

カー時空における光の軌道の 3 次元的な図示について

On the 3D plots of light-like orbits in the Kerr space-time

岸本 功¹, 小畑 仁², 近藤 悠太³

Isao Kishimoto, Hitoshi Obata, Yuta Kondo

¹ 新潟大学教育学部

² 東北大学大学院教育情報学教育部

³ 新潟市立木戸中学校

概要

真空のアインシュタイン方程式の解として、回転するブラックホールを表すカー時空が知られている。ここでは、このカー時空において、光の軌道を表すヌル測地線を具体的に調べ、図示する。赤道面内の軌道だけでなく、カーター定数が値をもち軌道が平面内におさまらないようなものについても計算し、3次元的なプロットを行う。特に、無限遠からやって来て再び無限遠に去っていくような、ホライズンの外側の光の軌道の湾曲の様子を調べる。

1 はじめに

アインシュタインによって一般相対論が提唱されて 100 年経過した現在、重力波の直接観測もなされ、その正しさがさらに確かなものとなってきている。したがって、自然界の様々な現象を理解するために、一般相対論を用いて記述される現象を、数学的観点からだけでなく、数値的にも詳しく具体的に調べておくことは有用である。ここでは、真空のアインシュタイン方程式の解で、我々の宇宙に多く存在すると考えられている、カーブラックホールに着目し、そのホライズンの外側での光の軌道（ヌル測地線）を調べた。特に、平面内の軌道だけでなく、3次元的な軌道をとるものについても、楕円積分等を用いた解析的な表式をあらわに書き下し、それに基づく数値的なプロットを行った。^{*1} 数式を用いて表すことだけでなく、これを用いて具体的に図示することは、直観的に物理現象を理解するのに役に立つと期待される。

以下の節では、まず、カー時空とその測地線方程式について簡単にまとめる。次に、ヌル測地線を積分して具体的に定めるために、場合分けをして、それぞれ調べ図示をする。特に、赤道面内 $\theta = \pi/2$ の軌道に限る場合は、やや詳しく述べる。 $\theta \neq \pi/2$ の場合については、簡単のため $l = 0$ の場合について記述する。

なお、本稿では、万有引力定数 G と真空中の光の速さ c をともに 1 とする幾何学単位系を用いる。

2 カー時空の計量

カー時空の計量^{*2} は、ポイヤール-リンクスト座標 (t, r, θ, ϕ) を用いて

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi dt + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 + a^2 - 2Mr \quad (2)$$

と表される。 (M, a) は、それぞれ質量、角運動量に対応する定数。これは次のように書き換えられる [5] :

$$ds^2 = - \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} ((r^2 + a^2) d\phi - a dt)^2. \quad (3)$$

^{*1} 本研究は 2015 年度に著者が行った卒業研究 [1] のゼミに基づくものであり、それ以前の卒業研究 [2], [3] の続きに相当する。

^{*2} カー時空の入門的な解説等は、例えば [4] 参照。

このことに注意して、 $\mathbf{w}^\alpha \sim dx^\alpha$ とみなす座標基底の「双対ベクトル基底」 $\{\mathbf{w}^\alpha\}$ [6] を用いて、(3) から読み取れる新たな基底 $\{\mathbf{w}^{\hat{\alpha}}\}$ を次のように定義する: $\mathbf{w}^{\hat{t}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\rho}(\mathbf{w}^t - a \sin^2 \theta \mathbf{w}^\phi)$, $\mathbf{w}^{\hat{r}} = \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}} \mathbf{w}^r$, $\mathbf{w}^{\hat{\theta}} = \rho \mathbf{w}^\theta$, $\mathbf{w}^{\hat{\phi}} = \frac{\sin \theta}{\rho}((r^2 + a^2)\mathbf{w}^\phi - a \mathbf{w}^t)$. ここで $\Delta > 0$ としており、これは、ホライズンの外側の無限遠方を含む領域である. 基底とその双対基底について、「内積」: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の関係は $\langle \mathbf{w}^\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle = \delta_\beta^\alpha$, $\langle \mathbf{w}^{\hat{\alpha}}, \mathbf{e}_\beta \rangle = \delta_\beta^{\hat{\alpha}}$ となることに注意して、座標基底 $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ から正規直交基底 $\{\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}\}$ を作ると $\mathbf{e}_{\hat{t}} = \frac{(r^2+a^2)\mathbf{e}_t+a\mathbf{e}_\phi}{\rho\sqrt{\Delta}}$, $\mathbf{e}_{\hat{r}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\rho}\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_{\hat{\phi}} = \frac{a \sin^2 \theta \mathbf{e}_t + \mathbf{e}_\phi}{\rho \sin \theta}$ が得られる. 実際、ベクトルの内積の関係: $\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = g_{\mu\nu}$ から、 $\mathbf{e}_{\hat{\mu}} \cdot \mathbf{e}_{\hat{\nu}} = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ となることが確かめられる.

一般に、リーマン曲率テンソルの座標基底成分 $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ は、計量テンソル $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ と、それから決まるクリストッフエル記号 $\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_\nu g_{\lambda\rho} + \partial_\rho g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\nu\rho})$ を用いて $R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma} + \partial_\mu \partial_\sigma g_{\nu\rho} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\rho} - \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma}) + g_{\tau\lambda} (\Gamma_{\mu\sigma}^\tau \Gamma_{\nu\rho}^\lambda - \Gamma_{\mu\rho}^\tau \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda)$ のように表されるものであり、 $R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho} = R_{\rho\sigma\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\rho\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\rho} = 0$ という対称性をもつ. カー時空 (1) の場合に、リーマン曲率テンソルを具体的に計算し、正規直交基底で表したもの: $R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} = (e_{\hat{\alpha}})^\alpha (e_{\hat{\beta}})^\beta (e_{\hat{\gamma}})^\gamma (e_{\hat{\delta}})^\delta R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ のうち、ゼロでない成分は (対称性による重複を除き) $R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}} = R_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}} = -R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} = -R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} = -\frac{1}{2} R_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}} = \frac{1}{2} R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}} = -\frac{M\tau}{\rho^2} (r^2 - 3a^2 \cos^2 \theta)$, $R_{\hat{t}\hat{r}\hat{\phi}\hat{\theta}} = 2R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{r}} = -2R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{r}} = -\frac{2Ma \cos \theta}{\rho^2} (3r^2 - a^2 \cos^2 \theta)$ となる.*³ これらの式から座標基底による $\Delta = 0$ (ホライズン) での見かけの発散は消えているが、 $\rho = 0$ となる場所 ($r = 0$ かつ $\theta = \pi/2$) では発散しており、これが時空の実特異点になっていることがわかる.

この式から、さらにリッチテンソル $R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \eta^{\hat{\gamma}\hat{\delta}} R_{\hat{\gamma}\hat{\alpha}\hat{\delta}\hat{\beta}}$ を求めると、全てゼロになる. これはカー計量 (1) が真空のアインシュタイン方程式: $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$ を満たすことを意味する. なお、上記において、途中で $\Delta > 0$ の場合の式を書き下したが、 $\Delta < 0$ の領域でも同様にして、(1) が真空のアインシュタイン方程式を満たすことを確かめられる.

3 カー計量における測地線方程式

カー計量 $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ から、ボイヤー-リンクスト座標 (t, r, θ, ϕ) で、測地線を手計算で書き下すのはラグランジアン $L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ (ここで $\dot{\cdot} \equiv \frac{d}{d\tau}$ とした) に対する変分原理: $0 = \delta \int d\tau L$ で求めるのが簡単である. 質量をもつ粒子の場合 τ は固有時を表し、質量ゼロの場合は τ の代わりにアフィンパラメータ λ を用いる. 測地線方程式は、作用の変分の $\delta t, \delta r, \delta \theta, \delta \phi$ の係数に対応する、4つの2階常微分方程式からなる.

一般に、 L の値自身が、測地線に沿って一定である. つまり、 $(g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)' = 0$. これより、測地線上 $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = q$ (q は定数) とかける. 質量をもつ粒子の場合は (固有時の定義から) $q = -1$, 質量ゼロの光子の場合は $q = 0$ である. カー時空の対称性から、2つのキリングベクトル $\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_\phi$ がある. これに対応して $e \equiv -g_{t\mu} \dot{x}^\mu, l \equiv g_{\phi\mu} \dot{x}^\mu$ が保存される. 実際、測地線方程式のうち2つを使うと、これらが保存量であることがわかる.*⁴ このことは逆に、 q, e, l が測地線方程式を解くときの積分定数であることを意味する. 赤道面: $\theta = \pi/2$ に限った運動を調べる場合は、シュワルツシルト時空の場合と同様に、これら3つの積分定数を用いれば、1次元非相対論的力学のポテンシャル問題に帰着する. 赤道面に限らない場合、もう一つ積分定数があると便利である. 実際、カー時空の場合、そのような定数 \mathcal{K} (あるいは \mathcal{Q}) が存在し、カーター定数と呼ばれる. 以下では、文献 [5] に沿ってこのことを説明し、§4 で具体的なヌル測地線の計算に応用する.

*³ これを全て手計算で行うのは大変であるため、数式処理ソフト Mathematica や Maxima を用いて確認した.

*⁴ キリングベクトル $\xi = \xi^\mu \mathbf{e}_\mu$ はキリング方程式 $(\partial_\gamma g_{\alpha\beta}) \xi^\gamma + g_{\alpha\gamma} \partial_\beta \xi^\gamma + g_{\beta\gamma} \partial_\alpha \xi^\gamma = 0$ の解である. このとき、測地線方程式 $\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0$ を使うと $(g_{\mu\nu} \xi^\mu \dot{x}^\nu)' = 0$ となり、 $g_{\mu\nu} \xi^\mu \dot{x}^\nu$ は測地線に沿って保存される.

3.1 準備

カー時空中では t, ϕ 方向の形が少し複雑であるので、見通しよく計算するため、カー計量 (1) の間の恒等式：

$$g_{\phi\phi} + aS^2 g_{t\phi} = (r^2 + a^2)S^2, \quad g_{t\phi} + aS^2 g_{tt} = -aS^2, \quad (4)$$

$$ag_{\phi\phi} + (r^2 + a^2)g_{t\phi} = \Delta aS^2, \quad ag_{t\phi} + (r^2 + a^2)g_{tt} = -\Delta \quad (5)$$

が成り立つことに注意する。ここで $S = \sin \theta$, $C = \cos \theta$ と表記しており、以下でもこの略号を使う。

キリングベクトルに対応する保存量 e, ℓ は $\begin{pmatrix} -e \\ \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{t\phi} \\ g_{t\phi} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$ と表されるが、行列式 $\det \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{t\phi} \\ g_{t\phi} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix} = -\Delta S^2$ に注意して、逆に解くと、

$$\begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta S^2} \begin{pmatrix} -g_{\phi\phi} & g_{t\phi} \\ g_{t\phi} & -g_{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e \\ \ell \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta S^2} \begin{pmatrix} g_{\phi\phi}e + g_{t\phi}\ell \\ -(g_{t\phi}e + g_{tt}\ell) \end{pmatrix} \quad (6)$$

となる。ここで、[5] に従って、

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P} \\ \mathbb{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 + a^2 & -a \\ -aS^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \ell \end{pmatrix} \quad (7)$$

により \mathbb{P}, \mathbb{D} を定義するとき、逆に

$$\begin{pmatrix} e \\ \ell \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & a \\ aS^2 & r^2 + a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P} \\ \mathbb{D} \end{pmatrix} \quad (8)$$

となる。これを用いると、(6) は

$$\dot{t} = \frac{1}{\rho^2} \left(a\mathbb{D} + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \mathbb{P} \right), \quad \dot{\phi} = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{a}{\Delta} \mathbb{P} + \frac{1}{S^2} \mathbb{D} \right) \quad (9)$$

