

連星系からの重力波放射の方向依存性について

On a radiation pattern of gravitational wave from binary stars

遠藤 霞¹, 岸本 功²

Kasumi Endo, Isao Kishimoto

¹ 新潟明訓高等学校

² 新潟大学教育学部

概要

一般相対論に基づいて記述される重力波を放射する例として、万有引力によって互いに楕円軌道を運動する連星系を考える。アインシュタイン方程式を線形近似して、この波源からのエネルギーや角運動量の放射率を計算し、その方向依存性を図示する。また、古典電磁気学に基づいて記述される類似の例として、クーロン力によって互いに楕円軌道を運動する異符号荷電粒子系についても同様に電磁波放射を調べ、重力波の場合との比較を行う。

1 はじめに

アインシュタインが一般相対論を提唱してから 100 年目となる現在、海外の大型重力波検出器に加えて、日本では大型低温重力波望遠鏡 KAGRA が稼働し始める段階にあり、重力波の直接的検出が大いに期待されている。重力波は、一般相対論のアインシュタイン方程式に基づいて記述され、宇宙の物理的現象を調べる上で重要な役割を果たすと考えられる。電磁波やニュートリノによる観測に加えて、将来、重力波による宇宙観測が可能になれば、ブラックホールや宇宙初期などを様々な観点から詳しく調べることができ、宇宙論の検証が進むであろう。実際の重力波の観測を考える際、ブラックホールの同士の合体など、強い重力波が放射される現象について理論的に詳細に調べておく必要があるが、そのような場合、アインシュタイン方程式を非線形効果も正しく取り入れて、できるだけ精密に解くことが必要になり複雑な問題となる。

ここでは簡単のため、弱い重力波の場合に限定し、アインシュタイン方程式を線形化して扱い、波源は連星系のニュートン重力による楕円運動の近似がよい場合を扱う。これにより、平坦時空周りのさざなみとして伝わる重力波の基本的性質がとらえられる。また、この簡単な設定の場合は、古典電磁気学でも類似の状況が考えられる。まず、非相対論的に、2つの質点の間には、万有引力ポテンシャル $-Gm_1m_2/r$ が働く。一方、2つの荷電粒子の間には、クーロンポテンシャル $q_1q_2/(4\pi\epsilon_0r)$ が働く。異符号電荷なら係数に $|q_1q_2|/(4\pi\epsilon_0) \leftrightarrow Gm_1m_2$ の対応がつき、ともに $1/r$ に比例する引力ポテンシャルとなり、束縛運動として一般に楕円軌道を描く。このとき、これらを波源とする重力波、電磁波を考えることができる。実際、一般相対論のアインシュタイン方程式を線形化したものと電磁気学のマクスウェル方程式は、ローレンツゲージで、 $\square\bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi Gc^{-4}T^{\mu\nu} \leftrightarrow \square A^\mu = -\mu_0 j^\mu$ ($\square \equiv \partial_\mu\partial^\mu$) の対応があり、ともに真空中の光速 c で進む波動方程式 $\square\psi = -g$ の形をしている。本稿では、波源が全く同様の楕円運動をするとき、放射される重力波と電磁波ではどのような違いがあるのか、特にその方向依存性を調べて図示し、比較する。^{*1}

以下の節では、まず、一般相対論の計算よりも単純な、(平坦時空で)クーロン力によって楕円運動する荷電粒子系からの電磁波放射の方向依存性について述べる。次に、連星系の運動を万有引力による質点系の楕円運動とみなし、平坦時空周りで線形化したアインシュタイン方程式に基づく重力波放射の方向依存性について調べ、電磁気学での対応する状況との比較をしていく。§Appendix A では波源の楕円運動について、本編と関係する事項をまとめる。§Appendix B では、重力波のエネルギー運動量擬テンソルに関連した事項について、用いる記号の定義や式の導出も含めて簡単にまとめる。

^{*1} ここで扱う重力波の問題は、[1] 第 23 章問題 9 を参考にしたもので、元は文献 [2], [3] で研究されており、[4] にも解説があるが、ここでは様々な公式の導出も含めて記述する。本研究は、2012 年度に著者らが行った修士論文 [5] のゼミに基づく。

2 楕円運動する荷電粒子系からの電磁波放射

■マクスウェル方程式の波動解 電磁気学におけるマクスウェル方程式は、電磁場の強さ $F_{\mu\nu}$ と 4 元カレント j^μ を用いて $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} = 0$, $\partial_\mu F^{\mu\nu} + \mu_0 j^\nu = 0$ で与えられる。^{*2} 第 1 式は、4 元ポテンシャル A_μ を用いて $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ により解かれ、第 2 式はローレンツゲージ条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ の元で、波源のある波動方程式： $\square A^\mu = -\mu_0 j^\mu$ に帰着する。これは保存カレント $\partial_\mu j^\mu = 0$ に対し、遅延ポテンシャル：

$$A^\mu(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} j^\mu(t', \vec{x}'), \quad t' \equiv t - \frac{1}{c} |\vec{x} - \vec{x}'| \quad (1)$$

の形の解を持つ。時刻 t' と t の関係は、波源の場所での時間変化が光速 c で伝わる時間だけ遅れることを表している。特に長波長近似における、波源から遠方での電磁場の振る舞いをみよう。波源が座標原点付近にあるとし、波長のオーダーを λ 、波源の範囲を R_{source} とし、原点から距離 r での電磁場を考えると、 $r \gg \lambda \gg R_{\text{source}}$ が成り立つ状況を考える。 $\partial_t \sim c/\lambda$ とみなし、波源のカレント保存則： $\dot{\rho} + \text{div} \vec{j} = 0$ (ドットは ∂_t を表す) から電荷密度 ρ を $O(1)$ とすると $\vec{j}(t - r/c, \vec{x}') \sim \vec{x}' \dot{\rho}(t - r/c, \vec{x}') = cO(R_{\text{source}}/\lambda)$ となることに注意すると、(1) において $A^\mu = (V/c, \vec{A})$ の被積分関数は

$$\frac{\rho(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{\rho(t - r/c, \vec{x}')}{r} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{r^3} \rho(t - r/c, \vec{x}') + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{cr^2} \dot{\rho}(t - r/c, \vec{x}') + \dots, \quad (2)$$

$$\frac{\vec{j}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{\vec{j}(t - r/c, \vec{x}')}{r} + \dots \quad (3)$$

($r = |\vec{x}|$) のように展開される。ここで \dots は $\frac{1}{r}O((R_{\text{source}}/r)^2, (R_{\text{source}}/r)(R_{\text{source}}/\lambda), (R_{\text{source}}/\lambda)^2)$ の項であり、以下では小さいとして無視する。(2) の右辺第 1 項は、波源の全電荷 $\int d^3x \rho$ による球対称な静電ポテンシャルを与えるが、電磁波放射による時間変化を扱う際は無視できる。波源のつくる電気双極子モーメントを $\vec{p}(t) \equiv \int d^3x \rho(t, \vec{x}) \vec{x}$ とすると

$$V(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\vec{x} \cdot \dot{\vec{p}}(t - r/c)}{r^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} \cdot \vec{p}(t - r/c)}{r^3}, \quad \vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t - r/c)}{r} \quad (4)$$

のようになる。したがって、電気双極子モーメントによる電磁場 $\vec{E} = -\text{grad} V - \dot{\vec{A}}$, $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ は

$$\begin{aligned} \vec{E}(t, \vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{x} \times (\vec{x} \times \ddot{\vec{p}}(t - r/c))}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{3\vec{x} \cdot \dot{\vec{p}}(t - r/c)}{r^4} \vec{x} - \frac{\dot{\vec{p}}(t - r/c)}{r^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3\vec{x} \cdot \vec{p}(t - r/c)}{r^5} \vec{x} - \frac{\vec{p}(t - r/c)}{r^3} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-\frac{\vec{x} \times \ddot{\vec{p}}(t - r/c)}{cr^2} - \frac{\vec{x} \times \dot{\vec{p}}(t - r/c)}{r^3} \right), \quad (6)$$

となる。電場 \vec{E} (5) の第 3 項は電気双極子モーメントによる静電場と同じ形をしており、実は以下のエネルギー変化、角運動量変化の計算において寄与しないことがわかる。

■エネルギー・角運動量の時間変化 平坦時空において、エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ が与えられているとき、4 元運動量 P^μ , 4 元角運動量 $M^{\mu\nu}$ は

$$P^\mu = \frac{1}{c} \int d^3x T^{\mu 0}, \quad M^{\mu\nu} = \frac{1}{c} \int d^3x (x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0}) \quad (7)$$

で定義される。エネルギー運動量テンソルの対称性： $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ と保存則： $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ とガウスの発散定理を用いると、3 次元領域 V の 4 元運動量、4 元角運動量の時間微分は

$$\dot{P}^\mu = - \int_{\partial V} dS T^{\mu k} n_k, \quad \dot{M}^{\mu\nu} = - \int_{\partial V} dS (x^\mu T^{\nu k} - x^\nu T^{\mu k}) n_k \quad (8)$$

^{*2} ギリシャ文字の添え字は 0, 1, 2, 3 を表し、ラテン文字の添え字は 1, 2, 3 を表すこととし、アインシュタインの規約を用いる。

(n_k は ∂V の法線ベクトルの第 k 成分) のように表面積分で表される。ここで、電磁場のエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^\rho - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right)$ は電磁場のエネルギー密度 U , ポインティングベクトル \vec{S} , とマクスウェルの応力テンソルで与えられる:

$$T^{00} = U = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2, \quad T^{0i} = T^{i0} = c^{-1} S^i = \frac{1}{c\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})^i, \quad (9)$$

$$T^{ij} = \epsilon_0 \left(-E^i E^j + \frac{1}{2} \delta^{ij} |\vec{E}|^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(-B^i B^j + \frac{1}{2} \delta^{ij} |\vec{B}|^2 \right). \quad (10)$$

積分領域 V として, 原点 (波源) を中心として半径 r の十分大きな球を考えよう。4 元運動量について (8) の表面積分では (5),(6) において $\vec{E} \sim O(1/r)$, $\vec{B} \sim O(1/r)$ 以外の項は無視できる。このオーダーでは, $\vec{n} = \vec{x}/r$ に対し, $\vec{n} \cdot \vec{E} = 0$, $\vec{n} \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{E} = -c\vec{n} \times \vec{B}$ が成り立つ。このとき (8),(10) より

$$\dot{P}^i = -\frac{1}{\mu_0} \int_{\partial V} d\Omega r^2 n^i |\vec{B}|^2 = \frac{-\mu_0}{16\pi^2 c^2} \int_{\partial V} d\Omega n^i (|\ddot{\vec{p}}(t-r/c)|^2 - (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}}(t-r/c))^2) = 0 \quad (11)$$

となり, 3 次元の運動量は保存される。エネルギーの時間変化率についても同様に (8),(9) より

$$\dot{E} = c\dot{P}^0 = -\frac{c}{\mu_0} \int_{\partial V} d\Omega r^2 |\vec{B}|^2 = -\frac{\mu_0}{6\pi c} |\ddot{\vec{p}}(t-r/c)|^2. \quad (12)$$

4 元角運動量については, (8) の表面積分で (5),(6) において $\vec{E} \sim O(1/r^2)$, $\vec{B} \sim O(1/r^2)$ まで考える必要がある。まず, M^{0i} の時間変化率を調べると (8),(10),(9) より (5),(6) を代入して

$$\begin{aligned} \dot{M}^{0i} &= \frac{1}{c\mu_0} \int_{\partial V} d\Omega r^3 n^i \vec{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \\ &= \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \int_{\partial V} d\Omega n^i \vec{n} \cdot \left((\vec{n} \times (\vec{n} \times \ddot{\vec{p}})) \times (\dot{\vec{p}} \times \vec{n}) + (3(\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}})\vec{n} - \dot{\vec{p}}) \times (\ddot{\vec{p}} \times \vec{n}) \right) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

となり M^{0i} は保存される。(最後の等式では, 立体角の積分で被積分関数が n^i の奇数個の項になり積分値がゼロになることを用いた。) 次に M^{ij} の時間変化率を調べよう。この場合, 3 次元の角運動量 \vec{J} は $J_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M^{jk}$ で定義されることに注意して, \vec{J} の時間変化率を考える。(8) と (10) より

$$\dot{J}_i = -\int_{\partial V} dS \epsilon_{ijk} x^j T^{kl} n_l = \int_{\partial V} d\Omega r^3 \left(\epsilon_0 (\vec{n} \times \vec{E})_i (\vec{E} \cdot \vec{n}) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{n} \times \vec{B})_i (\vec{B} \cdot \vec{n}) \right) \quad (14)$$

と表される。ここで (5),(6) より $\vec{E} \cdot \vec{n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}(t-r/c)}{cr^2} + \frac{2\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}}(t-r/c)}{r^3} \right)$, $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$ となるので, $\vec{n} \times \vec{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \vec{n} \times \ddot{\vec{p}}(t-r/c) + O(1/r^2)$ に注意すると

$$\dot{\vec{J}} = -\frac{\mu_0}{8\pi^2 c} \int_{\partial V} d\Omega (\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}(t-r/c)) (\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}(t-r/c)) = -\frac{\mu_0}{6\pi c} \dot{\vec{p}}(t-r/c) \times \ddot{\vec{p}}(t-r/c) \quad (15)$$

となる。最後の立体角の積分で $\int d\Omega n^i n^j = (4\pi/3) \delta^{ij}$ を用いた。

■楕円軌道を描く 2 つの荷電粒子による電磁波放射 2 つの質点 (質量 m_1, m_2) がそれぞれ電荷 q_1, q_2 ($q_1 q_2 < 0$) をもっているとし, クーロン力により非相対論的な束縛運動をしているとする。§Appendix A のように, 荷電粒子は楕円軌道を運動するが, これを電磁波の波源とみなして, 具体的に計算しよう。2 つの荷電粒子の位置ベクトルを \vec{x}_1, \vec{x}_2 とすると電荷密度は $\rho(t, \vec{x}) = q_1 \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_1) + q_2 \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_2)$ なので, 電気双極子モーメント \vec{p} は $\vec{p} = q_1 \vec{x}_1 + q_2 \vec{x}_2 = \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right) \mu \vec{r} + (q_1 + q_2) \vec{R}$ ($\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ は相対位置, $\vec{R} = (m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2)/(m_1 + m_2)$ は重心, $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ は換算質量) となる。このとき, (92) のオイラー-ラグランジュ方程式: $(m_1 + m_2) \ddot{\vec{R}} = 0$, $\mu \ddot{\vec{r}} = -k\vec{r}/r^3$ より $\ddot{\vec{p}} = -\left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right) k \frac{\vec{r}}{r^3}$ ($k = |q_1 q_2|/(4\pi\epsilon_0)$) が成り立つ。これを用いると $|\dot{\vec{p}}|^2 = \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right)^2 \frac{k^2}{r^4}$ であり, この時間依存の部分:

$1/r^4$ の 1 周期 P の間の平均は, (95) と $\dot{\phi} = J_z/(\mu r^2)$ より

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{r^4} \right\rangle &= \frac{1}{P} \int_0^P \frac{dt}{r(t)^4} = \frac{1}{P\ell^4} \int_0^P dt (1 + e \cos(\phi(t) - \phi_0))^4 = \frac{1}{P\ell^4} \int_{\phi_0}^{\phi_0+2\pi} \frac{d\phi}{\dot{\phi}} (1 + e \cos(\phi - \phi_0))^4 \\ &= \frac{\mu}{P\ell^2 J_z} \int_{\phi_0}^{\phi_0+2\pi} d\phi (1 + e \cos(\phi - \phi_0))^2 = \frac{2\pi\mu^3 k^2}{PJ_z^5} \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) = a^{-4} (1 - e^2)^{-\frac{5}{2}} \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (16)$$

