 方程式の孤立波解の速さ c は概ね合っている: $c_{\text{ex}} \sim c$ ことがわかる。ただし, より詳しくみるといずれの場合も $c_{\text{ex}} > c$ であり, 実測値のほうが理論値よりも 2 割程度速い結果となっている。

水深を $h = 10\text{cm}$ に固定して, 波高 η_0 を変えたときの波の速さの様子は図 7 のようになる。この場合, (39) の c で与えられる理論値は傾きが正の直線になるが, 実測値はその少し上側に, おおよそ平行移動したように並んでいる。

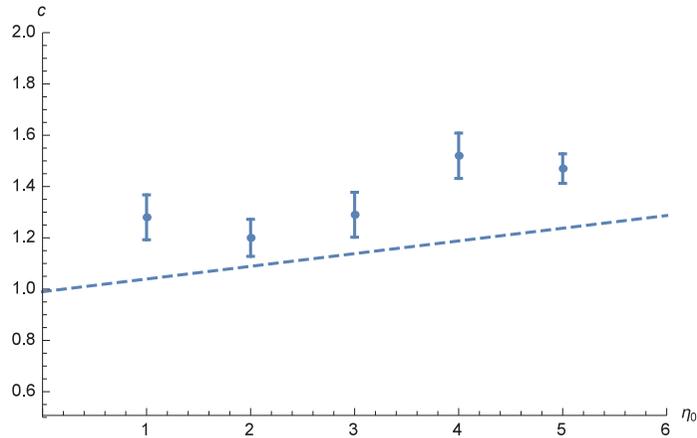


図7 表2のデータに基づき、水深 $h = 10\text{cm}$ のときに波高 $\eta_0(\text{cm})$ を変えたときの波の速さ $c_{\text{ex}}(\text{m/s})$ をプロットしたもの。エラーバーは $\pm\sigma$ (標準偏差) を表す。点線は KdV 方程式の孤立波解 (39) の理論値 c (m/s) を表す。

一方、波高を $\eta_0 = 1\text{cm}$ に固定して、水深 h を変えたときの波の速さの様子は図8のようになる。この場合、(39) の c で与えられる理論値は図の h の領域では傾き正で上に凸の曲線になるが、実測値はその少し上側に位置する。

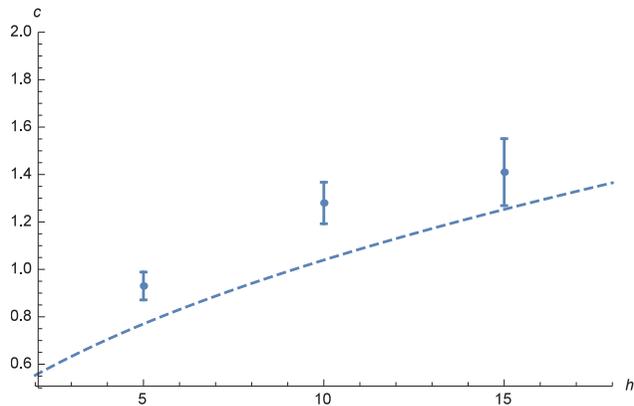


図8 表2のデータに基づき、波高 $\eta_0 = 1\text{cm}$ のときに水深 $h(\text{cm})$ を変えたときの波の速さ $c_{\text{ex}}(\text{m/s})$ をプロットしたもの。エラーバーは $\pm\sigma$ (標準偏差) を表す。点線は KdV 方程式の孤立波解 (39) の理論値 c (m/s) を表す。

6 おわりに

最後に、今回の研究で行った流体力学の実験に関して、コメントをいくつか述べておく。

6.1 孤立波の実験結果について

前節のように、今回行った孤立波の実験結果では、各水深および波高において、波の速さの実測値と KdV 方程式による理論値との差がおおよそ 10% ~ 30% であった。このことから、KdV 方程式は実際に作った孤立波に概ね適用できることが分かった。全体として理論値よりも測定値のほうが速くなった理由としては、