と書き換えられる。次に、 $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \mathbf{q}$ は、今の場合 $\begin{pmatrix} \dot{t} & \dot{\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{t\phi} \\ g_{t\phi} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} + g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 = \mathbf{q}$ の形であるが、(6) から $\frac{1}{\Delta S^2} \begin{pmatrix} -e & \ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -g_{\phi\phi} & g_{t\phi} \\ g_{t\phi} & -g_{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e \\ \ell \end{pmatrix} + g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 = \mathbf{q}$ となり、これに (8) を代入し整理すると

$$\mathbf{q} = \frac{\rho^2}{\Delta} \dot{r}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(-\frac{\mathbb{P}^2}{\Delta} + \frac{\mathbb{D}^2}{S^2} \right). \quad (10)$$

3.2 積分定数としてのカーター一定数

作用 $S = \int d\tau \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ (光の場合は τ の代わりにアフィンパラメータ λ) に対する変分原理から、測地線方程式が 4 つ得られるが、そのうちの一つに着目する。つまり、 θ のみを変化させたときの変化分 $\delta_\theta S$ から (途中で部分積分を行い、表面での $\delta\theta$ をゼロとして) $\delta_\rho S = \int d\tau \left(-(\rho^2 \dot{\theta})' + \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{tt} \dot{t}^2 + \partial_\theta g_{rr} \dot{r}^2 + \partial_\theta g_{\theta\theta} \dot{\theta}^2 + \partial_\theta g_{\phi\phi} \dot{\phi}^2) + \partial_\theta g_{t\phi} \dot{t} \dot{\phi} \right) \delta\theta$ が得られる。したがって、変分原理から

$$(\rho^2 \dot{\theta})' = \text{I} + \text{II}, \quad \text{I} \equiv \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{rr} \dot{r}^2 + \partial_\theta g_{\theta\theta} \dot{\theta}^2), \quad \text{II} \equiv \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{tt} \dot{t}^2 + \partial_\theta g_{\phi\phi} \dot{\phi}^2) + \partial_\theta g_{t\phi} \dot{t} \dot{\phi} \quad (11)$$

が測地線方程式の一つとして出てくる。まず、I について、(10) を用いて整理すると

$$\text{I} = -a^2 S C \left(\frac{\dot{r}^2}{\Delta} + \dot{\theta}^2 \right) = -\rho^{-4} a^2 S C \left(\mathbf{q} \rho^2 + \frac{\mathbb{P}^2}{\Delta} - \frac{\mathbb{D}^2}{S^2} \right). \quad (12)$$

次に II についてであるが⁵, 計量の微分を整理するために, (5) を θ で偏微分して

$$\partial_{\theta} g_{\phi\phi} = 2\Delta SC - \frac{1}{a}(r^2 + a^2)\partial_{\theta} g_{t\phi}, \quad \partial_{\theta} g_{t\phi} = -\frac{1}{a}(r^2 + a^2)\partial_{\theta} g_{tt} \quad (13)$$

という関係式が得られ, これを使うと $\text{II} = \frac{1}{2}(\partial_{\theta} g_{tt}\dot{t} + \partial_{\theta} g_{t\phi}\dot{\phi})\dot{t} + \frac{1}{2}(\partial_{\theta} g_{t\phi}\dot{t} + \partial_{\theta} g_{\phi\phi}\dot{\phi})\dot{\phi} = \frac{1}{2a}\partial_{\theta} g_{tt}(a\dot{t} - (r^2 + a^2)\dot{\phi})\dot{t} + \frac{1}{2a}\partial_{\theta} g_{t\phi}(a\dot{t} - (r^2 + a^2)\dot{\phi})\dot{\phi} + \Delta SC\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2a}(\partial_{\theta} g_{tt}\dot{t} + \partial_{\theta} g_{t\phi}\dot{\phi})(a\dot{t} - (r^2 + a^2)\dot{\phi}) + \Delta SC\dot{\phi}^2$ となり, さらに (9) より得られる関係式 $a\dot{t} - (r^2 + a^2)\dot{\phi} = -\frac{\mathbb{D}}{S^2}$ を用いると

$$\text{II} = -\frac{\mathbb{D}}{2aS^2}(\partial_{\theta} g_{tt}\dot{t} + \partial_{\theta} g_{t\phi}\dot{\phi}) + \Delta SC\dot{\phi}^2. \quad (14)$$

ここで第1項について, (9) と (13) を使うと $\partial_{\theta} g_{tt}\dot{t} + \partial_{\theta} g_{t\phi}\dot{\phi} = \frac{\mathbb{D}}{\rho^2 S^2}(aS^2\partial_{\theta} g_{tt} + \partial_{\theta} g_{t\phi})$ となるが⁵, (4) の第2式を θ で偏微分して得られる関係式: $aS^2\partial_{\theta} g_{tt} + \partial_{\theta} g_{t\phi} = -\frac{4aSCMr}{\rho^2}$ を代入して $\partial_{\theta} g_{tt}\dot{t} + \partial_{\theta} g_{t\phi}\dot{\phi} = -\frac{4Mr aSC}{\rho^4 S^2}\mathbb{D}$ を得る. これと (9) を (14) に代入して整理すると $\text{II} = \frac{C}{\rho^4 S^3}(r^2 + a^2)\mathbb{D}^2 + \frac{2aC}{\rho^4 S}\mathbb{D}\mathbb{P} + \frac{SCa^2}{\Delta\rho^4}\mathbb{P}^2$. よって, (12) と合わせて, \mathbb{P}^2 の項はキャンセルし, さらに (8) から得られる $\mathbb{P} = \rho^2 e - a\mathbb{D}$ を使うと $\text{I} + \text{II} = -\frac{a^2 SC}{\rho^2}q + \frac{C}{\rho^2 S^3}\mathbb{D}(\mathbb{D} + 2aS^2e)$ となる. したがって, 測地線方程式の一つ (11) は $\rho^2(\rho^2\dot{\theta})' = -a^2 SCq + \frac{C}{S^3}\mathbb{D}(\mathbb{D} + 2aS^2e)$ と書き換えられる. \mathbb{D} の定義 (7) から, $\partial_{\theta}\mathbb{D} = -2aSCe$ であることに注意すると, この右辺は $\rho^2(\rho^2\dot{\theta})' = \partial_{\theta}(-\frac{1}{2}a^2 S^2 q - \frac{1}{2S^2}\mathbb{D}^2)$ のように全体の θ 微分に書き換えられ, 両辺に $2\dot{\theta}$ をかけると, τ (光の場合は λ) に関する全微分の形になる: $\frac{d}{d\tau}(\rho^4\dot{\theta}^2) = \frac{d}{d\tau}(-a^2 S^2 q - \frac{1}{S^2}\mathbb{D}^2)$. よって, 積分すると $\rho^4\dot{\theta}^2 = -(a^2 S^2 q + \frac{1}{S^2}\mathbb{D}^2) + \text{const.}$ となり, 右辺第1項の S^2 を $1 - C^2$ で置き換えて

$$\rho^4\dot{\theta}^2 = -\frac{\mathbb{D}^2}{S^2} + a^2 C^2 q + \mathcal{K} \quad (15)$$

(\mathcal{K} は定数) を得る. また, この式と (10) より $\dot{\theta}^2$ を消去すると

$$\rho^4\dot{r}^2 = \Delta(r^2 q - \mathcal{K}) + \mathbb{P}^2. \quad (16)$$

結局, 赤道面: $\theta = \pi/2$ に限らない場合, 4つの定数 q, e, ℓ, \mathcal{K} を決めた上で, 1階常微分方程式 (15), (16) を連立させて解くことになる. なお, 定数 \mathcal{K} のかわりに, $\mathcal{Q} = \mathcal{K} - (\ell - ae)^2$ で定義される \mathcal{Q} を用いることもあり, これもカーター一定数と呼ばれる. (15), (16) を書き直すと

$$\rho^4\dot{\theta}^2 = \mathcal{Q} + C^2\{a^2(e^2 + q) - \ell^2 S^{-2}\}, \quad (17)$$

$$\rho^4\dot{r}^2 = \Delta(r^2 q - \mathcal{Q}) - r^2\{\ell^2 - (r^2 + a^2)e^2\} + 2Mr(\ell - ae)^2. \quad (18)$$

4 ヌル測地線

前節までの解析をもとに, ここでは特に質量ゼロの光の場合を調べる [7]. ヌル測地線なので, (10) において $q = 0$ の場合であり $\dot{\cdot} = d/d\lambda$ (λ : アフィンパラメータ) の場合に相当する. 2階微分の連立方程式である測地線方程式を1階微分の連立方程式に帰着させた式 (9), (17), (18) において, $q = 0$ とし, 定数パラメータ ℓ, \mathcal{Q} の代わりに $\xi \equiv \ell/e, \eta \equiv \mathcal{Q}/e^2$ を用いると, 次のように書き換えられる:

$$\rho^2\dot{t}/e = a(-aS^2 + \xi) + \frac{r^2 + a^2}{\Delta}(r^2 + a^2 - a\xi), \quad (19)$$

$$\rho^2\dot{\phi}/e = \frac{a}{\Delta}(r^2 + a^2 - a\xi) + \frac{1}{S^2}(-aS^2 + \xi), \quad (20)$$

$$\rho^4\dot{\theta}^2/e^2 = \eta + a^2 C^2 - \xi^2 C^2 S^{-2} \equiv \hat{\theta}, \quad (21)$$

$$\rho^4\dot{r}^2/e^2 = r^4 + (a^2 - \xi^2 - \eta)r^2 + 2M\{\eta + (\xi - a)^2\}r - a^2\eta \equiv \hat{R}. \quad (22)$$

特に、最後の2式の比をとると、 $d\theta/dr = \pm\sqrt{\hat{\Theta}/\hat{R}}$ の形の微分方程式になり、変数分離法で積分できる:

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{\hat{\Theta}}} = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\hat{R}}}. \quad (23)$$

なお、(21)の左辺が非負なので $\hat{\Theta} = \eta + (a - \xi)^2 - (aS - \xi/S)^2 \geq 0$ という条件が必要であり、定数パラメータに次の制限がつくことに注意する:

$$\eta + (a - \xi)^2 \geq 0. \quad (24)$$

4.1 主要零的叢

(24)で等式が成り立つ特別な場合を調べよう。このとき(21)から、必然的に $\eta + (a - \xi)^2 = 0$ 、 $aS - \xi/S = 0$ 、 $\dot{\theta} = 0$ という条件が出てくる。特に、最後の式は θ が定数になることを意味する。この定数を θ_0 とすると $\xi = a \sin^2 \theta_0$ 、 $\eta = -a^2 \cos^4 \theta_0$ となり、(22)、(19)、(20)から $\dot{r} = \pm e$ 、 $\dot{t} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} e$ 、 $\dot{\phi} = \frac{a}{\Delta} e$ となる。これらの微分方程式を解くと、ホライズン $\Delta = 0$ を表す r の値： $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ を用いて、

$$\theta = \theta_0, \quad r = r_0 \pm e\lambda, \quad \phi = \phi_0 \pm \frac{a}{r_+ - r_-} \log \left| \frac{(r - r_+)(r_0 - r_-)}{(r - r_-)(r_0 - r_+)} \right|, \quad (25)$$

$$t = t_0 \pm \left(r - r_0 + M \log \left| \frac{r^2 + a^2 - 2Mr}{r_0^2 + a^2 - 2Mr_0} \right| + \frac{2M^2}{r_+ - r_-} \log \left| \frac{(r - r_+)(r_0 - r_-)}{(r - r_-)(r_0 - r_+)} \right| \right) \quad (26)$$

が得られる。ここで $\lambda = 0$ のとき $r = r_0$ 、 $\phi = \phi_0$ 、 $t = t_0$ となるように積分定数 r_0 、 ϕ_0 、 t_0 をとった。