となる。最後の式は, 楕円軌道の長軸半径 a と離心率 e を用いて表した。よって, 電気双極子モーメントによる電磁波放射によるエネルギーの時間変化率の平均は, (12) より,

$$\langle \dot{E} \rangle = -\frac{\mu_0}{6\pi c} \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right)^2 \frac{k^2}{a^4 (1 - e^2)^{\frac{5}{2}}} \left(1 + \frac{e^2}{2}\right). \quad (17)$$

次に電気双極子モーメントによる電磁波放射による角運動量の時間変化率を調べよう。今度は \vec{p} が必要になる。そのため, 重心を座標原点にとり, 運動を XY 平面に限ると $\vec{p} = \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right) \mu (\vec{e}_X r \cos(\phi - \phi_0) + \vec{e}_Y r \sin(\phi - \phi_0))$ と表せて, $\dot{\vec{p}} = \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right) \mu \dot{r} \vec{r} + \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right) \mu (-\vec{e}_X r \sin(\phi - \phi_0) + \vec{e}_Y r \cos(\phi - \phi_0)) \dot{\phi}$ となり, 運動方程式から $\dot{\vec{p}} \times \vec{p} = \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right) \frac{k}{r^3} \vec{r} \times \vec{p} = \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right)^2 \frac{k\mu\dot{\phi}}{r} \vec{e}_z = \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right)^2 \frac{kJ_z}{r^3} \vec{e}_z$ となる。この時間に依存する部分の 1 周期の平均は

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle &= \frac{1}{P} \int_0^P \frac{dt}{r(t)^3} = \frac{1}{P\ell^3} \int_0^P dt (1 + e \cos(\phi(t) - \phi_0))^3 = \frac{1}{P\ell^3} \int_{\phi_0}^{\phi_0+2\pi} \frac{d\phi}{\dot{\phi}} (1 + e \cos(\phi - \phi_0))^3 \\ &= \frac{\mu}{P\ell J_z} \int_{\phi_0}^{\phi_0+2\pi} d\phi (1 + e \cos(\phi - \phi_0)) = \frac{2\pi\mu^2 k}{PJ_z^2} = a^{-3} (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (18)$$

よって, 電気双極子モーメントによる角運動量の時間変化率は, (15) より,

$$\langle \dot{J}_z \rangle = -\frac{\mu_0}{6\pi c} \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right)^2 \frac{k^{\frac{3}{2}} \mu^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{5}{2}} (1 - e^2)}. \quad (19)$$

ここで長軸半径 a と離心率 e および周期 P の時間変化率は, §Appendix A で得られた関係式 $a = -k/(2E)$, (95), (97), (96) を用いると

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{k} \dot{E}, \quad \dot{e} = \frac{1}{e} \left(\frac{a}{k} (1 - e^2) \dot{E} - \frac{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{(\mu k a)^{\frac{1}{2}}} \dot{J}_z \right), \quad \dot{P} = 6\pi\mu^{\frac{1}{2}} a^{\frac{5}{2}} k^{-\frac{3}{2}} \dot{E}, \quad (20)$$

となることに注意して, これらの時間平均を考えよう。 a, e の時間変化は 1 周期ではわずかであるとみなし, \dot{E}, \dot{J}_z の 1 周期平均の部分のみ考慮し (17), (19) を代入すると,

$$\langle \dot{a} \rangle = \frac{2a^2}{k} \langle \dot{E} \rangle = -\frac{\mu_0}{3\pi c} \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right)^2 \frac{k}{a^2 (1 - e^2)^{\frac{5}{2}}} \left(1 + \frac{e^2}{2}\right), \quad (21)$$

$$\langle \dot{e} \rangle = \frac{1}{e} \left(\frac{a}{k} (1 - e^2) \langle \dot{E} \rangle - \frac{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{(\mu k a)^{\frac{1}{2}}} \langle \dot{J}_z \rangle \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right)^2 \frac{ke}{a^3 (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (22)$$

$$\langle \dot{P} \rangle = 6\pi\mu^{\frac{1}{2}} a^{\frac{5}{2}} k^{-\frac{3}{2}} \langle \dot{E} \rangle = -\frac{\mu_0}{c} \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right)^2 \frac{2\pi\mu^{\frac{1}{2}}}{P(1 - e^2)^{\frac{5}{2}}} \left(1 + \frac{e^2}{2}\right), \quad (23)$$

となる。これらから長軸半径 a , 離心率 e , 周期 P , いずれも減少することがわかる。離心率が減少することは, 軌道の形が楕円から円に近づくことを意味する。また $\langle \dot{a} \rangle, \langle \dot{e} \rangle$ をそれぞれ \dot{a}, \dot{e} と同一視すると (21), (22) は a, e の時間変化を決める微分方程式系をなす。このとき, これらの両辺の比をとると $\frac{da}{de} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a}{e} \cdot \frac{1 + e^2/2}{1 - e^2}$ となるが, 離心率 e_0 のとき長軸半径 a_0 であるとして積分すると

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{e}{e_0} \right)^{\frac{4}{3}} \frac{1 - e_0^2}{1 - e^2}. \quad (24)$$

■電磁波放射のエネルギーフラックスの角度分布 楕円運動する2つの荷電粒子がつくる電気双極子モーメントによる電磁波放射の、エネルギーフラックスの角度分布を調べよう。座標原点(波源)から(十分大きい距離 r)で \vec{n} 方向への単位時間・単位立体角当たりのエネルギーフラックスは(5), (6), (9)より $\frac{dL_{EM}}{d\Omega} = r^2 \langle \vec{S} \cdot \vec{n} \rangle = \frac{cr^2}{\mu_0} \langle |\vec{B}|^2 \rangle = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \langle |\vec{n} \times \dot{\vec{p}}|^2 \rangle$ なので運動方程式を代入すると $\frac{dL_{EM}}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right)^2 k^2 \langle |\vec{n} \times \vec{r}(t)|^2 r(t)^{-6} \rangle$ となる。この楕円軌道に関する1周期の時間平均を考える。楕円軌道において $\phi_0 = 0$ とおいて $\vec{r}(t) = r(t)(\vec{e}_x \cos \phi(t) + \vec{e}_y \sin \phi(t))$ とし、電磁波を観測する向きを $\vec{n} = \vec{e}_x \sin \theta \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \theta \sin \varphi + \vec{e}_z \cos \theta$, とすると(16)と同様の計算により、

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{|\vec{n} \times \vec{r}(t)|^2}{r(t)^6} \right\rangle &= \left\langle \frac{\sin^2 \theta \sin^2(\phi(t) - \varphi) + \cos^2 \theta}{r(t)^4} \right\rangle = \frac{\mu}{P \ell^2 J_z} \int_0^{2\pi} d\phi (1 + e \cos \phi)^2 (\sin^2 \theta \sin^2(\phi - \varphi) + \cos^2 \theta) \\ &= \frac{2\pi \mu^3 k^2}{P J_z^2} \left(\sin^2 \theta \left(\frac{1}{2} + \frac{e^2}{8} (2 - \cos(2\varphi)) \right) + \cos^2 \theta \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) \right) \\ &= a^{-4} (1 - e^2)^{-\frac{5}{2}} \left(1 + \frac{e^2}{2} - \sin^2 \theta \left(\frac{1}{2} + \frac{e^2}{8} (2 + \cos(2\varphi)) \right) \right) \end{aligned} \quad (25)$$

となるので

$$\frac{dL_{EM}}{d\Omega} = \frac{A}{(1 - e^2)^{\frac{5}{2}}} \left(1 + \frac{e^2}{2} - \sin^2 \theta \left(\frac{1}{2} + \frac{e^2}{8} (2 + \cos(2\varphi)) \right) \right), \quad (26)$$

$$A \equiv \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right)^2 \frac{k^2}{a^4} = \frac{16\epsilon_0}{c^3} \left(\frac{1}{q_2 m_1} - \frac{1}{q_1 m_2} \right)^2 E^4 \quad (27)$$

が得られる。これを全立体角で積分すれば(17)の逆符号が得られる。特に最後の式をみると、荷電粒子の相対運動の非相対論的エネルギー E を固定して離心率 e を1に近づけると、各方向の単位時間当たりのエネルギーフラックスが、 $(1 - e^2)^{-\frac{5}{2}}$ の因子により大きくなるのがわかる。

さらに \vec{n} 方向の遠方で観測される電場 \vec{E} の偏光を調べよう。電気双極子モーメントによる電磁波の電場は(5)より、主要項 $O(r^{-1})$ だけ残した $\vec{E}(t, \vec{x}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi r} \vec{n} \times (\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}(t - r/c)) = \frac{\mu_0}{4\pi r} (\ddot{\vec{p}}(t - r/c) - (\ddot{\vec{p}}(t - r/c) \cdot \vec{n}) \vec{n})$ に、運動方程式より得られる $\ddot{\vec{p}}(t) = -\left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right) \frac{k}{r(t)^2} (\vec{e}_x \cos \phi(t) + \vec{e}_y \sin \phi(t))$ を代入する。その際、動径方向 \vec{n} に直交する単位ベクトル： $\vec{e}_\theta = \vec{e}_x \cos \theta \cos \varphi + \vec{e}_y \cos \theta \sin \varphi - \vec{e}_z \sin \theta$, $\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi$ で展開すると $\ddot{\vec{p}} - (\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{n}) \vec{n} = -\left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right) \frac{k}{r(t)^2} (\vec{e}_\theta \cos \theta \cos(\phi(t) - \varphi) + \vec{e}_\varphi \sin(\phi(t) - \varphi))$ となるので、結局

$$\begin{aligned} \vec{E}(t, \vec{x}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi r} \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right) \frac{k}{\ell^2} \\ &\quad \times (1 + e \cos \phi(t - r/c))^2 (\vec{e}_\theta \cos \theta \cos(\phi(t - r/c) - \varphi) + \vec{e}_\varphi \sin(\phi(t - r/c) - \varphi)) \\ &= \frac{4}{c^2 r} \left(\frac{1}{q_2 m_1} - \frac{1}{q_1 m_2} \right) E^2 \frac{(1 + e \cos \phi(t - r/c))^2}{(1 - e^2)^2} (\vec{e}_\theta \cos \theta \cos(\phi(t - r/c) - \varphi) + \vec{e}_\varphi \sin(\phi(t - r/c) - \varphi)) \end{aligned} \quad (28)$$

となる。最後の式では荷電粒子の相対運動の非相対論的エネルギー E を用いて書き直した。この形から $\theta = \pi/2$ つまり楕円軌道の面内では直線偏光であるが、一般には楕円偏光をしていることがわかる。ここで、電場を \vec{e}_{θ_1} 方向の偏光と \vec{e}_{φ_1} 方向の偏光に分けて $\vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{e}_{\theta_1} E_\theta(t, \vec{x}) + \vec{e}_{\varphi_1} E_\varphi(t, \vec{x})$ とすると

$$E_\theta(t, \vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right) \frac{k}{\ell^2} (1 + e \cos \phi(t - r/c))^2 \cos \theta \cos(\phi(t - r/c) - \varphi), \quad (29)$$

$$E_\varphi(t, \vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right) \frac{k}{\ell^2} (1 + e \cos \phi(t - r/c))^2 \sin(\phi(t - r/c) - \varphi) \quad (30)$$

となる。このとき、各偏光による単位時間・単位立体角当たりのエネルギーフラックスは、(26)と同様の1周期平均計算により

$$\frac{dL_\theta^{EM}}{d\Omega} = \frac{r^2}{\mu_0 c} \langle E_\theta^2 \rangle = \frac{A}{(1 - e^2)^{\frac{5}{2}}} \cos^2 \theta \left(\frac{1}{2} + \frac{e^2}{8} (2 + \cos(2\varphi)) \right), \quad (31)$$

$$\frac{dL_\varphi^{EM}}{d\Omega} = \frac{r^2}{\mu_0 c} \langle E_\varphi^2 \rangle = \frac{A}{(1 - e^2)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{1}{2} + \frac{e^2}{8} (2 - \cos(2\varphi)) \right) \quad (32)$$

となる。ここで A は (27) で与えられ、これらの寄与の和が (26) である。

3 楕円運動する連星系からの重力波放射

■アインシュタイン方程式の線形化とその解 弱い重力源だけがある状況を考えて、時空はこの重力源により平坦から微小にずれるとみなせるだろう。このときの計量を $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$) のように書くと、リーマン曲率テンソルは

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(\partial_\beta\partial_\gamma h_{\alpha\delta} - \partial_\beta\partial_\delta h_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha\partial_\gamma h_{\beta\delta} + \partial_\alpha\partial_\delta h_{\beta\gamma}) + O(h^2) \quad (32)$$

と表され、 $h_{\mu\nu}$ に関して線形な項は、微小な一般座標変換 $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ から引き起こされるゲージ変換

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\xi_\beta - \partial_\beta\xi_\alpha \quad (34)$$

のもとで不変である。以下では $h_{\mu\nu}$ の高次は無視し、添え字の上げ下げは $\eta_{\mu\nu}, \eta^{\mu\nu}$ で行うものとする。また、簡単のため、 $c = G = 1$ という幾何学単位系を用いる。(33) を用いてアインシュタイン方程式 $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}$ の左辺を線形化すると、(104) より

$$\frac{1}{2}(-\square\bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\bar{h}_{\alpha\beta} + \partial^\alpha\partial_\mu\bar{h}_{\alpha\nu} + \partial^\alpha\partial_\nu\bar{h}_{\alpha\mu}) = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad \bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^\alpha{}_\alpha \quad (35)$$

となるが、ゲージ変換 (34) を用いて、ローレンツゲージ条件: $\partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu} = 0$ を課すと、波源のある波動方程式の形: $\square\bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi T^{\mu\nu}$ に帰着する。この解は、電磁気学との類似により、保存則: $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ (本来は共変な保存則; $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ であるが、平坦時空からのずれが小さいとして偏微分で置き換えた) を満たす対称な、つまり $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ 、エネルギー運動量テンソルに対し、

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t, \vec{x}) = 4 \int d^3x' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} T^{\mu\nu}(t', \vec{x}'), \quad t' \equiv t - |\vec{x} - \vec{x}'| \quad (36)$$

のように求まる。ここで原点付近の波源に対し、距離 r で重力波を考えて、 $\partial_t \sim c/\lambda$ (λ は波長のオーダー) とみなし、長波長近似 $r \gg \lambda \gg R_{\text{source}}$ をとる。(R_{source} は波源の範囲) これは、波源の運動が光速より十分遅い、つまり、非相対論的であるとして、十分遠方で重力波を観測することに対応する。保存則 $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ に注意すると、波源に限られた部分であることから、 $T^{00} \sim O(1)$ に対し、 $T^{ij} \sim O((R_{\text{source}}/\lambda)^2)$ とみなせる。すると (36) の空間方向の被積分関数は $\frac{T^{ij}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{r} T^{ij}(t - r, \vec{x}') + \dots$ となる。ここで \dots の項は $T^{\alpha\beta}$ を $O(1)$ としたとき、 $\frac{1}{r} O((R_{\text{source}}/r)^2, R_{\text{source}}^3/(r\lambda^2), (R_{\text{source}}/\lambda)^3)$ となる項であり、以下では無視する。保存則を用いて部分積分することで、 $\int d^3x x^i x^j \ddot{T}^{00}(t, \vec{x}) = 2 \int d^3x T^{ij}(t, \vec{x})$ が成り立つことに注意すると、結局 (36) の空間方向 \bar{h}^{ij} は

$$\bar{h}^{ij} = \frac{2}{r} \ddot{I}^{ij}(t - r), \quad I^{ij}(t) = \int d^3x x^i x^j T^{00}(t, \vec{x}) \quad (37)$$