そもそも今回作った波が長く浅い波という近似に十分当てはまらなかったことが挙げられる。§2 で述べたとおり、KdV 方程式は $\alpha \equiv \eta_0/h \sim \beta \equiv (h/\lambda)^2 \ll 1$ という仮定の元で近似的に導いたものである。今回の実験で作った波についてこの近似を検証してみよう。 α の値が最小になる $\eta_0 = 1\text{cm}$, $h = 15\text{cm}$ の時でさえ $\alpha = 0.067$ である。これは 1 より十分小さいとは言いがたい。また、 λ に関しては、今回のような孤立波の実験の場合なかなか定義しにくく、厳密にどこからどこまでが波なのかを定めることができなかった。 λ の上限として水路の長さ 179cm をとり、水深 h が最小の 5cm だとすると β の下限は $\beta = 0.00078$ となるが、実際の波長はそれほど長くはないので β も 1 より非常に小さいとは言いがたい。したがって、KdV 方程式を導出するときに使った近似が十分ではなかったため、実測値との差が少し生じてしまったのであろう。

実験による誤差については以下のことが考えられる。測定値のずれの原因として考えられることは、仕切り板が手作りであったため、多少の隙間があり、そこから少し水が漏れていたということだ。漏れた水によって波の進む方向に流れが生じ、その流れの上を孤立波が進行していったと考えれば進行速度が速くなることも考えられる。また、写真で波の頂点が 50cm 進んだ時間を元に波の速さを解析したが、波が非常に扁平であったため、正確な波の頂点の位置をとらえられていなかった可能性がある。さらに、写真解析の際、波の高さを正確に読み取れていなかったことや、水の漏れによってももとの水面の位置から少し高くなってしまうこと等も考えられる。

より深くずっと長い水路を用い、波高が小さくかつ波長の長い波を作ると、実測値と KdV 方程式に基づく理論値が近づくと期待される。

6.2 流体力学の実験教材について

次に流体力学の実験用教材という観点から考えてみる。今回用いた実験装置により、孤立波の速さの測定実験等が定量的にも可能であることがわかった。水路については、通常の学校等では予算や設置場所を考慮すると、これ以上長いものを用意するのは困難であると思われる。同じ水路を用いて実験の精度を上げるには、発砲スチロール製の仕切り板をより丁寧に製作し初期の水漏れを最小限にし、仕切り板の抜き方を工夫して擾乱の少ない孤立波を発生させること、および、各条件での測定回数を増やすこと等が考えられる。

なお、同じ水路を用いて、孤立波以外に定常波も発生させることができた。(詳細は [1] 参照。) 水路の一端を塞ぐ養生テープの膜を、メトロノームアプリに合わせて手で押すことにより波を造る方法による。さらに、水に少量の牛乳を垂らすことで白い濁りをつけ、その運動を観察することができた。このような方法で、少なくとも定性的には、水の表面だけでなく水内部の流体粒子の運動を観測し、流体力学の理論で予想される流線の形と比較できることがわかった。

まとめると、今回の比較的簡単な実験装置は、水の孤立波および定常波を調べる教材として使用できることがわかった。ただし、進行する周期的な波を実験的に調べる場合は、適切な境界条件をとり反射波を吸収させるなどさらに工夫が必要であろう。

謝辞

今回の流体力学の実験のために、地学研究室の水路を貸してくださり、さらに、波の実験方法についてもアドバイスをくださった高清水康博氏に感謝します。

References

- [1] 井野部純一, 高崎大将, 根津元, “流体力学 -完全流体と水の運動-,” 新潟大学教育学部理科専修卒業論文 (2015)
- [2] 和達三樹, “非線形波動,” 岩波書店 (1992).
- [3] 今井功, “流体力学,” 岩波書店 (1970).
- [4] 神部勉 (編著), “基礎演習シリーズ 流体力学,” 裳華房 (1995).