4.2 赤道面 ($\theta = \pi/2$) 内の軌道

ここでは「赤道面」つまり $\theta = \pi/2$ で指定される面内に含まれるヌル測地線を調べる。これは、真空のアインシュタイン方程式の球対称解であるシュワルツシルド計量での測地線を調べる方法の拡張に相当する。 $\theta = \pi/2$ より、 $\dot{\theta} = 0$ 、 $C = \cos \theta = 0$ 、 $S = \sin \theta = 1$ に注意すると、まず(21)から $\eta = 0$ となり、カーター定数 \mathcal{Q} がゼロになる場合に含まれる。(20)と(22)の平方根の比から

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{1}{\Delta} \left\{ 1 - \frac{2M}{r} \left(1 - \sigma \frac{a}{b} \right) \right\} \left(\frac{1}{b^2} - W_{\text{eff}} \right)^{-1/2}, \quad (27)$$

$W_{\text{eff}} = \frac{1}{r^2} \left\{ 1 - \left(\frac{a}{b} \right)^2 - \frac{2M}{r} \left(1 - \sigma \frac{a}{b} \right)^2 \right\}$ 、 $b = |\ell/e|$ 、 $\sigma = (\ell/e)/b$ 、 $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr$ が得られる。 b は衝突パラメータに対応し[1]、 σ はカー時空の回転方向に対するヌル測地線の向きを表す符号であり、 W_{eff} は r を時間とみなした1次元の質点の運動のアナロジーにおける、有効ポテンシャルを表している[4]。この(27)を r で積分することで軌道を表す式が得られる。光が無限速から来て、再び無限速に去る状況： $a < b$ 、 $\frac{1}{b^2} < \max W_{\text{eff}}$ では、曲がる角度 $\Delta\phi$ は

$$\Delta\phi = 2 \int_{r_1}^{\infty} dr \frac{d\phi}{dr} = 2 \int_{r_1}^{\infty} dr \frac{1}{\Delta} \left\{ 1 - \frac{2M}{r} \left(1 - \sigma \frac{a}{b} \right) \right\} \left(\frac{1}{b^2} - W_{\text{eff}} \right)^{-1/2} \quad (28)$$

で与えられる。ここで、 r_1 は(27)の平方根の中がゼロとなる r のうち最大のものである。この積分を実行する準備として、まず平方根の中を因数分解すると $\frac{1}{b^2} - W_{\text{eff}} = \frac{1}{b^2 r^3} \{ r^3 - (b^2 - a^2)r + 2M(b - \sigma a)^2 \} = \frac{1}{b^2 r^3} (r - r_1)(r - r_2)(r - r_3)$ の形になるはずであり、有効ポテンシャルの形と解と係数の関係から $r_3 < 0 < r_2 < r_1$ 、 $r_1 + r_2 + r_3 = 0$ 、 $r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = -(b^2 - a^2)$ 、 $r_1 r_2 r_3 = -2M(b - \sigma a)^2$ となる。なお、[8]を参考に、3次方程式 $r^3 - (b^2 - a^2)r + 2M(b - \sigma a)^2 = 0$ を直接解くことで、 $r_1 = \sqrt{\frac{4}{3}(b^2 - a^2)} \sin(\pi/3 - \vartheta) = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{3}} (\sqrt{3} \cos \vartheta - \sin \vartheta)$ 、 $r_2 = \sqrt{\frac{4}{3}(b^2 - a^2)} \sin \vartheta$ 、

$r_3 = -\sqrt{\frac{4}{3}(b^2 - a^2)} \sin(\pi/3 + \vartheta) = -\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{3}} (\sqrt{3} \cos \vartheta + \sin \vartheta)$, $\vartheta = \frac{1}{3} \arcsin \sqrt{27M^2 \frac{b - \sigma a}{(b + \sigma a)^3}}$ を得る. ここで $0 < \sin 3\vartheta = \sqrt{27M^2 \frac{b - \sigma a}{(b + \sigma a)^3}} = \frac{1}{b\sqrt{\max W_{\text{eff}}}} < 1$ より, $0 < \vartheta < \pi/6$ となっている. 平方根をとったとき $\sqrt{b^2 - W_{\text{eff}}} = \frac{1}{br^2} \sqrt{r(r - r_1)(r - r_2)(r - r_3)}$ となることに注意して,

$$h(1) = r_1, \quad h(1/k) = r_2, \quad h(-1/k) = 0, \quad h(-1) = r_3, \quad 0 < k < 1 \quad (29)$$

を満たす一次分数変換 $r = h(u)$ により, 楕円積分の標準形に書き換える. 第3式から $h(u) = \frac{ku+1}{\alpha u + \beta}$, $k\beta - \alpha < 0$ の形のものを探せばよい. $r_3 = -r_1 - r_2$ に注意して (29) を α, β, k について解くと $k = \frac{1}{r_2(2r_1 + r_2)} \{2r_1^2 + 2r_1r_2 - r_2^2 - 2\sqrt{r_1(r_1 + 2r_2)(r_1 + r_2)(r_1 - r_2)}\}$, $\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{1+k}{r_1} - \frac{1-k}{r_3} \right) = \frac{1}{r_1(r_1 + r_2)(2r_1 + r_2)} \{3r_1(r_1 + r_2) - \sqrt{r_1(r_1 + 2r_2)(r_1 + r_2)(r_1 - r_2)}\}$, $\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{1+k}{r_1} + \frac{1-k}{r_3} \right) = \frac{1}{r_1r_2(r_1 + r_2)} \{r_1(r_1 + r_2) - \sqrt{r_1(r_1 + 2r_2)(r_1 + r_2)(r_1 - r_2)}\}$ が得られる. このとき, $0 < k < 1$ から $\alpha^2 - \beta^2 = \frac{1-k^2}{r_1r_3} > 0$, $\alpha + k\beta = \frac{(1+k)^2}{2r_1} + \frac{(1-k)^2}{-2r_3} = \frac{2k}{r_2} > 0$, $\alpha - k\beta = \frac{r_1 - r_3}{-2r_1r_3} (1 - k^2) > 0$ が成り立つことに注意しておく. さらに $dr = h'(u)du = \frac{-(\alpha - k\beta)}{(\alpha u + \beta)^2} du$, $h(u) - h(u_i) = \frac{-(\alpha - k\beta)(u - u_i)}{(\alpha u + \beta)(\alpha u_i + \beta)}$ より,

$$\frac{dr}{\sqrt{b^2 - W_{\text{eff}}}} = br^2 \sqrt{\frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha + k\beta)}{\alpha - k\beta}} \frac{-du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = br^2 \sqrt{\frac{4k}{r_2(2r_1 + r_2)}} \frac{-du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \quad (30)$$

となる. また, この最初の因子 br^2 と (28) の被積分関数の平方根以外の因子は $\frac{br^2}{\Delta} \left\{ 1 - \frac{2M}{r} (1 - \sigma \frac{a}{b}) \right\} = \frac{br^2 - 2M(b - \sigma a)r}{\Delta} = b + 2M\sigma a \frac{r - A}{(r - r_+)(r - r_-)}$ ($A = \frac{\sigma ab}{2M}$, $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$) の形をしている. この第1項は第1種楕円積分に帰着する. さらに $\frac{r - A}{(r - r_+)(r - r_-)} = \frac{1}{r_+ - r_-} \left(\frac{r - A}{r - r_+} - \frac{r - A}{r - r_-} \right)$, $\frac{1}{r - r_{\pm}} = \frac{\alpha}{k - r_{\pm}\alpha} - \frac{\alpha - k\beta}{(k - r_{\pm}\alpha)^2} \frac{1}{u - u_{\pm}}$, ($u_{\pm} = h^{-1}(r_{\pm}) = \frac{\beta r_{\pm} - 1}{-\alpha r_{\pm} + k}$) となり, $\frac{\alpha}{k - r_{\pm}\alpha}$ の部分からの寄与は第1種楕円積分に帰着するが⁵, (30) と合わせて, u 積分の形に着目して

$$\frac{1}{u - u_{\pm}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \frac{u}{u^2 - u_{\pm}^2} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} - \frac{1}{u_{\pm} (1 - u_{\pm}^2 u^2)} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \quad (31)$$

と式変形する. この第2項は第3種楕円積分に帰着するので, 残りの第1項について調べよう. まず, $t = u^2$, $t_{\pm} = u_{\pm}^2$ とおくと, 今考えている積分範囲では $1 - k^2t > 0$ であることに注意して, $\frac{u}{u^2 - u_{\pm}^2} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \frac{1}{2} \frac{dt}{(t - t_{\pm})\sqrt{(1-t)(1-k^2t)}} = \frac{1}{2} \frac{dt}{(t - t_{\pm})(1 - k^2t)} \sqrt{\frac{1 - k^2t}{1 - t}}$ となり, さらに $s = \sqrt{\frac{1 - k^2t}{1 - t}}$, $t = \frac{s^2 - 1}{s^2 - k^2}$, $dt = \frac{2(1 - k^2)}{(s^2 - k^2)^2} s ds$ という変数変換をすると $\frac{1}{2} \frac{dt}{(t - t_{\pm})(1 - k^2t)} \sqrt{\frac{1 - k^2t}{1 - t}} = \frac{1}{1 - t_{\pm}} \frac{ds}{s^2 - s_{\pm}^2} = -\frac{1}{2\sqrt{(1 - t_{\pm})(1 - k^2t_{\pm})}} \left(\frac{1}{s - s_{\pm}} - \frac{1}{s + s_{\pm}} \right) ds$ ($s_{\pm} = \sqrt{\frac{1 - k^2t_{\pm}}{1 - t_{\pm}}}$ とし, $1 - t_{\pm} < 0$, $1 - k^2t_{\pm} < 0$ と仮定した⁵) となり, 積分すると \log で表される項になることがわかる.⁶

以上で得られた結果をまとめると, 無限遠方から来て無限遠方へ去っていくときの角度は

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{1}{\Delta} \left\{ 1 - \frac{2M}{r} \left(1 - \sigma \frac{a}{b} \right) \right\} \frac{dr}{\sqrt{b^2 - W_{\text{eff}}}} \\ &= 4 \sqrt{\frac{k}{r_2(2r_1 + r_2)}} \left[\left\{ b + \frac{2M\sigma a \alpha (k - \alpha A)}{(k - r_+ \alpha)(k - r_- \alpha)} \right\} (K(k) - F(-\beta/\alpha, k)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2M\sigma a (\alpha - k\beta)}{r_+ - r_-} \left\{ \frac{r_+ - A}{(k - r_+ \alpha)^2} \left(\frac{\Pi(-u_+^{-2}, k) - \Pi(-\beta/\alpha, -u_+^{-2}, k)}{u_+} - \frac{1}{2\sqrt{(1 - u_+^2)(1 - k^2u_+^2)}} \log \left| \frac{s_{\infty} - s_+}{s_{\infty} + s_+} \right| \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{r_- - A}{(k - r_- \alpha)^2} \left(\frac{\Pi(-u_-^{-2}, k) - \Pi(-\beta/\alpha, -u_-^{-2}, k)}{u_-} - \frac{1}{2\sqrt{(1 - u_-^2)(1 - k^2u_-^2)}} \log \left| \frac{s_{\infty} - s_-}{s_{\infty} + s_-} \right| \right) \right\} \right] \quad (32) \end{aligned}$$

⁵ この仮定は平方根を扱う上で必要である. パラメータの値により, この不等号が満たされない場合は, 少し異なる扱いが必要.

⁶ ここでの楕円積分の標準形への式変形は [9] などを参考にした.