となる。 T^{00} は質量密度に対応するので、 I^{ij} は質量 2 次モーメントを表す。

■TT ゲージ アインシュタイン方程式を線形化し、波動方程式の形にする際のローレンツゲージ条件: $\partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu} = 0$ を保ったまま、さらにゲージ変換 (34) で TT (トランスバーストレスレス) ゲージ: $h_{0\mu} = 0$, $\partial^i h_{ij} = 0$, $h^i{}_i = 0$ を課することができる。波数ベクトル \vec{k} の平面波に対しては、TT ゲージにしたものは

$$h_{ij}^{\text{TT}} = P_{il}^{(\vec{k})} P_{jm}^{(\vec{k})} \bar{h}^{lm} - \frac{1}{2} P_{ij}^{(\vec{k})} P_{lm}^{(\vec{k})} \bar{h}^{lm}, \quad P_{ij}^{(\vec{k})} \equiv \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\vec{k}|^2} \quad (38)$$

で与えられる。実際、 $k^i h_{ij}^{\text{TT}} = 0$, $h_i{}^{\text{TT}i} = 0$ となっている。(37) は平面波ではないので、(38) の代わりに

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \left(\hat{P}_{il} \hat{P}_{jm} - \frac{1}{2} \hat{P}_{ij} \hat{P}_{lm} \right) \frac{2}{r} \ddot{I}^{lm}(t - r), \quad \hat{P}_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\partial_k \partial^k}, \quad \hat{I}^{ij} = I^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} I^k{}_k \quad (39)$$

のように定義する。トレース部分が効かないので (37) の I^{lm} の代わりに、4 重極モーメント \dot{F}^{lm} を用いた。実際、 $\partial^i \dot{P}_{ij} = 0$ 、 $\dot{P}_i^i = 2$ より $\partial^i h_{ij}^{\text{TT}} = 0$ 、 $h_{ij}^{\text{TT}} = 0$ となり、トランスバーストレースレスになっている。次に (39) を $O(r^{-2})$ まで具体的に計算すると、次のようになる [6] :

$$h_{ij}^{\text{TT}} = h_{(1)ij}^{\text{TT}} + h_{(2)ij}^{\text{TT}} + O(r^{-3}), \quad (40)$$

$$h_{(1)ij}^{\text{TT}} = \frac{2}{r} \left(P_{il} P_{jm} \ddot{F}^{lm} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{lm} \ddot{F}^{lm} \right), \quad P_{ij} \equiv \delta_{ij} - n_i n_j, \quad n_i \equiv \frac{x_i}{r}, \quad (41)$$

$$h_{(2)ij}^{\text{TT}} = \frac{2}{r^2} \left(2\dot{F}_{ij} - 4n_i n^p \dot{F}_{pj} - 4n_j n^p \dot{F}_{pi} + \delta_{ij} n^l n^m \dot{F}_{lm} + 5n_i n_j n^l n^m \dot{F}_{lm} \right). \quad (42)$$

このとき、各オーダーでトレースレス条件: $h_{(1)i}^{\text{TT}} = 0$ 、 $h_{(2)i}^{\text{TT}} = 0$ は満たしているが、トランスバース条件は

$$\partial^i h_{(1)ij}^{\text{TT}} = \frac{4}{r^2} (\ddot{F}_{pq} n_j n^p n^q - \ddot{F}_{jp} n^p), \quad \partial^i h_{(2)ij}^{\text{TT}} = -\frac{4}{r^2} (\ddot{F}_{pq} n_j n^p n^q - \ddot{F}_{jp} n^p) + O(r^{-3}), \quad (43)$$

であり、 $\partial^i (h_{(1)ij}^{\text{TT}} + h_{(2)ij}^{\text{TT}}) = O(r^{-3})$ となっている。また、 n^i と縮約したとき $h_{(1)ij}^{\text{TT}}$ のほうは消える; $n^i h_{(1)ij}^{\text{TT}} = 0$ が、 $h_{(2)ij}^{\text{TT}}$ のほうは消えない: $n^i h_{(2)ij}^{\text{TT}} = \frac{4}{r^2} (-n^i \dot{F}_{ij} + n_j n^p n^q \dot{F}_{pq})$ ことに注意する。

■重力波のエネルギー放射率 ランダウ-リフシッツのエネルギー運動量擬テンソル $t_{\text{LL}}^{\alpha\beta}$ を $O(h^2)$ まで評価しよう。 $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} + O(h^2)$ 、 $\sqrt{-g} = 1 + \frac{1}{2} h^\alpha_\alpha + O(h^2)$ であることを使うと $\bar{g}^{\alpha\beta}_{,\gamma} = -\bar{h}^{\alpha\beta}_{,\gamma} + O(h^2)$ が成り立つことに注意すると、 $t_{\text{LL}}^{\alpha\beta}$ (120) は

$$\begin{aligned} t_{\text{LL}}^{\alpha\beta} = & \frac{1}{16\pi} \left(\bar{h}^{\alpha\beta}_{,\lambda} \bar{h}^{\lambda\tau}_{,\tau} - \bar{h}^{\alpha\lambda}_{,\lambda} \bar{h}^{\beta\tau}_{,\tau} + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \bar{h}_{\lambda\tau,\rho} \bar{h}^{\rho\lambda,\tau} - \bar{h}^{\beta\lambda,\rho} \bar{h}_{\lambda\rho}^{,\alpha} - \bar{h}^{\alpha\lambda,\rho} \bar{h}_{\lambda\rho}^{,\beta} + \bar{h}^{\alpha\lambda,\rho} \bar{h}^{\beta}_{\lambda,\rho} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \bar{h}_{\rho\sigma}^{,\alpha} \bar{h}^{\rho\sigma,\beta} - \frac{1}{4} \bar{h}^{\alpha\lambda} \bar{h}^{\beta\sigma} - \frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} \bar{h}_{\rho\sigma,\lambda} \bar{h}^{\rho\sigma,\lambda} + \frac{1}{8} \eta^{\alpha\beta} \bar{h}_{,\lambda} \bar{h}^{\lambda} \right) + O(h^3) \end{aligned} \quad (44)$$

のように展開される。これを用いると、(37) による重力波のエネルギー運動量擬テンソル $T_{\mu\nu}^{\text{GW}} = \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} \langle t_{\text{LL}}^{\alpha\beta} \rangle$ を評価できる。(44) を数波長にわたって平均化し、部分積分してよいとして少し書き換えると

$$\begin{aligned} \langle t_{\text{LL}}^{\alpha\beta} \rangle = & \frac{1}{16\pi} \left\langle \bar{h}^{\alpha\beta}_{,\lambda} \bar{h}^{\lambda\tau}_{,\tau} - \bar{h}^{\alpha\lambda}_{,\lambda} \bar{h}^{\beta\tau}_{,\tau} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \bar{h}_{\lambda\tau,\rho} \bar{h}^{\rho\lambda} + \bar{h}^{\beta\lambda} \bar{h}_{\lambda\rho}^{,\rho\alpha} + \bar{h}^{\alpha\lambda} \bar{h}_{\lambda\rho}^{,\rho\beta} - \bar{h}^{\alpha\lambda} \square \bar{h}^{\beta}_{\lambda} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \bar{h}_{\rho\sigma}^{,\alpha} \bar{h}^{\rho\sigma,\beta} - \frac{1}{4} \bar{h}^{\alpha\lambda} \bar{h}^{\beta\sigma} + \frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} \bar{h}_{\rho\sigma} \square \bar{h}^{\rho\sigma} - \frac{1}{8} \eta^{\alpha\beta} \bar{h} \square \bar{h} \right\rangle + O(h^3) \end{aligned} \quad (45)$$

となる。 $\bar{h}^{\alpha\beta}$ がローレンツゲージの重力波の場合で、波源から離れた場所で $\langle t_{\text{LL}}^{\alpha\beta} \rangle$ を評価すると線形近似では $\partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\beta} = 0$ 、 $\square \bar{h}^{\alpha\beta} = 0$ なので

$$\langle t_{\text{LL}}^{\alpha\beta} \rangle \simeq \frac{1}{16\pi} \left\langle \frac{1}{2} \bar{h}_{\rho\sigma}^{,\alpha} \bar{h}^{\rho\sigma,\beta} - \frac{1}{4} \bar{h}^{\alpha\lambda} \bar{h}^{\beta\sigma} \right\rangle = \frac{1}{32\pi} \langle \partial^\alpha h_{ij}^{\text{TT}} \partial^\beta h^{\text{TT}ij} \rangle \quad (46)$$

と簡単化される。最後の式は TT ゲージの場合で、アイザックソンの式である。この式から、4 重極モーメントを用いてエネルギー密度とエネルギーフラックスを求めよう。遠方での面積分では $O(r^{-2})$ までで十分であるので、(40) の $h_{(1)ij}^{\text{TT}}$ より、エネルギー密度は

$$T_{00}^{\text{GW}} = \frac{1}{8\pi r^2} \left\langle \ddot{F}_{jk}^{\text{TT}}(t-r) \ddot{F}^{\text{TT}jk}(t-r) \right\rangle, \quad \dot{F}_{ij}^{\text{TT}} = P_{il} P_{jm} \dot{F}^{lm} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{lm} \dot{F}^{lm} \quad (47)$$

となる。一方、 r 方向のエネルギーフラックスは

$$T_i^{0\text{GW}} n^i = -T_{0i}^{\text{GW}} n^i = -\frac{1}{8\pi r} \left\langle \ddot{F}^{\text{TT}jk} \left(\frac{x_i}{r^3} \dot{F}_{jk}^{\text{TT}} - \frac{1}{2} \frac{2x_i}{r^2} \ddot{F}_{jk}^{\text{TT}} \right) n^i \right\rangle = T_{00}^{\text{GW}} + O(r^{-3}) \quad (48)$$

となるので、重力波のエネルギー放射率 L_{GW} は

$$L_{\text{GW}} = \int_{r \rightarrow \infty} T_i^{0\text{GW}} n^i r^2 d\Omega = \frac{1}{8\pi} \left\langle \ddot{F}_{jk} \ddot{F}^{jk} - 2n^i \ddot{F}_{ij} \ddot{F}^{jk} n_k + \frac{1}{2} (n^i \ddot{F}_{ij} n^j)^2 \right\rangle d\Omega = \frac{1}{5} \langle \ddot{F}_{jk} \ddot{F}^{jk} \rangle \quad (49)$$

となる。ここで全立体角積分は次の公式を用いた :

$$\int d\Omega n^i n^j = \frac{4\pi}{3} \delta^{ij}, \quad \int d\Omega n^i n^j n^k n^l = \frac{4\pi}{15} (\delta^{ij} \delta^{kl} + \delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{kj}). \quad (50)$$

■重力波の運ぶ角運動量の変化率 次に (40) を用いて重力波の運ぶ角運動量 S_i^{GW} の時間変化率を評価しよう。平坦時空の場合、角運動量の変化率は (8) のように求まるので、保存則 (118) に注意すると、重力波が運ぶ 3 次元角運動量 S_i^{GW} の変化率は $T^{ij} \rightarrow \langle t_{\text{LL}}^{ij} \rangle$ と置き換え、逆符号にしたもの：

$$\frac{dS_i^{\text{GW}}}{dt} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \int (x^j \langle t_{\text{LL}}^{kl} \rangle - x^k \langle t_{\text{LL}}^{jl} \rangle) n_l r^2 d\Omega = \int d\Omega \epsilon_{ijk} r^3 n^j n_l \langle t_{\text{LL}}^{kl} \rangle \quad (51)$$

で与えられる。(44) において $O(h^3)$ の項を無視し、(43) に注意して、遠方で $O(r^{-4})$ は無視できること、 η^{kl} に比例する項は消えること、 $h_{0\mu}^{\text{TT}} = 0, h_i^{\text{TT}i} = 0$ であることを使うと、まず

$$\frac{dS_i^{\text{GW}}}{dt} = \frac{\epsilon_{ijk}}{16\pi} \int_{r \rightarrow \infty} d\Omega r^3 n^j n_l \left\langle -h^{\text{TT}lm,p} h_{mp}^{\text{TT},k} - h^{\text{TT}km,p} h_{mp}^{\text{TT},l} + h^{\text{TT}km,p} h_{m,p}^{\text{TT}l} + \frac{1}{2} h_{mp}^{\text{TT},k} h^{\text{TT}mp,l} - h^{\text{TT}km} h^{\text{TT}l}_m \right\rangle \quad (52)$$

が得られる。この第 1 項は $n_l (-h^{\text{TT}lm,p} h_{mp}^{\text{TT},k}) = \frac{h^{\text{TT}mp,k} h_{mp}^{\text{TT}}}{r} + O(r^{-4}) = O(n^k, r^{-4})$ となり (52) では効かない。(52) の第 2 項と第 3 項については $n_l (-h^{\text{TT}km,p} h_{mp}^{\text{TT},l} + h^{\text{TT}km,p} h_{m,p}^{\text{TT}l}) = h^{\text{TT}km,p} \dot{h}_{mp}^{\text{TT}} + h^{\text{TT}kp,m} (h_{pl}^{\text{TT}} n^l)_{,m} + O(r^{-4})$ となる。この右辺の第 2 項を具体的に書くと

$$\begin{aligned} h^{\text{TT}kp,m} (h_{pl}^{\text{TT}} n^l)_{,m} &= h_{(1)}^{\text{TT}kp,m} (h_{(2)pl}^{\text{TT}} n^l)_{,m} + O(r^{-4}) \\ &= \frac{4}{r^3} (-2\ddot{\ddot{F}}^{pk} \ddot{\ddot{F}}_{lp} n^l + 2\ddot{\ddot{F}}^{pk} \ddot{\ddot{F}}_{ql} n_p n^q n^l - \ddot{\ddot{F}}^{lk} \ddot{\ddot{F}}_{pq} n^p n^q n_l) + O(n^k, r^{-4}) \end{aligned} \quad (53)$$

となり消えない。しかし (52) の最後の項を評価すると

$$\begin{aligned} n_l (-\dot{h}^{\text{TT}km} \dot{h}^{\text{TT}l}_m) &= -\dot{h}_{(1)}^{\text{TT}km} \dot{h}_{(2)m}^{\text{TT}l} n_l + O(r^{-4}) \\ &= \frac{4}{r^3} (2\ddot{\ddot{F}}^{pk} \ddot{\ddot{F}}_{lp} n^l - 2\ddot{\ddot{F}}^{pk} \ddot{\ddot{F}}_{ql} n_p n^q n^l + \ddot{\ddot{F}}^{lk} \ddot{\ddot{F}}_{pq} n^p n^q n_l) + O(n^k, r^{-4}) \end{aligned} \quad (54)$$

となり (53) とちょうどキャンセルする。(52) の第 4 項については [4] と同様に

$$n_l \left(\frac{1}{2} h_{mp}^{\text{TT},k} h^{\text{TT}mp,l} \right) = -\frac{1}{2} h_{mp}^{\text{TT},k} \dot{h}^{\text{TT}mp} - \frac{h^{\text{TT}mp,k} h_{mp}^{\text{TT}}}{2r} + O(r^{-4}) = -\frac{1}{2} h_{mp}^{\text{TT},k} \dot{h}^{\text{TT}mp} + O(n^k, r^{-4}) \quad (55)$$

となる。以上より

$$\frac{dS_i^{\text{GW}}}{dt} = \frac{\epsilon_{ijk}}{16\pi} \int d\Omega r^3 n^j \left\langle h^{\text{TT}km,p} \dot{h}_{mp}^{\text{TT}} - \frac{1}{2} h_{mp}^{\text{TT},k} \dot{h}^{\text{TT}mp} \right\rangle \quad (56)$$