で与えられ、無限遠から $r = r_1$ に近づいてくるときの $\phi = \phi_{\text{in}}(r)$ は

$$\begin{aligned}
 \phi_{\text{in}}(r) &= \int_r^\infty \frac{1}{\Delta} \left\{ 1 - \frac{2M}{r} \left(1 - \sigma \frac{a}{b} \right) \right\} \frac{dr}{\sqrt{b^{-2} - W_{\text{eff}}}} \\
 &= \sqrt{\frac{4k}{r_2(2r_1 + r_2)}} \left[\left\{ b + \frac{2M\sigma a \alpha(k - \alpha A)}{(k - r_+ \alpha)(k - r_- \alpha)} \right\} (F(h^{-1}(r), k) - F(-\beta/\alpha, k)) \right. \\
 &\quad + \frac{2M\sigma a(\alpha - k\beta)}{r_+ - r_-} \left\{ \frac{r_+ - A}{(k - r_+ \alpha)^2} \left(\frac{\Pi(h^{-1}(r), -u_+^{-2}, k) - \Pi(-\beta/\alpha, -u_+^{-2}, k)}{u_+} \right. \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. - \frac{1}{2\sqrt{(1 - u_+^2)(1 - k^2 u_+^2)}} \log \left| \frac{(s(r) + s_+)(s_\infty - s_+)}{(s(r) - s_+)(s_\infty + s_+)} \right| \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{r_- - A}{(k - r_- \alpha)^2} \left(\frac{\Pi(h^{-1}(r), -u_-^{-2}, k) - \Pi(-\beta/\alpha, -u_-^{-2}, k)}{u_-} \right. \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. - \frac{1}{2\sqrt{(1 - u_-^2)(1 - k^2 u_-^2)}} \log \left| \frac{(s(r) + s_-)(s_\infty - s_-)}{(s(r) - s_-)(s_\infty + s_-)} \right| \right) \right\}, \quad (33)
 \end{aligned}$$

となり、 $r = r_1$ から無限遠に去るときの $\phi = \phi_{\text{out}}(r)$ は $\phi_{\text{out}}(r) = \int_{r_1}^\infty \frac{1}{\Delta} \left\{ 1 - \frac{2M}{r} \left(1 - \sigma \frac{a}{b} \right) \right\} \frac{dr}{\sqrt{b^{-2} - W_{\text{eff}}}} + \int_{r_1}^r \frac{1}{\Delta} \left\{ 1 - \frac{2M}{r} \left(1 - \sigma \frac{a}{b} \right) \right\} \frac{dr}{\sqrt{b^{-2} - W_{\text{eff}}}} = \Delta\phi - \phi_{\text{in}}(r)$ となる。ここで $s(r) = \sqrt{\frac{1 - k^2(h^{-1}(r))^2}{1 - (h^{-1}(r))^2}}$, $s_\pm = s(r_\pm)$, $s_\infty = s(\infty) = \sqrt{\frac{k(2r_1 + r_2)}{r_2}}$ としており、第1種/第3種楕円積分、第1種/第3種完全楕円積分は、それぞれ $F(x, k) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}}$, $\Pi(x, n, k) = \int_0^x \frac{d\xi}{(1 + n\xi^2)\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}}$, $K(k) = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}}$, $\Pi(n, k) = \int_0^1 \frac{d\xi}{(1 + n\xi^2)\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}}$ のように定義している。

4.3 θ の積分

(23) の左辺の θ 積分について考えよう。まず、 $\mu = \cos \theta$ において変数変換すると、

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}} = \pm \frac{d\mu}{\sqrt{\Theta_\mu}}, \quad (34)$$

$$\Theta_\mu = \eta - (\xi^2 + \eta - a^2)\mu^2 - a^2\mu^4 = a^2 \left[\frac{\eta}{a^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\xi^2 + \eta}{a^2} - 1 \right)^2 - \left\{ \mu^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\xi^2 + \eta}{a^2} - 1 \right) \right\}^2 \right] \quad (35)$$

となる。[7] に従って、カーター定数に関連する $\eta = Q/e^2$ の値の大小により場合分けして調べていく。

定数パラメータについて (24) に対応して

$$\eta + (a - \xi)^2 > 0 \quad (36)$$

の制限がつくことに注意する。(等式が成り立つ場合は §4.1 で調べた通りである。)

4.3.1 $\eta > 0$ のとき

$\Theta_\mu(35)$ の形に着目して

$$\Theta_\mu = a^2(\mu_-^2 + \mu^2)(\mu_+^2 - \mu^2), \quad \mu_\pm^2 = \mp \frac{1}{2} \left(\frac{\xi^2 + \eta}{a^2} - 1 \right) + \sqrt{\frac{\eta}{a^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\xi^2 + \eta}{a^2} - 1 \right)^2} \quad (37)$$

($\mu_{\pm} > 0$ とする) とおける. Θ_{μ} は非負なので, $-\mu_{+} \leq \mu = \cos \theta \leq \mu_{+}$ の範囲をとりうる. さらに $\mu = \mu_{+} \cos \psi$ のように変数変換すると (34) の積分は第1種楕円積分の形に帰着する:

$$\int_{\cos \theta}^{\mu_{+}} \frac{d\mu}{\sqrt{\Theta_{\mu}}} = \frac{1}{a\sqrt{\mu_{+}^2 + \mu_{-}^2}} \int_0^{\arccos \frac{\cos \theta}{\mu_{+}}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{1}{a\sqrt{\mu_{+}^2 + \mu_{-}^2}} F(\sin(\arccos \frac{\cos \theta}{\mu_{+}}), k), \quad (38)$$

$$k^2 = \frac{\mu_{+}^2}{\mu_{+}^2 + \mu_{-}^2}. \quad (39)$$

4.3.2 $\eta = 0$ のとき

Θ_{μ} (35) の形に着目して $\Theta_{\mu} = a^2 \mu^2 (\mu_{\max}^2 - \mu^2)$, $\mu_{\max}^2 = 1 - \frac{\xi^2}{a^2}$ ($\mu_{\max} > 0$ とする) とおける. Θ_{μ} は非負なので, $-\mu_{\max} \leq \mu = \cos \theta \leq \mu_{\max}$, の範囲をとりうる. このとき, パラメータに関して

$$-a < \xi < a \quad (40)$$

の制限がつく. さらに $\mu = \frac{\mu_{\max}}{\cosh \psi} = \mu_{\max} \operatorname{sech} \psi$ のように変数変換すると (34) の積分は実行できる:

$$\int_{\cos \theta}^{\mu_{\max}} \frac{d\mu}{\sqrt{\Theta_{\mu}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \operatorname{sech}^{-1} \frac{\cos \theta}{\mu_{\max}}. \quad (41)$$

4.3.3 $\eta < 0$ のとき

Θ_{μ} (35) の形に着目して $\Theta_{\mu} = a^2 (\mu^2 - \mu_{-}^2) (\mu_{+}^2 - \mu^2)$, $\mu_{\pm}^2 = \frac{1}{2} (1 + \frac{|\eta| - \xi^2}{a^2}) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (1 + \frac{|\eta| - \xi^2}{a^2})^2 - \frac{|\eta|}{a^2}}$ ($\mu_{\pm} > 0$ とする) とおける. Θ_{μ} は非負なので, $\mu_{-} \leq \mu = \cos \theta \leq \mu_{+}$, $-\mu_{+} \leq \mu = \cos \theta \leq -\mu_{-}$ の範囲をとりうる. このときパラメータに関して (36) も考慮すると $-a + \sqrt{|\eta|} \leq \xi < a - \sqrt{|\eta|}$, $a > \sqrt{|\eta|}$ の制限がつく. さらに $\sin \psi = \left[\frac{\mu_{+}^2 (\mu^2 - \mu_{-}^2)}{\mu_{+}^2 (\mu_{+}^2 - \mu^2)} \right]^{1/2}$ のように変数変換すると (34) の積分は第1種楕円積分の形に帰着する:

$$\int_{|\mu_{-}|}^{|\cos \theta|} \frac{d\mu}{\sqrt{\Theta_{\mu}}} = \frac{1}{a\mu_{+}} \int_0^{\psi(\theta)} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{1}{a\mu_{+}} F(\sin \psi(\theta), k), \quad (42)$$

$$k^2 = \frac{\mu_{+}^2 - \mu_{-}^2}{\mu_{+}^2}, \quad \psi(\theta) = \arcsin \left[\frac{\mu_{+}^2 (\cos^2 \theta - \mu_{-}^2)}{\cos^2 \theta (\mu_{+}^2 - \mu_{-}^2)} \right]^{1/2}. \quad (43)$$

4.4 r の積分

(23) のうち今度は右辺の r の関数に着目する. これは, その形から楕円積分を用いて表現できることがわかるが, 具体的に標準形に式変形する必要がある.

4.4.1 $\eta = 0$ の場合

赤道面: $\theta = \pi/2$ の運動に限った場合は, (21) より $\hat{\Theta} = \eta = 0$ が要請される. つまり, カーター一定数 Q がゼロの場合に対応する. ここでは, $\eta = 0$ の場合の, $\theta = \pi/2$ には限らない運動に着目する. (パラメータに (40) の制限がついていることに注意する.) このとき, (22) は

$$\hat{R} = r(r^3 + (a^2 - \xi^2)r + 2M(a - \xi)^2) \quad (44)$$

であるが, 3次方程式の解の公式 (たとえば [8] など参照) を使うと $r^3 + (a^2 - \xi^2)r + 2M(a - \xi)^2 = (r - r_1)(r - \beta)(r - \bar{\beta})$, $r_1 = -\sqrt{\frac{4}{3}(a^2 - \xi^2)} \sinh \vartheta$, $\beta = \sqrt{\frac{1}{3}(a^2 - \xi^2)} (\sinh \vartheta + i\sqrt{3} \cosh \vartheta)$, $\bar{\beta} = \sqrt{\frac{1}{3}(a^2 - \xi^2)} (\sinh \vartheta - i\sqrt{3} \cosh \vartheta)$, $\vartheta = \frac{1}{3} \sinh^{-1} \sqrt{27M^2 \frac{a - \xi}{(a + \xi)^3}}$ のように因数分解できることがわかる. 実際, これらの $r_1, \beta, \bar{\beta}$ は解と係数の関係 $r_1 + \beta + \bar{\beta} = 0$, $r_1\beta + \beta\bar{\beta} + \bar{\beta}r_1 = a^2 - \xi^2$, $r_1\beta\bar{\beta} =$

$-2M(a - \xi)^2$ を満たしている. r_1 は負の実数, $\beta, \bar{\beta}$ は互いに共役な複素数であることに注意し, (44) を $\hat{R} = r(r - r_1)(r^2 + r_1r + A^2)$, $A^2 = \beta\bar{\beta} = r_1^2 + a^2 - \xi^2$ と書き換えておく. そして一次分数変換で $\int \frac{dr}{\sqrt{\hat{R}}}$ を第1種楕円積分の形にすることを考えよう. $r = 0 \mapsto 1$, $r = r_1 \mapsto -1$ とするような変換として, $v = g(r) = \frac{(A-B)r - r_1A}{(A+B)r - r_1A}$ (B は定数) の形を仮定する. 逆変換は $r = g^{-1}(v) = \frac{r_1A(v-1)}{(A+B)v - A+B}$ であるが, これを用いて $r^2 + r_1r + A^2$ を計算し, (楕円積分の標準形になるように) 通分したとき分子の v について1次の項が消えることを要請すると, $B^2 = 2r_1^2 + A^2 = 3r_1^2 + a^2 - \xi^2$ となり, このとき $r^2 + r_1r + A^2 = \left(\frac{2AB}{(A+B)v - A+B}\right)^2(1 - k^2 + k^2v^2)$, $k^2 = \frac{(A+B)^2 - r_1^2}{4AB}$ の形になる. 以上より $\frac{dr}{\sqrt{\hat{R}}} = -\frac{1}{\sqrt{AB}} \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2+k^2v^2)}}$ となり, さらに, $\cos \psi = v$ という変数変換をすると $\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{\hat{R}}} = \frac{1}{\sqrt{AB}} \int_0^{\psi(r)} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{1}{\sqrt{AB}} F(\sin \psi(r), k)$, $\psi(r) = \arccos g(r) = \arccos\left(\frac{(A-B)r - r_1A}{(A+B)r - r_1A}\right)$ となる. このことと θ の積分の結果を合わせると (23) より $\frac{1}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \operatorname{sech}^{-1} \frac{\cos \theta}{\mu_{\max}} = \pm \frac{1}{\sqrt{AB}} F(\sin \psi(r), k)$ により, この場合のヌル測地線の (r, θ) 平面への射影の軌道の式が決まる. ここで, $r = 0$ で $\theta = \arccos \mu_{\max} = \arccos \sqrt{1 - \xi^2/a^2}$ となるように積分定数を選んだ. これは $r = 0$ に到達できる軌道になっているので, $\theta = \pi/2$ の場合のポテンシャルの山を越える場合に相当すると考えられる.

4.4.2 $\hat{R}(r) = 0$ が4つの異なる実数解をもつ場合 ($\eta \neq 0$)

ここでは一般に $\eta \neq 0$ の場合を考え, $\hat{R}(r)$ (22) が,

$$\hat{R}(r) = r^4 + (a^2 - \xi^2 - \eta)r^2 + 2M\{\eta + (\xi - a)^2\}r - a^2\eta = (r - r_1)(r - r_2)(r - r_3)(r - r_4), \quad (45)$$

$$r_4 < r_3 < r_2 < r_1 \quad (46)$$

のように実数の範囲で因数分解できる場合を考えよう. そして, 無限遠から $r = r_1$ まで来た後, $r = r_1$ から無限遠に去る状況を考えよう. つまり, (23) の右辺の積分範囲が $r \geq r_1$ の場合を想定する. このとき, 解と係数の関係から $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$, $r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = a^2 - \xi^2 - \eta$, $r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = -2M\{\eta + (\xi - a)^2\}$, $r_1r_2r_3r_4 = -a^2\eta$ が成り立つ. (23) の右辺を第1種楕円積分の形に式変形するために,

$$r = h(u) = \frac{a'u + b'}{u - c'}, \quad u = h^{-1}(r) = \frac{c'r + b'}{r - a'}, \quad (47)$$

$$r_1 = h(1), \quad r_2 = h(1/k), \quad r_3 = h(-1/k), \quad r_4 = h(-1), \quad 0 < k < 1 \quad (48)$$

という形の1次分数変換を考える. これらの条件を解くと

$$k = \frac{(r_1 - r_2)(r_3 - r_4) + (r_1 - r_3)(r_2 - r_4) - 2\sqrt{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)(r_3 - r_4)}}{(r_1 - r_4)(r_2 - r_3)}, \quad (49)$$

$$a' = \frac{r_1r_4 - r_2r_3 + \sqrt{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)(r_3 - r_4)}}{r_1 - r_2 - r_3 + r_4}, \quad (50)$$

$$b' = \frac{2r_1r_4(r_2 + r_3) + (r_1 + r_4)\{\sqrt{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)(r_3 - r_4)} - r_1r_4 - r_2r_3\}}{(r_1 - r_4)(r_1 - r_2 - r_3 + r_4)}, \quad (51)$$

$$c' = \frac{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3) + (r_2 - r_4)(r_3 - r_4) - 2\sqrt{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)(r_3 - r_4)}}{(r_1 - r_4)(r_1 - r_2 - r_3 + r_4)} \quad (52)$$

となる. このとき,

$$a'c' + b' = \frac{2(r_1 - r_4)\sqrt{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)(r_3 - r_4)}}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3) + (r_2 - r_4)(r_3 - r_4) + 2\sqrt{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)(r_3 - r_4)}} > 0, \quad (53)$$

$$1 - c'^2 = \frac{4}{\left(1 + \sqrt{\frac{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)}{(r_2 - r_4)(r_3 - r_4)}}\right) \left(1 + \sqrt{\frac{(r_2 - r_4)(r_3 - r_4)}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)}}\right)} > 0, \quad 1 - k^2c'^2 > 0 \quad (54)$$

に注意する. これらの k, a', b', c' を用いて定義される 1 次分数変換 (47) を用いると, (23) の右辺は

$$\begin{aligned} \int_r^\infty \frac{dr}{\sqrt{\tilde{R}}} &= \frac{\sqrt{(1-c'^2)(1-k^2c'^2)}}{a'c'+b'} \int_{c'}^{h^{-1}(r)} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \\ &= \frac{\sqrt{(1-c'^2)(1-k^2c'^2)}}{a'c'+b'} (F(h^{-1}(r), k) - F(c', k)) \equiv \mathcal{R}(r) \end{aligned} \quad (55)$$

のように第 1 種楕円積分を用いて表される.

特に $\eta > 0$ の場合, (38), (23) より

$$\frac{1}{a\sqrt{\mu_+^2 + \mu_-^2}} F(\sin(\arccos \frac{\cos \theta}{\mu_+}), k_\mu) = \mathcal{R}(r), \quad k_\mu \equiv \frac{\mu_+}{\sqrt{\mu_+^2 + \mu_-^2}} \quad (56)$$

となる. (ただし $r = \infty$ で $\cos \theta = \mu_+$ であるとした.) 第 1 種楕円積分の, 母数を固定したときの逆関数として定義される sn 関数, つまり,

$$y = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = F(x, k) \quad \longleftrightarrow \quad x = \operatorname{sn}(y, k) \quad (57)$$

を用いると

$$\sin(\arccos \frac{\cos \theta}{\mu_+}) = \operatorname{sn} \left(a\sqrt{\mu_+^2 + \mu_-^2} \mathcal{R}(r), k_\mu \right) \quad (58)$$

となる. さらに, $\operatorname{sn}(y, k) = \sin(\operatorname{am}(y, k))$ を満たす振幅関数 $\operatorname{am}(y, k)$ を用いると,*7 (58) は

$$\theta = \arccos \left(\mu_+ \cos \left(\operatorname{am} \left(a\sqrt{\mu_+^2 + \mu_-^2} \mathcal{R}(r), k_\mu \right) \right) \right) = \arccos \left(\mu_+ \operatorname{cn} \left(a\sqrt{\mu_+^2 + \mu_-^2} \mathcal{R}(r), k_\mu \right) \right) \quad (60)$$

となる. 最後の式では $\operatorname{cn}(y, k) = \cos(\operatorname{am}(y, k))$ で定義される cn 関数を用いて簡単化した.

ただし, この式 (60) を用いて軌道をプロットする場合, \arccos が, 主値 ($0 \leq \arccos x \leq \pi$) で定義されているので注意が必要である. (60) で r を連続的に変化させた際, θ が主値の端まできたときも滑らかにつながるように, 適切に調整しなければならない. $\eta > 0$ の場合で, 特に $\xi = 0$ (つまり $\ell = 0$) の場合, (37) より $\mu_+ = 1$ となり, (60) は

$$\theta = \operatorname{am} \left(a\sqrt{\mu_+^2 + \mu_-^2} \mathcal{R}(r), k_\mu \right) \quad (61)$$

のように簡単化される. このように振幅関数 am を用いた式では, r の関数として滑らかにつながったものになっている. このとき, 無限遠方から $r = r_1$ まで近づいて ($\theta = \theta_{\text{in}}(r)$), 再び無限遠に飛び去る ($\theta = \theta_{\text{out}}(r)$) 軌道をプロットする際には,

$$\theta_{\text{in}}(r) = \operatorname{am}(a\sqrt{\mu_+^2 + \mu_-^2} \mathcal{R}(r), k_\mu), \quad \Delta\theta = 2\operatorname{am}(a\sqrt{\mu_+^2 + \mu_-^2} \mathcal{R}(r_1), k_\mu), \quad \theta_{\text{out}}(r) = \Delta\theta - \theta_{\text{in}}(r) \quad (62)$$

を用いればよい.

なお, プロットの際, am 関数が使えない場合は, $\operatorname{am}(x + 2K(k), k) = \operatorname{am}(x, k) + \pi$, $\operatorname{cn}(x - 2K(k), k) = -\operatorname{cn}(x, k)$ に注意して, floor 関数 (床関数; $\operatorname{floor}(x)$ は x 以下の最大の整数) を用いて,

$$F_l(r) = \operatorname{floor} \left(\frac{a\sqrt{\mu_+^2 + \mu_-^2} \mathcal{R}(r)}{2K(k_\mu)} \right), \quad (63)$$

$$\theta_{\text{in}}(r) = \arccos \operatorname{cn} \left(a\sqrt{\mu_+^2 + \mu_-^2} \mathcal{R}(r) - 2K(k_\mu) F_l(r), k_\mu \right) + \pi F_l(r) \quad (64)$$

*7 言い換えると

$$y = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = F(\sin\phi, k) \quad \longleftrightarrow \quad \phi = \operatorname{am}(y, k) \quad (59)$$

ということである. これら楕円積分とその逆関数については [10] など参照.

などとすれば, 滑らかにつながる.

4.4.3 $\hat{R}(r) = 0$ が2つの異なる実数解と互いに複素共役な解をもつ場合 ($\eta \neq 0$)

ここでは一般に $\eta \neq 0$ の場合を考え, $\hat{R}(r)$ (22) が,

$$\hat{R}(r) = r^4 + (a^2 - \xi^2 - \eta)r^2 + 2M\{\eta + (\xi - a)^2\}r - a^2\eta = (r - r_1)(r - r_2)(r - r_3)(r - \bar{r}_3), \quad (65)$$

$$r_2 < r_1, \quad \text{Re } r_3 = \text{Re } \bar{r}_3, \quad \text{Im } r_3 = -\text{Im } \bar{r}_3 \neq 0 \quad (66)$$

(ここで Re, Im はそれぞれ複素数の実部, 虚部を表す.) のように, 2つの実数 (r_1, r_2) と一組の互いに複素共役な複素数 (r_3, \bar{r}_3) を用いて因数分解できる場合を考える. そして, 無限遠から $r = r_1$ まで来た後, $r = r_1$ から無限遠に去る状況を考えよう. つまり, (23) の右辺の積分範囲が $r \geq r_1$ の場合を想定する. このとき, 解と係数の関係から $r_1 + r_2 + r_3 + \bar{r}_3 = 0$, $r_1 r_2 + (r_1 + r_2)(r_3 + \bar{r}_3) + |r_3|^2 = a^2 - \xi^2 - \eta$, $r_1 r_2 (r_3 + \bar{r}_3) + (r_1 + r_2)|r_3|^2 = -2M\{\eta + (\xi - a)^2\}$, $r_1 r_2 |r_3|^2 = -a^2\eta$ が成り立つ. 少し書き換えると $r_1 + r_2 = -(r_3 + \bar{r}_3) = -2\text{Re } r_3$, $r_1 r_2 = -a^2\eta/|r_3|^2$, $|r_3|^2 - \frac{a^2\eta}{|r_3|^2} - 4(\text{Re } r_3)^2 = a^2 - \xi^2 - \eta$, $\left(|r_3|^2 + \frac{a^2\eta}{|r_3|^2}\right) \text{Re } r_3 = M\{\eta + (\xi - a)^2\} > 0$ となることに注意しておく.