となる。まず、この式で (40) のうち $h_{(1)ij}^{\text{TT}}$ のみの寄与を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_{ijk}}{16\pi} \int d\Omega r^3 n^j \left\langle h_{(1)}^{\text{TT}km,p} \dot{h}_{(1)mp}^{\text{TT}} - \frac{1}{2} h_{(1)mp}^{\text{TT},k} \dot{h}_{(1)}^{\text{TT}mp} \right\rangle &= \frac{\epsilon_{ijk}}{16\pi} \int d\Omega n^j \left\langle -\frac{1}{2} h_{(1)mp}^{\text{TT},k} \dot{h}_{(1)}^{\text{TT}mp} \right\rangle \\ &= \frac{\epsilon_{ijk}}{8\pi} \int d\Omega n^j \left\langle 2\ddot{\ddot{F}}^{pk} \ddot{\ddot{F}}_{pq} n^q - 2\ddot{\ddot{F}}^{lk} \ddot{\ddot{F}}_{pq} n^p n^q n_l + \ddot{\ddot{F}}^{pk} \ddot{\ddot{F}}_{qm} n_p n^q n^m \right\rangle \end{aligned} \quad (57)$$

となる。次に (40) のうち $h_{(2)ij}^{\text{TT}}$ が寄与する部分を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_{ijk}}{16\pi} \int d\Omega r^3 n^j \left\langle h_{(1)}^{\text{TT}km,p} \dot{h}_{(2)mp}^{\text{TT}} + h_{(2)}^{\text{TT}km,p} \dot{h}_{(1)mp}^{\text{TT}} - \frac{1}{2} h_{(1)mp}^{\text{TT},k} \dot{h}_{(2)}^{\text{TT}mp} - \frac{1}{2} h_{(2)mp}^{\text{TT},k} \dot{h}_{(1)}^{\text{TT}mp} \right\rangle \\ = \frac{\epsilon_{ijk}}{16\pi} \int d\Omega n^j \left\langle h_{(1)}^{\text{TT}km,p} \dot{h}_{(2)mp}^{\text{TT}} \right\rangle = \frac{\epsilon_{ijk}}{8\pi} \int d\Omega n^j \left\langle 4\ddot{\ddot{F}}^{pk} \ddot{\ddot{F}}_{pq} n^q - 4\ddot{\ddot{F}}^{lk} \ddot{\ddot{F}}_{pq} n^p n^q n_l + 2\ddot{\ddot{F}}^{pk} \ddot{\ddot{F}}_{qm} n_p n^q n^m \right\rangle \end{aligned} \quad (58)$$

となる。以上より、(57)、(58) を (56) に代入し、(50) を用いると

$$\begin{aligned} \frac{dS_i^{\text{GW}}}{dt} &= \frac{\epsilon_{ijk}}{8\pi} \int d\Omega n^j \left\langle 6\ddot{\ddot{F}}^{pk} \ddot{\ddot{F}}_{pq} n^q - 6\ddot{\ddot{F}}^{lk} \ddot{\ddot{F}}_{pq} n^p n^q n_l + 3\ddot{\ddot{F}}^{pk} \ddot{\ddot{F}}_{qm} n_p n^q n^m \right\rangle \\ &= \frac{\epsilon_{ijk}}{8\pi} \int d\Omega n^j \left\langle -6\ddot{\ddot{F}}^{pk} \ddot{\ddot{F}}_{pq} n^q + 9\ddot{\ddot{F}}^{pk} \ddot{\ddot{F}}_{qm} n_p n^q n^m \right\rangle = -\frac{2}{5} \epsilon_{ijk} \langle \ddot{\ddot{F}}^{jm} \ddot{\ddot{F}}^k_m \rangle \end{aligned} \quad (59)$$

が得られる。[4]

■楕円軌道を描く連星系による重力波放射 連星系からの重力波放射について考えよう。連星を質量 m_1, m_2 の質点とみなし、それらの運動をニュートン重力で近似して万有引力ポテンシャル $-Gm_1m_2/|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$ により楕円軌道を描いているとする。(§Appendix A で $k = Gm_1m_2$ の場合に対応する。) 重心を座標原点にとり、軌道面を xy 平面にとる。質点間の距離を r とし質量 m_1, m_2 の質点の xy 座標を $(r_1 \cos \phi, r_1 \sin \phi), (-r_2 \cos \phi, -r_2 \sin \phi)$ とする。このとき $r_1 = \frac{m_2}{m_t}r, r_2 = \frac{m_1}{m_t}r$ ($m_t = m_1 + m_2$) であり、質量密度は $m_1 \delta(x - \frac{m_2}{m_t}r \cos \phi) \delta(y - \frac{m_2}{m_t}r \sin \phi) \delta(z) + m_2 \delta(x + \frac{m_1}{m_t}r \cos \phi) \delta(y + \frac{m_1}{m_t}r \sin \phi) \delta(z)$ となる。これを用いると、質量 2 次モーメント I^{ij} (37) は

$$I_{xx} = \mu r^2 \cos^2 \phi, \quad I_{yy} = \mu r^2 \sin^2 \phi, \quad I_{xy} = \mu r^2 \cos \phi \sin \phi, \quad I_{zi} = 0 \quad (60)$$

($\mu = m_1m_2/m_t$ は換算質量) となる。 r, ϕ を時間の関数としてその微分を求めよう。§Appendix A において、(95) で $\phi_0 = 0, k = m_1m_2$ (今 $c = G = 1$ の幾何学単位系としている) としたものの、および質点系の角運動量 $J_z = \mu r^2 \dot{\phi}$ を用いると、 $\dot{r} = \frac{r \dot{\phi} e \sin \phi}{1 + e \cos \phi}, \dot{\phi} = \frac{J_z}{\mu r^2}$ となることに注意すると、まず 1 階微分は

$$\dot{I}_{xx} = -\frac{J_z r \sin 2\phi}{a(1-e^2)}, \quad \dot{I}_{yy} = \frac{2J_z r}{a(1-e^2)} \left(e \sin \phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi \right), \quad \dot{I}_{xy} = \frac{J_z r}{a(1-e^2)} (\cos 2\phi + e \cos \phi). \quad (61)$$

2 階微分は

$$\begin{aligned} \ddot{I}_{xx} &= -\frac{2J_z^2}{a^2(1-e^2)^2\mu} (\cos 2\phi + e \cos^3 \phi), & \ddot{I}_{yy} &= \frac{2J_z^2}{a^2(1-e^2)^2\mu} (\cos 2\phi + e(2\cos \phi - \sin^2 \phi \cos \phi) + e^2), \\ \ddot{I}_{xy} &= -\frac{2J_z^2}{a^2(1-e^2)^2\mu} (\sin 2\phi + e(\sin \phi + \sin \phi \cos^2 \phi)). \end{aligned} \quad (62)$$

そして 3 階微分は

$$\begin{aligned} \dddot{I}_{xx} &= \beta(1+e \cos \phi)^2 (2 \sin 2\phi + 3e \sin \phi \cos^2 \phi), & \dddot{I}_{yy} &= -\beta(1+e \cos \phi)^2 (2 \sin 2\phi + e \sin \phi (1+3 \cos^2 \phi)), \\ \dddot{I}_{xy} &= -\beta(1+e \cos \phi)^2 (2 \cos 2\phi - e \cos \phi (1-3 \cos^2 \phi)). \end{aligned} \quad (63)$$

ここで $\beta^2 = \frac{4m_1^2 m_2^2 m_t}{a^5(1-e^2)^5}$ とした。4 重極モーメントの 3 階微分は、 $\dddot{F}_{ij} = \ddot{I}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \ddot{I}_k^k$ より、

$$\begin{aligned} \dddot{F}_{xx} &= \beta(1+e \cos \phi)^2 (2 \sin 2\phi + e \sin \phi (\frac{1}{3} + 3 \cos^2 \phi)), & \dddot{F}_{yy} &= -\beta(1+e \cos \phi)^2 (2 \sin 2\phi + e \sin \phi (\frac{2}{3} + 3 \cos^2 \phi)), \\ \dddot{F}_{zz} &= \frac{\beta}{3} (1+e \cos \phi)^2 e \sin \phi, & \dddot{F}_{xy} &= -\beta(1+e \cos \phi)^2 (2 \cos 2\phi - e \cos \phi (1-3 \cos^2 \phi)), \end{aligned} \quad (64)$$

および $\dddot{F}_{zx} = \dddot{F}_{zy} = 0$ となる。よって (49) より

$$L_{\text{GW}} = \frac{1}{5} \langle \ddot{F}_{xx} \ddot{F}_{xx} + \ddot{F}_{yy} \ddot{F}_{yy} + \ddot{F}_{zz} \ddot{F}_{zz} + 2\ddot{F}_{xy} \ddot{F}_{xy} \rangle = \frac{2}{15} \beta^2 \langle (1+e \cos \phi)^4 (12(1+e \cos \phi)^2 + e^2 \sin^2 \phi) \rangle \quad (65)$$

となるが、この時間平均は 1 周期の区間で積分したものを周期 P (97) で割ることと同じであるから

$$\begin{aligned} \langle (1+e \cos \phi)^4 (12(1+e \cos \phi)^2 + e^2 \sin^2 \phi) \rangle &= \frac{1}{P} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\phi} d\phi (1+e \cos \phi)^4 (12(1+e \cos \phi)^2 + e^2 \sin^2 \phi) \\ &= \frac{(1-e^2)^{3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi (1+e \cos \phi)^2 (12(1+e \cos \phi)^2 + e^2 \sin^2 \phi) = 12(1-e^2)^{3/2} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) \end{aligned} \quad (66)$$

と計算され、エネルギーフラックスの式が得られる：

$$L_{\text{GW}} = \frac{32}{5} \frac{m_1^2 m_2^2 m_t}{a^5 (1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right). \quad (67)$$

次に、この場合の重力波の運ぶ角運動量の時間変化率を計算しよう。今、 $I_{zi} = 0$ であることより (59) は

$$\frac{dS_x^{\text{GW}}}{dt} = 0, \quad \frac{dS_y^{\text{GW}}}{dt} = 0, \quad \frac{dS_z^{\text{GW}}}{dt} = -\frac{2}{5} \langle \dot{F}_{xy} (\dot{F}_{yy} - \dot{F}_{xx}) + \dot{F}_{xy} (\dot{F}_{xx} - \dot{F}_{yy}) \rangle \quad (68)$$

となるが⁵, (64), (62) より

$$\begin{aligned} \ddot{F}_{xy}(\ddot{F}_{yy} - \ddot{F}_{xx}) + \ddot{F}_{xy}(\ddot{F}_{xx} - \ddot{F}_{yy}) &= \ddot{F}_{xy}(\ddot{y}_{yy} - \ddot{x}_{xx}) + \ddot{F}_{xy}(\ddot{F}_{xx} - \ddot{F}_{yy}) \\ &= -\beta'(1 + e \cos \phi)^2 [4 + 10e \cos \phi + e^2(1 + 5 \cos^2 \phi) + e^2(2 \cos 2\phi - e \cos \phi(1 - 3 \cos^2 \phi))] \end{aligned} \quad (69)$$

と計算される。ここで $\beta' = \beta^2 a^{\frac{3}{2}} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} m_t^{-\frac{1}{2}}$ と置いた。さらに (66) と同様に 1 周期平均をとると

$$\begin{aligned} &\langle (1 + e \cos \phi)^2 (4 + 10e \cos \phi + e^2(1 + 5 \cos^2 \phi) + e^2(2 \cos 2\phi - e \cos \phi(1 - 3 \cos^2 \phi))) \rangle \\ &= \frac{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \int_0^{2\pi} (4 + 10e \cos \phi + e^2(1 + 5 \cos^2 \phi) + e^2(2 \cos 2\phi - e \cos \phi(1 - 3 \cos^2 \phi))) d\phi \\ &= 4(1 - e^2)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{7}{8}e^2\right) \end{aligned} \quad (70)$$

となるので, z 方向の角運動量の時間変化率は次式のようになる:

$$\frac{dS_z^{\text{GW}}}{dt} = \frac{32}{5} \frac{m_1^2 m_2^2 m_t^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{5}{2}} (1 - e^2)^2} \left(1 + \frac{7}{8}e^2\right). \quad (71)$$

以上でわかったことは, ケプラーの法則に従って楕円軌道を運動している連星からは重力波が放出されて, 式 (67) にしたがって, 重力波はエネルギーを運び, 式 (71) のように角運動量を運ぶ。全エネルギーと全角運動量は保存するから, これは連星のエネルギー E と角運動量 J_z が変化することを意味する。すると, 長軸半径 a と離心率 e は変化することになる。重力波による E, J_z の変化の時間スケールが, 楕円運動の周期 P と比べてゆっくりであるとする, a と e が準静的に変化すると考えられる。そこで,

$$\frac{dE}{dt} = -L_{\text{GW}} = -\frac{32}{5} \frac{G^4 m_1^2 m_2^2 m_t}{c^5 a^5 (1 - e^2)^{\frac{5}{2}}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right), \quad (72)$$

$$\frac{dJ_z}{dt} = -\frac{dS_z^{\text{GW}}}{dt} = -\frac{32}{5} \frac{G^3 m_1^2 m_2^2 (Gm_t)^{\frac{1}{2}}}{c^5 a^{\frac{7}{2}} (1 - e^2)^2} \left(1 + \frac{7}{8}e^2\right) \quad (73)$$

(c, G を復活させた) を a と e の時間変化を決める式と考える。(20) を用いると, 長軸半径 a と離心率 e および周期 P の時間変化率は

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3 m_1 m_2 m_t}{c^5 a^3 (1 - e^2)^{\frac{5}{2}}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right), \quad (74)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{304}{15} \frac{e G^3 m_1 m_2 m_t}{c^5 a^4 (1 - e^2)^{\frac{5}{2}}} \left(1 + \frac{121}{304}e^2\right), \quad (75)$$

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{192\pi}{5} \left(\frac{2\pi}{P}\right)^{\frac{5}{3}} \frac{1}{(1 - e^2)^{\frac{5}{2}}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right) \frac{G^2 m_1 m_2}{c^5} (Gm_t)^{-\frac{1}{3}} \quad (76)$$

となる。これらの式より, 重力波放射により, 長軸半径 a は減少するとともに, 軌道は楕円から円に近づき, 周期は短くなる。特に a, e の微分方程式 (74), (75) から

$$\frac{da}{a} = \frac{12}{19} \frac{(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4)}{e(1 - e^2)(1 + \frac{121}{304}e^2)} de \quad \rightarrow \quad \frac{a}{a_0} = \frac{1 - e_0^2}{1 - e^2} \left(\frac{e}{e_0}\right)^{\frac{12}{19}} \left(\frac{1 + \frac{121}{304}e^2}{1 + \frac{121}{304}e_0^2}\right)^{\frac{870}{2295}} \quad (77)$$

のように積分でき, 長軸半径 a と離心率 e の関係がわかる。(ここで $a = a_0$ のとき $e = e_0$ とした。)

■重力波放射のエネルギーフラックスの角度分布 連星系の楕円運動により放出された重力波が, 方向によってどう見えるかを調べる。重力波の運ぶエネルギー放射率 L_{GW} を与える (49) 式において, 被積分関数を考えると, \vec{n} の向きのエネルギーフラックスがわかる。被積分関数の平均をとる前は

$$\begin{aligned} &\ddot{F}_{jk} \ddot{F}^{jk} - 2n^i \ddot{F}_{ij} \ddot{F}^{jk} n_k + \frac{1}{2} (n^i \ddot{F}_{ij} n^j)^2 \\ &= \ddot{F}_{xx}^2 \left(1 - 2n_x^2 + \frac{1}{2}n_x^4\right) + \ddot{F}_{yy}^2 \left(1 - 2n_y^2 + \frac{1}{2}n_y^4\right) + \ddot{F}_{zz}^2 \left(1 - 2n_z^2 + \frac{1}{2}n_z^4\right) \\ &\quad + 2\ddot{F}_{xy}^2 (1 - (n_x^2 + n_y^2) + n_x^2 n_y^2) + n_x n_y \ddot{F}_{xy} (-4\ddot{F}_{xx} - 4\ddot{F}_{yy} + 2n_x^2 \ddot{F}_{xx} + n_y^2 \ddot{F}_{yy} + 2n_z^2 \ddot{F}_{zz}) \\ &\quad + n_x^2 n_y^2 \ddot{F}_{xx} \ddot{F}_{yy} + n_x^2 n_z^2 \ddot{F}_{xx} \ddot{F}_{zz} + n_z^2 n_y^2 \ddot{F}_{zz} \ddot{F}_{yy} \end{aligned} \quad (78)$$