さて, (23) の右辺を楕円積分の形にするために $r = g(v) = \frac{\alpha v + \beta}{v + \gamma}$, $v = g^{-1}(r) = \frac{\gamma r - \beta}{-r + \alpha}$, $r_1 = g(1)$, $r_2 = g(-1)$, ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$) となるものを考えよう. まず, 条件から $\alpha = \frac{1}{2}(r_1 - r_2)\gamma + \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, $\beta = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)\gamma + \frac{1}{2}(r_1 - r_2)$ となることがわかる. また $g(v) - g(v_i) = \frac{(\alpha\gamma - \beta)(v - v_i)}{(v + \gamma)(v_i + \gamma)}$, $dr = g'(v)dv = \frac{(\alpha\gamma - \beta)dv}{(v + \gamma)^2}$ より $\hat{R}(r) = \frac{(\alpha\gamma - \beta)^4(v^2 - 1)(v - g^{-1}(r_3))(v - g^{-1}(\bar{r}_3))}{(v + \gamma)^4(\gamma^2 - 1)|\gamma + g^{-1}(r_3)|^2}$ の分子の $(v - g^{-1}(r_3))(v - g^{-1}(\bar{r}_3)) = v^2 - (g^{-1}(r_3) + g^{-1}(\bar{r}_3))v + |g^{-1}(\bar{r}_3)|^2$ において, v の1次の項が消える条件: $g^{-1}(r_3) + g^{-1}(\bar{r}_3) = 0$ を課すと $g^{-1}(r_3) + g^{-1}(\bar{r}_3) = \frac{(r_1 - r_2)(r_3 + \bar{r}_3)}{|\alpha - r_3|^2} \left(\gamma^2 + \frac{2(|r_1 - r_3|^2 + |r_2 - r_3|^2)}{|r_1 - r_3|^2 - |r_2 - r_3|^2} \gamma + 1 \right)$ から γ に関する2次方程式が得られ, その解は $\gamma_{\pm} = -\frac{|r_1 - r_3| \pm |r_2 - r_3|}{|r_1 - r_3| \mp |r_2 - r_3|}$ となる. ここでは特に $\gamma = \gamma_-$ のほうの解に着目すると $1 - \gamma_-^2 = \frac{4|r_1 - r_3||r_2 - r_3|}{(|r_1 - r_3| + |r_2 - r_3|)^2} > 0$, $(\alpha\gamma - \beta)|_{\gamma = \gamma_-} = -\frac{2(r_1 - r_2)|r_1 - r_3||r_2 - r_3|}{(|r_1 - r_3| + |r_2 - r_3|)^2} < 0$, $(|g^{-1}(r_3)|^2)|_{\gamma = \gamma_-} = \frac{|r_1 - r_3||r_2 - r_3| - \text{Re}((r_1 - r_3)(r_2 - \bar{r}_3))}{|r_1 - r_3||r_2 - r_3| + \text{Re}((r_1 - r_3)(r_2 - \bar{r}_3))}$ となる. 以上のことから, $\gamma = \gamma_-$ とすることで

$$\frac{dr}{\sqrt{\hat{R}(r)}} = \frac{k\sqrt{(1 - \gamma^2)(\gamma^2 + |g^{-1}(r_3)|^2)}}{\beta - \alpha\gamma} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad k = \frac{1}{\sqrt{1 + |g^{-1}(r_3)|^2}}, \quad v = \cos \varphi \quad (67)$$

となる. したがって, この場合は

$$\begin{aligned} \int_r^\infty \frac{dr}{\sqrt{\hat{R}}} &= \frac{k\sqrt{(1 - \gamma^2)(\gamma^2 + |g^{-1}(r_3)|^2)}}{\beta - \alpha\gamma} \int_{\varphi(r)}^{\varphi_\infty} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \\ &= \frac{k\sqrt{(1 - \gamma^2)(\gamma^2 + |g^{-1}(r_3)|^2)}}{\beta - \alpha\gamma} (F(\sin \varphi_\infty, k) - F(\sin \varphi(r), k)), \end{aligned} \quad (68)$$

$$\varphi(r) = \arccos g^{-1}(r), \quad \varphi_\infty = \arccos(-\gamma_-) = \arccos\left(\frac{|r_1 - r_3| - |r_2 - r_3|}{|r_1 - r_3| + |r_2 - r_3|}\right). \quad (69)$$

4.5 ϕ の積分 ($\ell = 0$ の場合)

(23) により θ が r の関数として求まったとき, ϕ を r の関数として求めるためには, (20), (22) より

$$\int d\phi = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\hat{R}}} \left(\frac{a}{\Delta} (r^2 + a^2 - a\xi) - a + \frac{\xi}{\sin^2 \theta(r)} \right) \quad (70)$$

の積分を実行すればよい.

特に, パラメータが $\xi = 0$ (つまり $\ell = 0$) とすると (70) の積分が

$$\int d\phi = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\hat{R}}} \frac{2Mra}{\Delta} \quad (71)$$

のように簡単になるので, 以下では $\ell = 0$ の場合のみ調べることにする.

■ $\hat{R}(r) = 0$ が4つの異なる実数解をもつ場合 まず, $\hat{R}(r)$ について, §4.4.2 の場合を考えよう. このとき, $\theta = \pi/2$ の場合のヌル測地線の軌道 (§4.2) と同様に式変形することで, 第1種, 第3種楕円積分を用いて表せる. 無限遠から $r = r_1$ まで来る場合の $\phi = \phi_{\text{in}}(r)$ は

$$\begin{aligned} \phi_{\text{in}}(r) &= \int_r^\infty \frac{dr}{\sqrt{\hat{R}}} \frac{2Mra}{\Delta} \\ &= 2Ma \frac{\sqrt{(1-c'^2)(1-k^2c'^2)}}{a'c' + b'} \left[\frac{a'}{(r_+ - a')(r_- - a')} (F(h^{-1}(r), k) - F(c', k)) \right. \\ &\quad + \frac{a'c' + b'}{r_+ - r_-} \left\{ \frac{r_+}{(r_+ - a')^2} \left(\frac{\Pi(h^{-1}(r), -u_+^{-2}, k) - \Pi(c', -u_+^{-2}, k)}{u_+} - \frac{1}{2\sqrt{(1-u_+^2)(1-k^2u_+^2)}} \log \left| \frac{(s(r) + s_+)(s_\infty - s_+)}{(s(r) - s_+)(s_\infty + s_+)} \right| \right) \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{r_-}{(r_- - a')^2} \left(\frac{\Pi(h^{-1}(r), -u_-^{-2}, k) - \Pi(c', -u_-^{-2}, k)}{u_-} - \frac{1}{2\sqrt{(1-u_-^2)(1-k^2u_-^2)}} \log \left| \frac{(s(r) + s_-)(s_\infty - s_-)}{(s(r) - s_-)(s_\infty + s_-)} \right| \right) \right\} \right] \quad (72) \end{aligned}$$

となる. (ただし, $1 - u_\pm^2 < 0$, $1 - k^2u_\pm^2 < 0$ と仮定した.) ここで k, a', b', c' はそれぞれ (49), (50), (51), (52) で与えられるものであり,

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}, \quad u_\pm = h^{-1}(r_\pm), \quad s(r) = \sqrt{\frac{1 - k^2(h^{-1}(r))^2}{1 - (h^{-1}(r))^2}}, \quad s_\pm = s(r_\pm), \quad s_\infty = \sqrt{\frac{1 - k^2c'^2}{1 - c'^2}}. \quad (73)$$

さらに $r = r_1$ まで来て, 飛び去る軌道については

$$\begin{aligned} \phi_{\text{out}}(r) &= \Delta\phi - \phi_{\text{in}}(r), \quad (74) \\ \Delta\phi &= 2 \int_{r_1}^\infty \frac{dr}{\sqrt{\hat{R}}} \frac{2Mra}{\Delta} \\ &= 4Ma \frac{\sqrt{(1-c'^2)(1-k^2c'^2)}}{a'c' + b'} \left[\frac{a'}{(r_+ - a')(r_- - a')} (K(k) - F(c', k)) \right. \\ &\quad + \frac{a'c' + b'}{r_+ - r_-} \left\{ \frac{r_+}{(r_+ - a')^2} \left(\frac{\Pi(-u_+^{-2}, k) - \Pi(c', -u_+^{-2}, k)}{u_+} - \frac{1}{2\sqrt{(1-u_+^2)(1-k^2u_+^2)}} \log \left| \frac{s_\infty - s_+}{s_\infty + s_+} \right| \right) \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{r_-}{(r_- - a')^2} \left(\frac{\Pi(-u_-^{-2}, k) - \Pi(c', -u_-^{-2}, k)}{u_-} - \frac{1}{2\sqrt{(1-u_-^2)(1-k^2u_-^2)}} \log \left| \frac{s_\infty - s_-}{s_\infty + s_-} \right| \right) \right\} \right]. \quad (75) \end{aligned}$$

■ $\hat{R}(r) = 0$ が2つの異なる実数解と互いに複素共役な解をもつ場合 次に, $\hat{R}(r)$ について, §4.4.3 の場合を考えよう. この場合も, $\theta = \pi/2$ の場合のヌル測地線の軌道 (§4.2) と同様に式変形して, 第1種, 第3種楕円積分を用いて表せる. $\frac{2Mra}{\Delta} = \frac{2Ma}{r_+ - r_-} \left(\frac{r_+}{r_+ - a'} - \frac{r_-}{r_- - a'} \right)$, $\frac{r_\pm}{r - r_\pm} = -\frac{r_\pm}{r_\pm - \alpha} + \frac{r_\pm(\alpha\gamma - \beta)}{(r_\pm - \alpha)^2} \frac{1}{v - v_\pm}$ に注意して $\frac{dr}{\sqrt{\hat{R}}} \frac{2Mra}{\Delta} = 2Ma \frac{dr}{\sqrt{\hat{R}}} \left(\frac{\alpha}{(r_+ - \alpha)(r_- - \alpha)} + \frac{\alpha\gamma - \beta}{r_+ - r_-} \left(\frac{r_+}{(r_+ - \alpha)^2} \frac{1}{v - v_+} - \frac{r_-}{(r_- - \alpha)^2} \frac{1}{v - v_-} \right) \right)$ となり, 右辺第1項は第1種楕円積分に帰着する. さらに, $v_3 = g^{-1}(r_3)$ とおいて,

$$\frac{1}{v - v_\pm} \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(|v_3|^2 + v^2)}} = \frac{v}{v^2 - v_\pm^2} \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(|v_3|^2 + v^2)}} + \frac{v_\pm}{v^2 - v_\pm^2} \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(|v_3|^2 + v^2)}} \quad (76)$$

としたとき, 第2項について $v = \cos\varphi$ とおくと $\frac{v_\pm}{v^2 - v_\pm^2} \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(|v_3|^2 + v^2)}} = \frac{-kv_\pm}{1 - v_\pm^2} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{1}{1 - v_\pm^2} \sin^2\varphi\right) \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$ となり, 第3種楕円積分に帰着する. (ただし, 積分範囲において $-\gamma_- \geq 0$ つまり $|r_1 - r_3| \geq |r_2 - r_3|$ と仮定して $\varphi_\infty \leq \pi/2$ とした.) (76) の右辺第1項については $s = \sqrt{\frac{|v_3|^2 + v^2}{1 - v^2}}$, $v^2 = \frac{s^2 - |v_3|^2}{s^2 + 1}$, $v dv = \frac{1 + |v_3|^2}{(s^2 + 1)^2} s ds$ とおくことで $\frac{v}{v^2 - v_\pm^2} \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(|v_3|^2 + v^2)}} = \frac{1}{1 - v_\pm^2} \frac{ds}{s^2 - \frac{|v_3|^2 + v_\pm^2}{1 - v_\pm^2}}$ となる. この積分は $1 - v_\pm^2 > 0$ のときは \log で,

$1 - v_{\pm}^2 < 0$ のときは \arctan で表される. 以上を用いてまとめた結果,

$$\begin{aligned}
 \phi_{\text{in}}(r) &= \int_r^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{\tilde{R}}} \frac{2Mr\alpha}{\Delta} \\
 &= \frac{2Mak}{\beta - \alpha\gamma} \sqrt{(1 - \gamma^2)(\gamma^2 + |v_3|^2)} \left[\frac{\alpha}{(r_+ - \alpha)(r_- - \alpha)} \int_{\varphi(r)}^{\varphi_{\infty}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right. \\
 &\quad + \frac{\alpha\gamma - \beta}{r_+ - r_-} \left\{ \frac{r_+}{(r_+ - \alpha)^2} \left(\frac{-kv_+}{1 - v_+^2} \int_{\varphi(r)}^{\varphi_{\infty}} \frac{d\varphi}{(1 - \frac{1}{1-v_+^2} \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{1}{1 - v_+^2} \int_{s(r)}^{s_{\infty}} \frac{ds}{s^2 - s_+^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{r_-}{(r_- - \alpha)^2} \left(\frac{-kv_-}{1 - v_-^2} \int_{\varphi(r)}^{\varphi_{\infty}} \frac{d\varphi}{(1 - \frac{1}{1-v_-^2} \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{1}{1 - v_-^2} \int_{s(r)}^{s_{\infty}} \frac{ds}{s^2 - s_-^2} \right) \right\} \right] \quad (77)
 \end{aligned}$$

となる. ここで $\gamma = \gamma_-$ としており, $s(r) = \sqrt{\frac{|v_3|^2 + (g^{-1}(r))^2}{1 - (g^{-1}(r))^2}}$, $s_{\infty} = \sqrt{\frac{|v_3|^2 + \gamma^2}{1 - \gamma^2}}$, $s_{\pm}^2 = \frac{|v_3|^2 + v_{\pm}^2}{1 - v_{\pm}^2}$ とおいた. 各項の積分は次のように表せる:

$$\int_{\varphi(r)}^{\varphi_{\infty}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = F(\sin \varphi_{\infty}, k) - F(\sin \varphi(r), k), \quad (78)$$

$$\int_{\varphi(r)}^{\varphi_{\infty}} \frac{d\varphi}{(1 - \frac{1}{1-v_{\pm}^2} \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \Pi(\sin \varphi_{\infty}, \frac{-1}{1 - v_{\pm}^2}, k) - \Pi(\sin \varphi(r), \frac{-1}{1 - v_{\pm}^2}, k), \quad (79)$$

$$\frac{1}{1 - v_{\pm}^2} \int_{s(r)}^{s_{\infty}} \frac{ds}{s^2 - s_{\pm}^2} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{(1 - v_{\pm}^2)(|v_3|^2 + v_{\pm}^2)}} \log \left| \frac{(s(r) + |s_{\pm}|)(s_{\infty} - |s_{\pm}|)}{(s(r) - |s_{\pm}|)(s_{\infty} + |s_{\pm}|)} \right|, & (1 - v_{\pm}^2 > 0), \\ \frac{1}{\sqrt{(v_{\pm}^2 - 1)(|v_3|^2 + v_{\pm}^2)}} \left(\arctan \frac{s(r)}{|s_{\pm}|} - \arctan \frac{s_{\infty}}{|s_{\pm}|} \right), & (1 - v_{\pm}^2 < 0). \end{cases} \quad (80)$$

5 ヌル測地線の図示

ここでは, カー時空中における光の軌道 (ヌル測地線) を具体的に図示する. 前節までで主に調べてきた光の湾曲を表す軌道, つまり, 無限遠からカーブラックホールに近づいて, 再度無限遠に遠ざかる状況を調べる. 以下の具体的なプロットでは, カーブラックホールの質量 M を全て $M = 1$ としている. このとき, ホライズンが存在する条件から, ブラックホールの角運動量 a の値は $0 \leq a \leq 1$ に限られる.

5.1 赤道面内の場合

§4.2 で調べた式を用いて, ヌル測地線が赤道面 ($\theta = \pi/2$) 内にある場合のホライズンの外側での光の湾曲の様子を図示したものが図 1, 2, 3, 4, 5, 6 である. (特に図 5, 6 においては, 光の軌道がホライズン近くを周回する様子を見やすくするため, 拡大したものを図示している.) これらの図において実線は無限遠から近づいてくる光の軌道: $(x, y) = (r \cos \phi_{\text{in}}(r), r \sin \phi_{\text{in}}(r))$, 破線は無限遠へ遠ざかる光の軌道 $(x, y) = (r \cos \phi_{\text{out}}(r), r \sin \phi_{\text{out}}(r))$, 点線はホライズン: $r = r_+ \equiv M + \sqrt{M^2 - a^2}$ を表す. 角度の定義から衝突パラメータ b は無限遠から近づく際の, 遠方での x 軸からの距離に対応する. また, $\sigma = +1$ のときは順回転 (光の軌道とブラックホールの角運動量の向きが同じ), $\sigma = -1$ のときは逆回転を表している.

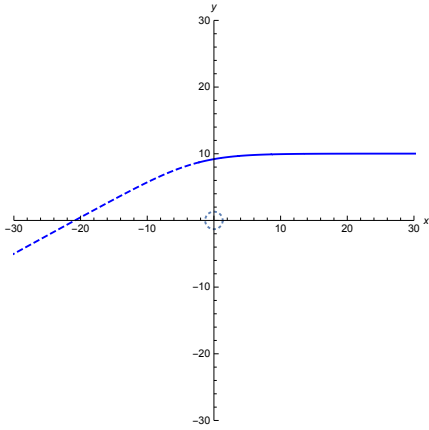


図 1 $\sigma a = 0.95, b = 10.$

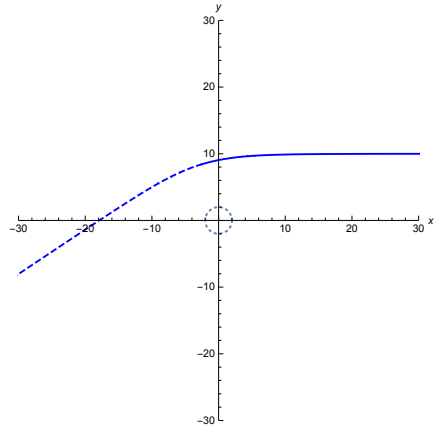


図 2 $\sigma a = 0.01, b = 10.$

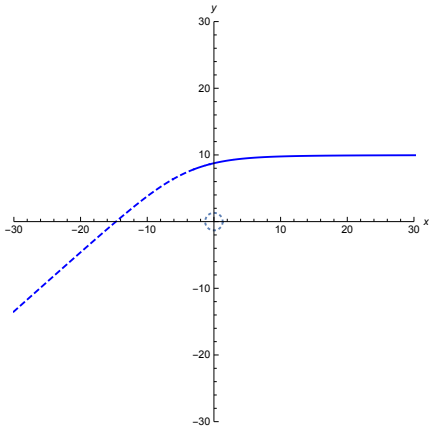


図 3 $\sigma a = -0.95, b = 10.$

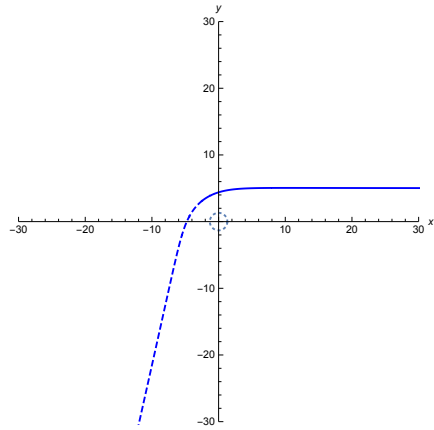


図 4 $\sigma a = 0.95, b = 5.$

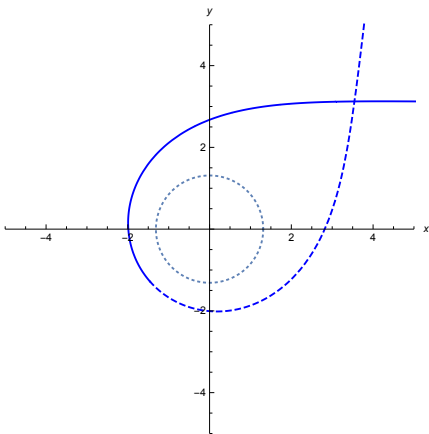


図 5 $\sigma a = 0.95, b = 3.$

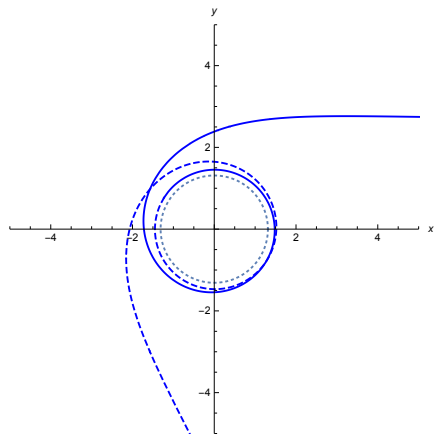


図 6 $\sigma a = 0.95, b = 2.6.$

光が無遠慮からブラックホールに近づき、再び無遠慮に去っていく際の、赤道面内の角度の変化分 $\Delta\phi$ ($\Delta\phi - \pi$ が光が湾曲する角度に相当する) は a の値を固定したときは図 7, b の値を固定したときは図 8 のようになる。

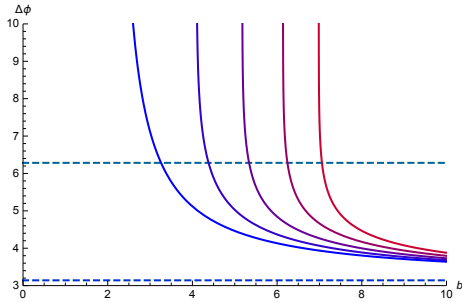


図 7 実線のグラフは、左からそれぞれ $\sigma a = 0.99, 0.5, 0.01, -0.5, -0.99$ ($\sigma a > 0$ は順回転, $\sigma a < 0$ は逆回転) の場合の、衝突パラメータ b を変化させたときの $\Delta\phi$ のプロット。破線は $\Delta\phi = \pi, 2\pi$ を表す。

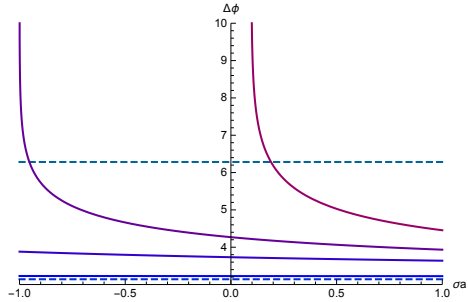


図 8 実線のグラフは、上からそれぞれ $b = 5, 7, 10, 50$ の場合の σa ($\sigma a > 0$ は順回転, $\sigma a < 0$ は逆回転) を変化させたときの $\Delta\phi$ のプロット。破線は $\Delta\phi = \pi, 2\pi$ を表す。

以上から、無遠慮からカーブラックホールに近づいてきて再び無遠慮に去っていくような、ホライズンの外側の光の軌道(ヌル測地線)について

- 順回転 ($\sigma = +1$) のとき、角運動量 a は小さいほど/衝突パラメータ b は小さいほど 湾曲大。
- 逆回転 ($\sigma = -1$) のとき、角運動量 a は大きいほど/衝突パラメータ b は小さいほど 湾曲大。

という性質が読み取れる。直観的には、 b が小さいほどブラックホールに近づくことができ、時空の曲がりの影響を受けやすく、また、順回転では、 a が大きいほど「加速」されて、あまり湾曲せず進み、逆回転では、 a が大きいほど「減速」されて、時空の回転の影響で湾曲しやすくなる、と解釈できるであろう。