と書き換えられるので、 $\ddot{F}_{xx}^2, \ddot{F}_{yy}^2, \ddot{F}_{zz}^2, \ddot{F}_{xy}^2, \ddot{F}_{xy}\ddot{F}_{xx}, \ddot{F}_{xy}\ddot{F}_{yy}, \ddot{F}_{xy}\ddot{F}_{zz}, \ddot{F}_{xx}\ddot{F}_{yy}, \ddot{F}_{xx}\ddot{F}_{zz}, \ddot{F}_{yy}\ddot{F}_{zz}$ のそれぞれの平均を求めればよい。ここで、(64) より \ddot{F}_{xy} は偶関数でほかは奇関数なので $\ddot{F}_{xy}\ddot{F}_{xx}, \ddot{F}_{xy}\ddot{F}_{yy}, \ddot{F}_{xy}\ddot{F}_{zz}$ の3つは0になる。ほかの7つは、楕円運動1周期の平均を計算すると

$$\begin{aligned} \langle \ddot{F}_{xx}^2 \rangle &= \beta^2 \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \frac{\pi}{576} (2304 + 6376e^2 + 565e^4), & \langle \ddot{F}_{yy}^2 \rangle &= \beta^2 \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \frac{\pi}{576} (2304 + 7624e^2 + 757e^4), \\ \langle \ddot{F}_{zz}^2 \rangle &= \beta^2 \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \frac{\pi}{36} e^2 (4 + e^2), & \langle \ddot{F}_{xy}^2 \rangle &= \beta^2 \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \frac{\pi}{64} (256 + 776e^2 + 123e^4), \\ \langle \ddot{F}_{xx}\ddot{F}_{yy} \rangle &= -\beta^2 \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \frac{\pi}{576} (2304 + 6968e^2 + 653e^4), & \langle \ddot{F}_{xx}\ddot{F}_{zz} \rangle &= \beta^2 \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \frac{\pi}{72} e^2 (74 + 11e^2), \\ \langle \ddot{F}_{yy}\ddot{F}_{zz} \rangle &= -\beta^2 \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \frac{\pi}{72} e^2 (82 + 13e^2) \end{aligned} \quad (79)$$

となる。これらを用いて、 $n_x = \sin\theta \cos\varphi, n_y = \sin\theta \sin\varphi, n_z = \cos\theta$ として具体的な形を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{dL_{\text{GW}}}{d\Omega} &= \frac{1}{\pi} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 m_t}{a^5 (1-e^2)^{7/2}} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{99}{64}e^2 + \frac{51}{256}e^4 \right) (1 + \cos^4\theta) + \left(3 + \frac{289}{32}e^2 + \frac{145}{128}e^4 \right) \cos^2\theta \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{13}{32}e^2 + \frac{1}{16}e^4 \right) (1 - \cos^4\theta) \cos 2\varphi - \frac{25}{512}e^4 \sin^4\theta \cos 4\varphi \right]. \end{aligned} \quad (80)$$

■重力波の2つの偏極とその角度分布 放出された重力波が方向によってどう見えるかを調べる。以下では(40)の $O(r^{-1})$ の項まで考え、 $h_{(2)ij}^{\text{TT}}$ を無視する。重力波を観測する遠方での位置を表す極座標を $x = r \sin\theta \cos\varphi, y = r \sin\theta \sin\varphi, z = r \cos\theta$ で定義すると、この (r, θ, φ) 座標での h_{ij} は

$$\begin{aligned} h_{rr} &= h_{ij}^{\text{TT}} \frac{\partial x^i}{\partial r} \frac{\partial x^j}{\partial r}, & h_{r\theta} &= h_{ij}^{\text{TT}} \frac{\partial x^i}{\partial r} \frac{\partial x^j}{\partial \theta}, & h_{r\varphi} &= h_{ij}^{\text{TT}} \frac{\partial x^i}{\partial r} \frac{\partial x^j}{\partial \varphi}, \\ h_{\theta\theta} &= h_{ij}^{\text{TT}} \frac{\partial x^i}{\partial \theta} \frac{\partial x^j}{\partial \theta}, & h_{\varphi\varphi} &= h_{ij}^{\text{TT}} \frac{\partial x^i}{\partial \varphi} \frac{\partial x^j}{\partial \varphi}, & h_{\theta\varphi} &= h_{ij}^{\text{TT}} \frac{\partial x^i}{\partial \theta} \frac{\partial x^j}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (81)$$

である。ここで $\partial x^i / \partial r = n^i$ であり、 $n^i h_{ij}^{\text{TT}} = 0$ であるから、 $h_{rr} = h_{r\theta} = h_{r\varphi} = 0$ となる。また、 h_{ij}^{Q} を $h_{ij}^{\text{Q}} = \frac{2}{r} \ddot{F}_{ij}$ と定義して、具体的に書き下すと

$$\begin{aligned} \frac{h_{\theta\theta}}{r^2} &= \frac{1}{4} ((h_{xx}^{\text{Q}} - h_{yy}^{\text{Q}}) (\cos^2\theta + 1) \cos 2\varphi - (h_{xx}^{\text{Q}} + h_{yy}^{\text{Q}} - 2h_{zz}^{\text{Q}}) \sin^2\theta + 2h_{xy}^{\text{Q}} (\cos^2\theta + 1) \sin 2\varphi \\ &\quad - 4h_{xz}^{\text{Q}} \sin\theta \cos\theta \cos\varphi - 4h_{yz}^{\text{Q}} \sin\theta \cos\theta \sin\varphi) \end{aligned} \quad (82)$$

$$\frac{h_{\varphi\varphi}}{r^2 \sin^2\theta} = -\frac{h_{\theta\theta}}{r^2}, \quad (83)$$

$$\frac{h_{\theta\varphi}}{r^2 \sin\theta} = -\frac{(h_{xx}^{\text{Q}} - h_{yy}^{\text{Q}})}{2} \cos\theta \sin 2\varphi + h_{xy}^{\text{Q}} \cos\theta \cos 2\varphi + h_{zx}^{\text{Q}} \sin\theta \sin\varphi - h_{zy}^{\text{Q}} \sin\theta \cos\varphi. \quad (84)$$

となる。ここで重力波の振幅の+偏極と×偏極を

$$h_+ = \frac{h_{\theta\theta}}{r^2}, \quad h_\times = \frac{h_{\theta\varphi}}{r^2 \sin\theta} \quad (85)$$

とする。実際、重力波源から十分離れた所では重力波は平面波近似できるので、 n^i の方向を \hat{z} とし $d\hat{x} = r d\theta, d\hat{y} = r \sin\theta d\varphi$ で局所的に (\hat{x}, \hat{y}) を定義すると

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}^{\text{TT}}) dx^i dx^j \\ &= -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 + h_{\theta\theta} d\theta^2 + 2h_{\theta\varphi} d\theta d\varphi + h_{\varphi\varphi} d\varphi^2 \\ &= -dt^2 + (1 + h_+) d\hat{x}^2 + 2h_\times d\hat{x} d\hat{y} + (1 - h_+) d\hat{y}^2 + d\hat{z}^2. \end{aligned} \quad (86)$$

のようになっている。 (x, y, z) 座標系とその極座標 (r, θ, φ) 、および、 \vec{n} 方向の $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ の関係を図1に表した。また、このときの+偏極、×偏極の重力波による時空の様子(正弦波とした場合の1周期分)をそれぞれ図2, 3に表した。

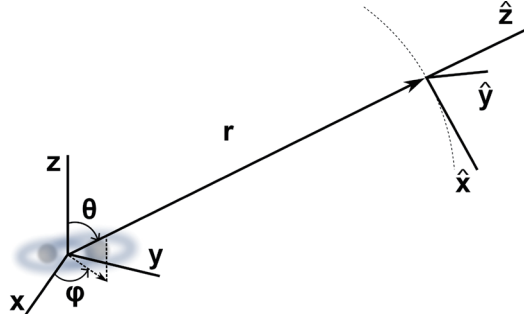


図 1 θ と φ の定義。波源から遠く r だけ離れた場所での座標系 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ で (85) の h_+ , h_\times が重力波の + 偏極, \times 偏極に対応する。

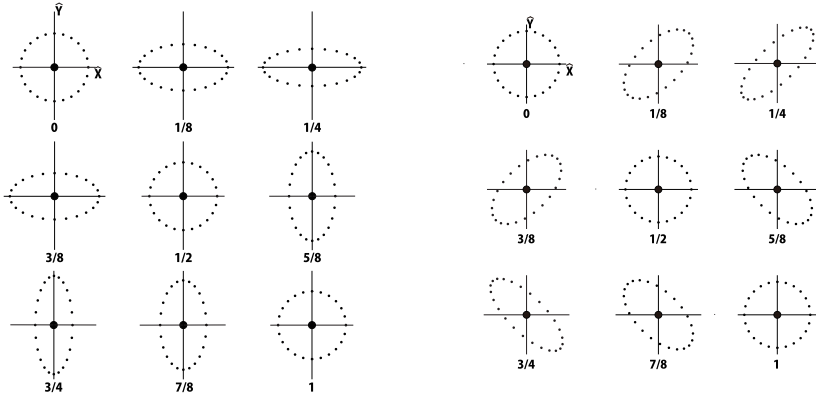


図 2 + 偏極の重力波が通るときの中心質量とテスト質量の距離。 $(\hat{X} = (1 + h_+/2)\hat{x}, \hat{Y} = (1 - h_+/2)\hat{y})$ 座標の下の数字は周期を表す。

図 3 \times 偏極の重力波が通るときの中心質量とテスト質量の距離。 $(\hat{X} = \hat{x} + h_\times\hat{y}/2, \hat{Y} = \hat{y} + h_\times\hat{x}/2)$ 図 2 の + 偏極とは伸縮方向が 45° 傾いている。

重力波のエネルギー密度は (47) より

$$T_{00}^{GW} = \frac{1}{32\pi} \langle \dot{h}_{xx}^{TT} \dot{h}_{xx}^{TT} + 2\dot{h}_{xy}^{TT} \dot{h}_{xy}^{TT} + \dot{h}_{yy}^{TT} \dot{h}_{yy}^{TT} \rangle = \frac{1}{16\pi} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle \tag{87}$$

のように 2 つの偏極による寄与の和になる。今 h_+ と h_\times は (85), (82) より

$$h_+ = \frac{1}{r} (\ddot{I}_{xx} - \ddot{I}_{yy}) \frac{\cos^2 \theta + 1}{2} \cos 2\varphi - \frac{1}{2r} (\ddot{I}_{xx} + \ddot{I}_{yy}) \sin^2 \theta + \frac{1}{r} \ddot{I}_{xy} (\cos^2 \theta + 1) \sin 2\varphi, \tag{88}$$

$$h_\times = -\frac{1}{r} (\ddot{I}_{xx} - \ddot{I}_{yy}) \cos \theta \sin 2\varphi + \frac{2}{r} \ddot{I}_{xy} \cos \theta \cos 2\varphi. \tag{89}$$

であり, (63) を代入して, (80) と同様に楕円運動の 1 周期の平均を計算すると, + 偏極, \times 偏極のエネルギーフラックスの角度分布が得られる:

$$\frac{dL_+^{GW}}{d\Omega} = \frac{\langle r^2 \dot{h}_+^2 \rangle}{16\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 m_t}{a^5 (1 - e^2)^{7/2}} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{99}{64} e^2 + \frac{51}{256} e^4 \right) (1 + \cos^4 \theta) + \left(1 + \frac{95}{32} e^2 + \frac{47}{128} e^4 \right) \cos^2 \theta + \left(\frac{13}{32} e^2 + \frac{1}{16} e^4 \right) (1 - \cos^4 \theta) \cos 2\varphi - \frac{25}{512} e^4 (1 + \cos^2 \theta)^2 \cos 4\varphi \right], \tag{90}$$

$$\frac{dL_\times^{GW}}{d\Omega} = \frac{\langle r^2 \dot{h}_\times^2 \rangle}{16\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 m_t}{a^5 (1 - e^2)^{7/2}} \left[\left(2 + \frac{97}{16} e^2 + \frac{49}{64} e^4 \right) \cos^2 \theta + \frac{25}{128} e^4 \cos^2 \theta \cos 4\varphi \right]. \tag{91}$$

4 楕円運動する波源からの電磁波と重力波の比較

ここでは §2, §3 で求めた式に基づいて、対応する状況の電磁波と重力波の様子を図示し、比較する。

まず、楕円運動する荷電粒子系からの電磁波と楕円運動する質点系からの重力波の全エネルギー放射率の方向依存性を表す図（離心率 $e = 0.75$ の場合）を並べて示す。図 4 は電磁波の場合で、原点からの距離が、各方向 (θ, φ) での $(dL_{EM}/d\Omega)/A$ (式 (26),(27)) を表す。図 5 は重力波の場合で、原点からの距離が、各方向 (θ, φ) での $(dL_{GW}/d\Omega)$ (80) を係数 $A' \equiv G^4 m_1^2 m_2^2 m_t / (\pi c^5 a^5)$ で割ったものを表す。図からすぐわかるように、電磁波・重力波ともに $\theta = 0, \pi$ 方向のほうが、 $\theta = \pi/2$ の方向よりもエネルギー放射率が大きくなる。また、重力波のほうが $\theta = \pi/2$ において、よりくびれている。つまり、重力波は電磁波に比べて、波源の楕円運動の平面の方向にはエネルギー放射率が小さい。

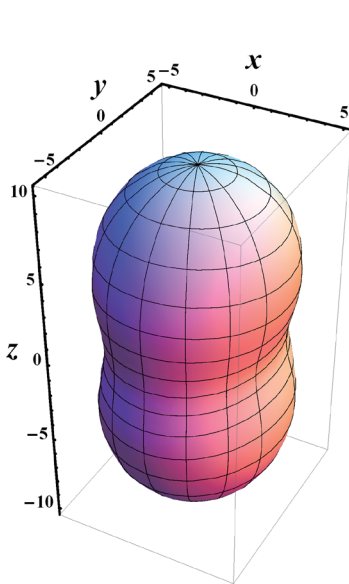


図 4 離心率 $e = 0.75$ の楕円運動からの電磁波のエネルギー放射率の角度分布

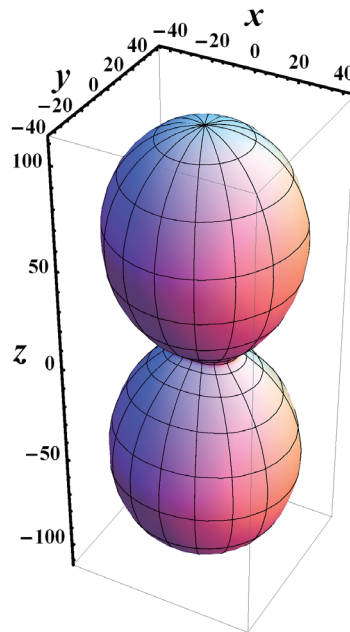


図 5 離心率 $e = 0.75$ の楕円運動からの重力波のエネルギー放射率の角度分布

次に、これら図 4, 図 5 を、それぞれ 2 つの偏極に分解して図示すると、電磁波の場合は図 6, 7 となり、重力波の場合は図 8, 9 となる。図 6 は、原点からの距離が、各方向 (θ, φ) での $(dL_{\theta}^{EM}/d\Omega)/A$ (31) を表す。この場合、電場が \vec{e}_{θ} 方向（磁場は \vec{e}_{φ} 方向）に偏極している電磁波によるエネルギー放射率で、 $\theta = 0, \pi$ 方向に大きくなっており、 $\theta = \pi/2$ ではゼロである。つまり、波源の楕円運動の平面の方向にはこの偏極の電磁波は出ない。図 7 は、原点からの距離が、各方向 (θ, φ) での $(dL_{\varphi}^{EM}/d\Omega)/A$ (32) を表す。この場合は、電場が \vec{e}_{φ} 方向（磁場は \vec{e}_{θ} 方向）に偏極している電磁波によるエネルギー放射率で、より球形に近い形をしている。ともに、 $\theta = 0, \pi$ 付近が特徴的な形にくぼんでいる。