5.2 平面内でない場合

ここでは、 $\theta = \pi/2$ に限らない、3次元的なヌル測地線の具体例として、§4.5 のように $l = 0$ ($\xi = 0$) の場合を調べる。特に $\hat{R}(r) = 0$ が4つの異なる実数解をもつ場合として、角運動量が $a = 0.95$ で、 $\eta = 30$ (図 9) の場合と $\eta = 23$ (図 13) の場合に、3次元デカルト座標系で $x = r \sin \theta(r) \cos \phi(r)$, $y = r \sin \theta(r) \sin \phi(r)$, $z = r \cos \theta(r)$ により光の軌道を図示する。($\theta(r)$ としては (62) を用いる。)

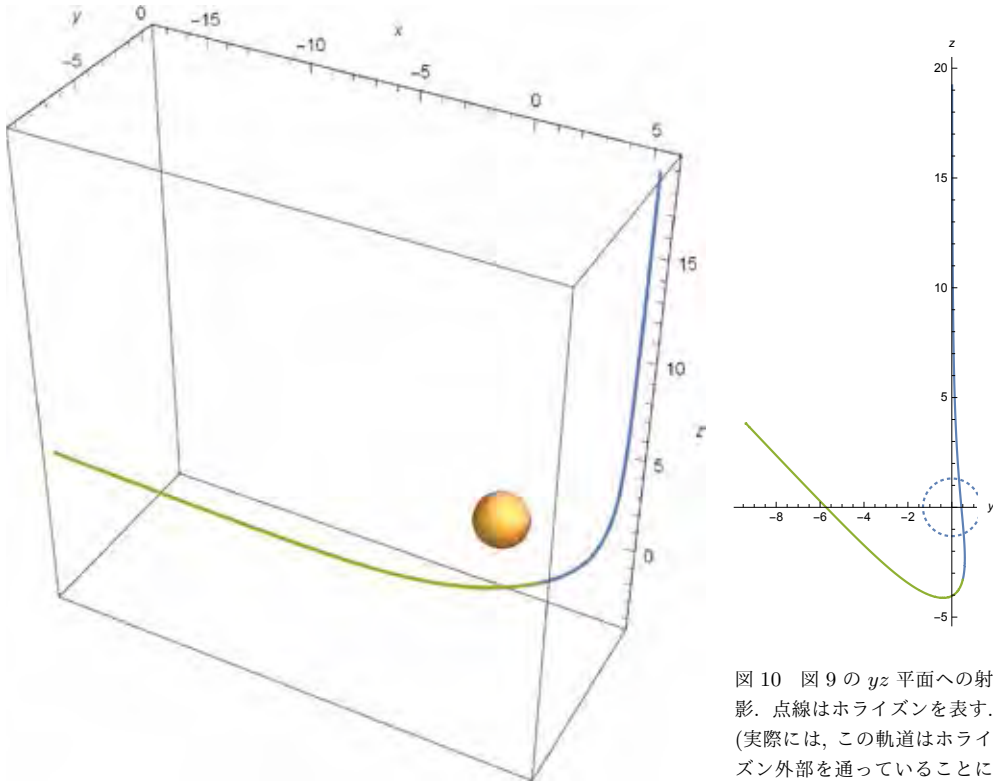


図9 $a = 0.95, \eta = 30$ の場合. 球はホライズン表す.

図10 図9の yz 平面への射影. 点線はホライズンを表す. (実際には, この軌道はホライズン外部を通過していることに注意.)

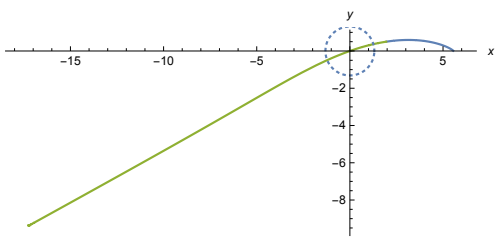


図11 図9の xy 平面への射影. 点線はホライズンを表す. (実際には, この軌道はホライズン外部を通過していることに注意.)

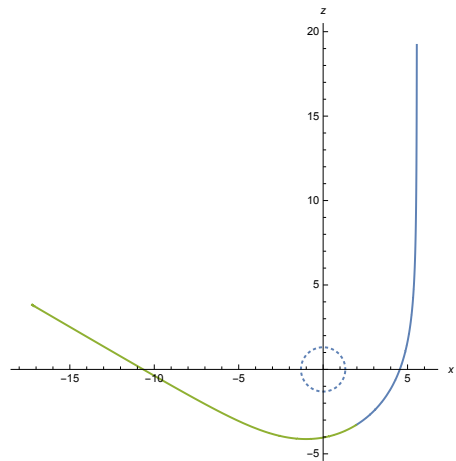


図12 図9の xz 平面への射影. 点線はホライズンを表す.

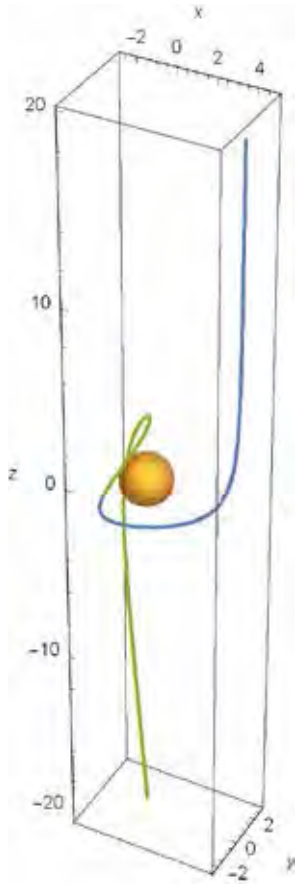


図13 $a = 0.95, \eta = 23$ の場合. 球はホライズンを表す.

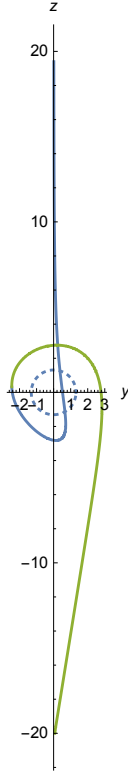


図14 図13の yz 平面への射影. 点線はホライズンを表す. (実際には, この軌道はホライズン外部を通過していることに注意.)

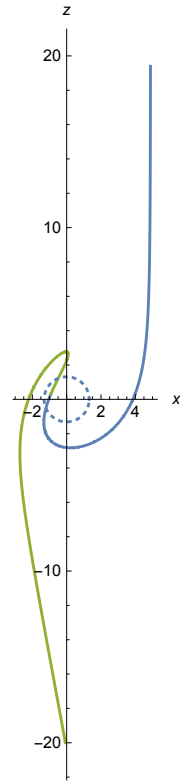


図15 図13の xz 平面への射影. 点線はホライズンを表す. (実際には, この軌道はホライズン外部を通過していることに注意.)

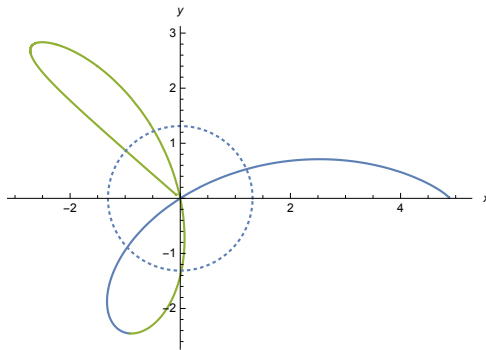


図16 図13の xy 平面への射影. 点線はホライズンを表す. (実際には, この軌道はホライズン外部を通過していることに注意.)

これらの図において, 光の軌道はともに z 軸の正の無限遠方から近づいてくるものである. 実際, $\ell = 0$ ($\xi = 0$) のとき, $r \rightarrow \infty$ において $\theta_{\text{in}}(r) \rightarrow 0, \phi_{\text{in}}(r) \rightarrow 0$ であるが⁵, マクローリン展開 $\text{am}(x, k) = x + O(x^3)$

と、積分表式から読み取れる関係 $\mathcal{R}(r) \sim \frac{1}{r}$ を用いると、今の場合 $\mu_+ = 1, \mu_- = \eta/a^2$ であることから、

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \sin \theta_{\text{in}}(r) = \sqrt{a^2 + \eta} \quad (81)$$

となる。つまり、光の軌道の z 軸の正の無限遠方において $(x, y) \rightarrow (\sqrt{a^2 + \eta}, 0)$ となり、この場合、 $\sqrt{a^2 + \eta}$ が衝突パラメータを表していることがわかる。図 9, 13 の場合では、(81) の値は、それぞれ 5.558, 4.889 となり図 12, 15 の軌道の様子と整合している。

球対称なシュワルツシルドブラックホールの場合には、赤道面内 ($\theta = \pi/2$) の軌道と $\theta = 0$ の無限遠方からくる軌道は (互いに回転の違いだけなので) 同等になるが、回転するカーブラックホールの場合には異なるものであり、 $\ell = 0$ の場合でも、カーター定数 $Q \neq 0$ の $\eta = 30$ (図 9), $\eta = 23$ (図 13) の場合には、時空自体の回転に光の軌道が引きずられる様子が、具体的なプロットから読み取れる。特に、図 13, 14, 15, 16 をみると、光の軌道が、3 次元 xyz 空間内のある平面内におさまらないことは明白である。また、軌道があたかもホライズンに巻きつくように、カーブラックホールの回転の影響を受けている様子がわかる。

6 まとめと展望

本稿では、カーブラックホール時空における、光の軌道 (ヌル測地線) を赤道面内のものだけでなく、本質的に平面内におさまらない軌道についても調べた。特に測地線方程式の解を積分表式のままでもとめず、楕円積分等を用いて書き直すことで、数式処理ソフト (*Mathematica*, *Maxima* 等) による具体的なプロットを円滑に行えるようにし、実際に典型的ないくつかの例を図示した。これにより、光の軌道の湾曲の様子を直観的に理解できるようになった。ただし、赤道面内に限らない 3 次元軌道については、簡単のため $\ell = 0$ の場合のみ具体的に調べた。

本稿の元となっている卒業研究ゼミでやり残したこととしては、 $\ell \neq 0$ の場合の積分表式、質量のある粒子の軌道 (つまり時間的測地線)、ホライズンを横切るヌル測地線および時間的測地線、について、それぞれ具体的に調べ図示することなどがある。文献 [5], [7] などでは、数学的な性質等について記述されているが、より具体的な軌道の表式とその図があるほうが、直観的な理解が得られやすい。また赤道面内に限る場合はシュワルツシルドブラックホールの場合と同様にカーブラックホールの場合も有効ポテンシャル W_{eff} を用いた記述が測地線の定性的理解に便利であるが、カーター定数 Q がゼロでない一般的な場合にも、定性的に分類しやすい記述が理解できるとよい。

References

- [1] 小畑仁, 近藤悠太, “カーブラックホール周りでのヌル測地線,” 新潟大学教育学部理科専修卒業論文 (2016).
- [2] 神保芳章, 藤田哲玄, “シュワルツシルト幾何学でのヌル測地線,” 新潟大学教育学部理科専修卒業論文 (2013).
- [3] 峯岸良光, 小菅悠生, 岸本翔太, 廣川卓也, “一般相対論と輪るブラックホール,” 新潟大学教育学部理科専修卒業論文 (2012).
- [4] ジェームズ・B・ハートル (著), 牧野伸義 (訳) “重力,” ピアソン・エデュケーション (2008).
- [5] パレット オニール (著), 井川俊彦 (訳), “カー・ブラックホールの幾何学,” 共立出版 (2002).
- [6] 須藤 靖, “一般相対論入門,” 日本評論社 (2005).
- [7] S. Chandrasekhar, “The mathematical theory of black holes,” OXFORD, UK: CLARENDON (1985) 646P.
- [8] 永田雅宜 (代表著者), “理系のための線型代数の基礎,” 紀伊國屋書店 (1987)
- [9] 森口, 宇田川, 一松, “岩波 数学公式 I,” 岩波書店 (1956).
- [10] 四ツ谷晶二, 村井実, “楕円関数と仲良くなるう,” 日本評論社 (2013).