図 8, 9 は、それぞれ、原点からの距離が各方向 (θ, φ) での $(dL_{+}^{GW}/d\Omega)/A'(90)$, $(dL_{\times}^{GW}/d\Omega)/A'(91)$, を表す。これは、それぞれ + 偏極, \times 偏極の重力波のエネルギー放射率であり、ともに $\theta = 0, \pi$ 方向に大きくなっており、+ 偏極 (\times 偏極) では $\theta = 0, \pi$ 付近で、 xy 面に対し、+ 方向 (\times 方向) にくぼんでいる。ただし、電磁波の場合 (図 6,7) と比べて、くぼみは小さい。また、 \times 偏極では $\theta = \pi/2$ ではゼロになっており、波源の楕円運動の平面の方向に \times 偏極の重力波は出ない。

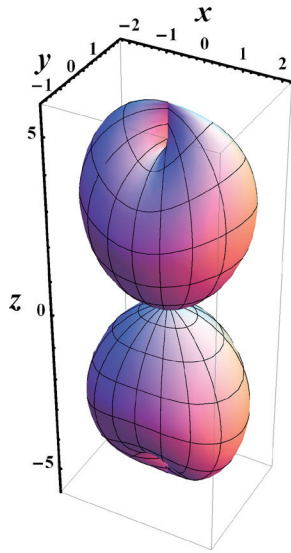


図 6 離心率 $e = 0.75$ の楕円運動からの E_θ 偏光の電磁波のエネルギー放射率の角度分布

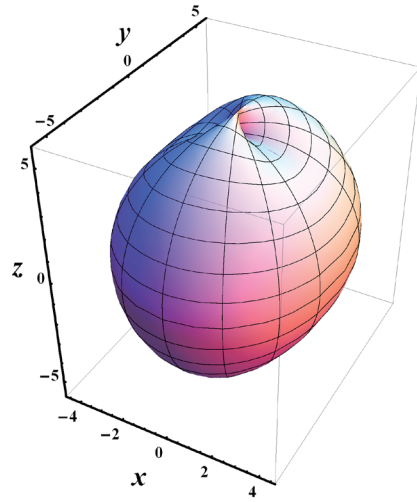


図 7 離心率 $e = 0.75$ の楕円運動からの E_ϕ 偏光の電磁波のエネルギー放射率の角度分布

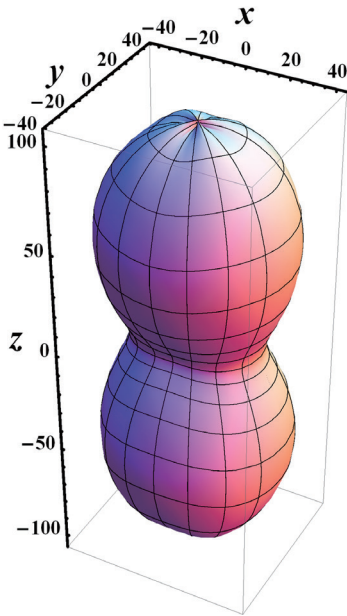


図 8 離心率 $e = 0.75$ の楕円運動からの + 偏極の重力波のエネルギー放射率の角度分布

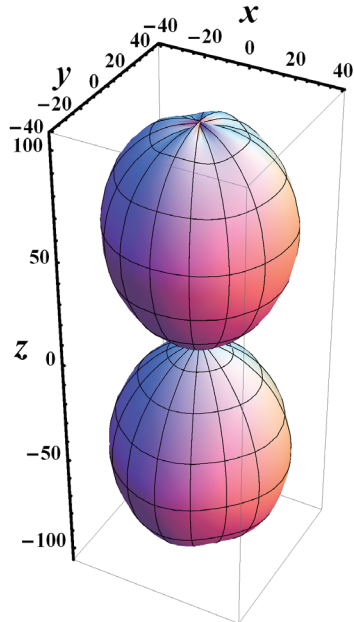


図 9 離心率 $e = 0.75$ の楕円運動からの \times 偏極の重力波のエネルギー放射率の角度分布

全立体角で積分してえられる全エネルギー放射率は、電磁波は (17) を逆符号にしたもの、重力波は (67) で与えられる。特に離心率 e 依存性について、電磁波では $(1 - e^2)^{-5/2}$ の因子があるのに対し、重力波では $(1 - e^2)^{-7/2}$ の因子があるので、波源の楕円軌道が円から大きくゆがんだときは、重力波のほうがより大きな割合でエネルギーを放射することがわかる。図 10 に、 $e = 0$ (円軌道) の場合に 1 となるように係数で

割った電磁波/重力波の全エネルギー放射率の離心率依存性を図示した。

なお、§2, §3 でみたように電磁波/重力波の放出により、波源の楕円運動の離心率 e と長軸半径 a は、時間の経過に伴い、共に次第に減少するが、その際の e と a の関係は、電磁波の場合 (24) で、重力波の場合 (77) で与えられる。特に、 $e_0 = 0.75$, $a_0 = 1$ のときの様子を図 11 に示した。同じ長軸半径 a の値のとき、重力波放射の場合のほうが、電磁波放射よりも、離心率 e が小さいことがわかる。この意味で、重力波の場合のほうが先に円に近づく。

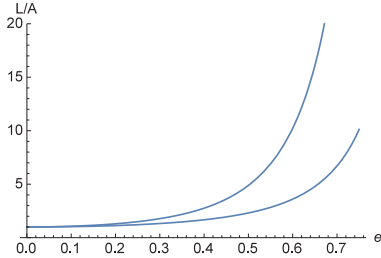


図 10 電磁波/重力波の ($e = 0$ で規格化した) 全エネルギー放射率。横軸は離心率 e を表す。上側のグラフが重力波、下側のグラフが電磁波の場合である。

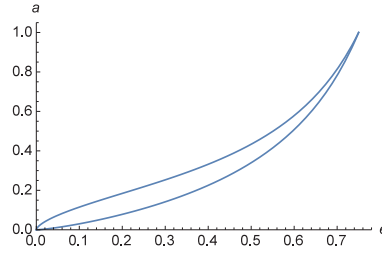


図 11 離心率 0.75 で長軸半径 1 だったとしたときの電磁波/重力波放射により変化する離心率 e と長軸半径 a の関係。上側のグラフが重力波、下側のグラフが電磁波の場合である。

5 おわりに

本稿では、線形化したアインシュタイン方程式とマクスウェル方程式の類似と万有引力とクーロン力の類似に着目し、ともに波源が楕円運動する場合の、重力波放射および電磁波放射についてそれぞれ調べ、その方向依存性等を図示し、比較した。重力波/電磁波の放射に伴うエネルギーの減少を無視すれば、ポテンシャルの関数形の同一性から、波源の運動は全く同等の楕円軌道を描く。重力波/電磁波は、ともに光速で進む波動方程式の解として記述されるものであるが、波源の運動がともに楕円運動であっても、そのエネルギー放射率やその角度分布、角運動量変化率などを表す式は関数形が異なる。電磁波の場合、基本となるマクスウェル方程式がもともと線形であるのに対し、重力波の場合は、その基本であるアインシュタイン方程式は非線形であり、平坦時空からのずれが小さい（重力が弱い）と仮定して線形近似して、波動方程式に式変形している、という違いがある。また、電磁波の場合、そのエネルギー運動量テンソルは、電磁場の作用 $-\frac{1}{4\mu_0} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ から直接導出されるものであるが、重力波の場合は、アインシュタイン-ヒルベルト作用 $\frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R$ から導かれる共変なテンソルではなく、§Appendix B のように、アインシュタイン方程式の摂動の 2 次の形の「平均」として特徴づけられる、エネルギー運動量擬テンソルを用いている。重力波は時空自体の変化を伴うため、そのエネルギー等の定義が単純ではなくなる、という事情がある。

今回の計算 (近似) を正当化するには、楕円運動の周期よりも、波源のエネルギー変化の時間スケールが十分長いことが必要である。§Appendix A にまとめた、 $-k/r$ 型ポテンシャルのもとでの楕円運動をする、という結論は、非相対論的なニュートン力学に基づく計算であり、波源は光速に比べて十分遅い運動をしている、ことを仮定している。電磁波/重力波の計算においても、長波長近似を用いており、波源の運動が遅いことを仮定している。また、電磁波/重力波の放射が強い場合は、その反作用を取り入れて波源の運動を解析し直す必要がある。つまり、ここでの計算結果は弱い放射の場合であると解釈すべきであろう。

§2 で計算した荷電粒子の楕円運動を波源とする電磁波放射の扱いは、「古典」電磁気学に基づくものである。ミクロなレベルでは、量子力学的に扱わなければならない修正が必要になる。一方、§3 で計算した 2 つの質点の楕円運動を波源とする重力波放射の扱いは、「古典」重力としての一般相対論に基づくものであるが、この場合はマクロな天体現象の実例：連星系の楕円運動からの重力波放射の間接的な証拠 (周期の減少) が観測されている。

今回は、弱い波源が光速と比べてゆっくり運動する場合の時空曲率から放たれる重力波について考察した。宇宙でより多く重力波を放出すると期待されるのは、強い波源の速く変化する時空曲率である。強い重力波を理論的に考察することで、今後期待されている直接的な観測結果と定量的に比較できるであろう。

Appendix A $-k/r$ 型ポテンシャルによる楕円運動

電荷 q_i , 質量 m_i ($i = 1, 2$) の 2 つの荷電粒子の系を考えよう。この 2 つの粒子の間の距離を r とすると同じ関数形のポテンシャル: $U_C = q_1 q_2 / (4\pi\epsilon_0 r)$, $U_G = -Gm_1 m_2 / r$ によるクーロン力, 万有引力がはたらく。これらの比をとると $|U_G/U_C| = 4\pi\epsilon_0 G m_1 m_2 / |q_1 q_2|$ となるが, 例えば, m_1, m_2 を陽子の質量, $|q_1|, |q_2|$ を素電荷とした場合, $|U_G/U_C| = (m_p/m_{p1})^2/\alpha \sim 10^{-36} \ll 1$ ($m_{p1} \equiv \sqrt{\hbar c/G}$ はプランク質量, $\alpha \equiv e^2/(4\pi\epsilon_0 \hbar c) \simeq 1/137$ は微細構造定数) となり非常に小さいので, 万有引力を無視して, クーロン力のみ考える。以下では電荷が異符号 ($q_1 q_2 < 0$), つまり引力の場合を考え, 非相対論的な運動をしているとしよう。2 つの荷電粒子の位置ベクトルを \vec{x}_1, \vec{x}_2 とすると, このときのポテンシャルは $U = -k/|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$ ($k \equiv |q_1 q_2|/(4\pi\epsilon_0)$) で与えられるので, この系のラグランジアン L は

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{x}}_2^2 + \frac{k}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{k}{r} \quad (92)$$

となる。2 番目の表式において, 重心位置ベクトル: $\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2}$, 相対位置ベクトル $\vec{r} \equiv \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ の大きさ: $r \equiv |\vec{r}|$, 換算質量: $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ を用いて書き直した。ラグランジアンから重心運動は分離され, 一般に重心が等速度運動をすることがわかる。以下では相対運動に着目し, 相対座標に関する極座標 $r_x = r \sin \theta \cos \phi$, $r_y = r \sin \theta \sin \phi$, $r_z = r \cos \theta$ を導入すると, 相対運動のラグランジアンは $L_{(r)} = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)) + \frac{k}{r}$ となり, 変分原理より運動方程式は

$$-\mu \ddot{r} + \mu r (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - \frac{k}{r^2} = 0, \quad -\frac{d}{dt} (\mu r^2 \dot{\theta}) + \mu r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0, \quad \frac{d}{dt} (\mu r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0 \quad (93)$$

で与えられる。この第 3 式より保存量 $J_z \equiv \mu r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$ があることがわかる。これは相対座標の z 軸周りの角運動量に対応する。次に $\theta = \pi/2$ に限った運動, つまり相対座標での xy 平面の運動を考えよう。まず (93) は第 2 式は自明に満たされる。第 3 式は角運動量 $J_z = \mu r^2 \dot{\phi}$ が定数ということで解かれている。これと, (93) 第 1 式より $\mu \ddot{r} - \frac{J_z^2}{\mu r^3} + \frac{k}{r^2} = 0$ となるが, これに \dot{r} をかけて積分し, 積分定数を E とすると

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{J_z^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} = E \quad (94)$$

となる。運動の軌道を求めるには, t を消去するために $\dot{r} = \phi \frac{dr}{d\phi} = \frac{J_z}{\mu r^2} \frac{dr}{d\phi}$ を用い, さらに $u = 1/r$ とおいて変数変換をすると $\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + \left(u - \frac{\mu k}{J_z^2}\right)^2 = \left(\frac{\mu k}{J_z^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2E J_z^2}{\mu k^2}\right)$ となる。特に, この式から束縛運動が可能のために定数 E は $-\frac{\mu k^2}{2J_z^2} \leq E < 0$ を満たさねばならないことがわかる。 u の微分方程式は, 調和振動子のエネルギー積分の形と比較することで, ϕ_0 を積分定数として $u = \frac{\mu k}{J_z^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2E J_z^2}{\mu k^2}} \cos(\phi - \phi_0)\right)$ と解ける。 r に戻すと

$$r = \frac{\ell}{1 + e \cos(\phi - \phi_0)}, \quad \ell \equiv \frac{J_z^2}{\mu k}, \quad e \equiv \sqrt{1 + \frac{2E J_z^2}{\mu k^2}} \quad (95)$$

となる。このとき, E の範囲より, $0 \leq e < 1$ を満たす。ここで $X = r \cos(\phi - \phi_0)$, $Y = r \sin(\phi - \phi_0)$ のように xy 平面で原点周りに角度 ϕ_0 だけ回転した座標系 (X, Y) を考えて, (95) を書き換えると

$$\frac{(X + ea)^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1, \quad a \equiv \frac{\ell}{1 - e^2}, \quad b \equiv \frac{\ell}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (96)$$

となり, a を長軸半径, b を短軸半径とし, XY 平面上 $(-ea, 0)$ を中心とする楕円を表すことがわかる。 $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ となることから e はこの楕円の離心率を表している。ここで長軸半径 a は $a = -\frac{k}{2E}$ と表すこともできる。次に楕円軌道の時間変化を調べよう。(94) に (95), (96) の e, a, b を用いて書き直し, $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{k}{\mu ar^2}(a^2 e^2 - (r-a)^2)$ より $t = \pm \sqrt{\frac{\mu a}{k}} \int \frac{r dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2}}$ となる。これは変数変換: $r = a(1 - e \cos \Theta)$ を行うと積分を実行できて $t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}}(\Theta - e \sin \Theta) + t_0$ となる。 t_0 は積分定数である。また $t - t_0$ と Θ の符号が同じになるほうをとった。(95) より角度の関係として $\frac{1 - \cos \Theta}{1 + \cos \Theta} = \frac{1 - e}{1 + e} \cdot \frac{1 - \cos(\phi - \phi_0)}{1 + \cos(\phi - \phi_0)}$ が得られるが, 両辺の平方根をとり Θ と $\phi - \phi_0$ の符号を合わせると $\tan \frac{\phi - \phi_0}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\Theta}{2}$ つまり $\phi = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\Theta}{2} \right) + \phi_0$ が得られる。以上より, r, t, ϕ が全てパラメータ Θ を表現できていることに注意しよう。また, XY 座標は $X = a(\cos \Theta - e)$, $Y = a\sqrt{1-e^2} \sin \Theta$ となる。特に $\Theta = -\pi$ から $\Theta = \pi$ へ連続的に増えることにより, 楕円軌道を一周する。 $\frac{dt}{d\Theta}$ を積分することで, 周期 P は

$$P = \int_{-\pi}^{\pi} d\Theta \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}}(1 - e \cos \Theta) = 2\pi \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}} = \pi k \sqrt{\frac{\mu}{-2E^3}}. \quad (97)$$

この節の最初に, 異符号荷電粒子系の場合でクーロン力のみ考え万有引力を無視するとしたが, 粒子の電荷がゼロだった場合はクーロン力もゼロとなるので, 質量 m_1, m_2 による万有引力のほうが効くことになる。しかし, これらのポテンシャル U_C, U_G は同じ関数形, つまり $-k/r$ で, その正の係数 k が違うだけなので, 形式的に $k = |q_1 q_2|/(4\pi\epsilon_0) \rightarrow Gm_1 m_2$ の置き換えをすれば, 全く同様の結果が得られる。

Appendix B 重力波のエネルギー運動量擬テンソル

本稿では, 平坦時空 (ミンコフスキー時空) は $\eta_{\mu\nu} = \text{diag.}(-1, +1, +1, +1)$ の符号をとり, リーマン曲率テンソル $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$, リッチ曲率テンソル $R_{\mu\nu}$, スカラー曲率 R は, クリストッフエル記号 $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ を用いて, それぞれ $R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\rho\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} - \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\nu}$, $\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_\nu g_{\lambda\rho} + \partial_\rho g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\nu\rho})$, $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ で定義する。このときアインシュタイン方程式は $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}$ と表される。ここで $T_{\mu\nu}$ は (宇宙項を含めた) 物質のエネルギー運動量テンソルである。簡単のため, 光速と万有引力定数について $c = G = 1$ とする幾何学単位系をとっている。

■アインシュタイン方程式の摂動 一般相対論で基本となる 4 次元時空における線素 ds^2 は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ で与えられる。この計量を $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$) のように摂動展開しよう。(例えば [7] 参照。) $\gamma_{\mu\nu}$ はなめらかな背景時空を表し, $h_{\mu\nu}$ はそこからの微小なずれである。このとき, リッチ曲率テンソル $R_{\mu\nu}$ の $O(h)$ の項と $O(h^2)$ の項について,

$$R_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{2} (h_{\mu\alpha|\beta}{}^\mu + h_{\mu\beta|\alpha}{}^\mu - h_{|\alpha\beta} - h_{\alpha\beta|\mu}{}^\mu), \quad (98)$$

$$R_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{1}{4} h^{\mu\nu}{}_{|\beta} h_{\mu\nu|\alpha} + \frac{1}{2} h^{\mu\nu} (h_{\mu\nu|\alpha\beta} + h_{\alpha\beta|\mu\nu} - h_{\mu\alpha|\beta\nu} - h_{\mu\beta|\alpha\nu}) - \frac{1}{2} \left(h^{\mu\nu}{}_{|\nu} - \frac{1}{2} h^{|\mu} \right) (h_{\mu\alpha|\beta} + h_{\mu\beta|\alpha} - h_{\alpha\beta|\mu}) + \frac{1}{2} h_\beta{}^{\mu\nu} (h_{\alpha\mu|\nu} - h_{\nu\alpha|\mu}) \quad (99)$$

となる。ただし, $h^{\alpha\beta}$ は $\gamma_{\alpha\beta}$ の逆行列 $\gamma^{\alpha\beta}$ を用いて添え字を上げたものとして定義しており, $h \equiv h^\gamma{}_\gamma$ としている。 $|\alpha$ 等はなめらかな背景時空 $\gamma_{\alpha\beta}$ に関する共変微分を表す。背景計量 $\gamma_{\mu\nu}$ の典型的な曲率半径を $\mathcal{R} (\gg \text{重力波の波長 } \lambda)$ とすると $\gamma_{\mu\nu} = O(1)$, $\gamma_{\mu\nu,\alpha} = O(1/\mathcal{R})$, $\gamma_{\mu\nu,\alpha\beta} = O(1/\mathcal{R}^2)$, $h_{\mu\nu} = O(h)$, $h_{\mu\nu,\alpha} = O(h/\lambda)$, $h_{\mu\nu,\alpha\beta} = O(h/\lambda^2)$ が成り立つ。この場合に真空中のアインシュタイン方程式 $R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{(0)} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} + R_{\mu\nu}^{(3)} + \dots = 0$ を解くことを考える。ここで $R_{\alpha\beta}^{(0)}$ は $h_{\alpha\beta}$ の 0 次の摂動, $R_{\alpha\beta}^{(1)}$ は $h_{\alpha\beta}$ の 1 次の摂動, というように R の肩の数字で $h_{\alpha\beta}$ の次数を表す。まず (98) と (99) 式より $R_{\mu\nu}^{(0)} = O(1/\mathcal{R}^2)$, $R_{\mu\nu}^{(1)} = O(h/\lambda^2)$, $R_{\mu\nu}^{(2)} = O(h^2/\lambda^2)$ であることに注意して, 重力波の波長 λ よりも十分長く, $\text{かつ } \mathcal{R}$ より

は十分短いスケールで空間平均してみると

$$\langle R_{\mu\nu} \rangle = \langle R_{\mu\nu}^{(0)} \rangle + \langle R_{\mu\nu}^{(1)} \rangle + \langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle + \cdots = R_{\mu\nu}^{(0)} + \langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle + \cdots = 0 \quad (100)$$

のようになる。このことに注意して、波動成分： $R_{\mu\nu}^{(1)} = 0$ 、平均成分： $R_{\mu\nu}^{(0)} + \langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = 0$ 、高次のゆらぎ： $R_{\mu\nu}^{(2)} - \langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle + R_{\mu\nu}^{(3)} + \cdots = 0$ に分解して解く方針を考える。この場合、アインシュタイン方程式を

$$R_{\mu\nu}^{(0)} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}R^{(0)} = -\left(\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\langle R^{(2)} \rangle\right) \equiv 8\pi T_{\mu\nu}^{\text{GW}} \quad (101)$$

とおくことができる。すなわち

$$T_{\mu\nu}^{\text{GW}} = -\frac{1}{8\pi}\left(\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\langle R^{(2)} \rangle\right) \quad (102)$$

を重力波に対するエネルギー運動量擬テンソルとみなせる。(101) 式は、重力波の振幅の非線形の最低次である 2 次の項が実効的なエネルギー運動量テンソルとして、平坦計量 $\eta_{\mu\nu}$ に反作用を与えた結果、背景時空 $\gamma_{\mu\nu}$ となることを表している。さらに、

$$\bar{h}_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}h, \quad h \equiv \gamma^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} = h^\gamma{}_\gamma \quad (103)$$

において、このバーをつけたもので書き換える。 $\bar{h}^{\alpha\beta}$ も $\gamma^{\alpha\beta}$ で添え字を上げたものとして定義する。このとき $\bar{h} \equiv \bar{h}^\gamma{}_\gamma = -h$ 、 $h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\bar{h}$ が成り立つことに注意しよう。これらを使うと (98) より

$$R_{\alpha\beta}^{(1)} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\gamma^{\gamma\delta}R_{\gamma\delta}^{(1)} = \frac{1}{2}(\bar{h}_{\mu\alpha|\beta}{}^\mu + \bar{h}_{\mu\beta|\alpha}{}^\mu - \bar{h}_{\alpha\beta|\mu}{}^\mu - \gamma_{\alpha\beta}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{|\nu\mu}) \quad (104)$$

と表せる。したがって、計量 $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ に対する真空のアインシュタイン方程式で $O(h)$ の項から

$$\bar{h}_{\mu\alpha|\beta}{}^\mu + \bar{h}_{\mu\beta|\alpha}{}^\mu - \bar{h}_{\alpha\beta|\mu}{}^\mu - \gamma_{\alpha\beta}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{|\nu\mu} = 0 \quad (105)$$

となる。これが、背景時空 $\gamma_{\alpha\beta}$ 上の $\bar{h}_{\alpha\beta}$ に対する波動方程式である。また、このとき (105) から

$$\bar{h}_{\mu\nu}{}^{|\nu\mu} + \frac{1}{2}\bar{h}_{|\mu}{}^\mu = 0 \quad (106)$$

が導かれる。 $O(h^2)$ の項 (99) について、まず $\bar{h}^{\mu\nu}{}_{|\beta}\bar{h}_{\mu\nu|\alpha} = h^{\mu\nu}{}_{|\beta}h_{\mu\nu|\alpha}$ に注意して

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta}^{(2)} &= \frac{1}{4}\bar{h}^{\mu\nu}{}_{|\beta}\bar{h}_{\mu\nu|\alpha} + \frac{1}{2}h^{\mu\nu}(h_{\mu\nu|\alpha\beta} + h_{\alpha\beta|\mu\nu} - h_{\mu\alpha|\beta\nu} - h_{\mu\beta|\alpha\nu}) \\ &\quad - \frac{1}{2}\bar{h}^{\mu\nu}{}_{|\nu}(h_{\mu\alpha|\beta} + h_{\mu\beta|\alpha} - h_{\alpha\beta|\mu}) + \frac{1}{2}h_\beta{}^{\mu|\nu}(h_{\alpha\mu|\nu} - h_{\nu\alpha|\mu}) \end{aligned} \quad (107)$$

のように書き換えておく。この数波長にわたる平均 $\langle R_{\alpha\beta}^{(2)} \rangle$ を考えよう。この平均のもとでは、共変微分の順序を入れ替えてよく、共変微分に関して部分積分可能であること [7] を以下の計算で用いることにする。

まず (107) の右辺の 1 行目の 2 階微分を部分積分すると

$$\begin{aligned} \langle R_{\alpha\beta}^{(2)} \rangle &= \left\langle -\frac{1}{4}\bar{h}^{\mu\nu}{}_{|\beta}\bar{h}_{\mu\nu|\alpha} - \frac{1}{2}h^{\mu\nu}{}_{|\nu}h_{\alpha\beta|\mu} + \frac{1}{2}h^{\mu\nu}{}_{|\nu}h_{\mu\alpha|\beta} + \frac{1}{2}h^{\mu\nu}{}_{|\nu}h_{\mu\beta|\alpha} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}\bar{h}^{\mu\nu}{}_{|\nu}(h_{\mu\alpha|\beta} + h_{\mu\beta|\alpha} - h_{\alpha\beta|\mu}) + \frac{1}{2}h_\beta{}^{\mu|\nu}(h_{\alpha\mu|\nu} - h_{\nu\alpha|\mu}) \right\rangle \\ &= \left\langle -\frac{1}{4}\bar{h}^{\mu\nu}{}_{|\beta}\bar{h}_{\mu\nu|\alpha} + \frac{1}{4}h_{|\mu}{}^\mu(h_{\mu\alpha|\beta} + h_{\mu\beta|\alpha} - h_{\alpha\beta|\mu}) + \frac{1}{2}h_\beta{}^{\mu|\nu}(h_{\alpha\mu|\nu} - h_{\nu\alpha|\mu}) \right\rangle \end{aligned} \quad (108)$$

となる。さらにバーのついてないものをバーのついているものに直していくと、

$$\langle R_{\alpha\beta}^{(2)} \rangle = \left\langle -\frac{1}{4}\bar{h}^{\mu\nu}{}_{|\beta}\bar{h}_{\mu\nu|\alpha} + \frac{1}{8}\bar{h}_{|\beta}\bar{h}_{|\alpha} + \frac{1}{2}\bar{h}_\beta{}^{\mu|\nu}(\bar{h}_{\alpha\mu|\nu} - \bar{h}_{\nu\alpha|\mu}) - \frac{1}{4}\bar{h}_{\beta\alpha}{}^{|\nu}\bar{h}_{|\nu} \right\rangle \quad (109)$$

となる。ここで部分積分と (105), (106) を用いると $\langle \bar{h}_\beta{}^{\mu|\nu}(\bar{h}_{\alpha\mu|\nu} - \bar{h}_{\nu\alpha|\mu}) \rangle = \frac{1}{2}\langle \bar{h}_{\nu\mu}{}^{|\nu}(\bar{h}^\mu{}_{\beta|\alpha} + \bar{h}^\mu{}_{\alpha|\beta}) + \bar{h}_{\beta\alpha}{}^{|\nu}\bar{h}_{|\nu} \rangle$ が得られ、これを (109) に代入すると

$$\langle R_{\alpha\beta}^{(2)} \rangle = \left\langle -\frac{1}{4}\bar{h}^{\mu\nu}{}_{|\beta}\bar{h}_{\mu\nu|\alpha} + \frac{1}{4}\bar{h}_{\nu\mu}{}^{|\nu}(\bar{h}^\mu{}_{\beta|\alpha} + \bar{h}^\mu{}_{\alpha|\beta}) + \frac{1}{8}\bar{h}_{|\beta}\bar{h}_{|\alpha} \right\rangle \quad (110)$$

となる。さらにこれを $\gamma^{\alpha\beta}$ で縮約し、再び部分積分と (105), (106) を用いると

$$\begin{aligned} \langle R_{\alpha\beta}^{(2)} \gamma^{\alpha\beta} \rangle &= \left\langle -\frac{1}{4} \bar{h}^{\mu\nu\rho} \bar{h}_{\mu\nu|\rho} + \frac{1}{2} \bar{h}_{\nu\mu}{}^{|\nu} \bar{h}^{\mu\rho}{}_{|\rho} + \frac{1}{8} \bar{h}^{|\rho} \bar{h}_{|\rho} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{4} \bar{h}^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu|\rho}{}^{\rho} + \frac{1}{2} \bar{h}_{\nu\mu}{}^{|\nu} \bar{h}^{\mu\rho}{}_{|\rho} - \frac{1}{8} \bar{h} \bar{h}_{|\rho}{}^{\rho} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{4} \bar{h}^{\mu\nu} (\bar{h}_{\mu\rho|\nu}{}^{\rho} + \bar{h}_{\nu\rho|\mu}{}^{\rho} - \gamma_{\mu\nu} \bar{h}_{\rho\sigma}{}^{|\sigma\rho}) + \frac{1}{2} \bar{h}_{\nu\mu}{}^{|\nu} \bar{h}^{\mu\rho}{}_{|\rho} - \frac{1}{8} \bar{h} \bar{h}_{|\rho}{}^{\rho} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2} \bar{h}^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\rho|\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4} \bar{h} \bar{h}_{\rho\sigma}{}^{|\sigma\rho} + \frac{1}{2} \bar{h}_{\nu\mu}{}^{|\nu} \bar{h}^{\mu\rho}{}_{|\rho} - \frac{1}{8} \bar{h} \bar{h}_{|\rho}{}^{\rho} \right\rangle \\ &= \left\langle -\frac{1}{2} \bar{h}^{\mu\nu}{}_{|\nu} \bar{h}_{\mu\rho}{}^{|\rho} + \frac{1}{8} \bar{h} \bar{h}_{|\sigma}{}^{\sigma} + \frac{1}{2} \bar{h}_{\nu\mu}{}^{|\nu} \bar{h}^{\mu\rho}{}_{|\rho} - \frac{1}{8} \bar{h} \bar{h}_{|\rho}{}^{\rho} \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (111)$$

と計算される。よって、(102) は、(110), (111) を代入して、

$$T_{\alpha\beta}^{\text{GW}} = \frac{1}{32\pi} \left\langle \bar{h}^{\mu\nu}{}_{|\beta} \bar{h}_{\mu\nu|\alpha} - \bar{h}_{\nu\mu}{}^{|\nu} (\bar{h}^{\mu}{}_{\beta|\alpha} + \bar{h}^{\mu}{}_{\alpha|\beta}) - \frac{1}{2} \bar{h}_{|\beta} \bar{h}_{|\alpha} \right\rangle. \quad (112)$$

(112) のゲージ不変性を確かめよう。微小な一般座標変換 $x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}$ のもとで計量の変換は一般に $\gamma_{\alpha\beta}(x^{\gamma} + \xi^{\gamma}) + h'_{\alpha\beta}(x^{\gamma} + \xi^{\gamma}) = (\gamma_{\mu\nu}(x^{\gamma}) + h_{\mu\nu}(x^{\gamma})) \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}$ となるが、1次の微小量まで残すと、ゲージ変換は $\delta_{\xi} h_{\alpha\beta} = -\xi_{\alpha|\beta} - \xi_{\beta|\alpha}$ となる。したがって、(103) よりゲージ変換は

$$\delta_{\xi} \bar{h}_{\alpha\beta} = -\xi_{\alpha|\beta} - \xi_{\beta|\alpha} + \gamma_{\alpha\beta} \xi^{\gamma}{}_{|\gamma}, \quad (113)$$

となる。このゲージ変換を (112) に施すと

$$\begin{aligned} \delta_{\xi} T_{\alpha\beta}^{\text{GW}} &= \frac{1}{32\pi} \left\langle -2\bar{h}^{\mu\nu}{}_{|\beta} \xi_{\mu|\nu\alpha} + \bar{h}_{|\beta} \xi^{\gamma}{}_{|\gamma\alpha} + \bar{h}^{\nu\mu}{}_{|\nu} (\xi_{\mu|\alpha\beta} + \xi_{\alpha|\mu\beta}) - \bar{h}_{\alpha\nu}{}^{|\nu} \xi^{\gamma}{}_{|\gamma\beta} \right. \\ &\quad \left. + \bar{h}^{\mu}{}_{\alpha|\beta} (\xi_{\mu|\nu}{}^{\nu} + \xi_{\nu|\mu}{}^{\nu}) - \bar{h}_{\nu\alpha|\beta} \xi_{\gamma}{}^{|\nu\gamma} - \bar{h}_{|\beta} \xi^{\gamma}{}_{|\gamma\alpha} \right\rangle + (\alpha \leftrightarrow \beta) \end{aligned} \quad (114)$$

となる。部分積分し共変微分が交換可能としてよいことを使うと

$$\delta_{\xi} T_{\alpha\beta}^{\text{GW}} = \frac{1}{32\pi} \left\langle -2\bar{h}^{\mu\nu}{}_{|\beta\alpha\nu} \xi_{\mu} + \bar{h}^{\mu\nu}{}_{|\nu\beta\mu} \xi_{\alpha} + \bar{h}^{\mu\nu}{}_{|\nu\alpha\mu} \xi_{\beta} + \bar{h}_{\alpha\nu}{}^{|\nu} \xi^{\gamma}{}_{|\gamma} + \bar{h}_{\beta\nu}{}^{|\nu} \xi^{\gamma}{}_{|\gamma} + \bar{h}^{\mu}{}_{\alpha|\beta\nu}{}^{\nu} \xi_{\mu} + \bar{h}^{\mu}{}_{\beta|\alpha\nu}{}^{\nu} \xi_{\mu} \right\rangle \quad (115)$$

となる。ここでさらに波動方程式 (105) を用いると

$$\begin{aligned} \langle \bar{h}^{\mu}{}_{\alpha|\beta\nu}{}^{\nu} \xi_{\mu} \rangle &= \langle \bar{h}_{\mu\alpha|\nu}{}^{\nu} \xi^{\mu} \rangle \\ &= \langle (\bar{h}_{\nu\mu|\alpha\beta}{}^{\nu} + \bar{h}_{\nu\alpha|\mu\beta}{}^{\nu} - \gamma_{\mu\alpha} \bar{h}_{\rho\sigma|\beta}{}^{\rho\sigma}) \xi^{\mu} \rangle = \langle \bar{h}_{\nu\mu|\alpha\beta}{}^{\nu} \xi^{\mu} - \bar{h}_{\nu\alpha|\beta}{}^{\nu} \xi^{\mu}{}_{|\mu} - \bar{h}_{\rho\sigma|\beta}{}^{\rho\sigma} \xi_{\alpha} \rangle \end{aligned} \quad (116)$$

となる。この式と α, β を入れ替えた式を (115) に代入すると、結局 $\delta_{\xi} T_{\alpha\beta}^{\text{GW}} = 0$ となる。つまり (112) で与えられる重力波のエネルギー運動量擬テンソルの表式はゲージ変換 (113) のもとで不変である。

■ランダウ-リフシッツのエネルギー運動量擬テンソル ここではランダウ-リフシッツ [8] による擬テンソル $t_{\text{LL}}^{\mu\nu}$ の性質をまとめる。まず、 $H_{\text{LL}}^{\mu\alpha\nu\beta} \equiv (-g)(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta})$ とする。ここで g は $g_{\mu\nu}$ を行列とみなすときの行列式であり、 $H_{\text{LL}}^{\mu\alpha\nu\beta} = H_{\text{LL}}^{\nu\beta\mu\alpha} = -H_{\text{LL}}^{\mu\alpha\beta\nu} = -H_{\text{LL}}^{\alpha\mu\nu\beta}$, $H_{\text{LL}}^{\mu\alpha\nu\beta} + H_{\text{LL}}^{\mu\beta\alpha\nu} + H_{\text{LL}}^{\mu\nu\beta\alpha} = 0$ が成り立つ。リーマン曲率テンソル $R^{\mu\alpha\nu\beta}$ も同じ対称性を持つことに注意する。このとき、擬テンソル $t_{\text{LL}}^{\mu\nu}$ を

$$t_{\text{LL}}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{16\pi(-g)} H_{\text{LL},\alpha\beta}^{\mu\alpha\nu\beta} - \frac{1}{8\pi} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \quad (117)$$

で定義する。添え字の α は偏微分 ∂_{α} を表す。これは対称: $t_{\text{LL}}^{\mu\nu} = t_{\text{LL}}^{\nu\mu}$ である。アインシュタイン方程式を使うと $(-g)(T^{\mu\nu} + t_{\text{LL}}^{\mu\nu}) = \frac{1}{16\pi} H_{\text{LL},\alpha\beta}^{\mu\alpha\nu\beta}$ となる。対称性に注意すると $H_{\text{LL},\alpha\beta\mu}^{\mu\alpha\nu\beta} = 0$ なので、保存則

$$\partial_{\mu} ((-g)(T^{\mu\nu} + t_{\text{LL}}^{\mu\nu})) = 0 \quad (118)$$

が成り立つ。また、 $t_{\text{LL}}^{\mu\nu}$ の定義式 (117) の計量の偏微分をすべてクリストッフエル記号で書き直すと

$$\begin{aligned} t_{\text{LL}}^{\mu\nu} &= \frac{1}{16\pi} \left((g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}) (2\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \Gamma_{\delta\gamma}^{\delta} - \Gamma_{\alpha\delta}^{\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} - \Gamma_{\gamma\alpha}^{\delta} \Gamma_{\delta\beta}^{\gamma}) + g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} (\Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} \Gamma_{\beta\delta}^{\nu} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \Gamma_{\gamma\delta}^{\nu}) \right. \\ &\quad \left. + g^{\mu\alpha} g^{\beta\gamma} (\Gamma_{\alpha\delta}^{\nu} \Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\nu} \Gamma_{\delta\alpha}^{\delta} - \Gamma_{\gamma\delta}^{\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} \Gamma_{\delta\gamma}^{\delta}) + g^{\nu\alpha} g^{\beta\gamma} (\Gamma_{\alpha\delta}^{\mu} \Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\mu} \Gamma_{\delta\alpha}^{\delta} - \Gamma_{\gamma\delta}^{\mu} \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \Gamma_{\delta\gamma}^{\delta}) \right) \end{aligned} \quad (119)$$

となり, 計量に関して各項全部で 2 次の偏微分の形をしている。また, $\tilde{g}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g}g^{\mu\nu}$ とおくとき, $\tilde{g}^{\mu\nu}_{,\lambda} = \sqrt{-g}(-\Gamma_{\lambda\rho}^{\mu}g^{\rho\nu} - \Gamma_{\lambda\rho}^{\nu}g^{\mu\rho} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho}g^{\mu\nu})$ という関係に注意すると,

$$t_{\text{LL}}^{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi(-g)} \left(\tilde{g}^{\mu\nu}_{,\lambda}\tilde{g}^{\lambda\tau}_{,\tau} - \tilde{g}^{\mu\lambda}_{,\lambda}\tilde{g}^{\nu\tau}_{,\tau} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\lambda\sigma}\tilde{g}^{\lambda\tau}_{,\rho}\tilde{g}^{\rho\sigma}_{,\tau} - (g^{\mu\lambda}g_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\nu\beta}_{,\rho}\tilde{g}^{\alpha\rho}_{,\lambda} + g^{\nu\lambda}g_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\mu\beta}_{,\rho}\tilde{g}^{\alpha\rho}_{,\lambda}) \right. \\ \left. + g_{\lambda\alpha}g^{\beta\rho}\tilde{g}^{\mu\lambda}_{,\beta}\tilde{g}^{\nu\alpha}_{,\rho} + \frac{1}{8}(2g^{\mu\lambda}g^{\nu\alpha} - g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha})(2g_{\beta\rho}g_{\sigma\tau} - g_{\rho\sigma}g_{\beta\tau})\tilde{g}^{\beta\tau}_{,\lambda}\tilde{g}^{\rho\sigma}_{,\alpha} \right) \quad (120)$$

と表すこともできる。

特に, 背景時空が平坦, つまり $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ の場合, (44) から

$$t_{\text{LL}}^{\alpha\beta} = \frac{1}{16\pi} \left(\frac{1}{2}\tilde{h}^{\mu\nu,\alpha}\tilde{h}_{\mu\nu}{}^{\beta} - \frac{1}{2}\tilde{h}_{\mu\nu}{}^{\nu}(\tilde{h}^{\mu\beta,\alpha} + \tilde{h}^{\mu\alpha,\beta}) - \frac{1}{4}\tilde{h}^{\nu\alpha}\tilde{h}^{\nu\beta} \right. \\ \left. + \tilde{h}^{\alpha}_{\lambda}R^{\lambda\beta(1)} + \tilde{h}^{\beta}_{\lambda}R^{\lambda\alpha(1)} - \tilde{h}^{\alpha\beta}R^{(1)} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\tilde{h}_{\mu\nu}R^{\mu\nu(1)} + \Delta_{\text{LL}}^{\alpha\beta} \right) + O(h^3) \quad (121)$$

のように計算される。ここで, $R^{\alpha\beta(1)}, R^{(1)}$ はリッチテンソル, スカラー曲率の $O(h)$ の項で, $\Delta_{\text{LL}}^{\alpha\beta}$ は

$$\Delta_{\text{LL}}^{\alpha\beta} = (\tilde{h}^{\alpha\beta}\tilde{h}^{\lambda\tau}_{,\tau})_{,\lambda} - \frac{1}{2}(\tilde{h}^{\alpha\lambda}\tilde{h}^{\beta\tau}_{,\tau} + \tilde{h}^{\beta\lambda}\tilde{h}^{\alpha\tau}_{,\tau})_{,\lambda} + \frac{1}{2}((\tilde{h}^{\alpha\lambda}\tilde{h}_{\lambda\tau}{}^{\tau})^{\beta} + (\tilde{h}^{\beta\lambda}\tilde{h}_{\lambda\tau}{}^{\tau})^{\alpha}) - (\tilde{h}^{\alpha\lambda}\tilde{h}_{\lambda\tau}{}^{\beta})_{,\tau} \\ - (\tilde{h}^{\beta\lambda}\tilde{h}_{\lambda\tau}{}^{\alpha})_{,\tau} + \frac{1}{2}(\tilde{h}^{\alpha\lambda}\tilde{h}^{\beta}_{\lambda\tau} + \tilde{h}^{\beta\lambda}\tilde{h}^{\alpha}_{\lambda\tau})_{,\tau} + \eta^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2}(\tilde{h}_{\lambda\tau}\tilde{h}^{\rho\lambda,\tau})_{,\rho} - \frac{1}{4}(\tilde{h}_{\lambda\tau}\tilde{h}^{\lambda\tau,\rho})_{,\rho} + \frac{1}{8}(\tilde{h}\tilde{h}^{\lambda})_{,\lambda} \right) \quad (122)$$

のように全微分の項である。したがって, (121) は

$$t_{\text{LL}}^{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi} \left(\tilde{h}^{\mu\nu,\alpha}\tilde{h}_{\mu\nu}{}^{\beta} - \tilde{h}_{\mu\nu}{}^{\nu}(\tilde{h}^{\mu\beta,\alpha} + \tilde{h}^{\mu\alpha,\beta}) - \frac{1}{2}\tilde{h}^{\nu\alpha}\tilde{h}^{\nu\beta} \right) + O(hR^{\alpha\beta(1)}, h^3) + (\text{全微分項}) \quad (123)$$

の形をしており, $O(hR^{\alpha\beta(1)}, h^3) + (\text{全微分項})$ の違いを除いて, (112) の平均をとる前で共変微分を偏微分にしたものと同じ形である。数波長にわたって平均をとり, $O(h^3)$ と全微分項を無視し, 真空中の重力波の波動方程式 $R^{\alpha\beta(1)} = 0$ を使うと, $T^{\text{GW}\alpha\beta} = \langle t_{\text{LL}}^{\alpha\beta} \rangle$ のように表される。なお, (117) において, $H_{\text{LL}}^{\mu\nu\alpha\beta}$ の代わりに $H_{\text{MTW}}^{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \tilde{h}^{\mu\beta}\eta^{\alpha\nu} - \tilde{h}^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + \tilde{h}^{\alpha\nu}\eta^{\mu\beta} - \tilde{h}^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}$ を用いるのがミスナー-ゾーン-ホイラー [9] のエネルギー運動量擬テンソル $t_{\text{MTW}}^{\mu\nu}$ の定義であり, (118) の代わりに $\partial_{\mu}(T^{\mu\nu} + t_{\text{MTW}}^{\mu\nu}) = 0$ を満たす。このとき, $t_{\text{MTW}}^{\alpha\beta} - t_{\text{LL}}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{8\pi}\tilde{h} \left(R^{\alpha\beta(1)} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}R^{(1)} \right) + O(h^3) + (\text{全微分項})$ となっており, $\langle t_{\text{LL}}^{\alpha\beta} \rangle$ と同様な近似をすると $T^{\text{GW}\alpha\beta} = \langle t_{\text{MTW}}^{\alpha\beta} \rangle$ となる。

References

- [1] ジェームズ・B・ハートル (著), 牧野伸義 (訳), “重力: アインシュタインの一般相対性理論入門,” ピアソンエデュケーション (2008).
- [2] P. C. Peters and J. Mathews, “Gravitational radiation from point masses in a Keplerian orbit,” Phys. Rev. **131**, 435 (1963).
- [3] P. C. Peters, “Gravitational Radiation and the Motion of Two Point Masses,” Phys. Rev. **136**, B1224 (1964).
- [4] 中村卓史, 三尾典克, 大橋正健 (編著), “重力波をとらえる,” 京都大学学術出版会 (1998).
- [5] 遠藤霞, “一般相対論とその物理,” 新潟大学大学院教育学研究科修士論文 (2013)
- [6] B. DeWitt (edited by S. M. Christensen), “Bryce DeWitt’s Lectures on Gravitation,” Springer (2011).
- [7] 須藤靖, “もうひとつの一般相対論入門,” 日本評論社 (2010).
- [8] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ (著), 恒藤敏彦, 広重徹 (訳), “場の古典論 (原書第 6 版),” 東京図書 (1978).
- [9] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler (著), 若野省己 (訳), “重力理論,” 丸善出版 (2011).